مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۳، صفحه ۶۷-۵۹

طراحی سیستم هدایت مقاوم با استفاده از الگوریتم مد لغزشی مرتبه بالا برای تولید دستور شتاب هموار و مقابله با اهداف مانوردار

وحید بهنام‌گل[۱]، احمدرضا ولی[۲]، علی محمدی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، vahidbehnamgol@mut.ac.ir

[۲] دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ar.vali@aut.ac.ir

[۲] استادیار، مجتمع دانشگاهی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ali_mohammadi@yahoo.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۳/۲/۲۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۳/۶/۲۸)

چکیده: در این مقاله یک سیستم هدایت غیرخطی و مقاوم در مقابل مانورهای هدف طراحی شده است. برای این منظور ابتدا یک الگوریتم نوین مد لغزشی مرتبه بالا ارائه گردیده است. قانون هدایت طراحی شده توسط این الگوریتم دستور شتاب جانبی همواری را صادر کرده که برخورد با اهداف مانوردار را تضمین می‌کند. در این الگوریتم بر خلاف تئوری‌های مد لغزشی مرتبه بالای ارائه شده در مراجع برای طراحی قانون هدایت، پایداری سیستم حلقه بسته در حضور نامعینی تضمین می‌گردد و بنابراین نیازی به رویتگر برای تخمین مانورهای هدف نخواهد بود. برای طراحی قانون هدایت دو بعدی با استفاده از این الگوریتم، متغیر لغزشی بر اساس سرعت نسبی جانبی بین رهگیر و هدف تعریف شده است. قانون هدایت طراحی شده دستور شتابی را صادر می‌کند که تضمین کننده‌ی همگرایی این متغیر لغزش و برخورد با هدف می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی برتری قانون هدایت پیشنهادی را در مقایسه با قوانین هدایت دیگر نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: سیستم هدایت، اهداف مانوردار، مد لغزشی مرتبه بالا، نامعینی، وزوز.

Design of Robust Guidance System Using High Order Sliding Mode Algorithm for Producing Smooth Acceleration Command and Intercepting Maneuvering Targets

Vahid Behnamgol, Ahmad Reza Vali, Ali Mohammadi

Abstract: In this paper, a nonlinear and robust guidance system against target maneuvers has been designed. For this purpose, first a new high order sliding mode algorithm is proposed. The designed guidance law with this algorithm generates a smooth acceleration command that guarantees collision with target. In this algorithm, unlike previous high order sliding mode theories, the stability of close loop system in the presence of uncertainty is guaranteed, therefore the observer is not required for estimation of target maneuvers in the proposed guidance law. For designing two point guidance law using this algorithm, a sliding variable has been introduced using relative lateral velocity. Designed guidance law generates acceleration commands that guarantee convergence of sliding variable. Simulation results show the better performance of proposed guidance law in comparison with other guidance laws.

Keywords: guidance system, maneuvering targets, high order sliding mode, uncertainty, chattering.

۱- مقدمه

وظیفه‌ی قانون هدایت در رهگیرهای آشیانه‌یاب، تعیین دستور شتاب جانبی مناسب برای برخورد با هدف متحرک است. این دستور شتاب جانبی را می‌توان با ابزارهای مختلفی از جمله با تغییر در زاویه بالک‌های رهگیر اعمال نمود. یکی از اصول مورد استفاده برای طراحی قانون هدایت، ایده‌ی ناوبری موازی می‌باشد. طبق این ایده اگر خط دید بین رهگیر و هدف در فضا نچرخد و فاصله بین رهگیر و هدف در حال کم شدن باشد، برخورد با هدف تضمین می‌گردد. قوانین هدایتی که بر اساس این اصل طراحی می‌شوند دستور شتابی صادر می‌کنند که اعمال آن مانع از چرخیدن خط دید بین رهگیر و هدف در فضا می‌شود. به این دسته از قوانین، قوانین هدایت تناسبی گفته می‌شود. برای این منظور قوانین هدایت تناسبی حقیقی و محض بر پایه اصول ریاضی طراحی گردیده‌اند که برای برخورد با اهداف بدون مانور مناسب می‌باشند. برای رهگیری اهداف دارای مانور، ناوبری تناسبی افزوده پیشنهاد شده است که برای تعیین دستور شتاب جانبی رهگیر، نیازمند اندازه شتاب جانبی هدف می‌باشد [۱]، [۲].

اندازه‌گیری و یا تخمین شتاب جانبی هدف منجر به افزایش پیچیدگی و هزینه در سیستم هدایت می‌شود. از این رو قوانین هدایت مقاوم در مقابل مانورهای هدف طراحی گردیده‌اند. یکی از روش‌های مورد استفاده برای طراحی قانون هدایت تناسبی مقاوم در سال‌های اخیر، تئوری کنترل مد لغزشی می‌باشد. با استفاده از این تئوری می‌توان قانون هدایت غیرخطی و مقاومی را برای برخورد با اهداف مانوردار طراحی نمود. در صورت استفاده از این روش کنترلی می‌توان مانورهای هدف را به عنوان نامعینی در نظر گرفت و قانون هدایت را طراحی نمود که در این‌صورت نیازی به اندازه‌گیری و یا تخمین دقیق مانورهای هدف نمی‌باشد [۳]. بزرگترین نقص کاربردی این روش کنترلی، پدیده‌ی چترینگ (لرزش یا نوسانات ناخواسته) می‌باشد که به دلیل وجود تابع علامت در کنترل‌کننده رخ می‌دهد. اثرات این پدیده بسیار نامطلوب بوده، چون باعث فعالیت نوسانی شدید در سیگنال کنترل شده و از آنجا که دارای یک رفتار فرکانس بالا می‌باشد، ممکن است دینامیک‌های مدل نشده‌ی فرکانس بالا را نیز تحریک کند. این معایب کارایی سیستم را کاهش داده و ممکن است به ناپایداری منجر شود. پس لازم است وزوز هموار و یا حذف گردد [۴]، [۵].

یکی از روش‌های پرکاربرد برای کاهش نوسانات ناخواسته، هموار کردن ناپیوستگی کنترل در یک لایه‌ی مرزی باریک در همسایگی سطح لغزش، بوسیله‌ی تقریب پیوسته از کنترل مد لغزشی ناپیوسته می‌باشد [۴]. استفاده از روش تقریب پیوسته اگرچه باعث تولید سیگنال کنترلی همواری شده اما منجر به کاهش دقت کنترلی می‌شود. در مراجع [۳]، [۶]- [۹] از کنترل مد لغزشی مرتبه اول و البته تقریب پیوسته این روش برای طراحی قانون هدایت استفاده شده است. در مرجع [۳] دستور شتاب در راستای عمود بر بردار سرعت رهگیر با استفاده از تئوری مد لغزشی مرتبه اول تقریب زده شده طراحی شده است. در [۶] به روشی مشابه، دستور شتاب در راستای عمود بر خط دید طراحی شده است. اعمال دستور شتاب در این راستا در عمل بسیار مشکل است. در این مرجع همچنین دینامیک مرتبه اول حلقه کنترل در حین طراحی قانون هدایت در نظر گرفته شده است. در مرجع [۷] از مد لغزشی تطبیقی برای طراحی قانون هدایت استفاده نموده و در مراجع [۸] و [۹] قانون هدایت برای برخورد با زاویه معین طراحی شده است.

در مراجع فوق به دلیل تقریب صورت گرفته در قوانین هدایت، دقت کاهش می‌یابد. از دیگر روش‌های پرکاربرد برای حذف نوسانات ناخواسته بدون کاهش دقت، استفاده از تئوری مد لغزشی مرتبه بالا می‌باشد. با استفاده از این روش، بدون کاهش دقت از رخ دادن نوسان در ورودی کنترل جلوگیری می‌شود. در کل برای طراحی مد لغزشی مرتبه r به r-1 امین مشتق متغیر لغزش نیاز است [۱۰]، [۱۱]. بنابراین برای پیاده‌سازی مد لغزشی مرتبه دوم مشتق اول متغیر لغزش نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. اصول طراحی مد لغزشی مرتبه دوم در مراجع [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] ارائه شده است.

برای طراحی و پیاده‌سازی مد لغزشی مرتبه بالا نیاز به مشتقات متغیر لغزش بوده که افزایش تقاضای اطلاعات را به همراه خواهد داشت. تنها استثنای موجود الگوریتم فراپیچش است که از تئوری‌های مهم و کاربردی مد لغزشی مرتبه دوم می‌باشد. این الگوریتم تنها به خود متغیر لغزش برای تولید سیگنال کنترل نیاز دارد. اصول طراحی این روش کنترلی و انواع اصلاح شده‌ی آن در مراجع [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] ارائه شده است. در مراجع [۱۸] و [۱۹] نیز از انواع اصلاح شده‌ی این الگوریتم برای طراحی قانون هدایت استفاده گردیده است. یکی از معایب این تئوری و اکثر الگوریتم‌های مد لغزشی مرتبه بالا اثبات پایداری بدون در نظر گرفتن نامعینی می‌باشد. در مرجع [۱۸] برای در نظر گرفتن نامعینی از رویتگر استفاده نموده و پایداری الگوریتم ارائه شده در آن با استفاده از تئوری سیستم‌های همگن به اثبات رسیده است. در مرجع [۱۹] الگوریتم ارائه شده در مقابل نامعینی‌های کوچک پایداری را تضمین می‌کند. پایداری این الگوریتم نیز با استفاده از روش لیاپانوف اثبات شده است. در قوانین هدایت طراحی شده در این مراجع رابطه‌ای بین کران بالای نامعینی و بهره‌های کنترلی وجود نداشته و برای هر نوع مانور هدف باید بهره‌های کنترلی تنظیم گردند.

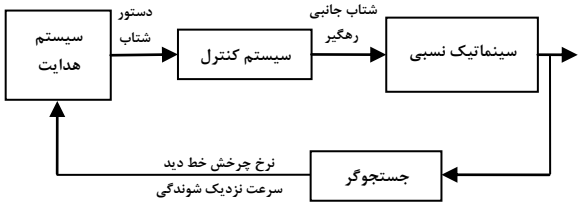
در این مقاله ابتدا الگوریتم نوینی از مد لغزشی مرتبه بالا برای کنترل سیستم‌های غیرخطی نامعین ارائه می‌گردد. این الگوریتم تنها به متغیر لغزش نیاز داشته و به مشتقات بالاتر آن وابسته نیست. پایداری روش پیشنهادی در حضور نامعینی با استفاده از تئوری لیاپانوف اثبات گردیده و سپس از این الگوریتم برای طراحی قانون هدایت دو بعدی استفاده می‌شود. در نهایت کارایی قانون هدایت طراحی شده در شبیه‌سازی غیرخطی حلقه هدایت مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در قانون هدایت طراحی شده در این مقاله پدیده وزوز رخ نداده و بنابراین بر خلاف قانون

هدایت طراحی شده در مرجع [۳] از تقریب پیوسته استفاده نشده و دقت کاهش نخواهد یافت. همچنین روش پیشنهادی در مقابل انواع مانورهای هدف مقاوم بوده و در آن بر خلاف روش پیشنهاد شده در مرجع [۱۹] نیازی به تنظیم مجدد بهره‌های کنترلی با تغییر مانور هدف نیست.

۲- فرمول‌بندی مسئله

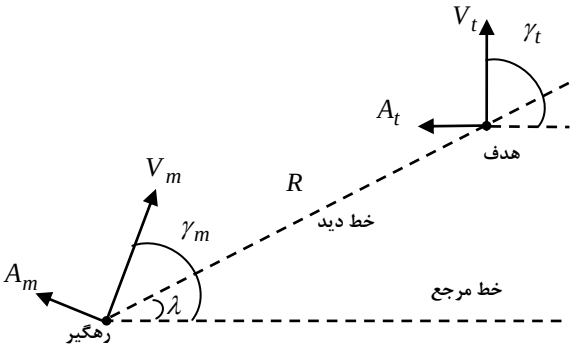
۲-۱ سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف

در این مقاله حلقه هدایت آشیانه‌یاب در فاز نهایی به صورت شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. با توجه در این دیاگرام بلوکی، جستجوگری راداری اطلاعات نسبی سینماتیک درگیری از قبیل نرخ چرخش خط دید و سرعت نزدیک شوندگی رهگیر به هدف را اندازه‌گیری کرده و در اختیار سیستم هدایت قرار می‌دهد. سیستم هدایت نیز که بر اساس اصل ناوبری موازی عمل می‌کند، با استفاده از نرخ چرخش خط دید و سرعت نزدیک شوندگی، دستور شتاب جانبی مناسب برای برخورد با هدف را صادر می‌کند. اگر این دستور شتاب توسط سیستم کنترل به رهگیر اعمال شود، خط دید نچرخیده و برخورد حتمی خواهد بود.



شکل ۱: دیاگرام بلوکی حلقه هدایت در فاز نهایی

هندسه‌ی درگیری دو بعدی را می‌توان همانند شکل ۲ در نظر گرفت. در این شکل، R برد نسبی بین رهگیر و هدف و λ زاویه‌ی بین خط دید و خط مرجع بوده که بیانگر مختصات نسبی رهگیر و هدف در دستگاه قطبی می‌باشند. همچنین γ_m زاویه‌ی بردار سرعت رهگیر با خط مرجع، γ_t زاویه‌ی بردار سرعت هدف با خط مرجع، A_m بردار شتاب جانبی رهگیر و A_t بردار شتاب جانبی هدف می‌باشد.



شکل ۲: سینماتیک نسبی رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی

$\dot{R}$ بیانگر اختلاف سرعت‌های رهگیر و هدف در راستای خط دید می‌باشد که از تفریق مولفه‌های بردار سرعت آنها در راستای خط دید بصورت رابطه (۱) بدست می‌آید:

$$\dot{R} = V_t \cos(\gamma_t - \lambda) - V_m \cos(\gamma_m - \lambda) \qquad (۱)$$

همچنین سرعت نسبی جانبی بین رهگیر و هدف ($R\dot{\lambda}$) که بیانگر اختلاف سرعت رهگیر و هدف در راستای عمود بر خط دید می‌باشد، از تفریق مولفه‌های سرعت آنها در راستای عمود بر خط دید بصورت رابطه (۲) بدست می‌آید.

$$R\dot{\lambda} = V_t \sin(\gamma_t - \lambda) - V_m \sin(\gamma_m - \lambda) \qquad (۲)$$

که در آن، $\dot{\lambda}$ نرخ چرخش خط دید می‌باشد.

روابط بین بردار سرعت، سرعت زاویه‌ای بردار سرعت و شتاب جانبی رهگیر و هدف بصورت روابط (۳) و (۴) می‌باشد:

$$A_m = V_m \dot{\gamma}_m \qquad (۳)$$

$$A_t = V_t \dot{\gamma}_t \qquad (۴)$$

در این روابط $\dot{\gamma}_m$ و $\dot{\gamma}_t$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای بردار سرعت رهگیر و هدف و A_m و A_t شتاب‌های جانبی رهگیر و هدف می‌باشند [۱-۳]. معادلات (۱) تا (۴) بیانگر سینماتیک نسبی دوبعدی بوده که ارتباط بین زاویه خط دید و برد نسبی را با شتاب‌های جانبی رهگیر و هدف نشان می‌دهد. با توجه به رابطه (۳) تغییر در شتاب جانبی رهگیر منجر به تغییر در سرعت زاویه‌ای بردار سرعت شده که این متغیر در تغییرات برد نسبی و زاویه خط دید موثر است. به همین ترتیب شتاب جانبی هدف بر متغیرهای سینماتیک نسبی تاثیر می‌گذارد.

شتاب جانبی رهگیر به عنوان ورودی کنترل فرض شده و سیستم کنترل نیز به عنوان یک محرک برای اعمال این ورودی می‌باشد. سیستم کنترل خود دارای اجزای مختلف و پیچیده‌ای بوده و در این مقاله تنها دینامیک تقریبی مرتبه اول و پایدار شده آن در نظر گرفته می‌شود. بنابراین فرض می‌شود دستورات سیستم هدایت با یک ثابت زمانی مشخص اعمال شود.

در صورتی که در بخش سیستم هدایت در شکل ۱ از قانون هدایت ناوبری تناسبی حقیقی استفاده گردد، دستور شتاب جانبی رهگیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A_c = \frac{1}{\cos(\gamma_m - \lambda)}\left(NV_c\dot{\lambda}\right), \quad V_c = -\dot{R} \qquad (۵)$$

اگر سیستم کنترل قادر به اعمال این دستور شتاب باشد، نرخ چرخش خط دید صفر شده و برخورد با اهداف بدون مانور تضمین می‌گردد. برای رهگیری اهداف مانوردار، از ناوبری تناسبی افزوده استفاده می‌شود که دستور شتاب جانبی آن به صورت زیر است.

$$A_c = \frac{1}{\cos(\gamma_m - \lambda)}\left(NV_c\dot{\sigma} + \hat{A}_{t,\lambda}\right) \qquad (۶)$$

که در آن $\hat{A}_{t,\lambda}$ شتاب جانبی هدف در راستای عمود بر خط دید است. همانطور که در رابطه (۶) مشاهده می‌گردد برای پیاده‌سازی این قانون هدایت نیاز به تخمین شتاب جانبی هدف می‌باشد. در این مقاله دستور شتاب به عنوان ورودی کنترل فرض شده و با استفاده از تئوری مد لغزشی طوری تعیین می‌شود که سرعت نسبی جانبی و نرخ چرخش خط دید در حضور مانورهای هدف صفر شود. در این روند مانور هدف به صورت نامعینی فرض می‌شود و نیازی به تخمین و یا اندازه‌گیری آن نمی‌باشد.

۲-۲ تئوری کنترل مد لغزشی

سیستم دینامیکی تک ورودی - تک خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$x^{(n)} = f(x) + u \qquad (۷)$$

x خروجی مورد نظر و u ورودی کنترل می‌باشند. همچنین $f(x) = f_{un} + f_{nom}$ تابع غیرخطی بوده که در آن f_{nom} بخش معین و f_{un} بخش نامعین تابع است. هدف کنترلی رساندن x به مقدار مطلوب بوده و برای این منظور طبق تئوری کنترل مد لغزشی، متغیر لغزش S بر اساس خطای ردیابی سیستم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \left(\frac{d}{dt} + c\right)\tilde{x}^{(n-1)} = \tilde{x}^{(n-1)} + \ldots + c^{n-1}\tilde{x} \qquad (۸)$$

c ضریب وزن‌دهی خطای متغیرهای حالت و $\tilde{x}$ اختلاف متغیر حالت x از مقدار مطلوب به‌صورت $\tilde{x} = x - x_d$ تعریف می‌شود. بنابراین مسئله‌ی ردیابی معادل $S = 0$ می‌باشد. با مشتق‌گیری از متغیر لغزش داریم:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \tilde{x}^{(n)} + \ldots + c^n\tilde{x} = \\ & x^{(n)} - x_d{}^{(n)} + \ldots + c^n(x - x_d) = \\ & f(x) + u - x_d{}^{(n)} + \ldots + c^n(x - x_d) = \\ & f_{un} + f_{nom} + u + f_1(x) \end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن $f_1(x) = -x_d{}^{(n)} + \ldots + c^n(x - x_d)$ می‌باشد. برای تضمین پایداری متغیر لغزش با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، ابتدا تابع کاندید لیاپانوف به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V = \frac{1}{2}S^2 \qquad (۱۰)$$

که یک تابع مثبت معین است. طبق تئوری پایداری لیاپانوف اگر مشتق این تابع منفی معین باشد، $S = 0$ پایدار مجانبی خواهد بود. اما در تئوری کنترل مد لغزشی برای تضمین همگرایی زمان محدود متغیر لغزش، شرط لغزش زیر باید برقرار شود:

$$\dot{V} = S\dot{S} \le -\eta|S| \qquad (۱۱)$$

η یک ثابت مثبت می‌باشد. با انتگرال‌گیری از طرفین شرط لغزش داریم:

$$t_r \le \frac{|S(0)|}{\eta} \qquad (۱۲)$$

t_r مدت زمان همگرایی متغیر لغزش است. همانطور که در این رابطه مشاهده می‌شود، مدت زمان صفر شدن متغیر لغزش با تغییر مقدار پارامتر η قابل تنظیم است. حال برای برقراری شرط (۱۱) داریم:

$$\dot{V} = S\left[f_{un} + f_{nom} + u + f_1(x)\right] \le -\eta|S| \qquad (۱۳)$$

برای برقراری (۱۳)، کنترل‌کننده مد لغزشی به‌صورت:

$$u = u_{eq} + u_r \qquad (۱۴)$$

تعریف می‌گردد که در آن u_{eq} کنترل معادل بوده برای حذف جملات معین در رابطه (۱۳) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$u_{eq} = -f_{nom} - f_1(x) \qquad (۱۵)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در (۱۳) داریم:

$$f_{un}\frac{S(t)}{|S(t)|} + u_r\frac{S(t)}{|S(t)|} + \eta \le 0 \qquad (۱۶)$$

برای برقراری (۱۶)، بخش رساننده‌ی کنترل مد لغزشی به صورت:

$$u_r = -(\eta + \alpha)Sgn(S) \qquad (۱۷)$$

تعریف می‌شود که در آن α بیشینه اندازه بخش نامعین $f(x)$ می‌باشد.

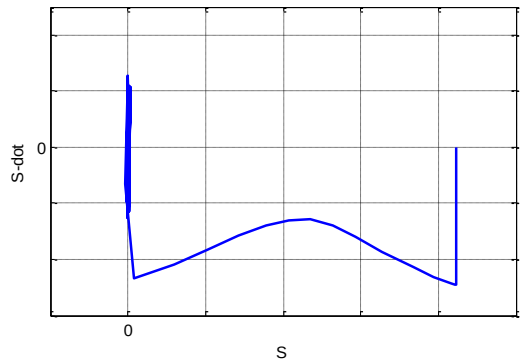
با اعمال کنترل‌کننده رابطه (۱۷) به سیستم (۷) تضمین می‌شود که متغیر لغزش در مدت زمان محدودی که از رابطه (۱۲) تعیین می‌شود، به صفر رسیده و بعد از آن متغیرهای حالت به صورت نمایی همگرا شوند. ورودی کنترل طراحی شده در رابطه (۱۷) شامل تابع علامت بوده و وجود این تابع منجر به نوسان در ورودی کنترل می‌شود.

یکی از روش‌های هموار کردن چترینگ، روش تقریب پیوسته می‌باشد که کاربرد بیشتری نسبت به روش‌های دیگر دارد. در این روش تابع ناپیوسته‌ی علامت با تابع اشباع جایگزین می‌شود. بنابراین بخش رساننده ورودی کنترل در عمل به صورت رابطه زیر به کار برده می‌شود:

$$u_r = -(\eta + \alpha)Sat\left(\frac{S}{\phi}\right) \qquad (۱۸)$$

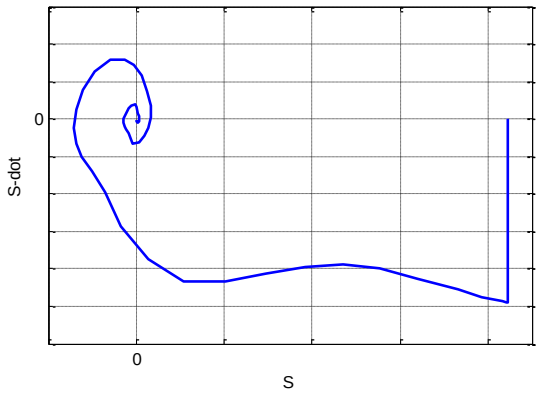
که در آن ϕ تعیین کننده‌ی پهنای لایه‌ی مرزی است. روش تقریب پیوسته اگرچه باعث هموار شدن سیگنال کنترلی می‌شود اما منجر به کاهش دقت در رساندن متغیر لغزش به صفر خواهد شد [۴]، [۵].

استفاده از مد لغزشی مرتبه بالا یکی دیگر از روش‌های حذف وزوز در کنترل مد لغزشی می‌باشد. این روش با حفظ مزیت اصلی روش استاندارد (مقاوم بودن)، اثر وزوز را نیز حذف می‌کند. ایده‌ی اصلی در کنترل مد لغزشی مرتبه دوم رساندن S و $\dot{S}$ به صفر می‌باشد. مسیرهای سیستم در صفحه‌ی $S - \dot{S}$ در کنترل مد لغزشی مرتبه اول در شکل (۳) رسم گردیده است.



شکل ۳: مسیر سیستم در صفحه‌ی $S-\dot{S}$ در کنترل مد لغزشی مرتبه اول

در مد لغزشی مرتبه دوم باید علاوه بر صفر شدن متغیر لغزش، مشتق متغیر لغزش نیز صفر شود. به عبارت دیگر مسیرهای سیستم در صفحه‌ی $S-\dot{S}$ به نقطه‌ی تعادل $S=\dot{S}=0$ همگرا شوند(شکل ۴).



شکل ۴: مسیر سیستم در صفحه‌ی $S-\dot{S}$ در کنترل مد لغزشی مرتبه دوم

بخش رساننده در الگوریتم فراپیچش که برای کنترل سیستم‌هایی با درجه‌ی نسبی یک و به‌منظور جلوگیری از رخ دادن وزوز در ورودی کنترل توسعه داده شده است، به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u_r &= -k_1|S|^{\rho}\,Sgn(S)+u_1 \quad ,0<\rho<1 \\ \dot{u}_1 &= -k_2\,\mathrm{Sgn}(S) \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۱۹) و (۱۴) در (۹) داریم:

$$\dot{S} = f_{un} - k_1|S|^{\rho}\,Sgn(S) - k_2\int Sgn(S)d\tau \tag{۲۰}$$

بدون در نظر گرفتن نامعینی، رابطه (۲۰) را می‌توان به فرم فضای حالت مرتبه دوم زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -k_1|S|^{\rho}\,Sgn(S)+\xi \\ \dot{\xi} &= -k_2 Sgn(S) \end{aligned} \tag{۲۱}$$

برای بررسی پایداری سیستم (۲۱) تابع کاندیدای لیاپانوف به صورت رابطه (۲۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = k_2\int_0^S Sgn(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\xi^2 \tag{۲۲}$$

مشتق این تابع لیاپانوف به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_2 Sgn(S)\dot{S} + \xi\dot{\xi} = \\ &-k_1k_2|S|^{\rho} + k_2 Sgn(S)\xi - k_2 Sgn(S)\xi = \\ &-k_1k_2|S|^{\rho} \end{aligned} \tag{۲۳}$$

بنابراین مشتق این تابع لیاپانوف به ازای $k_1k_2>0$ نیمه منفی معین بوده و سیستم (۲۱) پایدار است و البته پایداری مجانبی این سیستم نیز با استفاده از قضیه لاسال به سادگی اثبات می‌گردد. بنابراین همگرایی S و $\xi=-k_2\int Sgn(S)dt$ تضمین خواهد شد [۱۰]، [۱۸].

ورودی کنترل طراحی شده توسط الگوریتم فراپیچش کاملا هموار نمی‌باشد. نوع اصلاح شده‌ی این الگوریتم برای تولید سیگنال کنترلی هموارتر به صورت زیر است [۱۸]، [۱۹]:

$$\begin{aligned} u_r &= -k_1|S|^{\rho_1}\,Sgn(S)+u_1 \\ \dot{u}_1 &= -k_2|S|^{\rho_2}\,Sgn(S) \end{aligned} \quad ,0<\rho_1,\rho_2<1 \tag{۲۴}$$

در مراجع [۱۸]، [۱۹] پایداری این روش بدون در نظر گرفتن نامعینی با استفاده از تئوری‌های سیستم‌های همگن و لیاپانوف اثبات شده است.

۳- الگوریتم نوین مد لغزشی مرتبه بالا

در این بخش نوع جدیدی از الگوریتم مد لغزشی مرتبه بالا برای تضمین پایداری سیستم غیرخطی در حضور نامعینی ارائه می‌گردد. این الگوریتم به صورت قضیه زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱- پایداری سیستم غیرخطی و نامعین (۶) با استفاده از ورودی کنترل (۲۵) تضمین خواهد شد که در آن k_1,k_2,k_3 ثابت‌هایی مثبت بوده و α کران بالای نامعینی می‌باشد.

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} - k_1|S|^{\rho_1}\,Sgn(S) - k_2\xi_1 - k_3\xi_2 \\ \dot{\xi}_1 &= |S|^{\rho_2}\,Sgn(S) \\ \dot{\xi}_2 &= |\xi_2||S|^{\rho_2}\,Sgn(S) - \alpha Sgn(\xi_2)|S|^{\rho_2}\,k_3^{-1} \end{aligned} \tag{۲۵}$$

اثبات- با قرار دادن رابطه‌ی (۲۵) در (۹) داریم:

$$\dot{S} = -k_1|S|^{\rho_1}\,Sgn(S) - k_2\xi_1 - k_2\xi_2 + f_{un} \tag{۲۶}$$

روابط (۲۶) و (۲۵) را می‌توان به فرم فضای حالت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -k_1|S|^{\rho_1}\,Sgn(S) - k_2\xi_1 - k_2\xi_2 + f_{un} \\ \dot{\xi}_1 &= |S|^{\rho_2}\,Sgn(S) \\ \dot{\xi}_2 &= |\xi_2||S|^{\rho_2}\,Sgn(S) - \alpha Sgn(\xi_2)|S|^{\rho_2}\,k_3^{-1} \end{aligned} \tag{۲۷}$$

برای بررسی پایداری رابطه (۲۷) تابع کاندیدای لیاپانوف به صورت رابطه (۲۸) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \int_0^S |\tau_1|^{\rho_2}\,Sgn(\tau_1)d\tau_1 + \frac{k_2}{2}\xi_1^2 + k_3\int_0^{\xi_2} Sgn(\tau_2)d\tau_2 \tag{۲۸}$$

این تابع لیاپانوف به ازای $k_2, k_3 > 0$ مثبت معین می‌باشد. مشتق این تابع لیاپانوف به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = |S|^{\rho_2} Sgn(S)\dot{S} + k_2\xi_1\dot{\xi}_1 + k_3 Sgn(\xi_2)\dot{\xi}_2 = \\
&|S|^{\rho_2} Sgn(S)\left(-k_1|S|^{\rho_1} Sgn(S) - k_2\xi_1 - k_2\xi_2 + f_{un}\right) + \\
&k_2\xi_1\left(|S|^{\rho_2} Sgn(S)\right) + \\
&k_3 Sgn(\xi_2)\left(|\xi_2||S|^{\rho_2} Sgn(S) - \alpha Sgn(\xi_2)|S|^{\rho_2} k_3^{-1}\right) = \\
&-k_1|S|^{\rho_1+\rho_2} + f_{un}|S|^{\rho_2} Sgn(S) - \alpha|S|^{\rho_2} \le \\
&-k_1|S|^{\rho_1+\rho_2} - \alpha|S|^{\rho_2} - \alpha|S|^{\rho_2} = -k_1|S|^{\rho_1+\rho_2}
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

مشتق این تابع لیاپانوف به ازای $k_1 > 0$ نیمه منفی معین بوده و (۲۷) پایدار است. پایداری مجانبی این سیستم را نیز می‌توان با استفاده از قضیه لاسال اثبات نمود. بنابراین (S, ξ_1, ξ_2) به صفر همگرا خواهند شد.

۴- طراحی قانون هدایت

برای طراحی قانون هدایت با استفاده از الگوریتم مد لغزشی پیشنهادی، ابتدا متغیر لغزش با توجه به ایده ناوبری موازی برای صفر کردن سرعت نسبی جانبی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = R\dot{\lambda} \tag{۳۰}$$

با طراحی ورودی کنترل اگر $S = 0$ برقرار شود، اختلاف سرعت‌های رهگیر و هدف در راستای عمود بر خط دید صفر بوده و خط دید نخواهد چرخید. در این‌صورت طبق ایده‌ی ناوبری موازی برخورد حتمی خواهد بود [۱۹]. دینامیک این متغیر لغزش به صورت زیر است:

$$\dot{S} = -\dot{R}\dot{\lambda} - A_m\cos(\gamma_m - \lambda) + A_t\cos(\gamma_t - \lambda) \tag{۳۱}$$

طبق تئوری پیشنهادی در قضیه (۱) قانون هدایت برای تضمین پایداری متغیر لغزش به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&A_m = \frac{1}{\cos(\gamma_m - \lambda)}\left(-\dot{R}\dot{\lambda} + k_1|S|^{\rho_1} Sgn(S) + k_2\xi_1 + k_3\xi_2\right) \\
&\dot{\xi}_1 = |S|^{\rho_2} Sgn(S) \\
&\dot{\xi}_2 = |\xi_2||S|^{\rho_2} Sgn(S) - \alpha Sgn(\xi_2)|S|^{\rho_2} k_3^{-1}
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

که در آن α کران بالای شتاب هدف می‌باشد. با قرار دادن رابطه‌ی (۳۲) در (۳۱) داریم:

$$\dot{S} = -k_1|S|^{\rho_1} Sgn(S) - k_2\xi_1 - k_2\xi_2 + A_t\cos(\gamma_t - \sigma) \tag{۳۳}$$

رابطه (۳۳) را می‌توان به فرم فضای حالت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
&\dot{S} = -k_1|S|^{\rho_1} Sgn(S) - k_2\xi_1 - k_2\xi_2 + A_t\cos(\gamma_t - \sigma) \\
&\dot{\xi}_1 = |S|^{\rho_2} Sgn(S) \\
&\dot{\xi}_2 = |\xi_2||S|^{\rho_2} Sgn(S) - \alpha Sgn(\xi_2)|S|^{\rho_2} k_3^{-1}
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

برای بررسی پایداری سیستم (۳۴) تابع کاندید لیاپانوف به صورت رابطه (۲۸) در نظر گرفته می‌شود. مشتق این تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۳۵) است:

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = \\
&-k_1|S|^{\rho_1+\rho_2} + A_t\cos(\gamma_t - \sigma)|S|^{\rho_2} Sgn(S) - \alpha|S|^{\rho_2} \le \\
&-k_1|S|^{\rho_1+\rho_2} - \alpha|S|^{\rho_2} - \alpha|S|^{\rho_2} = -k_1|S|^{\rho_1+\rho_2}
\end{aligned} \tag{۳۵}$$

همانطور که مشاهده می‌گردد، مشتق این تابع لیاپانوف به ازای $k_1 > 0$ نیمه منفی معین بوده و سیستم (۳-۶۷) پایدار است. پایداری مجانبی این سیستم نیز با استفاده از قضیه لاسال قابل اثبات است. بنابراین سیستم پایدار مجانبی بوده و سرعت نسبی جانبی به صفر همگرا خواهد شد. در نهایت قانون هدایت بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&A_c = \frac{1}{\cos(\gamma_m - \lambda)}\left(-\dot{R}\dot{\lambda} + k_1|R\dot{\lambda}|^{\rho_1} Sgn(R\dot{\lambda}) + k_2\xi_1 + k_3\xi_2\right) \\
&\dot{\xi}_1 = |R\dot{\lambda}|^{\rho_2} Sgn(R\dot{\lambda}) \\
&\dot{\xi}_2 = |\xi_2||R\dot{\lambda}|^{\rho_2} Sgn(R\dot{\lambda}) - \alpha Sgn(\xi_2)|R\dot{\lambda}|^{\rho_2} k_3^{-1}
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

جمله‌ی اول قانون هدایت (۳۶) مشابه با ناوبری تناسبی حقیقی بوده و جملات دیگر نقش تخمین مانور هدف را دارند. این قانون هدایت همانند ناوبری تناسبی افزوده و البته بدون نیاز به اندازه‌گیری و یا تخمین مانور هدف قادر به صفر کردن سرعت نسبی جانبی و نرخ چرخش خط دید بوده و مقاومت خوبی در برابر اهداف مانوردار خواهد داشت. برای پیاده سازی این قانون هدایت اطلاعاتی از قبیل زاویه و نرخ چرخش خط دید، برد نسبی و سرعت نزدیک شوندگی مورد نیاز است که این اطلاعات می‌تواند توسط یک جستجوگر راداری طوقه دار فراهم گردند. همچنین زاویه بردار سرعت نیز مورد نیاز بوده که می‌تواند توسط حسگرهای ناوبری رهگیر فراهم شود.

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد قانون هدایت طراحی‌شده بررسی می‌شود. در تمامی شبیه‌سازی‌ها، فاصله‌ی نسبی اولیه ۴۰ کیلومتر، سرعت‌های رهگیر و هدف به ترتیب ۸۰۰ و ۷۰۰ متر بر ثانیه، زاویه خط دید اولیه صفر درجه، زوایای اولیه بردارهای سرعت رهگیر و هدف به ترتیب ۳۰ و ۱۵۰ درجه، مکان اولیه‌ی رهگیر $R_{m_0} = [0 \quad 0]^T m$ و مکان اولیه‌ی هدف $R_{t_0} = [40000 \quad 0]^T m$ در نظر گرفته می‌شوند. همچنین ثابت زمانی دینامیک مرتبه اول سیستم کنترل ۰٫۲ ثانیه فرض می‌شود.

قانون هدایت پیشنهادی با قوانین هدایت ناوبری تناسبی افزوده و هدایت مد لغزشی تقریب زده شده مقایسه می‌گردد. دستور شتاب در ناوبری تناسبی افزوده به صورت رابطه (۶) بوده که علاوه بر نرخ چرخش خط دید و سرعت نزدیک شوندگی، به تخمین شتاب جانبی هدف در راستای عمود بر خط دید نیز نیاز دارد. فرض می‌شود این متغیر نیز قابل

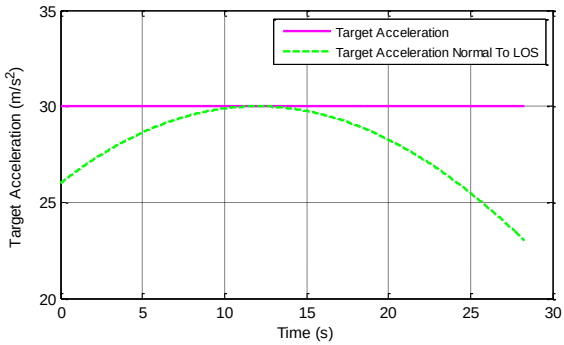
اندازه‌گیری بوده و فراهم است. دستور شتاب در قانون هدایت مد لغزشی تقریب زده شده به صورت زیر است:

$$A_c = \frac{1}{\cos(\gamma_m - \lambda)}\left(-\dot{R}\dot{\lambda}\right) + (\alpha+\eta)Tanh(\dot{\lambda}/\varepsilon) \qquad (۳۷)$$

عملکرد قوانین هدایت در دو سناریوی درگیری بررسی می‌شود. تفاوت این سناریوها در نوع مانور هدف می‌باشد. در سناریوی اول هدف با شتاب جانبی ثابت ۳۰ متر بر مجذور ثانیه و در سناریوی دوم با شتاب جانبی سینوسی با دامنه ۳۰ متر بر مجذور ثانیه پرواز می‌کند.

۵-۱ سناریوی درگیری اول

در این سناریو هدف با شتاب جانبی ۳۰ متر بر مجذور ثانیه پرواز می‌کند. نمودار شتاب جانبی هدف و همچنین مولفه شتاب هدف در راستای عمود بر خط دید در شکل (۵) رسم گردیده است.



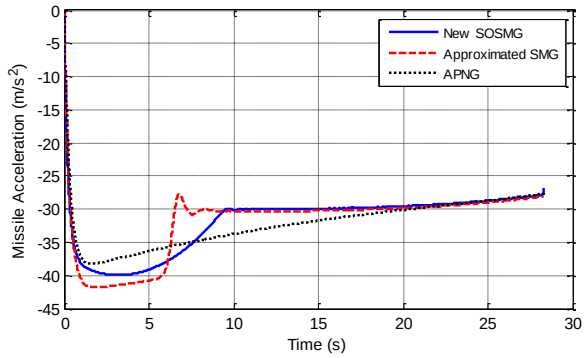
شکل ۵: شتاب جانبی هدف در سناریوی اول

مقادیر بهره‌های موجود در قوانین هدایت نیز در این سناریو در جدول (۱) درج گردیده است.

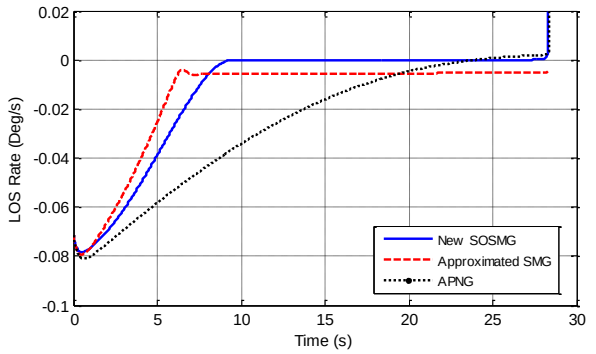
جدول ۱: مقادیر بهره‌های موجود در قوانین هدایت در سناریوی اول

قانون هدایت	k_1	k_2	k_3	α	η	ε	N
New SOSMG	۴	۲	۱	۳۰	–	–	–
ASMG	–	–	–	۳۰	۱۰	۰٫۰۰۰۱	–
APN	–	–	–	–	–	–	۴

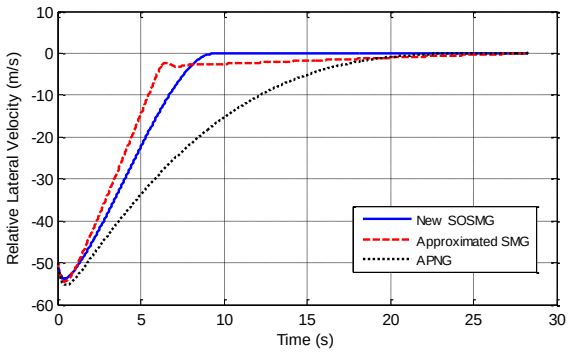
منحنی‌های شتاب جانبی رهگیر در سناریوی درگیری اول در شکل (۶)، نرخ چرخش خط دید در شکل (۷)، سرعت نسبی جانبی در شکل (۸) و مسیر برخورد رهگیر با هدف در شکل (۹) رسم گردیده است. همانطور که در این شکل‌ها مشاهده می‌گردد، رهگیر با استفاده از قانون هدایت پیشنهادی نسبت به قانون هدایت مد لغزشی تقریب زده شده شتاب جانبی با بیشینه اندازه کمتری داشته و با دقت بیشتری قادر به صفر کردن متغیرهای نرخ چرخش خط دید و سرعت نسبی جانبی (متغیر لغزش) می‌باشد. این افزایش دقت به دلیل عدم استفاده از تقریب در روش پیشنهادی می‌باشد. اما تقریب در مد لغزشی تقریب زده شده منجر به کاهش دقت در صفر کردن متغیرهای مذکور می‌شود. عملکرد قانون هدایت پیشنهادی درمقایسه با ناوبری تناسبی افزوده به دلیل مقاوم بودن در مقابل مانور هدف قابل قبول است. قابل ذکر است که در قانون هدایت پیشنهادی بر خلاف ناوبری تناسبی افزوده به به اندازه‌گیر و یا محاسبات پیچیده تخمین مانور هدف نیازی نبوده بنابراین منجر به کاهش هزنه در پیاده سازی قانون هدایت می‌شود. نمودار مسیر برخورد رهگیر با هدف نیز نشان می‌دهد که در این سناریو هر سه قانون هدایت رهگیر را قادر به برخورد با هدف می‌سازند. اگرچه هر سه قانون هدایت برخورد با هدف را تضمین می‌کنند اما کاهش دقت می‌تواند در عمل با وارد شدن خطا و نویزهای دیگر منجر به کاهش کارایی قانون هدایت شود. اطلاعات ثبت شده در این سناریو در جدول (۲) مشاهده می‌شود. در این سناریو روش پیشنهادی نسبت به دو روش‌دیگر انرژی کمتری نیاز داشته و پیک شتاب در آن کوچکتر از پیک شتاب جانبی رهگیر در هدایت مد لغزشی تقریب زده شده می‌باشد. همچنین روش‌پیشنهادی منجر به کاهش مدت زمان برخورد با هدف می‌گردد.



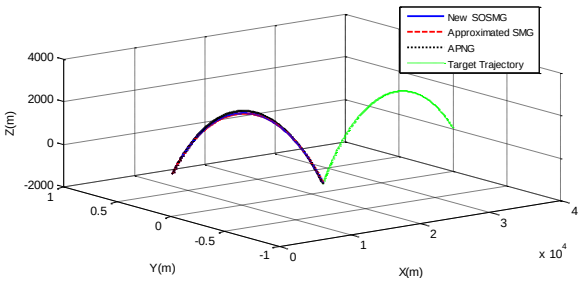
شکل ۶: منحنی تغییرات شتاب جانبی رهگیر در سناریوی درگیری اول



شکل ۷ : منحنی تغییرات نرخ چرخش خط دید در سناریوی درگیری اول



شکل ۸ : منحنی تغییرات سرعت نسبی جانبی (متغیر لغزش) در سناریوی درگیری اول



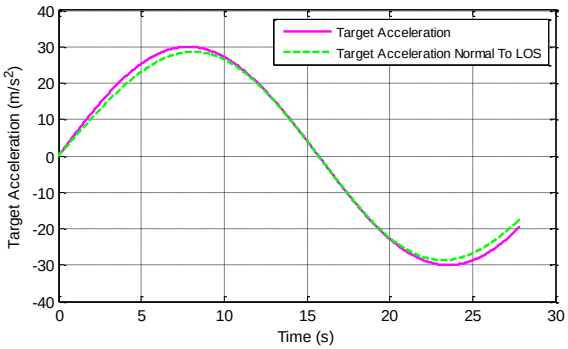
شکل ۹ : منحنی مسیر برخورد رهگیر به هدف در سناریوی درگیری اول

جدول ۲: اطلاعات ثبت شده در سناریوی درگیری اول

قانون هدایت	انرژی کنترلی	زمان برخورد	پیک شتاب
New SOSMG	۲۹۲۰۰	۲۸,۳	۴۰
ASMG	۲۹۴۰۰	۲۸,۳	۴۲
APN	۲۹۷۰۰	۲۸,۳۶	۳۸

۵-۲ سناریوی درگیری دوم

در این سناریو هدف با شتاب جانبی سینوسی با دامنه ۳۰ متر بر مجذور ثانیه پرواز می‌کند. نمودار شتاب جانبی هدف در شکل (۱۰) و مقادیر بهره‌های موجود در قوانین هدایت در جدول (۱) دیده می‌شود.

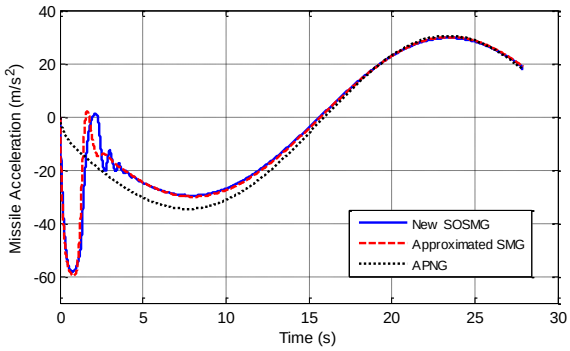


شکل ۱۰: شتاب جانبی هدف در سناریوی دوم

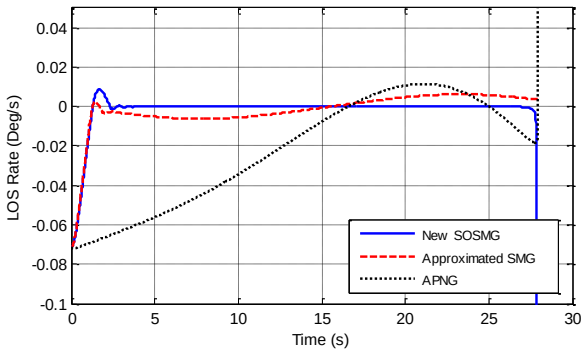
جدول ۳: مقادیر بهره‌های موجود در قوانین هدایت در سناریوی دوم

قانون هدایت	k_1	k_2	k_3	α	η	ε	N
New SOSMG	۱۰	۱۰	۵	۳۰	–	–	–
ASMG	–	–	–	۳۰	۳۰	۰,۰۰۰۲	–
APN	–	–	–	–	–	–	۴

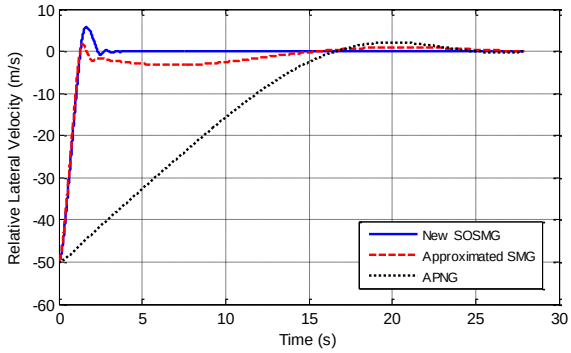
منحنی‌های مربوطه در این سناریو در شکل‌های (۱۱) تا (۱۴) رسم گردیده است. مشاهده می‌گردد که در این سناریو نیز رهگیر با استفاده از قانون هدایت پیشنهادی نسبت به قانون هدایت مد لغزشی تقریب زده شده شتاب جانبی با بیشینه اندازه کمتری داشته و با دقت بیشتری نسبت به هر دو قانون هدایت دیگر قادر به صفر کردن متغیرهای نرخ چرخش خط دید و سرعت نسبی جانبی (متغیر لغزش) است. این افزایش دقت به دلیل عدم استفاده از تقریب در روش پیشنهادی می‌باشد. اما تقریب در مد لغزشی تقریب زده شده و مانور پیچیده هدف در ناوبری تناسبی افزوده منجر به کاهش دقت در صفر کردن متغیرهای مذکور می‌شود. نمودار مسیر برخورد رهگیر با هدف نشان می‌دهد که در این سناریو نیز هر سه قانون هدایت رهگیر را قادر به برخورد با هدف می‌سازند. مقادیر درج شده در جدول (۴) کاهش انرژی مورد نیاز در روش پیشنهادی نسبت به هدایت مد لغزشی تقریب زده را نشان می‌دهد. در این سناریو ناوبری تناسبی افزوده بهترین عملکرد را داشته و البته این قانون هدایت نیازمند اندازه‌گیری و یا تخمین شتاب جانبی هدف در راستای عمود بر خط دید است که در دو قانون هدایت دیگر به صورت نامعینی فرض می‌شود.



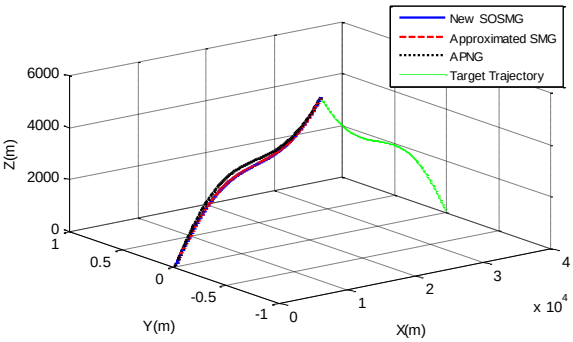
شکل ۱۱ : منحنی تغییرات شتاب جانبی رهگیر در سناریوی درگیری دوم



شکل ۱۲: منحنی تغییرات نرخ چرخش خط دید در سناریوی درگیری دوم



شکل ۱۳: منحنی تغییرات سرعت نسبی جانبی در سناریوی درگیری دوم



شکل ۱۴: منحنی مسیر برخورد رهگیر به هدف در سناریوی درگیری دوم

جدول ۴: اطلاعات ثبت شده در سناریوی درگیری دوم

قانون هدایت	انرژی کنترلی	زمان برخورد	پیک شتاب
New SOSMG	۱۶۷۸۰	۲۷٫۹	۵۸٫۵
ASMG	۱۶۸۶۰	۲۷٫۹	۵۸٫۹
APN	۱۶۶۶	۲۷٫۹	۳۵

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله الگوریتم نوینی در حوزه مد لغزشی مرتبه بالا ارائه گردید که پایداری دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی و نامعین را تضمین می‌کند. اثبات پایداری در این الگوریتم در حضور نامعینی به صورت تحلیلی و به روش لیاپانوف صورت گرفت که در الگوریتم‌های قبلی چنین اثباتی وجود نداشت. الگوریتم پیشنهادی برای طراحی قانون هدایت دو بعدی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج شبیه‌سازی افزایش دقت قانون هدایت طراحی شده را نسبت به قانون هدایت مقاوم مد لغزشی تقریب زده شده نشان می‌دهد. عملگرد قانون هدایت پیشنهادی که در مقابل اهداف مانوردار مقاوم است، در مقایسه با ناوبری تناسبی افزوده که به اندازه‌گیری و یا تخمین مانورهای هدف نیاز دارد، قابل قبول می‌باشد.

مراجع

[1] Siouris, G., Missile Guidance and Control Systems, Springer, 2005.

[2] Zarchan, P., Tactical and Strategic Missile Guidance, AIAA Series, Sixth Edition, Vol. 239, 2012.

[۳] بهنام‌گل، وحید.، قهرمانی، نعمت ا....، "طراحی یک الگوریتم نوین هدایت تناسبی با استفاده از کنترل مد لغزشی"، فصلنامه مکانیک هوافضا (دینامیک، ارتعاشات و کنترل)، جلد ۱۰، شماره ۱، بهار ۱۳۹۳، صفحه ۷۷-۸۶

[4] Slotine, J. J. E., and Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1991, pp. 276-309.

[5] Khalil, H. K., Nonlinear Systems, Third Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2002, pp. 552-578.

[6] Sun, Sh., Zho, D., Hou, W., “A guidance law with finite time convergence accounting for autopilot lag”, Elsevier, Aerospace Science and Technology, 25, 2013, pp. 132–137.

[7] Yeh, F. K., “Adaptive-sliding-mode guidance law design for missiles with thrust vector control and divert control system”, IET Control Theory Appl., 2012, Vol. 6, No. 4, pp. 552–559.

[8] Rao, S., and Ghose, D., “Terminal Impact Angle Constrained Guidance Laws Using Variable Structure Systems Theory”, IEEE Transactions on Control System Technology, Vol. 21, No. 6, 2013, pp. 2350-2359.

[9] Kumar, Sh. R., Rao, S., and Ghose, D., “Nonsingular Terminal Sliding Mode Guidance with Impact Angle Constraints”, Journal of Guidance, Control, And Dynamics, Vol. 37, No. 4, July–August 2014, pp. 1114-1130.

[10] Fridman, L., Moreno, J., and Iriarte, R., Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century, Springer, 2011

[11] Levant, A., and Michael, A., “Adjustment of high-order sliding-mode controllers”, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 19, 2009, pp.1657–1672.

[12] Levant, A., “Principles of 2-slidingmode design”, Elsevier, Automatica, 43, pp. 576 – 586, 2007.

[13] Ferrara, A., and Rubagotti, M., “A Sub-Optimal Second Order Sliding Mode Controller for Systems With Saturating Actuators”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 54, No. 5, MAY 2009, pp. 1082-1087.

[14] Bartolini, W G., Pisano, A., Usai, E., “On the second-order sliding mode control of nonlinear systems with uncertain control direction”, Elsevier, Automatica, 45, 2009, pp. 2982_2985.

[15] Polyakov A., and Poznyak, A., “Reaching Time Estimation for “Super-Twisting” Second Order Sliding Mode Controller via Lyapunov Function Designing”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 54, No. 8, 2009, pp. 1951- 1955.

[16] Utkin, V. I., Poznyak, A. S., “Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method”, Elsevier, Automatica, 49, 2013, pp. 39–47.

[17] Shtessel, Y., Taleb, M., Plestan, F., “A novel adaptive-gain super twisting sliding mode controller: Methodology and application”, Elsevier, Automatica, 48, 2012, pp. 759–769.

[18] Shtessel, Y. B., Shkolnikov, I. A., and Levant, A., “Smooth second-order sliding modes: Missile guidance application,” Automatica, No. 43, 2007, pp. 1470 – 1476.

[۱۹] بهنام‌گل، وحید.، محمدزمان، ایمان.، ولی، احمدرضا.، قهرمانی، نعمت ا....، "طراحی قانون هدایت با استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه‌دوم زمان‌محدود"، مجله کنترل، جلد ۵، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۰، صفحه ۳۶-۴۴.