مجله کنترل
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵

کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی متشکل از عامل‌های غیریکسان با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی

حامد حق‌شناس[۱]، محمدعلی بادامچی‌زاده[۲]، مهدی برادران‌نیا[۳]

[۱] دانشجوی دکتری گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، haghshenas91@ms.tabrizu.ac.ir

[۲] استاد گروه کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، mbadamchi@tabrizu.ac.ir

[۲] استادیار گروه کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، mbaradaran@tabrizu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳xx/x/x، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳xx/x/x)

چکیده: در این مقاله، به مطالعه مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمگن و تحت گراف ارتباطات جهت-دار، بر اساس قالب تنظیم خروجی و با استفاده از فیدبک خروجی پرداخته شده است. با ایده گرفتن از پژوهش‌هایی که به تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با وجود عامل سردسته در حوزه رضایت جمعی پرداخته اند، عامل‌های سردسته به صورت سیستم خارجی با دینامیک یکسان در نظر گرفته شده‌اند. در طراحی کنترل‌کننده برای هر عامل پیرو، از فیدبک خروجی دینامیکی توزیع‌یافته استفاده شده است. جهت حل مسئله از خطای کنترل محدود نگهدارنده بهره گرفته شده است که این امر، امکان در نظر گرفتن بیش از یک عامل سردسته را در مبحث تنظیم خروجی فراهم ساخته و در نهایت، با استفاده از روش‌های اصلاح شده تنظیم خروجی به حل مسئله پرداخته شده است. یک شبیه‌سازی عددی نیز جهت ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی انجام یافته، که حاکی از عملکرد مناسب کنترل‌کننده می‌باشد.

کلمات کلیدی: کنترل محدود نگهدارنده، عامل‌های غیریکسان، تنظیم خروجی، فیدبک خروجی.

Containment Control of Linear Multi-Agent Systems with Non-Identical Agents Using Dynamic Output Feedback

Hamed Haghshenas, Mohammad Ali Badamchizadeh, Mahdi Baradarannia

Abstract: In this paper, we study the containment control problem of heterogeneous linear multi-agent systems under directed topology based on output regulation framework and using output feedback control. Motivated by leader-follower output regulation problems, the leaders are assumed to be exosystems with identical dynamics. In controller design approach for each follower, we utilize a distributed dynamic output feedback control scheme. To achieve the objective of this work we utilize the containment error, which enables us to consider more than one leader in output regulation framework and to use output regulation techniques with some modifications to solve the containment problem. Finally, the validity of theoretical results are demonstrated through an example.

Keywords: Containment control, Non-Identical agents, Output regulation, Output feedback.

۱- مقدمه

امروزه سیستم‌های چندعاملی[۱] به دلیل کاربردهای وسیعی که در مدل‌سازی رفتار دسته‌جمعی حیوانات، آرایش هندسی هواپیماها، شبکه‌های حس‌گر، تجسس نظامی، عملیات نجات و حتی مدل‌سازی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

جوامع انسانی دارند، مورد توجه بسیاری از محققان قرار دارند [۱، ۲]. یکی از مباحث اصلی سیستم‌های چندعاملی، رضایت جمعی[۲] می‌باشد که در ابتدا برای سیستم‌های بدون عامل سردسته مورد بررسی قرار گرفته است [۱، ۲]. سپس، با توجه به اینکه گروهی از عامل‌ها می‌توانند یک سیگنال مرجع را تعقیب کنند، برای سیستم‌هایی با وجود عامل سردسته مورد مطالعه قرار گرفته است [۳].

در سال‌های اخیر، تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی از جمله مباحثی بوده است که در حوزه رضایت جمعی مورد توجه محققان قرار گرفته است. برای مثال، رضایت جمعی خروجی بدون عامل سردسته برای سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمگن[۳] بر اساس اصل مدل داخلی در [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با عامل سردسته‌ای که به صورت یک سیستم خارجی[۴] در نظر گرفته شده، در مراجع مختلفی مورد بحث قرار گرفته است، که برای مثال می‌توان به [۵، ۶] اشاره کرد. در [۱۷]، به تحلیل سیستم‌های چندعاملی خطی بر اساس تنظیم خروجی و رفتار گذرای عامل‌ها پرداخته شده که سبب بهبود رفتار گذرای سیستم شده است.

یکی از شاخه‌های مهم کنترل سیستم‌های چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده[۵] می‌باشد که از چندین پدیده طبیعی الهام گرفته شده است و کاربردهای عملی با اهمیت و مختلفی می‌تواند داشته باشد. به عنوان مثال، مشاهده شده است که پروانه‌های کرم ابریشم نر از طریق فرومون پخش‌شده توسط جنس ماده، به سمت پوش محدب[۶] پروانه‌های کرم ابریشم ماده جذب می‌شوند [۷]. برای یک سیستم چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده وقتی تحقق می‌یابد که بتوان قانون کنترلی هر عامل پیرو را طوری طراحی کرد که عامل‌های پیرو در نهایت، به پوش محدب ایجادشده توسط عامل‌های سردسته هدایت شوند. یک نمونه از کاربردهای کنترل محدود نگهدارنده، ایجاد فضای امن توسط گروهی از ربات‌ها جهت حفاظت گروهی دیگر و یا انتقال مواد پرخطر و حساس می‌باشد. در این مورد، گروهی از عامل‌ها به عنوان سردسته معرفی می‌شوند و وظیفه مشخص کردن پوش محدب امن را دارند. با اعمال کنترل محدود نگهدارنده به چنین سیستمی، عامل‌های پیرو که باید مورد حفاظت قرار گیرند و یا وظیفه انتقال مواد پرخطر و حساس را دارند، به پوش محدبی که توسط عامل‌های سردسته ایجاد شده است، هدایت می‌شوند. در نتیجه، لازم نخواهد بود که عامل‌های پیرو تجهیزات اضافی داشته و یا به حس‌گرهای تشخیص موانع و نقاط پرخطر مجهز باشند [۸].

مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای گستره وسیعی از سیستم‌ها با دینامیک غیرخطی، نامعین و اتفاقی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مثال در [۱۸]، این مسئله برای سیستم‌های غیرخطی اتفاقی و با استفاده از روش بازگشت به عقب بررسی شده است. همچنین، مطالعاتی که تاکنون در حوزه کنترل محدود نگهدارنده انجام گرفته، غالبا بر روی سیستم‌های چندعاملی متشکل از عامل‌هایی با دینامیک یکسان بوده‌اند. در کاربردهای عملی به دلیل شرایط مختلف و قیدهایی که بر روی عامل‌ها وجود دارد، دینامیک عامل‌ها می‌تواند متفاوت از هم باشد. دینامیک متفاوت عامل‌ها می‌تواند انعطاف‌پذیری سیستم را نیز افزایش دهد. بدین معنی که، سیستمی که عامل‌هایی با دینامیک‌های مختلف دارد نسبت به سیستمی با عامل‌های یکسان، اهداف وسیع‌تر و کارایی بالاتری می‌تواند داشته باشد. به همین جهت، مطالعه کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی با دینامیک غیریکسان دارای اهمیت می‌باشد. در [۹]، کنترل محدود نگهدارنده برای عامل‌های غیریکسان در دو حالت بررسی شده است. در حالت اول، دینامیک عامل‌های سردسته انتگرال‌گیر مرتبه اول و دینامیک عامل‌های پیرو، انتگرال‌گیر مرتبه دوم فرض شده است. در این حالت، ورودی کنترلی به صورت خطی معرفی شده است. در حالت دوم، معکوس حالت اول فرض شده و قانون کنترلی غیرخطی برای تحقق کنترل محدود نگهدارنده به صورت زمان‌محدود معرفی شده است. برای این حالت، شرایط لازم و کافی برای حل مسئله به دست آمده است. مراجع [۱۰، ۱۱] نیز به مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی پرداخته‌اند. در [۱۱]، این مسئله برای گروهی از عامل‌های غیریکسان با دینامیک غیرخطی و شامل پارامترهای نامعین، با استفاده از کنترل تطبیقی بررسی شده است. همچنین در [۱۱]، محدودیتی بر روی گراف ارتباطات سیستم فرض شده است که گستره سیستم‌های مورد بحث را محدودتر می‌کند. در [۱۱]، طراحی کنترل‌کننده بر اساس کنترل تطبیقی بوده است.

از طرفی در روش‌های طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت، فرض بر این است که کلیه متغیرهای حالت در دسترس می‌باشند. در صورتی که در عمل برای اندازه‌گیری هر یک از متغیرهای حالت لازم است که یک حس‌گر و سیستم اندازه‌گیری تعبیه نمود که مستلزم هزینه زیادی است. از این رو در کاربردهای عملی، حالت‌های سیستم همیشه در دسترس نیستند و فقط به خروجی‌های سیستم می‌توان دسترسی داشت. در چنین مواقعی، استفاده از فیدبک حالت امکان‌پذیر نبوده و طراحی کنترل‌کننده بر اساس فیدبک خروجی مطلوب می‌باشد. در [۱۰]، کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمگن با استفاده از فیدبک حالت بررسی شده است.

هدف این مقاله، حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم‌های چندعاملی خطی با دینامیک غیریکسان، تحت مبحث تنظیم خروجی و با استفاده از فیدبک خروجی می‌باشد. با ایده گرفتن از پژوهش‌هایی که به تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با وجود عامل سردسته در حوزه رضایت جمعی پرداخته اند، دینامیک عامل‌های سردسته را به صورت سیستم خارجی در نظر می‌گیریم. در مقایسه با [۹] که در آن دینامیک بین پیروها و سردسته‌ها متفاوت است اما دینامیک بین پیروها یکسان است، در این مقاله دینامیک پیروها با یکدیگر نیز متفاوت در نظر گفته شده است. در مقایسه با [۱۰] که در آن از فیدبک حالت بهره گرفته شده، در این مقاله طراحی کنترل‌کننده بر اساس فیدبک خروجی خواهد بود. همچنین، با اصلاح خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به منظور در نظر گرفتن

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

بیش از یک عامل سردسته، از روش‌های موجود در حوزه تنظیم خروجی برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده استفاده می‌شود. در تحلیل مسئله از فرمول‌بندی خطای کنترل محدود نگهدارنده بر اساس ماتریس H_k استفاده می‌شود که سبب می‌شود تا بتوان از روش‌های اصلاح‌شده تنظیم خروجی جهت حل مسئله بهره گرفت.

مقاله حاضر در شش بخش تنظیم شده است. در بخش دوم مفاهیمی از نظریه گراف و تعاریف و نمادهای استفاده شده در مقاله ارائه شده است. بخش سوم به بیان مسئله پرداخته و سیستم مورد مطالعه را معرفی می‌کند. در بخش چهارم کنترل‌کننده پیشنهادی ارائه شده و مفاهیم اصلی مقاله بیان می‌شود. جهت ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، یک شبیه‌سازی عددی نیز انجام گرفته که در بخش پنجم ارائه می‌شود. در نهایت، نتایج مقاله و کارهای پژوهشی آینده بیان شده است.

۲- پایه‌های نظری

۲-۱- نظریه گراف ([۱۲])

برای مدل‌سازی ارتباط بین عامل‌ها در یک سیستم چندعاملی از گراف‌ها استفاده می‌شود. برای یک سیستم چندعاملی متشکل از n عامل، گراف جهت‌دار یا غیرجهت‌دار متناظر G می‌تواند توسط (V,E) نشان داده شود، که $\mathrm{V}=\{1,2,\ldots,n\}$ مجموعه گره‌ها و $\mathrm{E}\subseteq\mathrm{V}\times\mathrm{V}$ مجموعه یال‌ها می‌باشد. یالی که به صورت $(i,j)\in\mathrm{E}$ نمایش داده می‌شود به این معنی است که j امین عامل به اطلاعات i امین عامل دسترسی دارد و همچنین، عامل i یک همسایه عامل j می‌باشد. بنابراین، می‌توان گفت که مجموعه همسایگان عامل j، عامل‌هایی می‌باشند که عامل j اطلاعات را از آن‌ها دریافت می‌کند.

گراف G را غیرجهت‌دار گویند اگر $(i,j)\in\mathrm{E}$، $(j,i)\in\mathrm{E}$ را ایجاب کند. یک مسیر جهت‌دار از گره i به گره j رشته‌ای از گره‌ها می‌باشد که با گره i شروع می‌شود و در گره j پایان می‌یابد، به طوری که گره‌های متوالی میانی به صورت $(i,p),(p,q),\ldots,(r,j)$ مجاور باشند. یک گراف جهت‌دار را قویاً هم‌بند گویند اگر برای هر جفت مرتب از گره‌های متفاوت به صورت $[i,j]$، مسیر جهت‌داری از گره i به گره j وجود داشته باشد.

ماتریس مجاورت $\mathrm{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ متناظر با گراف G به گونه‌ای تعریف می‌شود که $a_{ij}>0$ اگر $(j,i)\in\mathrm{E}$، $a_{ii}=0$، و در غیر این صورت $a_{ij}=0$ باشد. ماتریس لاپلاسین $\mathrm{L}=[l_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ گراف G نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l_{ij}=\begin{cases}\sum_{r=1,r\neq i}^{n} a_{ir}, & i=j\\ -a_{ij}, & i\neq j\end{cases} \qquad (۱)$$

برای مشخص کردن این‌که k امین سردسته با کدامیک از عامل‌های پیرو در ارتباط می‌باشد، از ماتریس Δ_k استفاده می‌شود که یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $\delta_1^k,\delta_2^k,\ldots,\delta_n^k$ می‌باشد. اگر بین پیرو i و سردسته k کانال ارتباطی برقرار باشد، درایه δ_i^k برابر یک و در غیر این صورت برابر با صفر خواهد بود.

۲-۲- تعاریف و نمادها

در این مقاله، برای یک سیستم چندعاملی متشکل از n عامل پیرو و m عامل سردسته، G_{n+m} و G_n به ترتیب، گراف‌هایی در نظر گرفته می‌شوند که برای مدل‌سازی ارتباطات بین تمامی $n+m$ عامل و n عامل پیرو به کار رفته‌اند. G_n را می‌توان از گراف G_{n+m}، از طریق حذف گره‌های عامل‌های سردسته و یال‌های متصل به آن گره‌ها به دست آورد. از A و L به ترتیب، برای نشان دادن ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسین متناظر با گراف G_n استفاده می‌شود. برای عامل‌های پیرو و سردسته به ترتیب، اندیس‌های $\{1,\ldots,n\}$ و $\{n+1,\ldots,n+m\}$ به کار می‌رود. همچنین، N_i برای نشان دادن مجموعه‌ای به کار می‌رود که از اشتراک مجموعه همسایگان پیرو i و مجموعه پیروها به دست آمده است. در واقع، N_i مجموعه همسایگان پیرو i می‌باشد به طوری که عامل‌های سردسته از آن حذف شده‌اند.

مجموعه سردسته‌ها و مجموعه پیروها به‌ترتیب با R و F نشان داده می‌شود. ماتریس‌های $\mathbf{1}_n$، I_p و $\mathbf{0}$ به ترتیب نشان‌دهنده بردار ستونی $n\times 1$ با درایه‌های یک، ماتریس همانی با ابعاد p و ماتریس صفر با ابعاد مناسب می‌باشند. ماتریس قطری-بلوکی ایجادشده توسط ماتریس‌های $x_1,x_2,\ldots,x_n$ با $\mathrm{diag}\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ نمایش داده می‌شود. نماد $\otimes$ بیان‌گر ضرب کرونکر[۷] است. $\mathrm{dist}(x,\mathrm{C})$ نیز بیانگر فاصله $x\in\mathbb{R}^N$ از مجموعه $\mathrm{C}\subseteq\mathbb{R}^N$ می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$\mathrm{dist}(x,\mathrm{C})=\inf_{y\in\mathrm{C}}\|x-y\|_2 \qquad (۲)$$

در ادامه چندین تعریف بیان می‌شود که در این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱ ([۱۳]) - مجموعه $\mathrm{C}\subseteq\mathbb{R}^N$ محدب است اگر به ازای هر $x,y\in\mathrm{C}$ و هر $\lambda\in[0,1]$ داشته باشیم $(1-\lambda)x+\lambda y\in\mathrm{C}$. پوش محدب مجموعه نقاط متناهی $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ که با $\mathrm{Co}(X)$ نشان داده می‌شود، کوچکترین مجموعه محدب شامل تمامی نقاط موجود در X می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$Co(X)=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \mid x_i\in X,\alpha_i\in\mathbb{R}, \alpha_i\geq 0,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\} \qquad (۳)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

M -ماتریس‌ها دسته‌ای از ماتریس‌ها هستند که در تحلیل سیستم‌های چندعاملی کاربردهای مختلفی دارند. تعریف بعدی به معرفی M -ماتریس‌ها می‌پردازد.

تعریف ۲ ([۱٤]) – Z را مجموعه ماتریس‌های مربعی در نظر بگیرید که درایه‌های غیرقطریشان غیرمثبت باشند. به عبارتی دیگر:

$$\mathrm{Z} \triangleq \left\{Q=[q_{ij}]\in\mathbb{R}^{s\times s} : q_{ij}\le 0, i\ne j\right\} \tag{۴}$$

ماتریس Q یک M -ماتریس ناویژه (ویژه) نامیده می‌شود اگر $Q\in\mathrm{Z}$ و تمامی کهادهای اصلی Q مثبت (غیرمنفی) باشند.

تعریف ۳- برای یک سیستم چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده تحقق می‌یابد اگر بتوان قانون کنترلی هر عامل پیرو را طوری طراحی کرد که به ازای $t\to\infty$، عامل‌های پیرو به پوش محدب ایجادشده توسط عامل‌های سردسته هدایت شوند.

با تعریف مناسب شبکه ارتباطی بین عامل‌های پیرو و کنترل مناسب می‌توان از تصادم جلوگیری کرد.

۳- بیان مسئله

سیستم در نظر گرفته‌شده در این مقاله از n عامل پیرو با دینامیک خطی غیریکسان و m عامل سردسته یکسان تشکیل یافته است. معادله دینامیکی حاکم بر i امین پیرو به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i\\ y_i &= C_i x_i, i\in\mathrm{F}\end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $x_i(t)\in\mathbb{R}^N$ متغیر حالت، $u_i(t)\in\mathbb{R}^p$ نیروی کنترلی و $y_i(t)\in\mathbb{R}^M$ خروجی i امین پیرو است. A_i، B_i و C_i نیز ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب هستند. همچنین فرض می‌شود که در طراحی کنترل‌کننده توزیع‌یافته، فقط به خروجی‌های عامل‌های پیرو دسترسی داریم. هر یک از عامل‌های سردسته نیز، سیستمی خارجی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{w}_k = S w_k, k\in\mathrm{R} \tag{۶}$$

که $w_k\in\mathbb{R}^N$ متغیر حالت خارجی k امین عامل سردسته می‌باشد. ماتریس S نیز برای تمامی عامل‌های سردسته یکسان می‌باشد.

هدف این مقاله، تحقق کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶) می‌باشد. یعنی $\forall i\in\mathrm{F}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{dist}\left(x_i(t), \mathrm{Co}(w_k(t), k\in\mathrm{R})\right)=0 \tag{۷}$$

٤- طراحی کنترل‌کننده

در ادامه، روند طراحی کنترل‌کننده برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶) به منظور حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده شرح داده می‌شود.

۴-۱- خطای کنترل محدود نگهدارنده

برای حل مسئله مطرح‌شده، ابتدا خطای کنترل محدود نگهدارنده پیشنهادی برای i امین عامل پیرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_i(t)=\sum_{j\in\mathrm{N}_i} a_{ij}(x_i-x_j)+\sum_{k=n+1}^{n+m}\delta_i^k(x_i-w_k) \tag{۸}$$

بردار خطای جامع

$$e=\begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & \cdots & e_n^T\end{bmatrix}^T \tag{۹}$$

را با استفاده از رابطه (۸) می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$e(t)=\sum_{k=n+1}^{n+m}(H_k\otimes I_N)(x-\mathbf{1}_n\otimes w_k(t)) \tag{۱۰}$$

که در آن

$$H_k=\frac{1}{m}\mathrm{L}+\Delta_k, k\in\mathrm{R} \tag{۱۱}$$

و $x=\begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \cdots & x_n^T\end{bmatrix}^T$.

استفاده از ماتریس معرفی‌شده در رابطه (۱۱) باعث می‌شود که به متغیرهای حالت عامل‌های سردسته دسترسی داشته باشیم. در واقع، در اغلب کارهای پژوهشی انجام‌یافته در زمینه کنترل محدود نگهدارنده، ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردسته توسط ماتریس $-\mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{L}_2$ مشخص می‌شوند، که ماتریس‌های $\mathrm{L}_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و $\mathrm{L}_2\in\mathbb{R}^{n\times m}$ از تقسیم‌بندی ماتریس لاپلاسین متناظر با گراف G_{n+m} به صورت

$$\begin{bmatrix}\mathrm{L}_1 & \mathrm{L}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

به دست می‌آیند. همچنین، مکان‌های نهایی عامل‌های پیرو از طریق عبارت زیر به دست می‌آیند:

$$(-(\mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{L}_2)\otimes I_N)w_{\mathrm{R}} \tag{۱۳}$$

که w_{R} بردار حالت جامع سردسته‌ها می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$w_{\mathrm{R}}=\begin{bmatrix} w_{n+1}^T & w_{n+2}^T & \cdots & w_{n+m}^T\end{bmatrix}^T \tag{۱۴}$$

همانطور که بعدا در اثبات لم ۲ خواهیم دید، $\lim_{t\to\infty}e(t)=\mathbf{0}$ همگرایی عامل‌های پیرو را به سمت عبارت

$$\sum_{k=n+1}^{n+m}\left[\left[\left(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r\right)^{-1}H_k\mathbf{1}_n\right]\otimes w_k(t)\right] \tag{۱۵}$$

ایجاب می‌کند، که ترکیب محدبی از متغیرهای حالت $w_k, k\in\mathrm{R}$ می‌باشد. در نتیجه، استفاده از ماتریس پیشنهادی $H_k, k\in\mathrm{R}$ این امکان را فراهم می‌آورد تا بتوان حالت نهایی عامل‌های پیرو را توسط (۱۵) بیان کرد. مزیت عبارت (۱۵) نسبت به (۱۳) این می‌باشد که در (۱۳) فقط به بردار حالت جامع سردسته‌ها دسترسی داشته، اما در (۱۵) به متغیرهای حالت عامل‌های سردسته دسترسی داریم که باعث افزایش انعطاف‌پذیری محاسباتی می‌شود.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

در فرمول‌بندی خطای مرسوم مبحث تنظیم خروجی حداکثر یک عامل سردسته را می‌توان در نظر گرفت. به دلیل این‌که در کنترل محدود نگهدارنده با بیش از یک عامل سردسته سروکار داریم، در این مقاله خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به گونه‌ای اصلاح شده است تا بتوان بیش از یک عامل سردسته را در نظر گرفت و از روش‌های موجود در مبحث تنظیم خروجی برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده استفاده کرد. بدین منظور با تعریف ماتریس‌های

$$\begin{cases} \bar{H}_k = H_k \otimes I_N \\ \bar{w}_k = \mathbf{1}_n \otimes w_k \\ C = \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \\ D^k = -\bar{H}_k \end{cases} \tag{۱۶}$$

رابطه (۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$e = Cx + \sum_{k=n+1}^{n+m} D^k \bar{w}_k \tag{۱۷}$$

که مشابه بردار خطای به‌کار رفته در [۵، ۶، ۱۵] می‌باشد، با این تفاوت که بیش از یک عامل سردسته در رابطه (۱۷) در نظر گرفته شده است. بنابراین، بیان خطای کنترل محدود نگهدارنده به صورت روابط (۱۰) و (۱۷)، امکان استفاده از روش‌های موجود در مبحث کنترل خروجی را با برخی اصلاحات، برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم چندعاملی فراهم می‌سازد.

۴-۲- قانون کنترلی پیشنهادی

در ادامه، به منظور طراحی کنترل‌کننده برای مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم چندعاملی (۵) و (۶)، یک جبران‌ساز دینامیکی با بردار حالت $\zeta_i \in \mathbb{R}^N$ برای i امین پیرو به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\dot{\zeta}_i = S\zeta_i + \beta\Big[\sum_{j\in \mathrm{N}_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k (w_k - \zeta_i)\Big] \tag{۱۸}$$

که در رابطه بالا، β ضریبی ثابت و مثبت می‌باشد. همان‌طور که در ملاحظه ۱ مشاهده خواهد شد، رابطه (۳۵) که شکل فشرده (۱۸) می‌باشد، می‌تواند به عنوان رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت عامل‌های سردسته در نظر گرفته شود.

در ادامه، قانون کنترلی توزیع‌یافته زیر که متشکل از یک جبران‌ساز دینامیکی و یک رویت‌گر با متغیر $\eta_i \in \mathbb{R}^N$ است، برای i امین عامل پیرو پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{cases} u_i = K_i^1 \eta_i + K_i^2 \zeta_i \\ \dot{\zeta}_i = S\zeta_i + \beta\Big[\sum_{j\in \mathrm{N}_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k (w_k - \zeta_i)\Big] \\ \dot{\eta}_i = A_i\eta_i + B_i u_i + L_i(C_i\eta_i - y_i) \end{cases} \tag{۱۹}$$

که $K_i^1, K_i^2 \in \mathbb{R}^{p\times N}$ ماتریس‌های بهره کنترل‌کننده و $L_i \in \mathbb{R}^{N\times M}$ ماتریس بهره رویت‌گر هستند و در بخش‌های بعدی در مورد طراحی آن‌ها بحث خواهد شد.

سیستم حلقه-بسته تشکیل‌شده از (۵)، (۶)، (۸) و قانون کنترلی (۱۹) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_c^k \bar{w}_k \\ \dot{\bar{w}}_k &= \bar{S}\bar{w}_k \\ e &= C_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_c^k \bar{w}_k \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که x_c بردار حالت حلقه-بسته، $\bar{S} = I_n \otimes S$ و بقیه ماتریس‌های موجود در (۲۰) در بخش‌های بعدی ارائه خواهند شد. بدین ترتیب، مسئله‌ای که پیش رو خواهیم داشت به این صورت خواهد بود که برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶)، قانون کنترلی (۱۹) طوری تعیین شود که مبدأ سیستم $\dot{x}_c = A_c x_c$ پایدار نمایی باشد و به ازای شرایط اولیه دلخواه $x_i(0), \zeta_i(0), \eta_i(0), i \in \mathrm{F}$ و $w_k(0), k \in \mathrm{R}$ داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0} \tag{۲۱}$$

برای حل این مسئله به چند فرض استاندارد نیاز می‌باشد که در ادامه آورده می‌شوند.

فرض ۱_ (A_i, B_i) به ازای $i \in \mathrm{F}$ پایدارپذیر می‌باشد.

فرض ۲_ (C_i, A_i) به ازای $i \in \mathrm{F}$ آشکارپذیر می‌باشد.

فرض ۳_ معادلات ماتریسی خطی

$$S = A_i + B_i U_i, i \in \mathrm{F} \tag{۲۲}$$

به ترتیب دارای پاسخ U_i هستند.

فرض ۱ و فرض ۲ در اثبات قضیه ۱ مورد استفاده قرار خواهند گرفت. فرض‌هایی مشابه فرض ۳ در [۵، ۶] آورده شده‌اند. در رابطه (۲۲) با توجه به ابعاد ماتریس‌ها، برای ماتریس U_i یا جوابی نخواهیم داشت و یا یک جواب منحصر به فرد خواهیم داشت که طبق فرض ۳، وجود جواب منحصر به فرد فرض شده است. فرض زیر نیز بعداً در لم ۱ استفاده خواهد شد.

فرض ٤_ گراف‌های G_n و G_{n+m} به ترتیب، قویاً هم‌بند و هم‌بند می‌باشند.

برای بررسی ارتباط بین مسئله کنترل محدود نگهدارنده و معادله خطا (۱۰)، ابتدا لازم است با ویژگی‌های ماتریس H_k آشنا شد. به همین منظور لم بعدی ارائه می‌گردد:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

لم ۱ ([۱۰]) _ با برقرار بودن فرض ۴، ماتریس H_k مثبت معین و متقارن است. همچنین H_k یک M-ماتریس ناویژه بوده و دارای ویژگی‌های زیر است:

- قسمت حقیقی مقادیر ویژه H_k مثبت می‌باشد.
- H_k^{-1} وجود داشته و درایه‌هایش نامنفی است.

ماتریس $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ نیز مثبت معین, متقارن و یک M-ماتریس ناویژه بوده و ویژگی‌های ذکرشده برای H_k، در مورد $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ نیز صدق می‌کند.

در ادامه، ارتباط بین مسئله کنترل محدود نگهدارنده و معادله خطا (۱۰) به وسیله لمی بیان گردیده و نشان داده شده است که همگرایی خطای (۱۰) به صفر، به مفهوم تحقق کنترل محدود نگهدارنده می‌باشد.

لم ۲_ برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶) و تحت فرض ۴، با تعریف خطا به صورت (۱۰)، $\lim_{t\to\infty} e(t)=\mathbf{0}$ هدایت عامل‌های پیرو را به سمت پوش محدب ایجادشده توسط عامل‌های سردسته ایجاب می‌کند.

اثبات: اگر $\lim_{t\to\infty} e(t)=\mathbf{0}$ برقرار باشد، از رابطه (۱۰) و با توجه به خواص ضرب کرونکر به ازای $t\to\infty$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x(t) &\to \Big[\sum_{r=n+1}^{n+m}(H_r\otimes I_N)\Big]^{-1} \\ &\quad \Big[\sum_{k=n+1}^{n+m}(H_k\otimes I_N)(\mathbf{1}_n\otimes w_k(t))\Big] \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m}\Big[\Big[(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}\otimes I_N\Big](H_k\otimes I_N) \\ &\quad (\mathbf{1}_n\otimes w_k(t))\Big] \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m}\Big[\Big[(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}H_k\mathbf{1}_n\Big]\otimes w_k(t)\Big] \end{aligned} \tag{۲۳}$$

در واقع، $(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}H_k\mathbf{1}_n, k\in\mathrm{R}$ ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردسته محسوب می‌شوند و باید اثبات شود که این ضرایب نامنفی هستند و مجموعشان در هر سطر برابر یک می‌باشد. با توجه به این‌که:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+1}^{n+m}\Big[(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}H_k 1_n\Big]= \\ &(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}(\sum_{k=n+1}^{n+m}H_k 1_n)=1_n \end{aligned} \tag{۲۴}$$

می‌توان نتیجه گرفت که مجموع ضرایب مذکور در هر سطر برابر یک می‌باشد.

در ادامه، نامنفی بودن این ضرایب بررسی می‌گردد. اگر درایه‌های ماتریس $(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}$ با h_{ij} نشان داده شوند، به‌عبارتی دیگر $(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}=[h_{ij}]$ و مؤلفه iام بردار $(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}H_k\mathbf{1}_n$ با α_{ki} نمایش داده شود، α_{ki} را با توجه به رابطه (۱۱) می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\alpha_{ki}=\sum_{j=1}^{n}h_{ij}\delta_j^k+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}\Big[\sum_{r=1}^{n}l_{jr}\Big] \tag{۲۵}$$

که l_{jr}ها درایه‌های ماتریس لاپلاسین هستند. با توجه به این‌که هر سطر ماتریس لاپلاسین مجموعی برابر صفر دارد، α_{ki} را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\alpha_{ki}=\sum_{j=1}^{n}h_{ij}\delta_j^k, k\in\mathrm{R} \tag{۲۶}$$

طبق لم ۱، درایه‌های ماتریس $(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}$ نامنفی هستند، به‌عبارتی دیگر برای تمامی $i\in\mathrm{F}$ و $j=1, 2, n.$ داریم $h_{ij}\ge 0$. از طرفی دیگر به ازای تمامی $j=1,2,...,n$ و $k\in\mathrm{R}$، $\delta_j^k\ge 0$ می‌باشد. بنابراین، با توجه به رابطه (۲۶) مشخص است که تمامی مؤلفه‌های بردار $(\sum_{r=n+1}^{n+m}H_r)^{-1}H_k\mathbf{1}_n$ که همان ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردسته می‌باشند، نامنفی هستند. در نتیجه طبق تعریف ۱، تعریف ۳ و رابطه (۲۳)، می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\lim_{t\to\infty} e(t)=\mathbf{0}$ برقرار باشد، عامل‌های پیرو به سمت پوش محدب عامل‌های سردسته هدایت خواهند شد.

در ادامه لمی ارائه می‌شود که با ایده گرفتن از لم ۱.۴ در [۱۶] شرایطی را بیان می‌کند که در حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده با استفاده از روش‌های تنظیم خروجی کاربرد خواهد داشت.

لم ۳_ سیستم حلقه-بسته (۲۰) را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس A_c هرویتز باشد. اگر ماتریس ثابتی همانند X_c وجود داشته باشد که به ازای $k\in\mathrm{R}$ در معادلات ماتریسی خطی

$$\begin{aligned} X_c\bar{H}_k\bar{S} &= A_cX_c\bar{H}_k+B_c^k \\ 0 &= C_cX_c\bar{H}_k+D_c^k \end{aligned} \tag{۲۷}$$

صدق کند، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=\mathbf{0} \tag{۲۸}$$

اثبات: ابتدا متغیری به صورت $\tilde{x}_c=x_c-X_c\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k$ تعریف می‌گردد. اگر X_c در معادلات ماتریسی خطی (۲۷) صدق کند، می‌توان نوشت:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_c &= \dot{x}_c - X_c \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \dot{\bar{w}}_k \\ &= A_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_c^k \bar{w}_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} X_c \bar{H}_k \bar{S} \bar{w}_k \\ &= A_c x_c - A_c X_c \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k = A_c \tilde{x}_c\end{aligned} \tag{۲۹}$$

با توجه به این‌که ماتریس A_c هرویتز می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t\to\infty} \tilde{x}_c(t) = \mathbf{0}$. از طرفی، خطای حلقه-بسته را با استفاده از رابطه (۲۷) می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}e &= C_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_c^k \bar{w}_k \\ &= C_c \tilde{x}_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} (C_c X_c \bar{H}_k + D_c^k) \bar{w}_k = C_c \tilde{x}_c\end{aligned} \tag{۳۰}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} C_c \tilde{x}_c(t) = \mathbf{0} \tag{۳۱}$$

و اثبات تمام است.

توجه شود که در لم ۱.۴ از [۱۶]، ماتریس ثابت X_c باید در یک جفت معادله صدق کند تا شرط لم تحقق یابد. اما به دلیل این‌که در کنترل محدود نگهدارنده با بیش از یک عامل سردسته مواجه هستیم، m جفت معادله در لم ۳ وجود دارند که ماتریس X_c باید در آن‌ها صدق کند تا شرایط لم تحقق یابد.

در ادامه، انتخاب ماتریس‌های K_i^1 و K_i^2 که بهره‌های کنترل‌کننده پیشنهادی هستند، مورد بحث قرار گرفته و نتیجه اصلی مقاله در قالب قضیه ۱ ارائه خواهد شد.

با توجه به فرض ۱، $K_i^1, i \in \mathrm{F}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که $A_i + B_i K_i^1$ هرویتز باشد. بهره K_i^2 هم از طریق رابطه

$$K_i^2 = U_i - K_i^1, i \in \mathrm{F} \tag{۳۲}$$

انتخاب می‌شود که U_i پاسخی است که از معادله ماتریسی خطی (۲۲) به دست آمده است. در نهایت باتوجه به فرض ۲، $L_i, i \in \mathrm{F}$ طوری انتخاب می‌شود که $A_i + L_i C_i$ هرویتز باشد. با توجه به روابط (۲۲) و (۳۲) می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\bar{S} = A + BK_1 + BK_2 \tag{۳۳}$$

که ماتریس‌های موجود در رابطه فوق به صورت ماتریس‌های $\bar{S} = I_n \otimes S$، $A = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$، $B = \mathrm{diag}\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$، $K_1 = \mathrm{diag}\{K_1^1, K_2^1, \ldots, K_n^1\}$ و $K_2 = \mathrm{diag}\{K_1^2, K_2^2, \ldots, K_n^2\}$ تعریف شده‌اند. رابطه (۳۳) در اثبات قضیه ۱ مورد نیاز خواهد بود.

قضیه ۱_ سیستم چندعاملی (۵) و (۶) و حلقه-بسته (۲۰) را در نظر بگیرید. تحت فرض‌های ۱ الی ۴، قانون کنترلی (۱۹) در صورتی که ضریب ثابت و مثبت β به حد کافی بزرگ باشد و به ازای $i \in \mathrm{F}$، ماتریس‌های بهره K_i^1 و L_i طوری انتخاب شده باشد که به ترتیب $A_i + B_i K_i^1$ و $A_i + L_i C_i$ هرویتز بوده و K_i^2 از طریق رابطه (۳۲) محاسبه شود، پاسخی می‌باشد که مبدأ سیستم $\dot{x}_c = A_c x_c$ را پایدار نمایی می‌کند و به ازای شرایط اولیه دلخواه $x_i(0), \zeta_i(0), \eta_i(0), i \in \mathrm{F}$ و $w_k(0), k \in \mathrm{R}$ خواهیم داشت $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0}$.

اثبات: با استفاده از قانون کنترلی (۱۹) داریم:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i K_i^1 \eta_i + B_i K_i^2 \zeta_i \tag{۳۴}$$

از طرفی، رابطه (۱۸) را می‌توان در حالت فشرده به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{\zeta} = \bar{S}\zeta - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k (\zeta - \bar{w}_k) \tag{۳۵}$$

که $\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1^T & \zeta_2^T & \cdots & \zeta_n^T \end{bmatrix}^T$. بنابراین سیستم حلقه-بسته را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BK_1\eta + BK_2\zeta \\ \dot{\eta} &= (A + BK_1 + LC)\eta + BK_2\zeta - LCx \\ \dot{\zeta} &= \Big[\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k\Big]\zeta + \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \\ \dot{\bar{w}}_k &= \bar{S}\bar{w}_k \\ e &= Cx + \sum_{k=n+1}^{n+m} D^k \bar{w}_k\end{aligned} \tag{۳۶}$$

که در روابط فوق $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1^T & \eta_2^T & \cdots & \eta_n^T \end{bmatrix}^T$، $L = \mathrm{diag}\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ و $C = \mathrm{diag}\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ است.

با در نظر گرفتن $x_c = \begin{bmatrix} x^T, & \eta^T, & \zeta^T \end{bmatrix}^T$ و ماتریس‌های

$$A_c = \begin{bmatrix} A & BK_1 & BK_2 \\ -LC & A + BK_1 + LC & BK_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \end{bmatrix},$$

$$B_c^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \bar{H}_k \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_c^k = D^k \tag{۱}$$

می‌توان سیستم (۳۶) را به شکل سیستم حلقه-بسته (۲۰) بیان نمود.

اگر مقادیر ویژه ماتریس‌های S و $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ به ترتیب، با λ_r و μ_q نشان داده شوند، در آن صورت مقادیر ویژه $(\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k)$ برابر با $(\lambda_r - \beta\mu_q), r = 1, \ldots, N, q = 1, \ldots, n$ خواهند بود. با توجه

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

به لم ۱، قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ مثبت می‌باشد. بنابراین با انتخاب به حد کافی بزرگ β، می‌توان نتیجه گرفت که به ازای $r=1,\dots,N$ و $q=1,\dots,n$، داریم $\lambda_r-\beta\mu_q<0$.

با در نظر گرفتن ماتریس‌های

$$T=\begin{bmatrix} A & BK_1 \\ -LC & A+BK_1+LC \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{۳۸}$$

$P^{-1}TP$ را که متشابه T می‌باشد می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$P^{-1}TP=\begin{bmatrix} A+BK_1 & BK_1 \\ 0 & A+LC \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

ماتریس‌های $A+BK_1$ و $A+LC$ هرویتز می‌باشند، و در نتیجه $P^{-1}TP$ هرویتز می‌باشد. از طرفی ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه یکسانی دارند، و با توجه به اینکه ماتریس T و ماتریس بیان‌شده توسط (۳۹) متشابه می‌باشند، می‌توان نتیجه گرفت که T هرویتز می‌باشد. بنابراین با انتخاب به حد کافی بزرگ β، ماتریس A_c هرویتز می‌باشد. در نتیجه، اولین ویژگی مسئله بیان‌شده در قضیه ۱ برقرار است.

در ادامه، ویژگی دوم مسئله مطرح‌شده در قضیه ۱ اثبات می‌شود. با استفاده از خاصیت ضرب کرونکر $(P\otimes Q)(Y\otimes Z)=(PY)\otimes(QZ)$، رابطه (۱۶) و تعریف ماتریس $\bar{S}=I_n\otimes S$ می‌توان نشان داد:

$$\bar{S}(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k=(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k\bar{S} \tag{۴۰}$$

با در نظر گرفتن X_c به صورت

$$X_c=(\mathbf{1}_3\otimes I_{nN})(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1} \tag{۴۱}$$

و با استفاده از روابط (۳۷)، (۳۳) و (۴۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} A_cX_c\bar{H}_k+B_c^k &= \begin{bmatrix} (A+BK_1+BK_2)(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k \\ (A+BK_1+BK_2)(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k \\ \bar{S}(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k-\beta\bar{H}_k+\beta\bar{H}_k \end{bmatrix} \\ &=(\mathbf{1}_3\otimes I_{nN})\bar{S}(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k \\ &=(\mathbf{1}_3\otimes I_{nN})(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k\bar{S}=X_c\bar{H}_k\bar{S} \end{aligned} \tag{۴۲}$$

همچنین با توجه به روابط (۱۶)، (۳۷) و (۴۱) داریم:

$$C_cX_c\bar{H}_k+D_c^k=\bar{H}_k+D_c^k=\mathbf{0} \tag{۴۳}$$

بنابراین X_c در نظر گرفته‌شده در (۴۱)، پاسخی برای معادلات ماتریسی خطی (۲۷) می‌باشد و با توجه به لم ۳ می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t\to\infty}e(t)=\mathbf{0}$ و اثبات کامل می‌شود.

بنابراین با حل مسئله بیان‌شده در قضیه ۱، از لم ۲ نتیجه گرفته می‌شود که عامل‌های پیرو (۵) به سمت پوش محدبی که توسط عامل‌های سردسته (۶) ایجاد می‌شود، هدایت خواهند شد.

در ادامه اثبات خواهد شد رابطه (۳۵) که شکل فشرده (۱۸) می‌باشد، می‌تواند به عنوان رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت عامل‌های سردسته در نظر گرفته شود.

ملاحظه ۱_ با تعریف متغیر جدید $\tilde{\zeta}$ به صورت

$$\tilde{\zeta}=\zeta-(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k \tag{۴۴}$$

و با استفاده از روابط (۳۶) و (۴۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}} &= \dot{\zeta}-\sum_{k=n+1}^{n+m}\Big[(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r)^{-1}\bar{H}_k\bar{S}\bar{w}_k\Big] \\ &=\Big[\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big]\zeta+\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k \\ &\quad -\bar{S}(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k \\ &=\Big[\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big] \\ &\quad \Big[\zeta-(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k\Big] \\ &=\Big[\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big]\tilde{\zeta} \end{aligned} \tag{۴۵}$$

از آنجایی که $(\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k)$ هرویتز می‌باشد، داریم $\lim_{t\to\infty}\tilde{\zeta}(t)=\mathbf{0}$. از طرفی، همان طور که در اثبات لم ۲ نشان داده شد، $(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k$ ترکیب محدب $\bar{w}_k, k\in\mathrm{R}$ می‌باشد. بنابراین، (۳۵) را می‌توان به عنوان رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت سردسته‌ها در نظر گرفت. علاوه بر این، سرعت همگرایی $\tilde{\zeta}$ را با انتخاب مقادیر بزرگتر β می‌توان بیشتر کرد.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این بخش، روش پیشنهادشده در بخش چهارم بر روی یک سیستم چندعاملی با هفت عامل شبیه‌سازی می‌شود تا عملکرد مناسب کنترل‌کننده طراحی‌شده نشان داده شود. گراف ارتباطات متناظر با سیستم چندعاملی مفروض در

شکل ۱ نشان داده شده است که گره‌های ۱ تا ۴ و ۵ تا ۷ به ترتیب، نمایش‌دهنده عامل‌های پیرو و سردسته می‌باشند. همچنین اگر گره j ام

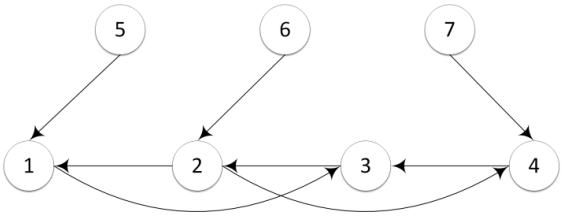
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

گراف ارتباطات به گره iام متصل باشد، a_{ij} برابر یک در نظر گرفته می‌شود. عامل‌های سردسته به صورت (۶) هستند و ماتریس S به صورت

$$S=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{۴۶}$$

در نظر گرفته شده است. معادلات دینامیکی عامل‌های پیرو نیز توسط ماتریس‌های زیر مشخص شده‌اند:

$$\begin{aligned}
&A_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\\
&A_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\\
&A_3=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\ C_3=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\\
&A_4=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 3 & 0\end{bmatrix},\ B_4=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\ C_4=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴۷}$$



شکل ۱: گراف ارتباطات

با حل معادله (۲۲) برای هر عامل پیرو، می‌توان پاسخ‌های زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned}
&U_1=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\quad U_2=\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix},\\
&U_3=\begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix},\quad U_4=\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴۸}$$

ماتریس‌های بهره استفاده‌شده در شبیه‌سازی نیز به صورت

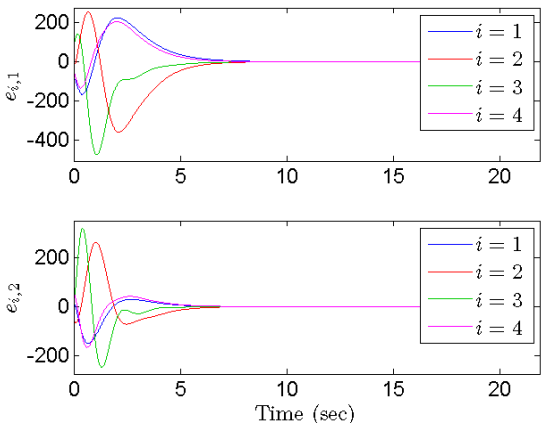
$$\begin{aligned}
&K_1^1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\quad K_2^1=\begin{bmatrix}-0.5 & 9\end{bmatrix},\\
&K_3^1=\begin{bmatrix}2 & -5\end{bmatrix},\quad K_4^1=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix},\\
&L_1=\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix},\quad L_2=\begin{bmatrix}-7.5\\ -15.5\end{bmatrix},\\
&L_3=\begin{bmatrix}-4\\ 1\end{bmatrix},\quad L_4=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴۹}$$

انتخاب شده‌اند. شرایط اولیه مورد استفاده در شبیه‌سازی نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&x_1=\begin{bmatrix}-30 & 4\end{bmatrix},\ x_2=\begin{bmatrix}20 & -10\end{bmatrix},\\
&x_3=\begin{bmatrix}30 & 30\end{bmatrix}\ x_4=\begin{bmatrix}-10 & 30\end{bmatrix},\\
&\eta_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix},\ \eta_2=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix},\\
&\eta_3=\begin{bmatrix}-1 & 3\end{bmatrix}\ \eta_4=\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix},\\
&\zeta_1=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix},\ \zeta_2=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\\
&\zeta_3=\begin{bmatrix}0 & -3\end{bmatrix}\ \zeta_4=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix},\\
&w_5=\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix},\ w_6=\begin{bmatrix}25 & 9\end{bmatrix},\\
&w_7=\begin{bmatrix}20 & 20\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۵۰}$$

جهت ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده، تغییرات بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده در

شکل ۲ رسم شده است. در این شکل، $e_{i,1}$ و $e_{i,2}$ مؤلفه‌های e_i می‌باشند. با توجه به این شکل ملاحظه می‌شود که مؤلفه‌های بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شوند، که نشان‌دهنده تحقق کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم شبیه‌سازی‌شده می‌باشد.

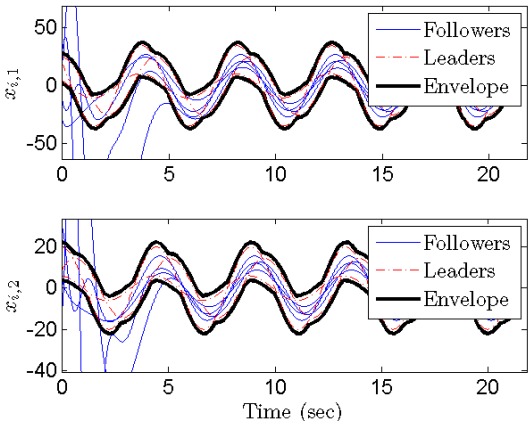


شکل ۲: نمودار تغییرات مؤلفه‌های بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده

جهت درک بهتر رفتار عامل‌ها در حوزه زمان، تغییرات زمانی مؤلفه‌های بردار حالت تمامی عامل‌ها نیز در

شکل ۳ رسم شده است. پوشی که توسط عامل‌های سردسته در حوزه زمان ایجاد می‌شود، با خط تیره و به رنگ سیاه در این شکل مشخص شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که در زمان‌های ابتدایی، مؤلفه‌های بردار حالت عامل‌های پیرو که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، خارج از پوش تشکیل‌شده توسط سردسته‌ها هستند. اما با گذشت زمان در داخل این پوش قرار می‌گیرند که نشان‌دهنده تحقق کنترل محدود نگهدارنده می‌باشد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]



شکل ۳: نمودار تغییرات زمانی مؤلفه‌های بردار حالت عامل‌ها

٦- نتیجه

در این مقاله، مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم‌های چندعاملی متشکل از عامل‌های پیرو خطی با دینامیک غیریکسان و با گراف ارتباطات جهت‌دار، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. دینامیک عامل‌های سردسته نیز به صورت سیستم خارجی در نظر گرفته شد. با توجه به اینکه در کاربردهای عملی متغیرهای حالت همیشه در دسترس نیستند، از فیدبک خروجی دینامیکی در طراحی کنترل‌کننده استفاده شد. به دلیل این‌که روش‌های موجود در مبحث تنظیم خروجی امکان در نظر گرفتن عامل‌های با دینامیک غیریکسان را دارند، برای حل این مسئله از قالب تنظیم خروجی استفاده گردید. بهره‌گیری از خطا و ماتریس H_k، این امکان را فراهم آورد تا بتوان حالت نهایی عامل‌های پیرو را به صورت مجموع عبارت‌هایی از متغیرهای حالت عامل‌های سردسته بیان کرد و در محاسبات به متغیرهای حالت عامل‌های سردسته دسترسی داشت. همچنین، خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به گونه‌ای اصلاح شد که بتوان بیش از یک عامل سردسته را در نظر گرفت. در طراحی کنترل‌کننده توزیع‌یافته نیز از یک جبران‌ساز دینامیکی استفاده شد، که در واقع نقش رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت عامل‌های سردسته را داشت.

از زمینه‌های تحقیقاتی آینده می‌توان به در نظر گرفتن گراف‌های سوئیچینگ با عامل‌های سردسته غیریکسان به صورت $\dot{w}_k = S_k w_k$، که هر عامل سردسته ماتریس S_k مخصوص به‌خود را دارد، اشاره کرد. همچنین، می‌توان دینامیک عامل‌ها را در شرایط واقعی که شامل نویز و نامعینی می‌باشد بررسی کرد تا میزان حساسیت روش پیشنهادی به این دو پدیده معمول در سیستم‌های واقعی ارزیابی شود. برای مثال دینامیک عامل‌های پیرو را به صورت $\dot{x}_i = (A_i + \Delta A_i)x_i + (B_i + \Delta B_i)u_i$ در نظر گرفت.

مراجع

[1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, 2007.

[2] W. Ren, R. W. Beard and E. M. Atkins, “Information consensus in multivehicle cooperative control,” IEEE Control Systems Magazine, vol. 27, no. 2, pp. 71-82, 2007.

[3] K. Peng, and Y. Yang, “Leader-following consensus problem with a varying-velocity leader and time-varying delays,” Physica A, vol. 388, no. 2, pp. 193-208, 2009.

[4] P. Wieland, R. Sepulchre and F. Allgower, “An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization,” Automatica, vol. 47, no. 4, pp. 1068-1074, 2011.

[5] Y. Su and J. Huang, “Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by output feedback,” Systems & Control Letters, vol. 61, no. 12, pp. 1248-1253, 2012.

[6] Y. Hong, X. Wang and Z. Jiang, “Distributed output regulation of leader-follower multi-agent systems,” International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 23, no. 1, pp. 48-66, 2013.

[7] H. Liu, G. Xie and L. Wang, “Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems,” Automatica, vol. 48, no. 7, pp. 1415-1422, 2012.

[8] M. Ji, G. Ferrari-Trecate, M. Egerstedt and A. Buffa, “Containment control in mobile networks,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 8, pp. 1972-1975, 2008.

[9] Y. Zheng and L. Wang, “Containment control of heterogeneous multi-agent systems,” International Journal of Control, vol. 87, no. 1, pp. 1-8, 2014.

[10] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh and M. Baradarannia, “Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems,” Automatica, vol. 54, pp. 210-216, 2015.

[11] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh and M. Baradarannia, “Adaptive containment control of nonlinear multi-agent systems with non-identical agents,” International Journal of Control, vol. 88, no. 8, pp. 1586-1593, 2015.

[12] C. Godsil and G. Royle, Algebraic Graph Theory, New York: Springer-Verlag, 2001.

[13] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, New Jersey: Princeton University Press, 1972.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]

[14] Z. Qu, Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles, London: Springer-Verlag, 2009.

[15] J. Xiang, W. Wei and Y. Li, "Synchronized output regulation of linear networked systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 6, pp. 1336-1341, 2009.

[16] J. Huang, Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications, Philadelphia: SIAM, 2004.

[17] G. Seyboth, W. Ren and F. Allgöwer, "Cooperative control of linear multi-agent systems via distributed output regulation and transient synchronization," Automatica, vol. 68, pp. 132-139, 2016.

[18] W. Li, L. Liu and G. Feng, "Distributed containment tracking of multiple stochastic nonlinear systems," Automatica, vol. 69, pp. 214-221, 2016.

زیرنویس‌ها

[1]Multi-Agent

[2]Consensus

[3]Heterogeneous

[4]Exosystem

[5]Containment Control

[6]Convex Hull

[7]Kronecker

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-04-30]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.1.7]