مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۸، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۳، صفحه ۶۴-۵۵

پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی با استفاده از فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر و سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت مشخص

محمدعلی باقرزاده[۱]، جعفر قیصری[۲]، جواد عسکری[۳]، محسن مجیری[۴]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، ma.bagherzadeh@ec.iut.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، ghaisari@cc.iut.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، j-askari@cc.iut.ac.ir

[۴] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، mohsen.mojiri@cc.iut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۳/۹/۱۴، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۳/۱۱/۲۳)

چکیده: یکی از مهمترین مسائل مورد بررسی در زمینه سیستم‌های سوئیچینگ، پایدارسازی سیستم‌های سوئیچینگ خطی متشکل از تعدادی زیرسیستم ناپایدار می‌باشد. در این مقاله یک روش مبتنی بر حل نامعادلات خطی ماتریسی برای پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی پارامتری ارائه می‌شود. ابتدا با فرض در دسترس بودن تمامی حالت‌های سیستم، ماتریس‌های بهره فیدبک حالت پایدارساز به نحوی طراحی می‌شود که سیستم سوئیچینگ دارای نامعینی پارامتری به ازای هر سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت مشخص پایدار مجانبی مقاوم باشد. سپس با توجه به اینکه در بسیاری از کاربردهای عملی، حالت‌های سیستم قابل اندازه‌گیری نبوده و تنها خروجی‌های آن در دسترس هستند، روش طراحی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم برای این دسته از سیستم‌ها توسعه داده خواهد شد. در روش پیشنهادی مبتنی بر رویتگر حالت، شرایط کافی برای وجود فیدبک حالت پایدارساز با استفاده از خروجی‌های سیستم، به فرم مجموعه نامعادلات خطی ماتریسی معرفی خواهد شد. همچنین هریک از روش‌های پایدارسازی پیشنهادی برای سیگنال سوئیچ دلخواه نیز تعمیم داده شده است. در انتها، برای بررسی کارایی این روش‌ها مثال‌های عددی مناسب ارائه شده است.

کلمات کلیدی: سیستم سوئیچینگ خطی، نامعینی پارامتری، پایدارسازی مقاوم ، فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر، سیگنال سوئیچ با زمان اقامت.

Robust Stabilization of Switched Linear Systems, Based on State Feedback Observer and Dwell Time Switching Signal

Mohamad Ali Bagherzadeh, Jafar Ghaisari, Javad Askari, and Mohsen Mojiri

Abstract: Stabilization of switched linear systems is one of the most important problems in the area of switched systems. In this paper, a design method for robust stabilization of parametric uncertain switched linear systems is proposed in terms of linear matrix inequalities. First, a method is proposed assuming that all states are available. This method designs the state feedback gains, such that the closed-loop system to be robustly asymptotically stable under switching signals with the known minimum dwell time. Since the states are unmeasurable in some practical systems, the method is then extended to the practical cases, in which the outputs are just available. The observer-based stabilizing state feedback gains are designed to stabilize such systems robustly for dwell time switching signals. The asymptotic stability of the proposed methods is proved under the assumption that all the nominal subsystems are controllable and observable. Then, the method is also generalized for robust stabilization of uncertain switched linear systems under any arbitrary switching signal. The correctness and effectiveness of the results are illustrated by some numerical examples.

Keywords: Switched linear system, parametric uncertainty, robust stabilization, observer-based state feedback, dwell time switching signals.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

۱- مقدمه

سیستم‌های سوئیچینگ که از تعدادی زیرسیستم و یک سیگنال سوئیچ تشکیل شده‌اند، در مدلسازی، پایدارسازی و کنترل سیستم‌های دینامیکی پیچیده به کار گرفته می‌شوند [۱ - ۶]. سیستم‌های سوئیچینگ خطی، دسته مهمی از سیستم‌های سوئیچینگ است که از زیرسیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده‌اند. به دلیل ماهیت هایبرید سیستم‌های سوئیچینگ، سیگنال سوئیچ نقش کلیدی در پایداری این سیستم‌ها دارد [۷ و ۸]. پایداری سیستم‌های سوئیچینگ خطی، در مقالات و پژوهش‌های بسیاری بررسی شده است که از آن جمله می‌توان به [۹ - ۱۲] برای سیستم‌های سوئیچینگ دلخواه[1]، [۱۳ - ۱۶] برای سیستم‌های سوئیچینگ دارای زمان اقامت که فاصله زمانی بین هر دو سوئیچ متوالی از مقدار مشخصی بزرگتر است و [۱۷ - ۱۹] برای سیستم‌های سوئیچینگ وابسته به حالت اشاره کرد.

پایدارسازی[2] سیستم‌های سوئیچینگ متشکل از زیرسیستم‌های ناپایدار در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران این زمینه قرار گرفته است. هدف از مسئله پایدارسازی، بررسی شرایط کافی (و/یا لازم) برای پایدار کردن سیستم سوئیچینگ به وسیله سیگنال سوئیچ و/یا ماتریس‌های بهره فیدبک حالت مناسب است. مسئله پایدارسازی سیستم‌های سوئیچینگ خطی بدون نامعینی در مراجع مختلفی از جمله [۲۰-۲۶] بررسی شده است. ابتدا در [۲۰]، شرایط کافی برای پایدارسازی سیستم‌های سوئیچینگ خطی با استفاده از سیگنال سوئیچ مناسب بررسی شد. پس از آن دو روش طراحی سیگنال سوئیچ برای تامین پایداری مربعی[3] و پایداری قطعه‌ای مربعی سیستم سوئیچینگ خطی در [۲۱ و ۲۲] پیشنهاد شد. همچنین دو روش طراحی سیگنال سوئیچ وابسته به حالت پایدارساز مبتنی بر حل نامعادلات ماتریسی خطی برای کلاس‌های خاصی از سیستم‌های سوئیچینگ خطی در [۲۳] و [۲۴] پیشنهاد شد. در [۲۵ و ۲۶]، شرایط کافی برای بررسی امکان پایدارسازی سیستم‌های سوئیچینگ خطی با استفاده از مجموعه بهره‌های فیدبک حالت و فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر ارائه شد. همچنین بهره‌های فیدبک حالت سیستم سوئیچینگ خطی متشکل از دو زیرسیستم مرتبه دوم به نحوی در [۲۷] تعیین شد که سیستم حلقه بسته به ازای هر سیگنال سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی باشد. ضمن اینکه مسئله پایدارسازی سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای تاخیر در تشخیص سیگنال سوئیچ نیز در [۲۸-۳۰] بررسی شده است. با این وجود به دلیل تاثیرگذاری نامعینی‌ها بر پایداری سیستم، لازم است مسئله پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی نیز بررسی شود [۳۱ - ۳۵]. در [۳۱]، شرایط کافی برای بررسی وجود سیگنال سوئیچ وابسته به حالت مناسب برای پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی پلی‌توپیک[4] پیشنهاد شد. ضمن اینکه امکان پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی پلی‌توپیک با استفاده از فیدبک خروجی نیز در [۳۲] بررسی شد. همچنین الگوریتم‌هایی جهت استخراج سیگنال سوئیچ پایدارساز مقاوم برای سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی در [۳۳ و ۳۴] پیشنهاد شد. در [۳۵] نیز مسئله پایدارسازی مقاوم سیستم سوئیچینگ دارای نامعینی با استفاده از مجموعه‌ای از بهره‌های فیدبک حالت به همراه سیگنال سوئیچ وابسته به حالت مناسب بررسی شد.

در این مقاله، پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی پارامتری با استفاده از بهره‌های فیدبک حالت و سیگنال سوئیچ با زمان اقامت بررسی می‌شود. این دسته از نامعینی‌ها در مثال‌های عملی ظاهر می‌شود که معادلات فضای حالت سیستم بر اساس قوانین حاکم بر آن سیستم و بر حسب پارامترهای نامعین بدست می‌آیند. در بخش دوم، ابتدا نامعینی‌های پارامتری در سیستم سوئیچینگ خطی فرموله می‌شود. سپس پایداری سیستم‌های سوئیچینگ خطی با زمان اقامت τ_D و دارای نامعینی پارامتری، در قالب یک لم بررسی خواهد شد که برای اثبات قضیه‌های پیشنهادی در بخش‌های بعدی استفاده خواهد شد. در بخش سوم، با فرض در دسترس بودن تمامی حالت‌های سیستم سوئیچینگ، قضیه‌ای برای طراحی بهره‌های فیدبک حالت پایدارساز مقاوم به ازای هر سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت τ_D ارائه می‌شود. همچنین در بخش چهارم، ماتریس‌های بهره فیدبک حالت پایدارساز مقاوم سیستم سوئیچینگ خطی با استفاده از خروجی‌های سیستم طراحی می‌شود. در این روش، بهره‌های فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر به نحوی طراحی می‌شوند که سیستم حلقه بسته‌ی دارای نامعینی پارامتری، به ازای هر سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت τ_D پایدار مجانبی مقاوم باشد. در انتها، با استفاده از مثال‌های عددی مناسب، سادگی و اثربخشی این قضایا در پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ نشان داده شده است.

۲- پیش‌نیازها و بیان مسئله

سیستم سوئیچینگ خطی توصیف شده با معادلات

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t)\\ y(t) = C_{\sigma(t)}x(t)\end{cases} \quad (۱)$$

را در نظر بگیرید که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت‌های پیوسته، $u \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی‌های کنترلی، $y \in \mathbb{R}^l$ بردار خروجی‌های سیستم و $\sigma(t): \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M} = \{1,2,\dots,N\}$ سیگنال سوئیچ است. سیگنال سوئیچ، یک تابع قطعه‌ای پیوسته از سمت چپ است که ترتیب فعال شدن زیرسیستم‌ها را هماهنگ می‌کند. همچنین $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$ به ازای هر $i \in \mathcal{M}$، ماتریس‌های توصیف‌کننده دینامیک‌ها و خروجی‌های سیستم سوئیچینگ هستند. معمولا ماتریس‌های A_i و B_i در کاربردهای عملی همراه با نامعینی می‌باشند.

دسته‌ای از نامعینی‌ها که در معادلات فضای حالت سیستم‌های عملی مشاهده می‌شود، نامعینی پارامتری است. نامعینی پارامتری در مواردی اتفاق می‌افتد که معادلات فضای حالت با استفاده از قوانین حاکم بر

[1] - Arbitrary switched systems
[2] - Stabilization
[3] - Quadratically stabilization
[4] - Polytopic uncertainty

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

سیستم و بر حسب پارامترها نامعین نوشته می‌شود. نامعینی در این پارامترها معمولا به دلیل عدم توانایی در اندازه‌گیری دقیق آن‌ها و یا به واسطه تغییر مقادیر آن‌ها در طول عملکرد فرآیند به وجود می‌آید. در مثال‌های کاربردی از سیستم‌های سوئیچینگ خطی، ماتریس‌های فضای حالت A_i و B_i دارای نامعینی به صورت

$$A_i(q) = A_i^o + \Delta A_i(q^o, \Delta q) \qquad (۲ \text{ الف})$$

$$B_i(q) = B_i^o + \Delta B_i(q^o, \Delta q) \qquad (۲ \text{ ب})$$

هستند که $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \dots, q_r]$، $\boldsymbol{q}^o = [q_1^o, q_2^o, \dots, q_r^o]$ و $\Delta\boldsymbol{q} = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r]$ در روابط فوق، به ترتیب بردار پارامترها، بردار مقادیر نامی پارامترها و بردار میزان نامعینی پارامترها هستند. همچنین A_i^o و B_i^o ماتریس‌های نامی فضای حالت زیرسیستم‌ها هستند که به صورت $A_i^o := A_i(\boldsymbol{q}^o)$ و $B_i^o := B_i(\boldsymbol{q}^o)$ تعریف می‌شوند. ضمن اینکه $\Delta A_i(\boldsymbol{q}^o, \Delta\boldsymbol{q})$ و $\Delta B_i(\boldsymbol{q}^o, \Delta\boldsymbol{q})$ جزء نامعین ماتریس‌های A_i و B_i بوده و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\Delta A_i(q^o, \Delta q) = \sum_{k=1}^{r} \delta q_k E_k^i, \qquad (۳ \text{ الف})$$

$$\Delta B_i(q^o, \Delta q) = \sum_{k=1}^{r} \delta q_k F_k^i, \qquad (۳ \text{ ب})$$

ماتریس‌های E_k^i و F_k^i در روابط فوق، نشان دهنده نحوه وابستگی ماتریس‌های فضای حالت A_i و B_i به پارامتر نامعین q_k است. در صورتی که پارامتر مجهول q_k تاثیری در ماتریس A_i (یا B_i) نداشته باشد، E_k^i (یا F_k^i) ماتریس تهی[1] خواهد بود.

در ادامه‌ی این بخش، پایداری مجانبی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی پارامتری توصیف شده با معادلات (۳) و $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$، تحت سیگنال سوئیچ دارای زمان اقامت τ_D بررسی خواهد شد. نتیجه بدست آمده در لم ۱، برای پایداری مجانبی مقاوم، در بخش‌های آتی در هنگام طراحی بهره‌های فیدبک حالت پایدارساز استفاده خواهد شد.

لم ۱- سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳) با سیگنال سوئیچ دارای زمان اقامت τ_D و $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$ پایدار مجانبی سراسری مقاوم است (ورودی $u(t) \equiv 0$)، اگر ماتریس مثبت معین متقارن P_i و ضرایب مثبت λ_i و $\alpha_{i,k}$، به ازای هر $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ و هر زیرسیستم $i \in \mathcal{M}$، وجود داشته باشند به نحوی که $\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,k} = \alpha_i$ و مجموعه نامعادلات ماتریسی زیر برقرار باشند.

$$P_i A_i^o + A_i^{oT} P_i \le -(\alpha_i + \lambda_i) P_i, \qquad (۴ \text{ الف})$$

$$e^{-\lambda_i \tau_D} P_i \le P_j \;\; ; \;\; i, j \in \mathcal{M}, \qquad (۴ \text{ ب})$$

$$P_i E_k^i + E_k^{iT} P_i \le \frac{\alpha_{i,k}}{c_k} P_i, \qquad (۴ \text{ ج})$$

$$P_i E_k^i + E_k^{iT} P_i \ge -\frac{\alpha_{i,k}}{c_k} P_i. \qquad (۴ \text{ د})$$

اثبات- از رابطه (۳ الف) برای نامعینی‌ها نتیجه می‌گیریم که $P_i \Delta A_i + \Delta A_i^T P_i = \sum_{k=1}^{r} \delta q_k \left(P_i E_k^i + E_k^{iT} P_i \right)$ است. در صورتی که به ازای هر $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ و هر زیرسیستم $i \in \mathcal{M}$، ضرایب مثبت $\alpha_{i,k}$ $(\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,k} = \alpha_i)$ وجود داشته باشند به نحوی که $\delta q_k \left(P_i E_k^i + E_k^{iT} P_i \right) \le \alpha_{i,k} P_i$ باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که $\delta q_k \left(P_i E_k^i + E_k^{iT} P_i \right) \le \alpha_{i,k} P_i$ برقرار است. همچنین نامعادله $P_i \Delta A_i + \Delta A_i^T P_i \le \alpha_i P_i$ به ازای تمامی مقادیر $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$ برقرار است، اگر و تنها اگر روابط (۴ج) و (۴د) برقرار باشند. بنابراین از روابط (۴الف)، (۴ج) و (۴د) نتیجه می‌شود که به ازای هر زیرسیستم $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ دارای نامعینی (۲الف) و (۳الف) با $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$، نابرابری ماتریسی $P_i A_i + A_i^T P_i \le -\lambda_i P_i$ برقرار است. همچنین در [۱۴] و [۱۶] نشان داده شده است که سیستم سوئیچینگ خطی $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ با زمان اقامت τ_D پایدار مجانبی است، اگر به ازای هر $i, j \in \mathcal{M}$، نامعادلات ماتریسی زیر برقرار باشند.

$$P_i A_i + A_i^T P_i \le -\lambda_i P_i \qquad (۵ \text{ الف})$$

$$e^{-\lambda_i \tau_D} P_i \le P_j \qquad (۵ \text{ ب})$$

بنابراین در صورتی که شرایط لم ۱ برقرار باشند، نامعادلات (۵) به ازای تمامی مقادیر پارامترهای نامعین برقرار بوده و در نتیجه سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳) پایدار مجانبی سراسری مقاوم خواهد بود.

θ

در ادامه، تعریف پایدارسازی سیستم‌های سوئیچینگ خطی با استفاده از فیدبک حالت قطعه‌ای خطی[2] مطابق آنچه در [۸] آمده است، بیان می‌شود.

تعریف ۱- سیستم سوئیچینگ خطی (۱) قابل پایدارسازی با استفاده از فیدبک حالت قطعه‌ای خطی $u_i(t) = K_i x(t)$ (به ازای هر $i \in \mathcal{M}$) است، اگر سیگنال سوئیچ $\hat{\sigma}(t)$ وجود داشته باشد، به نحوی که سیستم سوئیچینگ خطی حلقه بسته $\dot{x}(t) = \left(A_{\hat{\sigma}(t)} + B_{\hat{\sigma}(t)} K_{\hat{\sigma}(t)} \right) x(t)$ پایدار مجانبی سراسری باشد [۸].

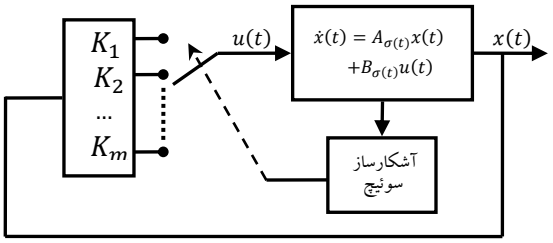
۳- طراحی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم با استفاده از حالت‌های سیستم

در این بخش، با فرض قابل اندازه‌گیری بودن تمامی حالت‌های زیرسیستم‌ها، مجموعه‌ای از ماتریس‌های بهره فیدبک حالت $\{K_i, i \in \mathcal{M}\}$ را به نحوی طراحی می‌کنیم که ورودی کنترلی قطعه‌ای خطی $u(t) = K_{\sigma(t)} x(t)$، موجب پایدارسازی سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳)، تحت هر سیگنال سوئیچ با زمان اقامت بزرگ‌تر یا مساوی با τ_D، شود. به بیان دیگر، مجموعه ماتریس‌های بهره فیدبک حالت طراحی شده موجب پایداری سیستم سوئیچینگ خطی $\dot{x}(t) = \left(A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)} \right) x(t)$ دارای زمان اقامت τ_D شود. نمای شماتیک این روش در شکل ۱ نشان داده شده است.

[1] - Null matrix

[2] - Piecewise linear state feedback

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]



شکل ۱: نمایش شماتیک پایدارسازی سیستم سوئیچینگ خطی با استفاده از فیدبک حالت

در تمامی پژوهش‌های انجام شده در زمینه پایدارسازی سیستم‌های سوئیچینگ، فرض ناپایدار مجانبی بودن تمامی زیرسیستم‌ها یک فرض متداول است. چرا که در صورت پایداری مجانبی یکی از زیرسیستم‌ها، مسئله پایدارسازی سیستم سوئیچینگ دارای یک جواب بدیهی برای سیگنال سوئیچ پایدارساز، بدون اعمال فیدبک حالت، می‌باشد. در ادامه قضیه‌ای اثبات خواهد شد که مجموعه شرایط کافی برای وجود بهره‌های فیدبک حالت پایدارساز مقاوم در سیستم سوئیچینگ خطی متشکل از تعدادی زیرسیستم ناپایدار توصیف شده با معادلات (۲) و (۳) را با فرض $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$ نشان می‌دهد. ضمن اینکه در صورت برقرار بودن شرایط این قضیه، بهره‌های فیدبک پایدارساز نیز ارائه می‌شوند.

قضیه ۱- سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳) با زیرسیستم‌های (A_i^o, B_i^o) کنترل‌پذیر، قابل پایدارسازی با بهره‌های فیدبک حالت $\{K_i = R_i Q_i^{-1}, i \in \mathcal{M}\}$ و هر سیگنال سوئیچ دارای زمان اقامت بزرگتر یا مساوی τ_D است، اگر ماتریس مثبت معین متقارن Q_i، ماتریس $R_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و ضرایب مثبت λ_i و $\alpha_{i,k}$، به ازای هر $k \in \{1,2,\dots,r\}$ و هر زیرسیستم $i \in \mathcal{M}$، وجود داشته باشند به نحوی که $\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,k} = \alpha_i$ و مجموعه نامعادلات ماتریسی زیر برقرار باشند.

$$\begin{bmatrix} A_i^o Q_i + Q_i A_i^{oT} + B_i^o R_i + R_i^T B_i^{oT} & Q_i \\ Q_i & -\frac{1}{\alpha_i+\lambda_i} Q_i \end{bmatrix} \le 0 \quad (۶\text{الف})$$

$$\left(E_k^i - \frac{\alpha_{i,k}}{2c_k} I_{n\times n}\right) Q_i + F_k^i R_i \le 0 \quad (۶\text{ب})$$

$$\left(E_k^i + \frac{\alpha_{i,k}}{2c_k} I_{n\times n}\right) Q_i + F_k^i R_i \ge 0 \quad (۶\text{ج})$$

$$e^{\lambda_i \tau_D} Q_i \ge Q_j \;;\; i,j \in \mathcal{M} \quad (۶\text{د})$$

اثبات- سیستم سوئیچینگ خطی (۱) با سیگنال کنترلی $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\dot{x}(t) = \left(A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)}\right) x(t)$$

با استفاده از لم ۱ می‌توان نتیجه گرفت که سیستم سوئیچینگ خطی (۱) با بهره‌های فیدبک حالت $\{K_i, i \in \mathcal{M}\}$، به ازای هر سیگنال سوئیچ با زمان اقامت بزرگتر یا مساوی با τ_D پایدار مجانبی مقاوم است، اگر به ازای هر زیرسیستم $i \in \mathcal{M}$، ضرایب مثبت α_i و λ_i و ماتریس مثبت معین متقارن P_i وجود داشته باشند، به نحوی که مجموعه نامعادلات ماتریسی زیر برقرار باشد.

$$P_i(A_i^o + B_i^o K_i) + (A_i^o + B_i^o K_i)^T P_i \le -(\alpha_i + \lambda_i) P_i, \quad (۸\text{الف})$$

$$P_i\left(E_k^i + F_k^i K_i\right) + \left(E_k^i + F_k^i K_i\right)^T P_i \le \frac{\alpha_{i,k}}{c_k} P_i, \quad (۸\text{ب})$$

$$P_i\left(E_k^i + F_k^i K_i\right) + \left(E_k^i + F_k^i K_i\right)^T P_i \ge -\frac{\alpha_{i,k}}{c_k} P_i, \quad (۸\text{ج})$$

$$e^{-\lambda_i \tau_D} P_i \le P_j \;;\; i,j \in \mathcal{M}. \quad (۸\text{د})$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، نامعادله (۸ الف) نسبت به دو متغیر ماتریسی P_i و K_i محدب نیست. بنابراین، با استفاده از تغییر متغیر $K_i = R_i P_i$ و ضرب کردن دو طرف این نامعادله در $Q_i = P_i^{-1}$، رابطه (۸ الف) را به صورت (۹)، که نسبت به متغیرهای Q_i و R_i محدب است، بازنویسی می‌کنیم.

$$(A_i^o Q_i + B_i^o R_i) + \left(Q_i A_i^{oT} + R_i^T B_i^{oT}\right) + (\alpha_i + \lambda_i) Q_i \le 0 \quad (۹)$$

سپس با استفاده از لم مکمل شور[1] [۳۶] می‌توان نتیجه گرفت که رابطه (۹) برقرار است، اگر و تنها اگر نامعادله (۶ الف) برقرار باشد. همچنین می‌توان مراحل فوق را بر روی نامعادله ماتریسی (۸ ب) نیز تکرار نمود تا به نامعادله محدب زیر رسید.

$$\left(E_k^i Q_i + F_k^i R_i\right) + \left(Q_i E_k^{iT} + R_i^T F_k^{iT}\right) - \frac{\alpha_{i,k}}{c_k} Q_i \le 0 \quad (۱۰)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که رابطه (۱۰) برقرار است، اگر و تنها اگر رابطه

$$\left(E_k^i - \frac{\alpha_{i,k}}{2c_k} I_{n\times n}\right) Q_i + Q_i \left(E_k^{iT} - \frac{\alpha_{i,k}}{2c_k} I_{n\times n}\right) + F_k^i R_i + R_i^T F_k^{iT} \le 0 \quad (۱۱)$$

برقرار باشد. به بیان دیگر، نامعادله (۸ ب) برقرار است، اگر و تنها اگر به ازای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$، نابرابری زیر برقرار باشد.

$$x^T \left(E_k^i - \frac{\alpha_{i,k}}{2c_k} I_{n\times n}\right) Q_i x + x^T Q_i \left(E_k^{iT} - \frac{\alpha_{i,k}}{2c_k} I_{n\times n}\right) x + x^T F_k^i R_i x + x^T R_i^T F_k^{iT} x = 2\left[x^T \left(E_k^i - \frac{\alpha_{i,k}}{2c_k} I_{n\times n}\right) Q_i x + x^T F_k^i R_i x\right] \le 0$$

بنابراین (۸ ب) برقرار خواهد بود، اگر و تنها اگر (۶ ب) برقرار باشد. به طور مشابه می‌توان نشان داد که روابط (۶ ج) و (۸ ج) نیز با یکدیگر معادل هستند.

در انتها، با توجه به اینکه P_i و P_j ماتریس‌های مثبت معین متقارنی هستند که در رابطه (۸ ب) صدق می‌کنند، می‌توان نتیجه گرفت که $\left(e^{-\lambda_i \tau_D} P_i\right)^{-1} \ge \left(P_j\right)^{-1}$ که معادل با نامعادله (۶ د) است. بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود. θ

نکته ۱: در صورتی که بتوان ماتریس مثبت معین Q را به نحوی یافت که روابط (۶الف)– (۶ج) به ازای $\forall i \in \mathcal{M}\;;\; Q_i = Q$، برقرار باشند، سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳) قابل پایدارسازی با بهره‌های فیدبک حالت $\{K_i = R_i Q^{-1}, i \in \mathcal{M}\}$ و هر سیگنال سوئیچ دلخواه خواهد بود. همچنین اگر بتوان علاوه بر ماتریس مثبت معین Q، ماتریس $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ نیز به نحوی پیدا کرد که روابط (۶الف)– (۶ج) به ازای $Q_i = Q$ و $R_i = R$ $(\forall i \in \mathcal{M})$ برقرار باشند، سیستم سوئیچینگ خطی

[1] - Schur complement lemma

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

دارای نامعینی پارامتری با استفاده از بهره فیدبک حالت تکی $K = RQ^{-1}$ و هر سیگنال سوئیچ دلخواه، پایدار مجانبی مقاوم خواهد بود.

نکته ۲: در طراحی بهره‌های فیدبک حالت پایدارساز برای سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی پارامتری (۱) – (۳)، زمان اقامت τ_D یک مقدار ثابت از پیش تعیین شده است. این زمان اقامت باید داری حداقل مقداری باشد که از طریق یک مصالحه بین زمان اقامت و میزان کران نامعینی بدست می‌آید. به بیان دیگر هرچه کران نامعینی سیستم بزرگتر باشد، حداقل زمان اقامت سیگنال سوئیچ پایدارساز نیز بزرگتر خواهد بود.

قضیه فرعی ۱- سیستم سوئیچینگ خطی نامی $\dot{x}(t) = A^o_{\sigma(t)}x(t) + B^o_{\sigma(t)}u(t)$ قابل پایدارسازی با بهره‌های فیدبک حالت $\{K_i = R_iQ_i^{-1}, i \in \mathcal{M}\}$ و هر سیگنال سوئیچ با زمان اقامت بزرگتر یا مساوی با τ_D است، اگر به ازای هر زیرسیستم $i \in \mathcal{M}$، ماتریس مثبت معین Q_i، ماتریس $R_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و ضریب مثبت λ_i وجود داشته باشند به نحوی که مجموعه نامعادلات ماتریسی زیر برقرار باشند.

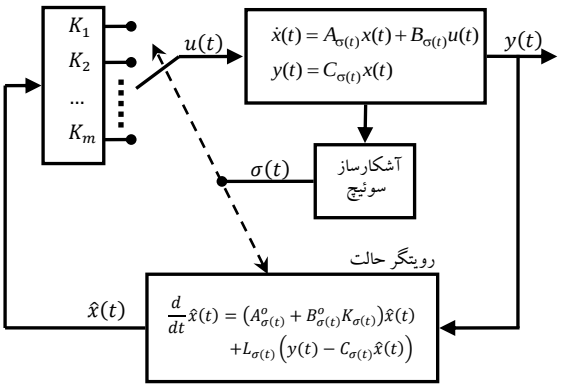
$$\begin{bmatrix} A_i^oQ_i + Q_iA_i^{oT} + B_i^oR_i + R_i^TB_i^{oT} & Q_i \\ Q_i & -\frac{1}{\lambda_i}Q_i \end{bmatrix} \le 0 \quad (۱۲ \text{ الف})$$

$$e^{\lambda_i\tau_D}Q_i \ge Q_j \;;\; i,j \in \mathcal{M} \quad (۱۲ \text{ ب})$$

اثبات- به ازای هر مقدار دلخواه $\alpha_{i,k}$، c_k به اندازه کافی کوچک وجود دارد به نحوی که روابط (۱۰) و (۱۱) برقرار باشد. بنابراین برای سیستم‌های سوئیچینگ نامی که c_k به سمت صفر میل می‌کند، کوچکترین مقدار $\alpha_{i,k}$ که در این روابط صدق کند نیز به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه کوچکترین مقدار α_i نیز برابر صفر خواهد بود و برای پایداری مجانبی سیستم سوئیچینگ نامی، کافی است (۱۲الف) و (۱۲ب) برقرار باشند. θ

۴- طراحی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم با استفاده از خروجی‌های سیستم

در بسیاری از سیستم‌های واقعی، تمامی حالت‌های سیستم در دسترس نمی‌باشد. در این بخش، با فرض در دسترس بودن خروجی‌های سیستم، $y(t) = C_{\sigma(t)}x(t)$، ابتدا با استفاده از یک رویتگر حالت، حالت‌های سیستم سوئیچینگ خطی را تخمین می‌زنیم ($\hat{x}(t)$). سپس مجموعه‌ای از ماتریس‌های بهره فیدبک حالت $\{K_i, i \in \mathcal{M}\}$ مبتنی بر رویتگر را به نحوی طراحی می‌کنیم که ورودی کنترلی $u(t) = K_{\sigma(t)}\hat{x}(t)$ موجب پایدارسازی سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳) و $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$، تحت هر سیگنال سوئیچ با زمان اقامت بزرگ‌تر یا مساوی با τ_D، شود. به بیان دیگر، سیستم سوئیچینگ خطی $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)}\hat{x}(t)$ با زمان اقامت τ_D پایدار مجانبی مقاوم باشد. ساختار این روش در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲: نمایش شماتیک فیدبک حالت پایدارساز مقاوم با استفاده از خروجی‌های سیستم سوئیچینگ خطی

قضیه زیر، مجموعه شرایط کافی برای وجود بهره‌های فیدبک حالت پایدارساز با استفاده از خروجی‌های سیستم سوئیچینگ خطی توصیف شده با معادلات (۱) – (۳) را با فرض $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$ نشان می‌دهد. ضمن اینکه در صورت برقرار بودن شرایط قضیه، بهره‌های فیدبک حالت پایدارساز مبتنی بر رویتگر نیز در این قضیه ارائه شده‌اند.

قضیه ۲- سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳) با زیرسیستم‌های نامی کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر (A_i^o, B_i^o, C_i^o) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های مثبت معین متقارن $Q_{i,1}$ و $Q_{i,2}$، ماتریس‌های $R_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $Y_i \in \mathbb{R}^{n\times l}$ و ضرایب مثبت λ_i، β_i و $\alpha_{i,k}$ وجود داشته باشند، به نحوی که به ازای تمامی مقادیر $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ و $i \in \mathcal{M}$، مجموعه نامعادلات ماتریسی زیر برقرار باشند و $\sum_{k=1}^{r}\alpha_{i,k} = \alpha_i$ باشد، آنگاه سیستم سوئیچینگ خطی قابل پایدارسازی با ماتریس‌های بهره $K_i = R_iQ_{i,1}^{-1}$ و $L_i = Q_{i,2}^{-1}Y_i$، تحت هر سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت برابر با τ_D، است.

$$\begin{bmatrix} A_i^oQ_{i,1} + Q_{i,1}A_i^{oT} + B_i^oR_i + R_i^TB_i^{oT} & Q_{i,1} \\ Q_{i,1} & -\frac{1}{\alpha_i+\lambda_i+1}Q_{i,1} \end{bmatrix} \le 0 \quad (۱۳ \text{ الف})$$

$$\begin{bmatrix} Q_{i,2}A_i^o + A_i^{oT}Q_{i,2} - Y_iC_i - C_i^TY_i^T & Q_{i,2} \\ Q_{i,2} & -\frac{1}{\alpha_i+\lambda_i+1}Q_{i,2} \end{bmatrix} \le 0 \quad (۱۳ \text{ ب})$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{i,k}}{c_k}Q_{i,1} & Q_{i,1}E_k^{i\,T} - R_i^TF_k^{i\,T} \\ E_k^iQ_{i,1} - F_k^iR_i & \frac{1}{\beta_i}\left(Q_{i,2}E_k^i + E_k^{i\,T}Q_{i,2} - \frac{\alpha_{i,k}}{c_k}Q_{i,2}\right) \end{bmatrix} \le 0 \quad (۱۳ \text{ ج})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_{i,k}}{c_k}Q_{i,1} & Q_{i,1}E_k^{i\,T} - R_i^TF_k^{i\,T} \\ E_k^iQ_{i,1} - F_k^iR_i & \frac{1}{\beta_i}\left(Q_{i,2}E_k^i + E_k^{i\,T}Q_{i,2} + \frac{\alpha_{i,k}}{c_k}Q_{i,2}\right) \end{bmatrix} \ge 0 \quad (۱۳ \text{ د})$$

$$e^{\lambda_i\tau_D}Q_{i,1} \ge Q_{j,1} \;;\; i,j \in \mathcal{M}, \quad (۱۳ \text{ ه})$$

$$e^{\lambda_i\tau_D}Q_{i,2} \ge Q_{j,2} \;;\; i,j \in \mathcal{M}, \quad (۱۳ \text{ و})$$

اثبات- سیستم سوئیچینگ خطی نشان داده شده در شکل ۲ پایدار مجانبی مقاوم است، اگر سیستم سوئیچینگ خطی $\dot{z}(t) = M_{\sigma(t)}z$ پایدار مجانبی مقاوم باشد، که بردار z به صورت $z := [\hat{x}^T, \tilde{x}^T]^T$ تعریف می‌شود ($\tilde{x} = x - \hat{x}$) و ماتریس $M_{\sigma(t)}$ نیز در (۱۴) نشان داده شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

$$M_{\sigma(t)}=\begin{bmatrix}A^o_{\sigma(t)}+B^o_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)} & L_{\sigma(t)}C_{\sigma(t)}\\ \Delta A_{\sigma(t)}-\Delta B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)} & A_{\sigma(t)}-L_{\sigma(t)}C_{\sigma(t)}\end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

اکنون لم ۱ را بر روی سیستم سوئیچینگ خطی $\dot{z}(t)=M_{\sigma(t)}z$ اعمال می‌کنیم. بنابراین سیستم سوئیچینگ خطی $\dot{z}(t)=M_{\sigma(t)}z$ با زمان اقامت τ_D پایدار مجانبی مقاوم است، اگر ماتریس مثبت معین P_i و ضرایب مثبت λ_i و $\alpha_{i,k}$، به ازای هر $k\in\{1,2,\dots,r\}$ و هر زیرسیستم $i\in\mathcal{M}$، وجود داشته باشند به نحوی که مجموعه نامعادلات ماتریسی

$$P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\le-(\alpha_i+\lambda_i)P_i, \quad (۱۵\text{ الف})$$

$$e^{-\lambda_i\tau_D}P_i\le P_j\ ;\ i,j\in\mathcal{M}, \quad (۱۵\text{ ب})$$

$$P_iN_k^i+N_k^{iT}P_i\le\frac{\alpha_{i,k}}{c_k}P_i, \quad (۱۵\text{ ج})$$

$$P_iN_k^i+N_k^{iT}P_i\ge-\frac{\alpha_{i,k}}{c_k}P_i. \quad (۱۵\text{ د})$$

برقرار باشد، که M_i^o و N_k^i به ترتیب برابرند با

$$M_i^o=\begin{bmatrix}A_i^o+B_i^oK_i & L_iC_i\\ 0 & A_i^o-L_iC_i\end{bmatrix}$$

و

$$N_k^i=\begin{bmatrix}0 & 0\\ E_k^i-F_k^iK_i & E_k^i\end{bmatrix}$$

در ادامه با انتخاب ماتریس‌های $P_i=\begin{bmatrix}P_{i,1} & 0\\ 0 & \beta_iP_{i,2}\end{bmatrix}$، اثبات را ادامه می‌دهیم، که β_i ضرایب مثبتی هستند که مقادیر آن‌ها در حین اثبات مشخص می‌شود.

(۱۵ الف) برقرار است، اگر و تنها اگر به ازای هر $z=[\hat{x}^T,\tilde{x}^T]^T\in\mathbb{R}^{2n}$، رابطه $z^T\left(P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\right)z\le-(\alpha_i+\lambda_i)z^TP_iz$ برقرار باشد. همچنین با جایگذاری P_i و M_i^o در رابطه (۱۵ الف)، خواهیم داشت:

$$P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$$

که S_{ij} ها برابر هستند با:

$$S_{11}=P_{i,1}(A_i^o+B_i^oK_i)+(A_i^o+B_i^oK_i)^TP_{i,1},$$
$$S_{12}=P_{i,1}L_iC_i,$$
$$S_{21}=(L_iC_i)^TP_{i,1},$$
$$S_{22}=\beta_i\{P_{i,2}(A_i^o-L_iC_i)+(A_i^o-L_iC_i)^TP_{i,1}\}.$$

بنابراین رابطه زیر برای $z^T\left(P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\right)z$ برقرار است.

$$z^T\left(P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\right)z=$$
$$\hat{x}^T\left[P_{i,1}(A_i^o+B_i^oK_i)+(A_i^o+B_i^oK_i)^TP_{i,1}\right]\hat{x}+$$
$$\beta_i\tilde{x}^T\left[P_{i,2}(A_i^o-L_iC_i)+(A_i^o-L_iC_i)^TP_{i,1}\right]\tilde{x}+$$
$$2\hat{x}^TP_{i,1}L_iC_i\tilde{x}$$

اکنون، با اعمال لم مکمل شور بر روی روابط (۱۳ الف) و (۱۳ ب) روابط زیر بدست می‌آیند.

$$A_i^oQ_{i,1}+Q_{i,1}A_i^{oT}+B_i^oR_i+R_i^TB_i^{oT}\le(\alpha_i+\lambda_i+1)Q_{i,1} \quad (۱۶)$$

$$Q_{i,2}A_i^o+A_i^TQ_{i,2}-Y_iC_i-C_i^TY_i^T\le(\alpha_i+\lambda_i+1)Q_{i,2} \quad (۱۷)$$

با ضرب کردن طرفین نامعادله (۱۶) در $P_{i,1}=Q_{i,1}^{-1}$ و نامعادله (۱۷) در $P_{i,2}=Q_{i,2}^{-1}$ نامعادلات زیر را خواهیم داشت.

$$P_{i,1}\left(A_i^o+B_i^oR_iP_{i,1}\right)+\left(A_i^o+B_i^oR_iP_{i,1}\right)^TP_{i,1}\le(\alpha_i+\lambda_i+1)P_{i,1} \quad (۱۸)$$

$$P_{i,2}\left(A_i^o-P_{i,2}Y_iC_i\right)+\left(A_i^o-P_{i,2}Y_iC_i\right)^TP_{i,2}\le(\alpha_i+\lambda_i+1)P_{i,2} \quad (۱۹)$$

همچنین در صورتی که L_i و K_i را به صورت $L_i=P_{i,2}Y_i$ و $K_i=R_iP_{i,1}$ تعریف کنیم، نامعادله زیر برای $z^T\left(P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\right)z$ برقرار خواهد بود.

$$z^T\left(P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\right)z\le-\left[\hat{x}^TP_{i,1}\hat{x}+\beta_i\tilde{x}^TP_{i,2}\tilde{x}\right]-(\alpha_i+\lambda_i)z^TP_iz+2\hat{x}^TP_{i,1}L_iC_i\tilde{x}$$

همچنین با تعریف $\epsilon_{i,1}:=\sigma_{min}(P_{i,1})$ و $\epsilon_{i,2}:=\sigma_{min}(P_{2,1})$ به عنوان کوچکترین مقادیر استثنائی ماتریس‌های $P_{i,1}$ و $P_{i,2}$، می‌توان نشان داد که به ازای $\beta_i\ge\left\|P_{i,1}L_iC_i\right\|_2^2/\left(\epsilon_{i,1}\epsilon_{i,2}\right)$، نابرابری‌های زیر برقرار است.

$$z^T\left(P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\right)z\le2\hat{x}^TP_{i,1}L_iC_i\tilde{x}-\beta_i\epsilon_{i,2}\tilde{x}^T\tilde{x}-\epsilon_{i,1}\hat{x}^T\hat{x}-(\alpha_i+\lambda_i)z^TP_iz;\ \forall i\in\mathcal{M}$$

و

$$2\hat{x}^TP_{i,1}L_iC_i\tilde{x}-\beta_i\epsilon_{i,2}\tilde{x}^T\tilde{x}-\epsilon_{i,1}\hat{x}^T\hat{x}\le$$
$$2\hat{x}^TP_{i,1}L_iC_i\tilde{x}-\frac{\|P_{i,1}L_iC_i\|_2^2}{\epsilon_{i,1}}\tilde{x}^T\tilde{x}-\epsilon_{i,1}\hat{x}^T\hat{x}=$$
$$-\left(\sqrt{\epsilon_{i,1}}\hat{x}-\frac{\|P_{i,1}L_iC_i\|_2}{\sqrt{\epsilon_{i,1}}}\tilde{x}\right)^T\left(\sqrt{\epsilon_{i,1}}\hat{x}-\frac{\|P_{i,1}L_iC_i\|_2}{\sqrt{\epsilon_{i,1}}}\tilde{x}\right)<0$$

بنابراین، در صورتی که (۱۳ الف) و (۱۳ ب) برقرار باشند، رابطه $z^T\left(P_iM_i^o+M_i^{oT}P_i\right)z<-(\alpha_i+\lambda_i)z^TP_iz$ که همان رابطه (۱۵ الف) است برقرار خواهد بود. ضمن اینکه با ضرب کردن دو طرف نامعادلات ماتریسی (۱۵ ج) و (۱۵ د) در $Q_i=P_i^{-1}$ و جایگذاری N_k^i در آن‌ها، به روابط (۱۳ ه) و (۱۳ و) خواهیم رسید. همچنین با استفاده از (۱۳ ه) و (۱۳ و) نتیجه می‌شود $e^{\lambda_i\tau_D}Q_i\ge Q_j$، که معادل با نامعادله ماتریسی (۱۵ ب) است. لذا اثبات قضیه کامل شده است. θ

نکته ۳: در صورتی که ماتریس‌های مثبت معین Q_1 و Q_2 وجود داشته باشند، به نحوی که با قرار دادن $Q_{i,1}=Q_1$ و $Q_{i,2}=Q_2$ ($\forall i\in\mathcal{M}$، روابط (۱۳الف) – (۱۳د) برقرار باشند، سیستم سوئیچینگ خطی (۱) – (۳) با فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر حالت $\{K_i=R_iQ_1^{-1},i\in\mathcal{M}\}$ و $\{L_i=Q_2^{-1}Y_i,i\in\mathcal{M}\}$ به ازای هر سیگنال سوئیچ دلخواه پایدار خواهد بود. علاوه بر این، درصورتی که ماتریس‌های R و Y با ابعاد مناسب نیز وجود داشته باشند که روابط مذکور به ازای $R_i=R$ و $Y_i=Y$ برقرار باشند، سیستم سوئیچینگ خطی دارای نامعینی با استفاده از یک فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر تکی ($K=RQ_1^{-1}$ و $L=Q_2^{-1}Y$) و هر سیگنال سوئیچ دلخواه قابل پایدارسازی مقاوم است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

۵- مثال‌های عددی

مثال ۱- سیستم سوئیچینگ $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t)$ با ماتریس‌های A_i و B_i $(i = 1,2)$ نشان داده شده در معادلات (۲۰) را در نظر بگیرید. با فرض اینکه تمامی حالت‌های سیستم در دسترس باشند، بردارهای بهره فیدبک حالت پایدارساز را به نحوی تعیین می‌کنیم که سیستم سوئیچینگ حلقه بسته، به ازای هر سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت ۰/۱ ثانیه، پایدار مجانبی مقاوم باشد.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.8-0.2a & 6.3 & -0.6+0.2b \\ 1 & -0.1a-0.1c & 7 \\ 0.5-0.2b-0.3c & -3.7 & 0.9+0.3b-0.3a \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.8-0.2a+0.3b & 1.3-0.1c & 0.6-0.2b \\ 2 & -2.8-0.3a-0.2c & 2 \\ 1.4+0.2c & 1.3 & 0.3b-0.1a-0.3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1-0.2a \\ 2-0.1b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2+0.1a \\ 1 \\ 1+0.2c \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

که پارامترهای نامعین سیستم دارای ۲۰ درصد نامعینی حول مقادیر نامی بوده ومقادیر نامی آن‌ها نیز برابر است با $a^o = 6$، $b^o = 5$ و $c^o = 4$.

همانگونه که مشاهده می‌کنید، ماتریس‌های توصیف‌کننده ساختار نامعینی ماتریس‌های A_i و B_i به صورت زیر می‌باشند.

$$E_1^1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix} \quad E_1^2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \quad E_2^2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$E_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1^1 = [-0.2 \quad 0 \quad 0]^T \quad F_1^2 = [0.1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$F_2^1 = [0 \quad -0.1 \quad 0]^T \quad F_2^2 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$F_3^1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad F_3^2 = [0 \quad 0 \quad 0.2]^T$$

همچنین می‌توان ناپایدار بودن زیرسیستم‌های نامی $A_i^o = A_i(a^o, b^o, c^o)$، که در (۲۱) نشان داده شده‌اند، را بررسی نمود.

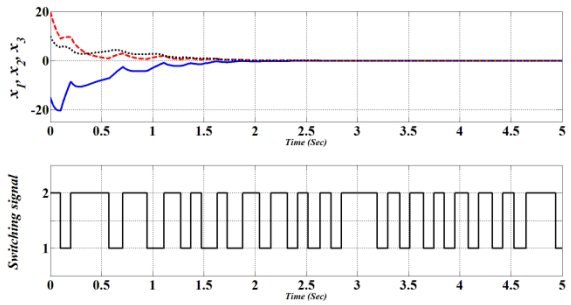
$$\mathrm{A}_1^o = \begin{bmatrix} -4 & 6.3 & 0.4 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1.7 & -3.7 & 0.6 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B}_1^o = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۱ \text{ الف})$$

$$\mathrm{A}_2^o = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.9 & -0.4 \\ 2 & -5.4 & 2 \\ 2.2 & 1.3 & 0.6 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B}_2^o = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 1 \\ 1.8 \end{bmatrix} \qquad (۲۱ \text{ ب})$$

می‌توان به سادگی بررسی نمود که شرط کنترل‌پذیر بودن زیرسیستم‌های نامی برقرار است. بنابراین با استفاده از نتایج ارائه شده در قضیه ۱ و حل مجموعه نامعادلات ماتریسی (۶ الف) - (۶ د) با کمک جعبه ابزار YALMIP در نرم‌افزار MATLAB، می‌توان به نتایج نشان داده شده در جدول ۱ دست یافت $(K_i = R_i Q_i^{-1})$. همچنین نتایج شبیه‌سازی سیستم سوئیچینگ (۲۰) به ازای پارامترهای $a = 5.4$، $b = 5.7$ و $c = 4.5$ و K_1 و K_2 نشان داده شده در جدول ۱ و یک سیگنال سوئیچ با زمان اقامت تصادفی حداقل برابر با۰/۱ ثانیه در شکل ۳ نشان داده شده است.

جدول ۱: ماتریس‌های R_i، Q_i و K_i به همراه ضرایب $\alpha_{i,k}$ و λ_i بدست آمده از قضیه ۱ برای سیستم سوئیچینگ (۲۰)

زیرسیستم اول
$\alpha_{1,k} = 1\,;(k = 1,2,3)\,, \quad \lambda_1 = 2$
$R_1 = [-5.325 \quad -5.406 \quad -6.628]$
$Q_1 = \begin{bmatrix} 3.113 & 0.048 & -0.013 \\ 0.048 & 3.150 & 0.026 \\ -0.013 & 0.026 & 3.155 \end{bmatrix}$
$K_1 = [-1.6939 \quad -1.6736 \quad -2.0941]$
زیرسیستم دوم
$\alpha_{2,k} = 1\,;(k = 1,2,3)\,, \quad \lambda_2 = 2$
$R_2 = [-8.229 \quad -11.113 \quad -6.854]$
$Q_2 = \begin{bmatrix} 3.160 & -0.003 & 0.002 \\ -0.003 & 3.144 & -0.008 \\ 0.002 & -0.008 & 3.145 \end{bmatrix}$
$K_2 = [-2.6064 \quad -3.5424 \quad -2.1861]$



شکل ۳: حالت‌های سیستم سوئیچینگ خطی پایدارسازی شده با استفاده از فیدبک حالت (بالا)، به ازای سیگنال سوئیچ نشان داده شده با حداقل زمان اقامت ۰/۱ ثانیه (پایین)

مثال ۲: در صورتی که در سیستم سوئیچینگ خطی توصیف شده در مثال ۱، تمامی حالت‌ها در دسترس نباشند و تنها خروجی زیرسیستم‌ها، با معادله نشان داده در (۲۲)، قابل اندازه‌گیری باشند، بردارهای بهره فیدبک حالت پایدارساز مبتنی بر رویتگر حالت را به نحوی تعیین می‌کنیم که سیستم سوئیچینگ حلقه بسته، به ازای هر سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت ۰/۱ ثانیه، پایدار مجانبی مقاوم باشد.

$$y = [1 \quad 2 \quad 4]x \qquad (۲۲)$$

از آنجا که زیرسیستم‌های نامی نشان داده شده در (۲۱) و (۲۲)، شرط کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری را برآورده می‌کنند، با استفاده از نتایج ارائه شده در قضیه ۲ و به کمک جعبه ابزار YALMIP، نتایج نشان داده شده در جدول ۲ بدست می‌آید. ضمن اینکه نتایج شبیه‌سازی سیستم سوئیچینگ (۲۰) و (۲۲) به ازای پارامترهای $a = 5.4$، $b = 5.7$ و $c = 4.5$ و K_1، K_2، L_1 و L_2 نشان داده شده در جدول ۲ و یک سیگنال سوئیچ با زمان اقامت تصادفی حداقل برابر با ۰/۱ ثانیه در شکل ۴ نشان داده شده است. همچنین نتایج شبیه‌سازی سیستم سوئیچینگ (۲۰) و (۲۲) به ازای پارامترهای نامی $a = 6$، $b = 5$ و $c = 4$ به ازای همان سیگنال سوئیچ در شکل ۵ نشان داده شده است.

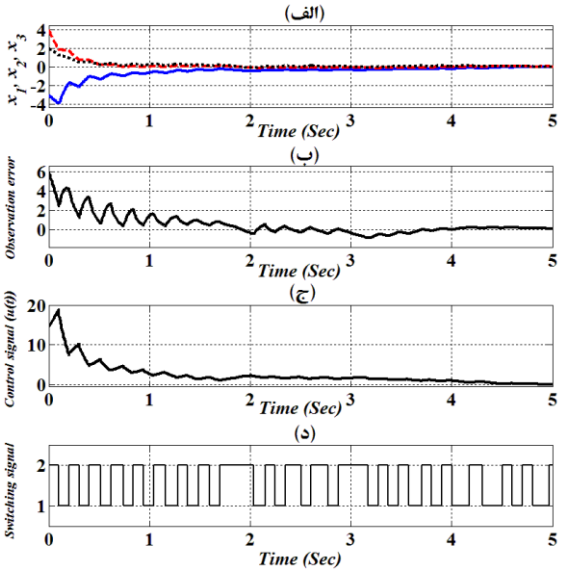
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

جدول ۲: ماتریس‌های Q_i، K_i و L_i به همراه ضرایب $\alpha_{i,k}$ و λ_i بدست آمده از قضیه ۲ برای سیستم سوئیچینگ (۲۰) و (۲۲)

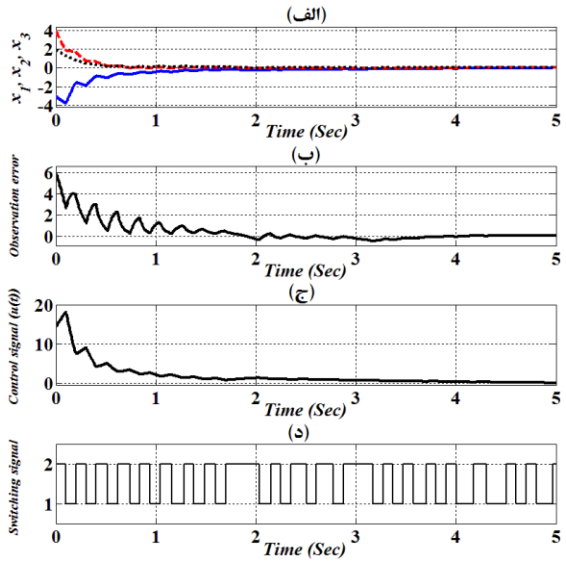
زیرسیستم اول
$\alpha_{1,k}=1\,;(k=1,2,3)\,,\quad \lambda_1=2$
$Q_{1,1}=\begin{bmatrix}4.4961 & -1.1888 & 0.6833\\ -1.1888 & 1.1321 & -0.1733\\ 0.6833 & -0.1733 & 1.1118\end{bmatrix}$
$Q_{1,2}=\begin{bmatrix}1.6947 & -1.2613 & 1.2863\\ -1.2613 & 9.6218 & 0.0708\\ 1.2863 & 0.0708 & 5.4680\end{bmatrix}$
$K_1=[-0.1983 \quad -2.5040 \quad -1.6629]$
$L_1=[-2.0472 \quad 0.4289 \quad 1.7171]^T$
زیرسیستم دوم
$\alpha_{2,k}=1\,;(k=1,2,3)\,,\quad \lambda_2=2$
$Q_{2,1}=\begin{bmatrix}4.9249 & -1.0792 & 1.2624\\ -1.0792 & 1.4360 & -0.4070\\ 1.2624 & -0.4070 & 1.1252\end{bmatrix}$
$Q_{2,2}=\begin{bmatrix}1.3316 & -1.5988 & 0.9263\\ -1.5988 & 10.6330 & 0.0750\\ 0.9263 & 0.0750 & 6.3105\end{bmatrix}$
$K_2=[-1.3966 \quad -0.9194 \quad -2.2507]$
$L_2=[3.4864 \quad 0.6847 \quad 0.4784]^T$

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله پایدارسازی با فیدبک حالت و سیگنال سوئیچ دارای حداقل زمان اقامت مشخص برای سیستم‌های سوئیچینگ خطی دارای نامعینی پارامتری بررسی شد. ابتدا با فرض قابل اندازه‌گیری بودن تمامی حالت‌ها، یک روش طراحی ماتریس‌های بهره فیدبک حالت بر اساس حل مجموعه نامعادلات ماتریسی خطی پیشنهاد شده تا بتوان سیستم سوئیچینگ خطی نامعین را به ازای تمامی سیگنال‌های سوئیچ با حداقل زمان اقامت مشخص پایدار نمود. از آنجا که در اغلب کاربردهای عملی، تنها خروجی‌های سیستم در دسترس هستند و امکان اندازه‌گیری همه‌ی حالت‌های سیستم وجود ندارد، روش طراحی بهره‌های فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر، جهت پایدارسازی مقاوم طراحی شد و پایداری سیستم حلقه بسته با فرض کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر بودن زیرسیستم‌های نامی اثبات گردید. اگرچه روش‌های پیشنهادی برای پایدارسازی مقاوم ارائه شده است، اثبات شده است که آن‌ها برای طراحی فیدبک حالت پایدارساز در سیستم‌های سوئیچینگ بدون نامعینی نیز قابل استفاده می‌باشند. به منظور ارزیابی صحت و کارایی روش‌های پیشنهادی برای پایدارسازی مقاوم، مثال‌هایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.



شکل ۴: (الف) حالت‌های سیستم سوئیچینگ خطی پایدارسازی شده با استفاده از فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر، (ب) خطای رویتگر حالت $e(t)=\left(y(t)-C_{\sigma(t)}\hat{x}(t)\right)$، (ج) سیگنال کنترلی $u(t)=K_{\sigma(t)}\hat{x}(t)$ و (د) سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت ۰/۱ ثانیه برای سیستم سوئیچینگ مثال ۲ و پارامترهای $a=5.4$، $b=5.7$ و $c=4.5$.



شکل ۵: (الف) حالت‌های سیستم حلقه بسته پایدار شده با استفاده از فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر، (ب) خطای رویتگر حالت $e(t)=\left(y(t)-C_{\sigma(t)}\hat{x}(t)\right)$، (ج) سیگنال کنترلی $u(t)=K_{\sigma(t)}\hat{x}(t)$ و (د) سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت ۰/۱ ثانیه، برای سیستم سوئیچینگ مثال ۲ و پارامترهای $a=6$، $b=5$ و $c=4$.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

مراجع

[1] S. C. Bengea and R. A. DeCarlo, "Optimal control of switching systems," *Automatica*, vol. 41, no. 1, pp. 11-17, Jan. 2005.

[2] N.H. El-Farra, A. Gani, and P.D. Christofides, "A switched systems approach for the analysis and control of mode transitions in biological networks," In: *Proc. ACC*, vol. 5, pp. 3247 – 3252, 2005.

[3] I. Mallocia, J. Daafouz, C. Iunga, R Bonidalb, and P. Szczepanskib, "Switched system modeling and robust steering control of the tail end phase in a hot strip mill," *Nonlinear analysis: hybrid systems*, vol. 3, no. 3, pp. 239–250, Aug. 2009.

[4] Q. Su and J. Zhao, "Stabilization of a class of switched systems with state constraints," *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, no. 2, pp. 1499-1510, October 2012.

[5] D. Palejiya, J. Hall, C. Mecklenborg, and D. Chen, "Stability of Wind Turbine Switching Control in an Integrated Wind Turbine and Rechargeable Battery System: A Common Quadratic Lyapunov Function Approach," *J. Dynamic Sys., Measur., & Control*, vol. 135, no. 2, p. 021018, Feb. 2013.

[۶] خ. سخنور، ع. کریم‌پور و ن. پریز، ۱۳۹۲، "پایدارسازی سیستم‌های همگن سوئیچ‌شونده با استفاده از تابع لیاپانوف مشترک"، مجله کنترل، جلد ۷، شماره ۲، ص ۱۱-۱۹.

[7] D. Liberzon, *Switching in systems and control*. Boston: Birkhäuser, 2003.

[8] Z. Sun and S. S. Ge, *Switched linear systems: control and design*, Springer, London, UK, 2005.

[9] R. Shorten, K.S. Narendra, and O. Mason, "result on common quadratic Lyapunov functions," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. 48, no. 1, pp. 110-113, 2003.

[10] H. Lin and P.J. Antsaklis, "Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 2, pp. 308-322, 2009.

[11] A.A. Agrachev, Y. Baryshnikov, and D. Liberzon, "On robust Lie-algebraic stability conditions for switched linear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 2, pp. 347–353, Feb. 2012.

[12] Y. Baryshnikov and D. Liberzon, "Robust stability conditions for switched linear systems: Commutator bounds and the Łojasiewicz inequality," in *52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 2013, pp. 722-726.

[13] J. P. Hespanha, "Stabilization through hybrid control," In: encyclopedia of life support systems (EOLSS), 2004.

[14] J. C. Geromel and P. Colaneri, "Stability and stabilization of continuous-time switched systems," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 45, no. 5, pp. 1915–1930, 2006.

[15] G. Chesi, P. Colaneri, J.C. Geromel, R. Middleton, and R. Shorten, "Computing upper-bounds of the minimum dwell time of linear switched systems via homogeneous polynomial Lyapunov functions," In: *Proc. ACC*, pp. 2487–2492, 2010.

[16] L.I. Allerhand and U. Shaked, "Robust stability and stabilization of linear switched systems with dwell time," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. 56, no. 2, pp. 381–386, Feb. 2011.

[17] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. 43, no. 4, pp. 475–482, Apr. 1998.

[18] H. Lin and P. J. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. 45, no. 2, pp. 308–322, 2009.

[19] G. Zhao and J. Wang, "Finite time stability and L2-gain analysis for switched linear systems with state-dependent switching," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 5, pp. 1075–1092, 2013.

[20] E. Feron, "Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback," *MIT technical report* , pp. 1–13, 1996.

[21] S. Pettersson and B. Lennartson, "Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy," In *Proc. ACC.*, pp. 223–228, 2001.

[22] S. Pettersson, "Synthesis of switched linear systems," in *Proc. IEEE CDC*, pp. 5283–5288, 2003.

[۲۳] ح. ملااحمدیان، ع. کریم‌پور و ن. پریز، ۱۳۹۰، "پایدارسازی و کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی: دیدگاه مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی"، مجله کنترل، جلد ۵، شماره ۲، ص ۱۲-۲۱.

[24] H. Liua, Y. Shena, and X. Zhao, "Finite-time stabilization and boundedness of switched linear system under state-dependent switching," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 3, 541–555, 2013.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]

[25] D. Cheng, L. Guo, Y. Lin, and Y. Wang, "Stabilization of switched linear systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 50, no. 5, pp. 661–666, May 2005.

[26] D. Xie and X. Chen, "Observer-based switched control design for switched linear systems with time delay in detection of switching signal," *IET Control theory & Appl.*, vol. 12, no. 5, pp. 437–445, May 2008.

[27] Y. Yang, C. Xiang, and T. H. Lee, "Feedback stabilization for planar switched linear systems with two subsystems under arbitrary switching," In *Proc. IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, Santiago, Chile, pp. 738–743, 2011.

[28] G.M. Xie, L.Wang, "Stabilization of switched linear systems with time-delay in detection of switching signal," *J. Math. Anal. Appl*., vol. 305, no. 1, pp. 277–290, 2005.

[29] Y.E. Wang, J. Zhao, B. Jiang, "Stabilization of a class of switched linear neutral systems under asynchronous switching," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 58, no. 8, pp. 2114–2119, 2013.

[30] D. Ma and J. Zhao, "Stabilization of networked switched linear systems: An asynchronous switching delay system approach," *Systems & Control Letters*, vol. 77, no. 1, pp. 46–54, Jan. 2015.

[31] G. Zhai, H. Lin, and P.J. Antsaklis, "Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties," *Int. J. Control*, vol. 76, no. 7, pp. 747–753, May 2003.

[32] T. Soga and N. Otsuka, "Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems by output feedback," in *Proc. ACC*, pp. 3920–3925, 2010.

[33] Z. Sun, "A robust stabilizing law for switched linear systems," *Int. J. Control*, vol. 77, no. 4, pp. 389–398, Mar. 2004.

[34] J.L. Mancilla-Aguilar and R.A. García, "An algorithm for the robust exponential stabilization of a class of switched systems," *Int. J. Robust & Nonlinear Control*, 2014.

[35] J. Raouf and H. Michalska, "Robust Exponential Stabilization of Switched Linear Systems," In Proc. IEEE CDC, Shanghai, pp. 4246–4251, 2009.

[36] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1393.8.4.4.6]