مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۷، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۲، صفحه ۳۹-۳۱

طراحی کنترل کننده پیش بین مقید بر اساس برنامه ریزی چند پارامتری برای واحد بویلر یک پالایشگاه گاز

بابک توسلی[۱]، فرید بادفر[۲]

[۱] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل و سیستم، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، tavassoli@eetd.kntu.ac.ir

[۲] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل و سیستم ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ef.badfar@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۸/۲۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۱۱/۲۰)

چکیده: یکی از نقاط عطف در سیر تکامل کنترل پیش بین استفاده از روش های برنامه ریزی چند پارامتری در حل مسائل بهینه سازی در کنترل پیش بین مقید و دستیابی به حل صریح بوده است. با این وجود تاکنون از کنترل کننده پیش بین مقید مبتنی بر برنامه ریزی چند پارامتری به صورت گسترده در صنعت استفاده نشده است. در این مقاله پس از توضیح مختصر شیوه کنترل مذکور به مدل سازی بویلر یک پالایشگاه گاز و خطی سازی مدل غیر خطی بدست آمده حول نقطه کار آن خواهیم پرداخت. سپس با بکار گیری روش کنترل مذکور نشان داده خواهد شد که کنترل کننده پیش بین مقید مبتنی بر برنامه ریزی چند پارامتری نسبت به کنترل کننده PID عملکرد بسیار بهتری دارد در حالیکه از لحاظ محاسباتی دارای سرعت بسیار بیشتری نسبت به کنترل کننده پیش بین مقید معمولی می‌باشد.

کلمات کلیدی: کنترل پیش بین مقید، برنامه ریزی چند پارامتری، واحد بویلر، پالایشگاه گاز.

Constrained Model Predictive Controller Design Based on Multi-parametric Programming for the Boiler Unit of a Gas Refinery

Farid Badfar, Babak Tavassoli

Abstract: One of the breakthroughs in the progress of model predictive control is usage of the multi-parametric programming methods in solving the optimization problems in the constrained model predictive control algorithms to obtain explicit solutions. However, constrained model predictive control based on multi-parametric programming has not yet been applied widely in industries. In this paper, after a brief description of this method, nonlinear modeling of the boiler is considered and the obtained model is linearized at a working point. Then, the mentioned control method is applied and it is shown that the constrained model predictive control with multi-parametric programming has a much better performance with respect to the PID control, while it is computationally much faster with respect to the ordinary constrained model predictive control.

Keywords: Constrained Model Predictive Control, Multi-parametric Programming, Boiler Unit, Gas Refinery.

۱- مقدمه

در روش کنترل پیش بین سیگنال کنترل به نحوی محاسبه می‌شود که یک تابع هزینه از متغیرهای فرآیند در یک پنجره زمانی با طول مشخص موسوم به افق پیش بینی از زمان فعلی تا زمانی در آینده بهینه باشد. برای بهینه سازی در این روش از مدل سیستم بهره گرفته می شود که این مدل می تواند خطی و یا غیرخطی باشد. ازجمله ویژگی های بارز کنترل کننده پیش بین مقید می توان به امکان در نظر گرفتن قیود و محدودیت های اعمال شده بر روی متغیرهای سیستم اشاره نمود. در این

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

روش برای به دست آوردن سیگنال های کنترل بهینه در هر لحظه، باید یک مساله بهینه سازی را حل نمود که از این امر با عنوان بهینه سازی پیاپی یاد می‌شود [۱، ۲]. لذا طراحی کنترل پیش بین مقید نیاز به حجم محاسبات بالایی دارد و پیاده سازی آن نیازمند پردازنده های سریع و توانمند در مقایسه با کنترل کننده های معمولی می‌باشد که این مساله دشواری ها و هزینه هائی را به دنبال دارد. با در نظر گرفتن این موضوع که پردازشگر اجرا کننده الگوریتم کنترل معمولا وظائف متنوع دیگری را نیز بر عهده دارد، اهمیت پیاده سازی الگوریتم کنترل با حجم محاسبات محدود مشخص تر می‌شود. در شرایطی که برای کنترل سیستم مورد نظر به زمان نمونه برداری کوچک نیاز باشد حجم محاسبات کنترلی بالا می‌تواند موجب اشکالاتی از جمله تأخیر محاسباتی، کاهش قابلیت اطمینان، پیچیدگی نرم افزارکنترل پیش بین و حتی ناپایداری سیستم بشود. این اشکالات می‌توانند دامنه استفاده از کنترل پیش بین را بخصوص در کاربردهایی که حساسیت بیشتری دارند کاهش دهد [۳].

در دهۀ اخیر روشی مناسب برای حل مسائل بهینه سازی مقید برای طراحی کنترل پیش بین مقید ارائه شده است که دامنه استفاده از این کنترل کننده را افزایش خواهد داد و امکان استفاده از این روش کنترل را در مقیاس زمان نمونه برداری بسیارکوچک در حد میکرو ثانیه فراهم می‌آورد. در روش برنامه ریزی چند پارامتری عناصر بردار حالت (متغیر های حالت) به صورت پارامتر در مساله ظاهر می‌شوند، که این امر وجه تسمیه روش برنامه ریزی چند پارامتری می‌باشد [۴، ۵]. با استفاده از این روش برنامه ریزی، فضای حالت سیستم به مجموعه های چندوجهی افراز می‌شود که برای هر یک از این مجموعه ها قانون کنترل بهینه به صورت یک تابع متناسب (Affine) از بردار حالت به دست می‌آید. بدین ترتیب می‌توان حل بسته به صورت یک تابع متناسب-تکه ای برای مسئله بهینه سازی مربعی یا خطی بدست آورد و محاسبات مربوط با بهینه سازی را از الگوریتم کنترل پیش بین مقید حذف نمود. در [۳] و [۵] دو روش برنامه ریزی چند پارامتری برای طراحی کنترل کننده پیش بین مقید برای سیستم های خطی و تابع هزینه مربعی ارائه شده است. روش ارائه شده در [۵] به مراتب موثرتر از روش اصلی پیشنهادی در [۳] است. همچنین در [۶] و [۷] طراحی کنترل پیش بین مقید با تابع هزینه ای برحسب نرم $\mathcal{L}_1$ (بجای فرم مربعی) بر اساس برنامه ریزی خطی چند پارامتری انجام شده است. با وجود اینکه پیاده سازی چند پارامتری کنترل پیش بین مزایای متعددی دارد بکارگیری آن در کاربردهای واقعی هنوز در ابتدای راه و در مراحل آزمایشی است [۸، ۹]. دلیل این امر علاوه بر جدید بودن روش تا حدودی به حجم بالای محاسبات مربوط به طراحی کنترل کننده باز می‌گردد که کاهش حجم این محاسبات از موضوعات پژوهشی باز به شمار می‌رود [۱۰، ۱۱، ۱۲].

در این مقاله دو هدف اصلی مد نظر قرار می‌گیرد: اول بررسی اعمال کنترل پیش بین به منظور کنترل عملکرد بویلر یک پالایشگاه گاز واقعی. دوم ارزیابی پیاده سازی چند پارامتری کنترل پیش بین از لحاظ سرعت اجرا در مورد بویلر مذکور و مقایسه کمّی آن با پیاده سازی معمولی کنترل پیش بین. با توجه به اینکه در منابع دیگر بدون تحلیل کمی تنها به برتری های پیاده سازی کنترل پیش بین بر اساس برنامه ریزی چند پارامتری اشاره شده، دستیابی به هدف دوم مهم و جالب توجه است. انتخاب واحد بویلر برای امکان سنجی اعمال کنترل پیش بین بر اساس نظر مهندسین پالایشگاه در مورد اهمیت این واحد انجام شده است. مدل سیستم بویلر بر اساس تحلیل نظری و استخراج پارامترهای مورد نیاز از مستندات و مشاهدات انجام شده است. متاسفانه به دلیل محدودیت های فنی در اخذ داده های فرآیند، امکان اعتبار سنجی کامل مدل بویلر فراهم نبوده است. در صورت انجام اعتبار سنجی کامل، کنترل پیشنهاد شده احیانا پس از تنظیمات جزئی قابل بکارگیری در عمل می‌باشد.

در ادامه در بخش ۲ روش برنامه ریزی چند پارامتری برا ی حل مساله کنترل پیش بین مقید در مرجع [۵] به طور مختصر مرور می‌شود. سپس در بخش ۳ به مدل سازی بویلر و خطی سازی مدل بدست آمده می‌پردازیم. در بخش ۴ بررسی عملکرد کنترل کننده های PID برای کنترل بویلر مورد توجه قرار خواهد گرفت و در بخش ۵ روش کنترل پیش بین مقید بر مبنای برنامه ریزی چند پارامتری به بویلر اعمال خواهد شد و مقایسه ای با نتایج بخش قبل از آن صورت خواهد پذیرفت، در بخش ششم ارزیابی و مقایسه زمان اجرای کنترل پیش بین در حالت های معمولی (مبتنی بر بهینه سازی مقید در زمان اجرا) و چند پارامتری صورت می‌پذیرد و در بخش آخر به نتیجه گیری خواهیم پرداخت.

۲- روش چند پارامتری برای حل مسئله بهینه سازی مربعی

سیستم خطی و مقید زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ &y = Cx(t) \\ &y_{min} \le y \le y_{max} \text{ ،} \\ &u_{min} \le u \le u_{max} \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن ماتریس‌های A و B شرط کنترل‌پذیری را برآورده می‌کنند. در این حالت مسئله بهینه سازی مربعی برای کنترل پیش بین به شکل زیر تعریف می‌شود که در آن عدد صحیح مثبت N افق پیش بینی نام دارد و به ازای سیگنال نوعی z پیش بینی مقدار $z(t+k)$ در زمان t به صورت $z_{t+k|t}$ نشان داده می‌شود. همچنین U به صورت $U = [u_t \;\; u_{t+1} \dots u_{t+N-1}]^T$ تعریف می‌شود.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

$$\begin{aligned}
&\min\{J(U(t),x(t)) = x_{t+N|t}^T P x_{t+N|t} \\
&\quad + \textstyle\sum_{k=0}^{N-1} x_{t+k|t}^T Q x_{t+k|t} + u_{t+k|t}^T R u_{t+k|t}\} \\
&y_{min} \le y_{t+k|t} \le y_{max} \\
&u_{min} \le u_{t+k|t} \le u_{max} \\
&x_{t|t} = x(t) \\
&x_{t+k+1|t} = A x_{t+k|t} + B u_{t+k|t} \\
&y_{t+k|t} = C x_{t+k|t} + D u_{t+k|t} \\
&\qquad k = 0,1,\dots N-1
\end{aligned} \tag{۲}$$

در روابط (۲) ماتریس $R > 0$ ماتریس وزنی ورودی‌ها در افق پیش بینی، $Q \ge 0$ ماتریس وزنی حالت‌ها در افق پیش بینی و $P > 0$ ماتریس وزنی حالت پایانی است.

با حل و محاسبه $x_{t+k|t}$ بر حسب $x(t)$ با توجه به (۱) به صورت $x_{t+k|t} = A^k x(t) + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j}$ و جایگذاری نتیجه در رابطه (۲) می‌توان مسئله بهینه سازی را به فرم زیر ساده کرد.

$$\begin{aligned}
&J = \frac{1}{2}(x_t^T Y x_t) + \\
&\qquad \min\left\{\tfrac{1}{2}(U^T H U) + (x_t^T F U)\right\} \\
&GU \le W + Ex(t)
\end{aligned} \tag{۳}$$

در رابطه (۳) ماتریس‌های H، F، Y، G، W، E به سادگی از ماتریس‌های R، Q، P و روابط (۲) به دست می‌آید. نهایتا با انجام تغییر متغیر $Z = U + H^{-1}F^T x(t)$ می‌توان مسئله بهینه‌سازی (۳) را به صورت معادل (۴) تبدیل نمود.

$$\begin{aligned}
&J_z = \min\left\{\frac{1}{2} Z^T H Z\right\} \\
&GZ - W - Sx(t) \le 0 \\
&Z = U + H^{-1}F^T x(t)
\end{aligned} \tag{۴}$$

راه حل چند پارامتری مسئله بهینه سازی (۴) براساس شرایط کوهن- تاکر (Kuhn-Tucker) می‌باشد [۵]. تابع لاگرانژین مساله (۴) را به صورت $\frac{1}{2}Z^T H Z + \lambda^T(GZ - W - Sx)$ در نظر می‌گیریم. ضرایب لاگرانژ شرط $\lambda \ge 0$ را برآورده می کنند. در صورت برآورده شدن قید i ام به صورت تساوی $G^i Z - W^i - S^i x(t) = 0$ (که بالانویس i برای ماتریس نشاندهنده سطر i ام آن است) اصطلاحا می‌گوئیم قید i ام فعال است. اگر قیدی فعال نباشد از آن با عنوان قید غیرفعال یاد می‌شود. اگر داشته باشیم $\lambda_i > 0$ آنگاه قید i ام الزاما فعال می‌باشد. لذا می توان قیود نامساوی $GZ - W - Sx(t) \le 0$ به قیود مساوی به صورت $\lambda_i(G^i Z - W^i - S^i x) = 0$ تبدیل نمود.

با مشتق گیری از لاگرانژین مقدار بهینه Z که در واقع تابعی از x می باشد به شکل زیر به دست می‌آید.

$$Z^*(x) = -H^{-1}G^T\lambda \tag{۵}$$

بدین ترتیب می‌توان ماتریس‌های $\tilde{G}$، $\tilde{W}$ و $\tilde{S}$ را که شامل سطرهای ماتریس‌های G^i، W^i و S^i متناظر با قیود فعال است را به دست آورد. که در این حالت $\tilde{\lambda}$ و $Z^*(x)$ به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\tilde{\lambda} = -\left(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T\right)^{-1}(\tilde{W} + \tilde{S}x) \\
&Z^*(x) = H^{-1}\tilde{G}^T\left(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T\right)^{-1}(\tilde{W} + \tilde{S}x)
\end{aligned} \tag{۶}$$

برای اینکه در روابط فوق $Z^*(x)$ حل بهینه برای مسئله (۴) باشد لازم است که داشته باشیم $\tilde{\lambda} \ge 0$ و نیز قیود مسئله بهینه سازی $GZ^* \le W + Sx(t)$ برقرار باشند یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}
&-\left(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T\right)^{-1}(\tilde{W} + \tilde{S}x) \ge 0 \\
&H^{-1}\tilde{G}^T\left(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T\right)^{-1}\left(\tilde{W} + \tilde{S}x\right) \le W + Sx
\end{aligned} \tag{۷}$$

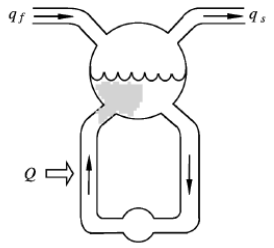
این دو رابطه یک چند وجهی را در فضای حالت توصیف می‌کند. این ناحیه در واقع یک ناحیه بحرانی به ازای ترکیب مشخصی از فعال بودن قیود مساله (۴) است. تعداد حالت های ممکن برای فعال بودن قیود بسیار زیاد است و در عمل نمی توان با بررسی تمام ترکیب های ممکن تعداد نواحی بحرانی را بدست آورد. قضیه ۲ در [۵] در واقع شیوه ای برای محاسبه این نواحی می باشد. پس از تعیین نواحی مذکور می‌توان Z^* را با استفاده از رابطه (۵) و در نتیجه U^* و سیگنال کنترل را به‌دست آورد. نتیجه این محاسبات یک تابع متناسب تکه ای برای سیگنال کنترل بر حسب $x(t)$ خواهد بود .

۳- سیستم بویلر

در فرآیند پالایش گاز، بویلر بخار مورد نیاز واحد تصفیه گاز را تامین می‌کند. در شکل ۱ عملکرد بویلر به طور ساده نشان داده شده است. مطابق با این شکل انرژی گرمائی Q (بر حسب KJ/hr) به تیوب ها برای جوشاندن آب تغذیه منتقل می‌شود و برای تولید بخاراشباع، آب تغذیه در حالت مایع فشرده با دبی q_f (بر حسب ton/hr) در داخل مخزن بخار پخش می‌شود. بخار اشباع با دبی q_s (بر حسب ton/hr) از بویلر خارج و به قسمت تولید بخار خشک فرستاده می‌شود. دمای آب درون بویلر تقریبا ثابت و برابر با نقطه جوش آب است ولی دمای بخار متغیر بوده و می‌توان گفت که انرژی بویلر در بخار موجود در آن ذخیره می‌شود. به دلیل گردش سریع ماده و انرژی در درون بویلر می‌توان فرض نمود که توزیع دمای بخار در درون بویلر یکنواخت است. با تغییر فشار بویلر، تغییر فاز بین آب و بخار صورت می‌پذیرد که این امر باعث برهم کنش بین دینامیک های فشار و حجم آب در بویلر می‌گردد. مدلسازی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

دقیق این دینامیک ها با استفاده از روابط تعادل جرم و تعادل انرژی انجام می‌شود و نتیجه آن به صورت معادلات دیفرانسیل مرتبه اول قابل نمایش است [۱۳].



شکل ۱: شماتیک بویلر

برای مدل سازی بویلر فرض کنیم که ورودی های سیستم، Q، q_f و q_s و خروجی های سیستم فشار بویلر p (Kg/cm^2) و حجم آب مخزن V (m^3) باشند. همچنین فرض می‌کنیم که ϱ_x چگالی‌ویژه، h_x آنتالپی ویژه، u_x انرژی درونی ویژه و V_x حجم برای جزء x هستند. اندیس x می‌تواند برابر با f، w، s باشد که به ترتیب نشان دهنده آب تغذیه، آب اشباع و بخار اشباع هستند. جرم کل فلز مخزن و تیوب‌ها را با m ، دمای آن را با t_m و گرمای ویژه فلز را با C_p نشان می‌دهیم که بر این اساس روابط تعادل جرم و انرژی به صورت زیر خواهند بود

$$\frac{d}{dt}\left[\varrho_s V_s + \varrho_w V_w\right] = q_f - q_s \qquad (۱-۸)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\varrho_s u_s V_s + \varrho_w u_w V_w + mC_p t_m\right] = Q + q_f h_f - q_s h_s \qquad (۲-۸)$$

می‌دانیم که انرژی درونی ویژه u برابر است با $h - p/\varrho$ که با جایگذاری این رابطه در (۸-۲) و با در نظر گرفتن $V = V_w + V_s$ می‌توان رابطه تعادل انرژی را به فرم زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt}\left[\varrho_s h_s V_s + \varrho_w h_w V_w - pV + mC_p t_m\right] = Q + q_f h_f - q_s h_s \qquad (۹)$$

۳-۱ معادلات حالت غیر خطی سیستم

معادلات (۸-۱) و (۹) یک مدل ساده از بویلر را نمایش می‌دهند. برای نمایش معادلات حالت سیستم در قالب معادلات فضای حالت، فشار و حجم آب در مخزن بویلر را به عنوان متغیرهای حالت در نظر می‌گیریم. در نتیجه با باز نویسی روابط (۸-۱) و (۹) با استفاده از قاعده زنجیره ای و رابطه $V = V_s + V_w$ معادلات حالت سیستم به شکل غیر خطی زیر بدست می‌آید.

$$e_{11}\frac{dV_w}{dt} + e_{12}\frac{dp}{dt} = q_f - q_s$$
$$e_{21}\frac{dV_w}{dt} + e_{22}\frac{dp}{dt} = Q + q_f h_f - q_s h_s \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$e_{11} = \varrho_w - \varrho_s$$
$$e_{12} = (V - V_w)\frac{\partial \varrho_s}{\partial p} + V_w \frac{\partial \varrho_w}{\partial p}$$
$$e_{21} = \varrho_w h_w - \varrho_s h_s$$
$$e_{22} = (V - V_w)\left(h_s \frac{\partial \varrho_s}{\partial p} + \varrho_s \frac{\partial h_s}{\partial p}\right) + V_w\left(h_w \frac{\partial \varrho_w}{\partial p} + \varrho_w \frac{\partial h_w}{\partial p}\right) - V + mC_p \frac{\partial t_s}{\partial p} \qquad (۱۱)$$

در روابط فوق V_s و V_w به ترتیب حجم کل بخار و آب را نمایش می‌دهد. بررسی های دقیق نشان داده اند که دمای فلز در حالت تعادل بسیار نزدیک به دمای اشباع است به طوریکه $t_m \approx t_s$. لذا در محاسبه e_{22} در (۱۱) مقدار t_m با مقدار t_s جایگزین شده است. مقادیر ضرائب در (۱۱) را می‌توان با استفاده از جداول بخار اشباع فرایند درفشار ثابت به دست آورد [۱۴].

۳-۲- محاسبه انرژی ورودی به بویلر

سوخت مورد استفاده در پالایشگاه گاز، از نوع گاز طبیعی است که بخش عمده آن را گاز متان تشکیل می‌دهد. فرض می‌کنیم سوخت مورد استفاده در واحد پالایشگاه از دو ترکیب متان با مقدار ۸۰٪ جرمی و اتان با ۲۰٪ جرمی تشکیل شده باشد. با توجه به نسبت اکسیژن و نیتروژن در هوا، واکنش شیمیایی احتراق سوخت طبیعی با هوا به شکل زیر است [۱۵].

$$(7.5CH_4 + C_2H_6) + 18.5(O_2 + 3.76N_2) \rightarrow Q + 9.5CO_2 + 18H_2O + 69.56N_2$$

که با توجه به سمت راست این واکنش می‌توان نسبت ترکیب جرمی سوخت با هوا را به‌دست آورد که با فرض ۴٪ ناخالصی با توجه به فرض در نظر گرفته شده برای سوخت، برابر با ۱۶/۲۲ است. با فرض اینکه نسبت ترکیب سوخت با هوا ثابت است و با استفاده از اطلاعات فوق می‌توان انرژی آزاد شده از واکنش احتراق در بالا را محاسبه نمود [۱۵]. با استفاده از جداول مربوط به آنتالپی ویژه بر حسب دما، متغیر Q به

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

صورت تابعی از دما و دبی سوخت مصرفی q_u به شکل زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} Q &= k \times [q_u \times (\alpha + \beta \times T)] \\ &= k \times q_u \times 10^4 (.0021 \times T - 5.6077) \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در این رابطه k میزان بازده بویلر است. با توجه به گزارش کارکرد بویلر، دمای واکنش احتراق سوخت با هوا غالبا مقداری ثابت و برابر با ۲۹۰/۹۵ °C است و از طرفی بازده بویلر (k) مقداری ثابت و برابر با ۷۳٪ است. با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۱۲) داریم

$$Q = (3.6781 \times 10^7 \times q_u)\frac{kJ}{hr} \quad (۱۳)$$

۳-۳- خطی‌سازی مدل غیرخطی بویلر در نقطه کار

به دلیل غیرخطی بودن سیستم بویلر ضرائب $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ در (۱۱) به متغیرهای حالت بستگی دارند. لذا برای طراحی کنترل کننده نیاز به خطی سازی حول نقطه کار داریم. با توجه به اینکه در نقطه تعادل نرخ تغییرات متغیرهای حالت برابر صفر است ($\dot{p} = \dot{V}_w = 0$)، و با توجه به رابطه (۱۰) می‌توان مقادیر ورودی‌های سیستم در حالت تعادل را به صورت زیر به دست آورد که در آنها بالانویس ستاره نشاندهنده مقدار متغیر در نقطه کار است.

$$\begin{aligned} e_{11}\frac{dV_w}{dt} + e_{12}\frac{dp}{dt} &= q_f - q_s \\ \Rightarrow \quad q_f{}^* &= q_s{}^* \\ e_{21}\frac{dV_w}{dt} + e_{21}\frac{dp}{dt} &= Q + q_f h_f - q_s h_s \\ \Rightarrow \quad Q^* &= q_s{}^*(h_s - h_f) \end{aligned} \quad (۱۴)$$

با توجه به رابطه (۱۳) و پارامترهای کاری سیستم مقدار سوخت مصرفی بویلر در نقطه کار به صورت زیر است

$$q_u{}^* = .0635 q_s{}^* \ \ (\text{ton/hr}) \quad (۱۵)$$

همچنین با توجه به داده‌های مربوط به کارکرد بویلر در پالایشگاه گاز مورد بررسی [۱۶] می‌توان دید که مقدار حالت ماندگار مربوط به متغیرهای حالت و p به ترتیب برابربا ۵۵٪ گنجایش بویلر و ۲۵/۸ $\frac{kg}{cm^2}$ است. چون بویلر مورد استفاده در پالایشگاه گاز مورد نظر گنجایش حدود ۴۰ تن آب را دارد، لذا با توجه به مقدار وزن ویژه آب در دما و فشار کاری، مقدار V_w در نقطه کار برابر با m^3 ۳۳/۶۱۳۲ است.

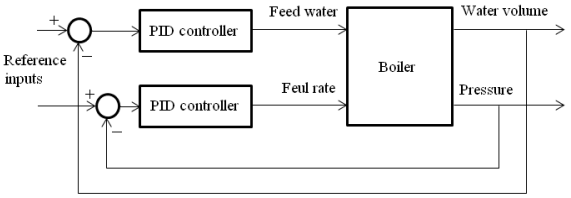
در طی فرآیند تولید بخار از بویلر، متناسب با مقدار بخار لازم واحد تصفیه گاز، کاربر بویلر مقدار بخار اشباع خروجی را مشخص می‌کند که در نقطه کار q_s^* حدودا برابر با ۲۰ تن بر ساعت است. جهت رعایت اختصار از ذکر جزئیات بیشتر محاسبات خطی سازی خوداری می‌شود. در نتیجه خطی سازی معادلات (۱۰) و (۱۱) در نقطه کار، با استفاده از (۱۳) و با تعریف $x = [V_w \ \ p]^T$ و $u = [q_f \ \ q_u]^T$ مدل خطی شده سیستم بویلر به شکل زیر به‌دست می‌آید ([۱۷])

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta x &= x - x^* \\ \Delta u &= u - u^* \\ A &= \begin{pmatrix} -0.0554 q_s^* & 0 \\ 0.0242 q_s^* & 0 \end{pmatrix}, \\ & \quad q_s^* = 20 \ \ \text{ton/hr} \\ B &= \begin{pmatrix} 0.6084 & -26.7 \\ .0043 & 38 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۱۶)$$

با محاسبه صورت اسمیث- مک میلان ([۱۸])، ماتریس تابع تبدیل سیستم دارای دو قطب یکی در مبدا مرتبط با دینامیک حجم آب و دیگری در سمت چپ محور موهومی در نقطه ۱/۱۰۸- در ارتباط با دینامیک فشار و تغییر فاز آب است، و صفر انتقال ندارد.

۴- طراحی کنترل کننده PID بهینه

بکارگیری و تنظیم کنترل کننده های PID با استفاده از محصولات اتوماسیون صنعتی موجود در بازار بسیار ساده و در دسترس است. لذا طبیعی است که هنگام مطرح شدن استفاده از هر شیوه کنترل دیگر مقایسه عملکرد آن با PID معمولی مورد سوال قرار گیرد. در این بخش بر اساس مدل فضای حالت خطی بدست آمده برای دینامیک سیستم بویلر حول نقطه کار، به طراحی یک جفت کنترل کننده PID معمولی مطابق با شکل ۲ برای کنترل حجم آب در مخزن بویلر و فشار بویلر استفاده می‌کنیم.



شکل ۲: اعمال کنترل کننده PID به سیستم

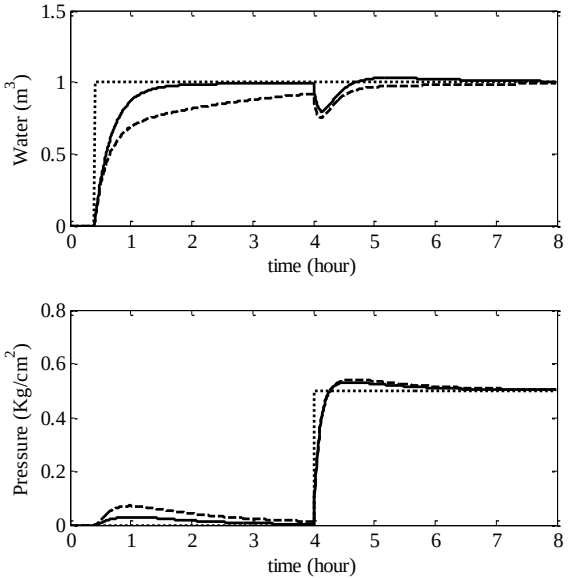
برای طراحی کنترل کننده های PID ضرایب آنها را طوری تعیین می‌کنیم که مجموع وزن داده شده مربعات خطای ردیابی پله و مجموع مربعات اختلاف ورودی با مقدار ماندگار آن به ازای هر دو کنترل کننده به صورت همزمان کمینه شوند. وزن در نظر گرفته شده برای مربعات خطای حجم آب بویلر برابر با ۱۵، وزن در نظر گرفته شده برای مربعات خطای فشار بویلر برابر با ۱ و وزن های در نظر گرفته شده برای مربعات اختلاف جریان های سوخت و آب ورودی بویلر به ترتیب برابر با ۰/۰۲ و ۰/۲ در نظر گرفته شده اند. این روند طراحی برای تعیین ضرایب کنترل کننده PID به ضرایب آورده شده در جدول ۱ منجر می‌شود.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

جدول ۱: مقادیر کران‌های مختلف در قضیه ۱ و برای مدل غیرخطی درجه دوم

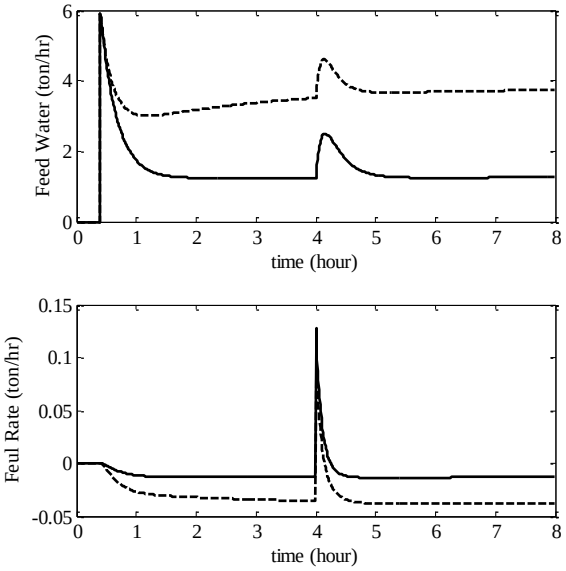
ضریب	تناسبی	انتگرالگیر	مشتقگیر
کنترل کننده آب	۲/۲۴۳۱	۱/۴۰۶۲	۰/۰۲۱۸ –
کنترل کننده فشار	۰/۲۷۱۲	۰/۰۸۸۶	۰/۰۰۰۴

با کنترل کننده های فوق پاسخ سیستم حلقه بسته به صورت نشان داده شده در شکل ۳ است. در این شکل مقادیر مرجع در زمان های مختلف اعمال شده اند تا میزان توانائی کنترل کننده در حذف تداخل قابل رؤیت باشد. مقادیر مرجع به صورت نقطه چین و مقادیر فرآیند به صورت توپر نشان داده شده اند. برای ارزیابی مقاومت کنترل کننده، عملکرد کنترل کننده PID طراحی شده هنگامی که مقدار پارامتر بخار خروجی در نقطه کار q_s^* به ۶۰ تن بر ساعت برسد نیز با خطوط خط-چین در شکل ۳ نمایش داده شده اند. ملاحظه می‌شود که با مقداری افت کارائی (زیاد شدن زمان نشست) کنترل کننده قادر به ردیابی فرمان پله می‌باشد. در حالتی که مقدار q_s^* کاهش داده شود تغییرات پاسخ به صورت مشابه و در جهت عکس خواهند بود و لذا از نمایش این حالت صرفنظر می‌شود (به عنوان مثال در مورد منحنی های حجم آب در شکل ۳، پایین تر بودن منحنی خط چین نسبت به منحنی پر به فراجهش تبدیل می‌شود).



شکل ۳: پاسخ حلقه بسته سیستم با کنترل PID (خط پر: پاسخ حلقه بسته، نقطه چین: فرمان مرجع پله، خط چین: پاسخ در حضور نامعینی)

همانگونه که مشاهده می‌شود با این کنترل کننده خروجی فشار سیستم دارای زمان صعود حدود ۱۵ دقیقه و کنترل کننده حجم آب در مخزن بویلر دارای زمان صعود حدود ۱۱۰ دقیقه می‌باشد و سیستم رفتار نسبتا کندی دارد. با توجه به اینکه ضرایب کنترل کننده ها از طریق بهینه سازی و به صورت همزمان بدست آمده اند، می‌توان گفت که نتایج فوق مربوط به حداکثر توانائی کنترل PID به ازای وزن های در نظر گرفته شده بین خطای ردیابی و تلاش کنترلی می‌باشد. سیگنال کنترل مربوط با پاسخ های شکل ۳ نیز به صورت شکل ۴ است.



شکل ۴: سیگنال کنترل سیستم حلقه بسته با کنترل PID (خط پر: سیگنال های کنترل، خط چین: سیگنال های کنترل در حضور نامعینی)

۵- طراحی کنترل پیش بین به روش برنامه ریزی چند پارامتری

در این بخش بر اساس روش برنامه ریزی توضیح داده شده در بخش ۲ به طراحی کنترل پیش بین مقید برای مدل خطی زمان پیوسته سیستم حول نقطه کار، با ورودی های آب تغذیه وارد شده به مخزن بویلر و میزان سوخت مصرفی در رابطه (۱۶) می‌پردازیم. با گسسته سازی به ازاء زمان نمونه برداری ۰/۰۱ ساعت (۳۶ ثانیه) مدل فضای حالت زمان-گسسته سیستم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$
$$y(k) = C_d x(k)$$
$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.004 & 1 \end{pmatrix}, \quad (۸)$$
$$B_d = \begin{pmatrix} 0.005 & -0.22 \\ 0 & 0.31 \end{pmatrix}$$
$$C_d = I$$

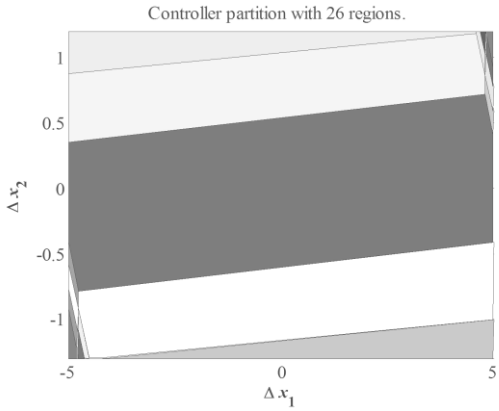
با توجه به مدارک و مستندات پالایشگاه گاز مورد مطالعه باید قیود زیر حول نقطه کار برای عملکرد مطمئن سیستم برآورده شوند [۱۶].

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

$$\begin{cases} -1.3\,{}^{kg}/_{cm^2} \le \Delta p \le 1.2\,{}^{kg}/_{cm^2} \\ -5.0420\,m^3 \le \Delta V_{wt} \le 5.0419\,m^3 \\ -20\,{}^{ton}/_{hr} \le \Delta q_f \le 20\,{}^{ton}/_{hr} \\ -1.27\,{}^{ton}/_{hr} \le \Delta \dot{m} \le 1.43\,{}^{ton}/_{hr} \end{cases} \qquad (۱۸)$$

با توجه به مقیاس متغیرها نسبت به هم و اهمیت کنترل فشار، برای طراحی کنترل پیش بین ماتریس های وزنی در (۲) را به صورت $Q = P = diag\{1,15\}$ و $R = diag\{0.02,0.2\}$ در نظر می‌گیریم. این وزن ها متناظر با وزن های در نظر گرفته شده برای طراحی کنترل کننده PID بهینه در بخش قبل هستند. مقدار افق پیش بینی نیز برابر با ۱۰ در نظر گرفته می‌شود. براساس روند بخش دوم، ماتریس‌های $H \in \mathbb{R}^{20\times20}$ و $F \in \mathbb{R}^{2\times20}$ در (۳) از روی ماتریس های وزنی فوق محاسبه می‌شوند. همچنین می‌توان با استفاده از قیود سیستم در (۱۸) که در قالب مساله (۲) بیان شده‌اند ماتریس های E، G و W در (۳) را بدست آورد. که در اینجا با توجه به ابعاد بزرگ این ماتریس ها و به جهت رعایت اختصار از ذکر مقادیر آنها صرف نظر می‌کنیم.

با توجه به اینکه سیستم دو متغیر حالت دارد امکان نمایش گرافیکی نواحی حل متناسب-تکه ای مساله کنترل پیش بین در این مورد خاص وجود دارد. با استفاده از قضیه ۲ در [۴]، مدل زمان گسسته (۱۷) برای سیستم بویلر و قیود (۱۸)، تعداد نواحی بدست آمده برای قانون کنترل برابر با ۳۲ است که پس از ساده سازی و یکی کردن نواحی دارای قانون یکسان تعداد نواحی به ۲۶ می‌رسد که در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند.



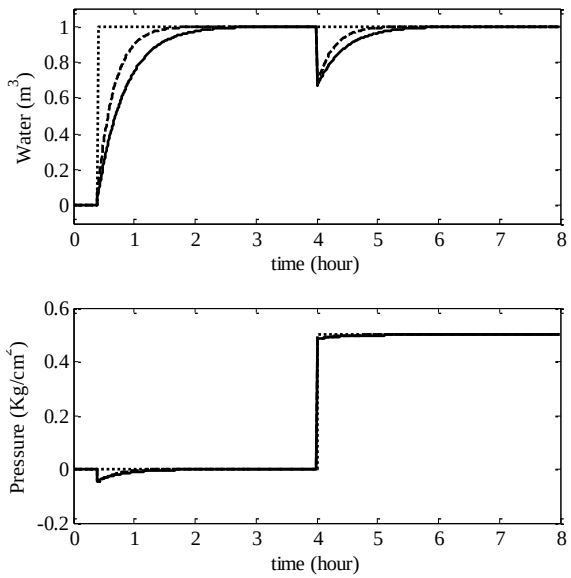
شکل ۵: بخش بندی فضای حالت سیستم بویلر با روش برنامه ریزی چند پارامتری

در شکل فوق ناحیه ای که در وسط قرار دارد و از سایر نواحی بزرگ تر است ناحیه بحرانی مربوط با حالتی می‌باشد که هیچ قید فعالی نداریم و مساله بهینه سازی داده شده در (۴) به پاسخ $Z^* = 0$ منجر می‌شود که در نتیجه سیگنال کنترل به صورت زیر قابل محاسبه است

$$Z^* = U + H^{-1}F^T x(t) = 0 \qquad \Longrightarrow$$
$$U = -H^{-1}F^T x(t)$$

در فرمول بندی ارائه شده در بخش قبل برای کنترل پیش بین با برنامه ریزی چند پارامتری یا به اختصار MP-MPC سیگنال فرمان مرجع برای سهولت برابر با صفر در نظر گرفته شده بود. برای اینکه از فرمول بندی بخش قبل برای محاسبه پاسخ سیستم بویلر به ورودی مرجع پله به ازای کنترل MP-MPC استفاده کنیم راهکارهای متعددی وجود دارد. به عنوان مثال می‌توان اشاره نمود به وارد کردن فرمان مرجع در محاسبات که بسیار سر راست است و تنها نیاز به محاسبات بیشتر دارد. البته در این صورت تعداد نواحی بخش بندی افزایش می یابد (چرا که مقدار سیگنال فرمان مرجع نیز به متغیرهای فضای بخش بندی شده اضافه می‌شود). راه ساده دیگر استفاده از یک تغییر متغیر است که مبدا مختصات حالت سیستم (نقطه همگرا شدن متغیرها) را به نقطه متناظر با فرمان مرجع مورد نظر منتقل کند که در اینجا از راهکار اخیر استفاده می‌شود (در این صورت لازم به ازای هر فرمان مرجع یک کنترل کننده طراحی شود).

با اعمال مقدار سیگنال کنترل بهینه در هرناحیه (به صورت تابع متناسب تکه‌ای از متغیرهای حالت) و شبیه سازی پاسخ حلقه بسته سیستم کنترل پیش بین به ازای ورودی های مرجع مشابه با شکل ۳ به منحنی های نشان داده شده در شکل ۶ در زیر می‌رسیم.

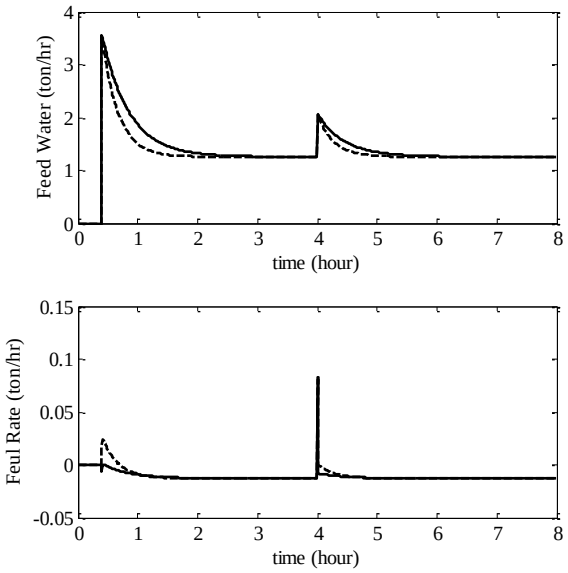


شکل ۶: پاسخ حلقه بسته سیستم به ازای MP-MPC (خط پر: پاسخ حلقه بسته، نقطه چین: فرمان مرجع پله، خط چین: پاسخ در حضور نامعینی)

مشابه با شکل ۳، پاسخ سیستم کنترل با خطوط پر، مقادیر مرجع به صورت نقطه چین و پاسخ در حضور نامعینی (افزایش q_s^* به ۶۰ تن بر ساعت) با خط چین نمایش داده شده اند. با توجه به شکل ۶، زمان صعود متغیر خروجی حجم آب در مخزن بویلر به ورودی مرجع پله در حدود ۳۰ دقیقه می‌باشد. همچنین زمان صعود متغیر خروجی فشار مخزن بویلر به ورودی مرجع پله کمتر از یک دقیقه است. قابل ملاحظه است که کنترل پیش بین طراحی شده برای سیستم بویلر در مقایسه با کنترل PID بهینه

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

طراحی شده در بخش قبل زمان صعود در پاسخ به ورودی مرجع پله برای حجم آب بویلر را ۱۱۰ دقیقه به ۳۰ دقیقه کاهش می‌دهد. نکته قابل توجه این است که کنترل پیش بین علیرغم وابستگی زیاد به مدل، نسبت به نامعینی در مقدار q_s^* مقاومت بهتری در مقایسه با PID از خود نشان می‌دهد. دلیل این امر را می‌توان مربوط به سرعت بیشتر کنترل پیش بین و تشابه آن با کنترل کننده های بهره بزرگ دانست. سیگنال های کنترل مرتبط با شکل ۶ در شکل ۷ نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که دامنه تغییرات سیگنال های کنترل در محدوده قیود در نظر گرفته شده برای سیستم است.



شکل ۷: سیگنال های کنترل سیستم حلقه بسته به ازای MP-MPC (خط پر: سیگنال های کنترل، خط چین: سیگنال های کنترل در حضور نامعینی)

۶- مقایسه زمان اجرای کنترل پیش بین با پیاده سازی های معمولی و چند پارمتری

با توجه به اینکه زمان شبیه سازی عملکرد سیستم کنترل عمدتا مربوط به اجرای الگوریتم کنترل است، برای مقایسه زمان اجرای الگوریتم های کنترل کافیست که زمان اجرای کل شبیه سازی به ازای کنترل کننده های مختلف را مقایسه نمائیم. شبیه سازی در محیط نرم افزار متلب (MATLAB®) و به صورت کد-m انجام می‌شود و می‌توان فرض نمود که زمان اجرا در سایر محیط های نرم افزاری متناسب با زمان های بدست آمده در محیط متلب می‌باشد. از آنجا که نرم افزار متلب برای دستیابی به سرعت بالاتر برای اجرای برنامه ریزی مربعی از تابع درونی quadprog (که در قالب کد-m نیست) استفاده می‌کند در این مقاله زمان اجرای الگوریتم در حالتی که برای برنامه ریزی مربعی از توابع متن باز (open source) به صورت کد-m استفاده شود نیز بررسی می‌شود تا الگوریتم کنترل تنها مبتنی بر کد-m باشد. تابع متن-باز در نظر گرفته شده یک تابع شناخته شده با عنوان minq می‌باشد.

در شیوه پیاده سازی MP-MPC نیازی به اجرای بهینه سازی (برنامه ریزی مربعی) در زمان اجرای الگوریتم کنترل نمی‌باشد. در این شیوه ابتدا باید از طریق چک کردن برقرار بودن تعدادی نامساوی مشخص شود که در کدام ناحیه از فضای حالت (شکل ۵) قرار داریم. سپس کافیست بهره فیدبک متناظر با ناحیه مربوطه برای محاسبه سیگنال کنترل استفاده شود. لذا روشن است که پیاده سازی MP-MPC به مراتب سریعتر از کنترل پیش بین معمولی باشد. برای شبیه سازی عملکرد کنترل MP-MPC از توابع جعبه ابزار MPT در محیط متلب برای طراحی کنترل کننده MP-MPC استفاده شده است [۱۹]. اما برای شبیه سازی از توابع این جعبه ابزار استفاده نشده زیرا توابع شبیه سازی این جعبه ابزار سربار نرم افزاری زیادی دارند که محاسبه زمان واقعی شبیه سازی را ناممکن می‌سازد. به منظور محاسبه زمان خالص شبیه سازی کد-m ساده ای نوشته شده که مراحل ذکر شده در فوق را انجام می‌دهد و فاقد سربارهای نرم افزاری اضافی می‌باشد.

طول زمان شبیه سازی شده برای حالت های مختلف برابر با ۱۰ ساعت (شامل ۱۰۰۰ نمونه یا گام زمانی) در نظر گرفته شده که این حالتها شامل موارد زیر هستند.

- حالت ۱: کنترل پیش بین MP-MPC
- حالت ۲: کنترل پیش بین معمولی با توابع درونی متلب برای برنامه ریزی مربعی (تابع quadprog)
- حالت ۳: کنترل پیش بین معمولی با توابع متن باز برای برنامه ریزی مربعی (تابع minqdef)
- حالت ۴: کنترل PID

زمان اجرای شبیه سازی حالت های فوق مطابق با جدول زیر است.

جدول ۲: مقایسه زمان اجرای الگوریتم های مختلف کنترل

زمان اجرای برنامه	کنترل کننده
۰/۰۲۷ ثانیه	حالت ۱
۱/۳۱۴ ثانیه	حالت ۲
۲/۴۳۶ ثانیه	حالت ۳
۰/۰۲۲ ثانیه	حالت ۴

لازم به ذکر است که حالت های ۱ الی ۳ در واقع یک کنترل کننده (با پاسخ یکسان) با پیاده سازی های مختلف هستند. زیرا کنترل پیش بین معمولی و MP-MPC تنها در نحوه محاسبات و زمان اجرا با هم تفاوت دارند و عملکرد یکسانی دارند (لذا نیازی به مقایسه بین عملکرد ان دو کنترل کننده نیست). مشاهده می‌شود که زمان اجرای کنترل پیشبین MP-MPC بسیار سریع و نزدیک به یک جفت PID معمولی است. اما کنترل پیش بین معمولی (حالت های ۲ و ۳) به دلیل نیاز به محاسبات سنگین بهینه سازی مقید در زمان اجرا بسیار کند تر از MP-MPC و PID می‌باشد. با توجه به مزایای MP-MPC همچون: برآورده کردن

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]

قیود، عملکرد کنترلی بهتر نسبت به کنترل کننده PID و در عین حال اجرای سریعتر الگوریتم کنترل نسبت به کنترل پیش بین معمولی می‌توان این روش کنترل را مناسب ترین گزینه برای کنترل فرآیند مورد بحث دانست.

۷- نتیجه گیری

پس از مدل سازی بویلر و خطی سازی و گسسته سازی مدل بدست آمده، بر اساس نتایج شبیه سازی در بخش های ۴ و ۵، مشاهده شد که کنترل کننده طراحی شده به روش کنترل پیش بین مبتنی بر بهینه سازی چند پارامتری نسبت به PID عملکرد بهتری دارد و سرعت آن بیشتر است. به‌علاوه می‌توان با استفاده از این کنترل کننده قیود درنظر گرفته شده برای سیستم را برآورده کرد که از جمله نقاط قوت این کنترل کننده به شمار می‌رود. همانگونه که در شبیه سازی های بخش ۶ ملاحظه شد، حجم محاسبات برای اجرای این کنترل کننده نسبت به کنترل پیش بین مقید معمولی بسیار کمتر و قابل قیاس با زمان اجرای کنترل کننده های PID است. لذا این روش کنترل گزینه بسیار مناسبی برای پیاده سازی کنترل پیش بین در عمل می‌باشد.

تشکر و قدردانی

لازم است در اینجا از شرکت پالایشگاه گاز بیدبلند به عنوان حامی این پژوهش تشکر و قدردانی به عمل آورده شود.

مراجع

[1] E.F. Camacho and C. Bordons Alba, “Model predictive control”, Springer, 2nd Ed., 2004.

[2] J.H. Lee, "Model predictive control: Review of the three decades of development", International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 9, No. 3, pp. 415-424, 2011.

[3] A.Bemporad, M. Morari, V. Dua and E.N. Pistikopoulos, “The Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems”, Automatica, 38(1):3–20, January 2002.

[4] E.N. Pistikopoulos, "From multi-parametric programming theory to MPC-on-a-chip multi-scale systems applications", Computers & Chemical Engineering, Vol. 47, No. 12, pp. 57-66, 2012.

[5] P.Tøndel, T.A. Johansen and A. Bemporad, “An Algorithm for MultiParametric Quadratic Programming and Explicit MPC Solutions”, In Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control, Orlando, Florida, December 2001.

[6] A.Bemporad, F. Borrelli and M. Morari, “Explicit Solution of LP Based Model Predictive Control”, In Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000.

[7] A. Bemporad, F. Borrelli and M. Morari, “Model predictive control based on linear programming - the explicit solution” Tech.Report, ETH Zurich, AUT01-06, 2001.

[8] H. Khajuria, E.N. Pistikopoulos, "Dynamic modeling and explicit/multi-parametric MPC control of pressure swing adsorption systems", Journal of Process Control, Vol. 21, No. 1, pp. 151-163, 2011.

[9] M.W. Percival et al, "Development of a multi-parametric model predictive control algorithm for insulin delivery in type 1 diabetes mellitus using clinical parameters", Journal of Process Control, Vol. 21, No. 3, pp. 391-404, 2011.

[10] R. Lambert, "Approximation methodologies for explicit model predictive control of complex systems", Ph.D. Thesis, Imperial College London, 2013.

[11] A. Gupta, S. Bhartiya, P.S.V. Nataraj, "Explicit-Model Predictive Control: A simulation based scalability study", 8th IFAC Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, 2012.

[12] F. Bayat, T.A. Johansen, A.A. Jalali, "Flexible Piecewise Function Evaluation Methods Based on Truncated Binary Search Trees and Lattice Representation in Explicit MPC", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 20, No. 3, pp. 632-640, 2011.

[13] K.J. Astrom and R.D.Bell, “Drum boiler dynamics” ,PERGAMON ,Automatica ,36 ,363-378,2000.

[14] M.David Burghardt and James A.Harbach, “Engineering Thermodynamics” ,Fourth edion,1993.

[15] Y.A. Cengel and M.A. Boles, Thermodynamics: An engineering approach, McGraw-Hil, Fifth Ed., 2005.

[۱۶] محمد رضا شاکری، "گزارش کارکرد بویلر۵ در پالایشگاه گاز بید بلند"، ۱۳۸۸.

[۱۷] حمید رضا تقی راد، "مقدمه ای بر کنترل مدرن"، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ویرایش سوم، ۱۳۹۳.

[۱۸] علی خاکی صدیق، "تحلیل و طراحی سیستم های کنترل چند متغیره"، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ویرایش دوم، ۱۳۹۰.

[19] M. Herceg, M. Kvasnica, C.N. Jones, and M. Morari. Multi-Parametric Toolbox 3.0. In Proc. of the European Control Conference, pages 502–510, Zurich, Switzerland, July 17–19 2013.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.4.1.6]