مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۱، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۳۰-۲۳

پایدار سازی سیستم های چندجمله ای غیرخطی در معرض نویز سیستم و اعوجاج کمی سازی

علی رضا فرهادی

استادیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، afarhadi@sharif.edu

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۳/۴ ، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۴/۱۸)

چکیده: این مقاله به مسئله پایدارسازی سیستم های چندجمله ای غیر خطی در معرض نویز سیستم هنگامی که انتقال از حسگر به کنترل کننده از طریق یک کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز صورت می گیرد، می پردازد. یک تکنیک پایدارسازی متشکل از یک انکودر، دیکودر و کنترل کننده جهت پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک، ارائه می شود. در صورت فقدان نویز سیستم نشان داده می شود که این تکنیک پایدارسازی منجر به پایداری مجانبی می شود. عملکرد رضایت بخش این تکنیک برای پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک و نیز پایداری مجانبی یک سیستم چندجمله ای غیر خطی بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز با استفاده از شبیه سازی کامپیوتری نمایش داده می شود.

کلمات کلیدی: سیستم کنترل شبکه ای، سیستم غیر خطی چندجمله ای، کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز

Stabilization of Nonlinear Polynomial Systems Subject to System Noise and Quantization Distortion

Alireza Farhadi

Abstract: This paper is concerned with the stability of nonlinear polynomial dynamic systems subject to system noise when transmission from sensor to controller is via the digital noiseless channel. A stabilizing technique consisting of an encoder, decoder and a controller is presented for almost sure asymptotic bounded stability of nonlinear polynomial systems subject to system noise over the digital noiseless channel. In the absence of system noise it is shown that the proposed stabilizing technique results in asymptotic stability. The satisfactory performance of the proposed technique for almost sure asymptotic bounded stability and asymptotic stability of a polynomial dynamic system over the digital noiseless channel is illustrated using computer simulations.

Keywords: Networked control system, Polynomial nonlinear system, Digital noiseless channel

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]

۱- مقدمه

۱-۱- پیشینه و انگیزش

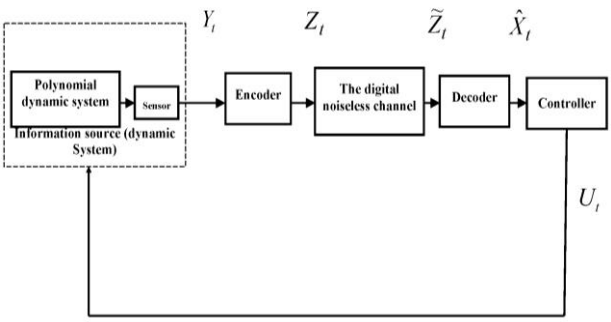
یک دسته مهم از سیستم های غیر خطی، سیستم های غیر خطی چندجمله ای است زیرا انواع دیگر سیستم های غیر خطی با هر نوع غیر خطی پیوسته ایستا می تواند بوسیله این دسته از سیستم های غیر خطی توصیف گردد[۱]. از طرف دیگر، یکی از مسائل نوظهور کنترل آن است که چگونه می توان یک سیستم دینامیکی را بر روی یک کانال مخابراتی که در معرض خطاهای مخابراتی(نظیر اعوجاج کمی سازی) است پایدار نمود[۲-۱۶]. مثال هایی از این سیستم ها که نیاز به پایدارسازی و/یا تخمین در معرض خطاهای مخابراتی دارند عبارتند از سیستم حفاری هوشمند چاه نفت، سیستم پایش میادین نفتی و سامانه خودکار انتقال آب کشاورزی. از این رو این مقاله به پایدارسازی سیستم های چندجمله ای غیر خطی بر روی یک کانال مخابراتی در معرض خطای مخابراتی می پردازد.

در این مقاله به مسئله پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک دسته ای خاص از سیستم های چندجمله ای غیرخطی در معرض نویز سیستم بر روی یک کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز پرداخته می

شود. بلوک دیاگرام این مسئله در شکل ۱ نشان داده شده است. بلوک دیاگرام های مشابهی در بسیاری از مقالات تحقیقاتی که به بررسی اثرات خطاهای مخابراتی در انتقال داده از حسگر به کنترل کننده می پردازند، مورد توجه قرار گرفته است (نظیر [۴] و [۷]). برخی نتایج اساسی در تخمین و/یا پایدار سازی سیستم های دینامیکی بر روی کانال های مخابراتی در معرض خطاهای مخابراتی در مقالات [۲-۱۶] یافت می شوند. در مرجع [۱۰] محققان به مسئله تخمین یک سیستم کنترل نشده لیپشیتز غیرخطی بدون نویز سیستم بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز با میانگین مجذور خطای تخمین صفر می پردازند. [۱۳] به مسئله تخمین یک سیستم کنترل نشده لیپشیتسز توزیع شده که در معرض نویز های سیستم و اندازه گیری است می پردازد و [۷] به مسئله پایدارسازی سیستم های غیرخطی فاقد نویز بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز می پردازد. به علاوه در مرجع [۱۶] به مسئله پایدارسازی سیستم های دینامیکی غیرخطی دارای عدم قطعیت بر روی یک شبکه مخابراتی بدون نویز که در معرض تاخیر مخابراتی و محدودیت های ایجاد شده ناشی از اشتراک شبکه با سایر کاربران است، پرداخته شده است. اما این مرجع اثرات اعوجاج کمی سازی را مورد توجه قرار نمی دهد.

۱-۲-نوآوری های مقاله

از آنجائیکه تاکنون مسئله پایدارسازی سیستم های چندجمله ای غیرخطی در معرض نویز سیستم و اعوجاج کمی سازی در اندازه گیری های انجام شده از سیستم مورد بررسی قرار نگرفته است در این مقاله به این مسئله پرداخته می شود(شکل ۱ را ببینید). در بلوک دیاگرام شکل ۱ اندازه گیری های انجام شده از سیستم، مقادیر حقیقی دارند و از این رو برای انتقال آنها از طریق یک کانال مخابراتی دیجیتال باید کمی شوند و به صورت یک بسته داده باینری با طول مشخص(مثلا R بیت) ارائه شوند. این امر منجر به اعوجاج در اندازه گیری های سیستم هنگامی که آنها دوباره در کنترل کننده بازسازی می شوند، می گردد. برخلاف این عدم قطعیت ها (یعنی نویز سیستم و اعوجاج ناشی ازکمی سازی) یک تکنیک پایدارسازی که شامل یک انکودر، دیکودر و کنترل کننده است، ارائه می شود که منجر به پایدار سازی مجانبی باند محدود با احتمال یک برای سیستم های چندجمله ای غیرخطی در معرض نویز سیستم می شود. در صورت عدم وجود نویز سیستم نشان داده می شود که این تکنیک پایدارسازی منجر به پایداری مجانبی می شود. عملکرد رضایت بخش این تکنیک برای پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک و پایداری مجانبی با استفاده از شبیه سازی کامپیوتری نمایش داده می شود.



شکل ۱- یک سیستم چند جمله ای غیر خطی که بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز کنترل می شود

۱-۳-ساختار مقاله

ساختار این مقاله بصورت زیر است: در بخش ۲، فرموله بندی مسئله ارائه می شود. بخش۳ به نتایج پایدارسازی اختصاص می یابد در این بخش انکودر، دیکودر و کنترل کننده ای برای پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک ارائه می شود. نتایج شبیه سازی در بخش۴ آورده شده است و مقاله در بخش ۵ نتیجه گیری می شود.

۲- فرموله بندی مسئله

در سراسر مقاله از نمادگذاری های زیر استفاده می شود: $|.|$ قدرمطلق را نشان می دهد و $\|.\|$ نرم اقلیدسی را نشان می دهد. $\doteq$ به معنای "بر مبنای تعریف معادل است با" می باشد. $[X]_i$ معرف i امین عنصر بردار X و $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است.$\acute{A}$ ترانهاده ماتریس A و A^{-1} معکوس ماتریس مربعی A می باشد.

این مقاله به مسئله پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک دسته ای از سیستم های چندجمله ای غیرخطی بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز می پردازد که در بلوک دیاگرام شکل۱ نشان داده شده است. اجزای سازنده این بلوک دیاگرام در زیر تشریح شده است.

سیستم دینامیکی: سیستم دینامیکی یک سیستم چندجمله ای غیرخطی زمان گسسته است که بصورت زیر توصیف می شود

$$\begin{cases} X_{t+1} = P_P(X_t) + U_t + W_t,\ X_0 = \xi \\ Y_t = X_t \end{cases}$$
$$t \in \mathbb{N}_+ \doteq \{0, 1, 2, ..\} \qquad (۱)$$

که در اینجا $X_t \in \mathbb{R}^n$ حالت سیستم است و Y_t اندازه گیری انجام شده از سیستم در زمان t است. ξ متغیر تصادفی بوده که معرف مقدار

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]

حالت اولیه است که برای کنترل کننده مقدارش نامعلوم است و U_t بردار کنترل است. $P_P(.) \in \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته غیرخطی با عناصر $P_P^{(i)}(.)$ است که هر کدام از این عناصر چند جمله ای از درجه p می باشد. در سراسر مقاله فرض می شود که حالت اولیه X_0 با عناصر $X_0^{(i)}$ $i = \{1, 2, .., n\}$ وجود دارد به گونه ای که

$$\Pr(X_0^{(i)} \in [-L_0^{(i)}, L_0^{(i)}]) = 1. \quad (۲)$$

بنابراین برای هر $X_0^{(i)}$ بازه مشخص $[-L_0^{(i)}, L_0^{(i)}]$ وجود دارد به گونه ای که با احتمال یک داریم:

$$X_0^{(i)} \in [-L_0^{(i)}, L_0^{(i)}]. \quad (۳)$$

همچنین داریم: $P_P^{(i)}(X_t) = \sum_{j=1}^{n} P_P^{(ij)}\left(X_t^{(j)}\right)$ که $P_P^{(ij)}\left(X_t^{(j)}\right)$ یک چند جمله از درجه p می باشد. یعنی

$$P_P^{(ij)}\left(X_t^{(j)}\right) = \sum_{e=0}^{p} \alpha_{ije} (X_t^{(j)})^e, \alpha_{ije} \in \mathbb{R}. \quad (۴)$$

در سیستم دینامیکی(۱)، $W_t \in \mathbb{R}^n$ با عناصر $W_t^{(i)}$ بردار نویز سیستم است. در سراسر مقاله فرض می شود که $W_t^{(i)}$ ها متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در محدوده $[-\omega^{(i)}, \omega^{(i)}]$ هستند.

کانال مخابراتی: کانال مخابراتی بین سیستم و کنترل کننده، کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز با نرخ انتقال R بیت است. این کانال یک بسته داده باینری بطول R بیت را در هر بار استفاده کانال انتقال می دهد.

از آنجائیکه اندازه گیری های انجام شده از سیستم دارای مقادیر حقیقی هستند جهت انتقال آنها از طریق کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز، این اندازه گیری ها باید بصورت بسته های داده باینری با طول R بیت کمی سازی شوند. این امر بوسیله یک اینکدور در بلوک دیاگرام شکل۱ انجام می شود. از طرف دیگر دیکودر، اندازه گیری های انجام گرفته و کمی سازی شده را در گیرنده بازتولید می نماید. توصیف انکودر و دیکودر در زیر آورده شده است.

انکودر: اینکدور یک عملگر علی است که بوسیله $Z_t = \varepsilon(Y_t)$ نشان داده می شود که خروجی سیستم را به ورودی کانال Z_t نگاشت می کند که یک رشته باینری با طول R بیت است.

دیکودر: دیکودر نیز یک عملگر علی است که بوسیله $\widehat{X}_t = D(\tilde{Z}_t)$ نشان داده می شود که خروجی کانال را به $\widehat{X}_t$ (تخمین متغیر حالت در دیکودر) نگاشت می کند.

کنترل کننده: کنترل کننده به فرم زیر است:

$$U_t = -P_P(\hat{X}_t) \quad . \quad (۵)$$

هدف این مقاله طراحی یک انکودر و دیکودر به گونه ای است که پایدار سازی مجانبی باند محدود با احتمال یک، که بصورت زیر تعریف می شود، را حاصل نماید.

تعریف ۱- (پایدار سازی مجانبی باند محدود با احتمال یک): بلوک دیاگرام شکل ۱ را در نظر بگیرید که بوسیله سیستم دینامیکی غیر خطی (۱) بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز که در بالا شرح داده شد، توصیف شده است. این سیستم دارای پایداری مجانبی باند محدود با احتمال یک است اگر و فقط اگر یک انکودر، دیکودر و کنترل کننده و یک مجموعه باند محدود بسته $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که شرط زیر را تامین نماید:

$$\Pr(\lim_{t\to\infty} X_t \in \Delta) = 1. \quad (۶)$$

نکته ۱: برای $\Delta=\{0\}$ نوع پایداری مجانبی است.

۳- نتایج پایدارسازی

در این بخش برای کنترل کننده (۵)، اینکدور و دیکودری ارائه می شودکه اقدام به پایدار سازی مجانبی باند محدود با احتمال یک سیستم دینامیکی (۱) در بلوک دیاگرام شکل ۱ می نماید. اجازه دهید که $E_t \doteq X_t - \hat{X}_t$ با عناصر $E_t^{(i)}$، معرف خطای تخمین باشد. تحت تاثیر بردار کنترل $U_t = -P_P(\hat{X}_t)$ سیستم دینامیکی(۱) بصورت زیر باز نویسی می شود

$$X_{t+1} = P_P(X_t) - P_P(\hat{X}_t) + W_t \quad (۷)$$

از این رو برای هر $i = \{1, 2, .., n\}$ فرمول زیر را برای هر $X_{t+1}^{(i)}$ داریم:

$$\begin{aligned} X_{t+1}^{(i)} &= P_P^{(i)}(X_t) - P_P^{(i)}(\hat{X}_t) + W_t^{(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(P_P^{(ij)}(X_t^{(j)}) - P_P^{(ij)}(\hat{X}_t^{(j)})\right) + W_t^{(i)} \end{aligned} \quad (۸)$$

حال با جایگزینی $\hat{X}_t^{(j)} = X_t^{(j)} - E_t^{(j)}$ در رابطه بالا داریم

$$X_{t+1}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \left(P_{Pe}^{(ij)}\left(E_t^{(j)}\right) + L^{(ij)}(X_t^{(j)}, E_t^{(j)})\right) + W_t^{(i)} \quad (۹)$$

بطوریکه

$$P_{Pe}^{(ij)} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \alpha_{ijk} (E_t^{(j)})^k \quad (۱۰)$$

و

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]

$$L^{(ij)}\left(X_t^{(j)}, E_t^{(j)}\right) = \sum_{h=0}^{p-2}\sum_{k=0}^{p-h-1}(-1)^{p-h-k+1}\ \frac{(p-h)(p-h-1)\dots(k+1)}{(p-h-k)!}\ \alpha_{ij\ p-h}.\ (X_t^{(j)})^k\ (E_t^{(j)})^{p-h-k}. \quad (۱۱)$$

حال برای کنترل کننده (۵) از انکودر و دیکودر زیر استفاده می کنیم.

تکنیک اینکودینگ و دیکودینگ: در زمان $t = 0$ برای هر $i = \{1, 2, , \dots, n\}$ بازه $\left[-L_0^{(i)}, L_0^{(i)}\right]$ به 2^{R_i} زیر بازه با اندازه یکسان غیرهمپوشان تقسیم بندی می شود و مرکز هر زیر بازه به عنوان شاخص آن بازه انتخاب می شود. برای هر $i = \{1, 2, , \dots, n\}$ به محض مشاهده $Y_0\ (= X_0)$، شاخص زیربازه ای که شامل $Y_0^{(i)}$ است به R_i بیت اینکود می شود. سپس یک بسته با طول $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ بیت شامل اطلاعاتی مربوط به اندازه گیری اولیه Y_0 از طریق کانال منتقل می شود. هنگامی که دیکودر این R بیت را دریافت کرد برای هر i ، شاخص زیر بازه ای که $Y_0^{(i)}$ در آن قرار گرفته است را تشخیص می دهد و مقدار شاخص به عنوان $\widehat{Y}_0^{(i)} = \widehat{X}_0^{(i)}$ انتخاب می شود($X_0^{(i)}$ تخمین $\hat{X}_0^{(i)}$ می باشد). بنابراین باند بالای خطای تخمین بصورت $\left|X_0^{(i)} - \widehat{X}_0^{(i)}\right| \le \frac{L^{(i)}}{2^{R_i}}$ ارائه می شود.

در زمان $t = 1$ از تعریف سیستم غیرخطی برای هر $i = \{1, 2, , \dots, n\}$ یک باند بالابرای $X_1^{(i)}$ بصورت زیر محاسبه می شود

$$\left|X_1^{(i)}\right| = \left|P_P^{(i)}(X_0) + [U_0]_i + W_0^{(i)}\right| = \left|P_P^{(i)}(X_0) - P_P^{(i)}(\hat{X}_0) + W_0^{(i)}\right|$$
$$\le \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{p}\left|\alpha_{ijk}\right|\ \left(\frac{L_0^j}{2^{R_j}}\right)^k + \sum_{h=0}^{p-2}\sum_{k=1}^{p-h-1}\left|\alpha_{ij\ p-h}\right|$$
$$.\left|\frac{(p-h)(p-h-1)\dots(k+1)}{(p-h-k)!}\right|\left(L_0^{(j)}\right)^k\ \left(\frac{L_0^{(j)}}{2^{R_j}}\right)^{p-h-k}\Big) + \omega^{(i)} \doteq L_1^{(i)}. \quad (۱۲)$$

سپس مشابه با زمان قبلی، در این بازه برای هر $i = \{1, 2, , \dots, n\}$ بازه $\left[-L_1^{(i)}, L_1^{(i)}\right]$ به 2^{R_i} زیر بازه با اندازه یکسان و غیرهمپوشان تقسیم بندی می شود و مرکز هر زیر بازه نیز به عنوان شاخص آن بازه انتخاب می شود. بدین ترتیب برای هر i به محض مشاهده $Y_1\ (= X_1)$ شاخص زیر بازه ای که شامل $Y_1^{(i)}$ است به R_i بیت کد شده و سپس $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ بیت شامل اطلاعات مربوط به اندازه گیری Y_1 از طریق کانال مخابراتی منتقل می شود. هنگامی که این R بیت دریافت شد برای هر i دیکودر شاخص زیربازه ای که شامل $Y_1^{(i)}$ است را تشخیص می دهد و مقدار این شاخص بصورت تخمین $\widehat{Y}_1^{(i)} = \widehat{X}_1^{(i)}$ انتخاب می شود. بنابراین حد بالای خطا ی تخمین در این حالت عبارت است از $\left|X_1^{(i)} - \widehat{X}_1^{(i)}\right| \le \frac{L^{(i)}}{2^{R_i}}$.

با دنبال کردن دستورالعمل مشابه توالی های $\hat{X}_0$ و $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ و $\hat{X}_3$ و .... در دیکودر بازسازی می گردند. حد بالای خطای تخمین جهت بازسازی $X_t^{(i)}$ عبارت است از

$$\left|X_t^{(i)}\right| \le L_t^{(i)}$$
$$L_t^{(i)} = \omega^{(i)} + \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{p}\left|\alpha_{ijk}\right|\ \left(\frac{L_{t-1}^j}{2^{R_j}}\right)^k + \sum_{h=0}^{p-2}\sum_{k=1}^{p-h-1}\left|\alpha_{ij\ p-h}\right|$$
$$.\left|\frac{(p-h)(p-h-1)\dots(k+1)}{(p-h-k)!}\right|\left(L_{t-1}^{(j)}\right)^k\ \left(\frac{L_{t-1}^{(j)}}{2^{R_j}}\right)^{p-h-k} \quad (۱۳)$$

حال با در نظر گرفتن بردار Z_t به صورت زیر

$$Z_t \doteq \begin{pmatrix} L_t^{(1)} \\ L_t^{(2)} \\ \vdots \\ L_t^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (۱۴)$$

و با در نظر گرفتن فرمول بالا برای $L_t^{(i)}$ ها داریم:

$$Z_{t+1} = F(Z(t), \tilde{R}, \alpha) + \omega \quad (۱۵)$$

که در اینجا $F\left(Z_t, \tilde{R}, \alpha\right)$ یک بردار چندجمله ای از Z_t است و

$$\tilde{R} \doteq \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \alpha \doteq \begin{pmatrix} \alpha_{110} \\ \alpha_{111} \\ \vdots \\ \alpha_{nnp} \end{pmatrix}, \omega \doteq \begin{pmatrix} \omega^{(1)} \\ \omega^{(2)} \\ \vdots \\ \omega^{(n)} \end{pmatrix} \quad (۱۶)$$

حال فرض نمایید که تبدیل $H_t = Z_t + \eta$ وجود دارد که سیستم دینامیکی بالا را به سیستم زیر تبدیل می نماید

$$H_{t+1} = G\left(H_t, \tilde{R}, \alpha\right), \quad G(0, \tilde{R}, \alpha) = 0 \quad (۱۷)$$

این بدان معنا است که با بکارگیری تبدیل بالا، سیستم(۱۵) به سیستم (۱۷) تبدیل می شود که بردار صفر را به عنوان نقطه تعادلش دارد.

اکنون برای چک کردن پایداری مجانبی سیستم چند جمله ای (۱۷) و یافتن شرایطی بر نرخ R_i برای پایدارسازی مجانبی می توان از

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]

بسته نرم افزاری QEPCAD که توسط Collin, Hong و سایر همکاران [۱۷-۱۸] توسعه یافته است، استفاده کرد. QEPCAD یک بسته نرم افزار محاسباتی سمبولیک است. ورودی آن عباراتی شامل معادلات و نامعادلات چندجمله ای است. با بکارگیری این بسته نرم افزاری برای خانواده ای از توابع لیاپانوف می توان مجموعه از چند جمله های مقید را یافت که پایدار سازی مجانبی سیستم (۱۷) را بر اساس تئوری لیاپانوف تضمین می کند. برای نمونه برای سیستم چندجمله ای (۱۷) ما خانواده توابع درجه دوم لیاپانوف $V(Q,H)= H\acute{Q}H$ را انتخاب می نماییم که در آن $Q \in \mathbb{R}^{n*n}$ یک ماتریس دلخواه مثبت معین است. اکنون برای بدست آوردن مجموعه ای از چند جمله ای های مقید که پایداری مجانبی سیستم (۱۷) را تضمین می نماید از بسته نرم افزار QEPCAD با دستور ورودی زیر استفاده می گردد:

$$(\exists D)(\forall H)\big(D > 0 \wedge 0 < \|H\| < D \wedge V(Q, G(H,\tilde{R},\alpha)) - V(Q,H) < 0\big) \qquad (۱۸)$$

خروجی این دستور، یک مجموعه از چندجمله ای های مقید شامل ماتریس Q و بردار $\tilde{R}$ است که برای α داده شده تضمین می کند که شرط $V(Q, G(H,\tilde{R},\alpha)) - V(Q,H) < 0$ برای هر $0 \le \|H_0\| < D$ حاصل شده است. توجه کنید که شرط $V(Q, G(H,\tilde{R},\alpha)) - V(Q,H) < 0$ پایداری مجانبی سیستم (۱۷) را تضمین می کند.

با توجه به این موضوع، قضیه زیر را برای پایدارسازی سیستم دینامیک (۱) در بلوک دیاگرام شکل۱ با بکارگیری کنترل کننده (۱) و تکنیک اینکدینگ و دیکدینگ ذکر شده در بالا داریم.

قضیه ۱- سیستم کنترلی شکل۱ را که بوسیله سیستم چندجمله ای غیر خطی (۱) بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز که پیشتر توصیف شد را در نظر بگیرید. فرض کنید که در اینجا بردار $\eta \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که با استفاده از تبدیل $Z_t = H_t + \eta$، سیستم (۱۵) را به سیستم (۱۷) با بردار صفر به عنوان نقطه تعادلش تبدیل می کند. همچنین فرض نمایید که $R_1, R_2, \ldots, R_n$ اعداد صحیح غیر منفی هستند که سیستم (۱۷) را حول بردار صفر پایدار مجانبی می نماید. حال با بکارگیری تکنیک های اینکدیک و دیکدینگ پیشنهادی و کنترل کننده $U_t = -P_P(\hat{X}_t)$ ، یک مجموعه باند محدود بسته $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ وجود دارد که با احتمال یک داریم: $X_t \to \Delta$ که

$$\Delta = [-L_\infty^{(1)}, L_\infty^{(1)}] \times [-L_\infty^{(2)}, L_\infty^{(2)}] \times \ldots \times [-L_\infty^{(n)}, L_\infty^{(n)}],\ L_\infty^{(i)} = -\eta^{(i)}\ . \qquad (۱۹)$$

اثبات: هر نرخ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ که سیستم چندجمله ای(۱۷) را حول مبدا به صورت مجانبی پایدارسازی می نماید، انتخاب نمایید. اکنون با بکارگیری تکنیک های اینکدینگ و دیکدینگ بالا و کنترل کننده $U_t = -P_P(\hat{X}_t)$ داریم که $H_t \to 0$. از اینرو از عبارت مقابل $Z_t = H_t + \eta$ داریم که $Z_t \to -\eta$. حال از آنجائیکه هر عنصر بردار Z_t یعنی $Z_t^{(i)}$ با احتمال یک ،یک حد بالا برای هر عنصر بردار X_t (یعنی $X_t^{(i)}$) است نتیجه گرفته می شود که $X_t \to \Delta$ یا بطور معادل $\Pr(\lim_{t\to\infty} X_t \in \Delta) = 1$ در جایی که

$$\Delta = [-L_\infty^{(1)}, L_\infty^{(1)}] \times [-L_\infty^{(2)}, L_\infty^{(2)}] \times [-L_\infty^{(n)}, L_\infty^{(n)}],\ L_\infty^{(i)} = -\eta^{(i)}\ . \qquad (۲۰)$$

نکته ۲: برای هر سیستم دینامیک فاقد نویزسیستم (یعنی هنگامی که $W_t = 0$) داریم $\eta = 0$ و از این رو تحت فرضیات قضیه بالا با بکارگیری کنترل کننده و تکنیک اینکدینگ و دیکدینگ پیشنهادی داریم: $X_t \to 0$

۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش به منظور نمایش کارایی روش پیشنهادی، دیکدر، اینکدر و کنترل کننده پیشنهاد شده در بخش قبل را به بلوک دیاگرام شکل۱ که توسط سیستم چندجمله ای غیرخطی زیر توصیف می شود، اعمال می نماییم.

$$\begin{cases} X_{t+1} = \alpha_2 X_t^2 + \alpha_1 X_t + \alpha_0 + U_t + W_t \\ Y_t = X_t \end{cases} \qquad (۲۱)$$

که دراینجا $X_0 \in [-L_0, L_0]$ حالت اولیه نامعلوم و متغیر تصادفی W_t دارای توزیع یکنواخت در بازه $[-\omega, \omega]$ است (یعنی $W_t \in [-\omega, \omega]$). توجه نمایید که L_0 و ω مشخص می باشند.

به منظور پایدارسازی این سیستم ورودی کنترل بصورت مقابل $U_t = \alpha_2 \hat{X}_t^2 - \alpha_1 \hat{X}_t - \alpha_0$ انتخاب می گردد. با اعمال این ورودی کنترل، سیستم تحت کنترل در بلوک دیاگرام شکل۱ دارای توصیف زیر است:

$$X_{t+1} = \alpha_2 X_t^2 + \alpha_1 X_t + \alpha_0 - \alpha_2 \hat{X}_t^2 - \alpha_1 \hat{X}_t - \alpha_0 + W_t$$
$$= \alpha_2 (X_t^2 - \hat{X}_t^2) + \alpha_1 E_t + W_t\ ,\quad E_t = X_t - \hat{X}_t$$
$$= \alpha_2 E_t (2X_t - E_t) + \alpha_1 E_t + W_t$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]

$$= -\alpha_2 E_t^2 + 2\alpha_2 E_t X_t + \alpha_1 E_t + W_t \quad (۲۲)$$

بنابراین برای سیستم (۲۱) بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز با نرخ R بیت با بکارگیری کنترل کننده و تکنیک اینکودینگ و دیکدینگ پیشنهادی، حد بالای زیر را برای $|X_{t+1}|$ داریم:

$$|X_{t+1}| \le |L_{t+1}|$$
$$L_{t+1} = |\alpha_2|(\frac{L_t}{2^R})^2 + 2|\alpha_2|\frac{L_t^2}{2^R} + |\alpha_2|\frac{L_t}{2^R} + \omega$$
$$= \beta_2 L_t^2 + \beta_1 L_t + \omega \ , \ \beta_2 = \frac{|\alpha_2|}{2^{2R}} + 2\frac{|\alpha_2|}{2^R} \ , \ \beta_1 = \frac{|\alpha_1|}{2^R} \quad (۲۳)$$

اکنون اجازه دهید که $\eta \le 0$ جواب معادله زیر باشد

$$\beta_2 \eta^2 + (1-\beta_1)\eta + \omega = 0 \rightarrow$$
$$\eta_{1,2} = \frac{(\beta_1-1) \pm \sqrt{(\beta_1-1)^2 - 4\beta_2\omega}}{2\beta_2} \ , ((\beta_1-1)^2 - 4\beta_2\omega > 0). \quad (۲۴)$$

سپس η- نقطه تعادل سیستم (۲۳) است و تبدیل $H_t = L_t + \eta$ سیستم (۲۳) را به سیستم زیر تبدیل می کند

$$H_{t+1} = \beta_2 H_t^2 + (\beta_1 - 2\beta_2\eta)H_t,$$
$$H_0 = L_0 + \eta \quad (۲۵)$$

توجه کنید که نقطه تعادل سیستم دینامیک (۲۵) صفر است. اکنون برای ساده سازی تحلیل پایدارسازی سیستم (۲۵) فرض کنید که یک نرخ R وجود دارد به گونه ای که رابطه زیر برقرار است:

$$\beta_1 - 1 \le 0$$
$$(\beta_1 - 1)^2 - 4\beta_2\omega = 0, \quad (۲۶)$$

تحت این فرضیات سیستم (۲۵) به سیستم زیر ساده می شود:

$$H_{t+1} = \beta_2 H_t^2 \quad (۲۷)$$

اکنون با توسعه سیستم دینامیکی بالا داریم که

$$H_t = \frac{1}{\beta_2}(\beta_2 H_0)^{2t}. \quad (۲۸)$$

بنابراین تحت فرض $|\beta_2 H_0| < 1$ (وبا فرض اینکه مقدار اولیه سیستم به گونه ای است که در ناحیه جذب نقطه تعادل پایدار سیستم(۲۱) قرار دارد) با احتمال یک داریم که $H_t \to 0$. در نتیجه با احتمال یک داریم که $L_t \to -\eta \ge 0$. این بدان معنا است که تحت فرضیات بالا برای سیستم (۲۱) بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز با نرخ R بیت که شرایط مقابل را ارضا می نماید:

(۲۹)

$$\beta_1 - 1 \le 0$$
$$(\beta_1 - 1)^2 - 4\beta_2\omega = 0,$$
$$|\beta_2 H_0| < 1$$

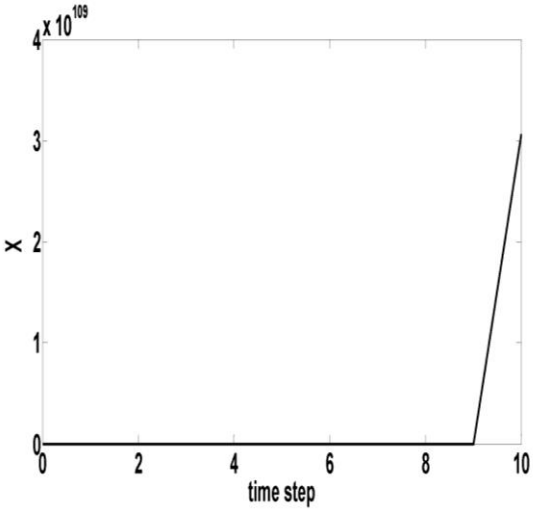
با احتمال یک داریم که $X_t \to \Delta$ که $\Delta = [-\eta, \eta]$.

اکنون فرض کنید که $\omega = 1$ ، $\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = \frac{1}{9}, \alpha_0 = 3$ و $L_0 = 4$ است. برای سیستم(۲۱) که بوسیله این پارامترها توصیف شده است اگر $R = 2$ بیت انتخاب شود داریم که $\beta_2 = \frac{1}{16}$ ، $\beta_1 = \frac{1}{2}$ و بنابراین

$$(\beta_1 - 1)^2 - 4\beta_2\omega = 0 \text{ و } |\beta_2 H_0| = \frac{1}{2} < 1, \beta_1 - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

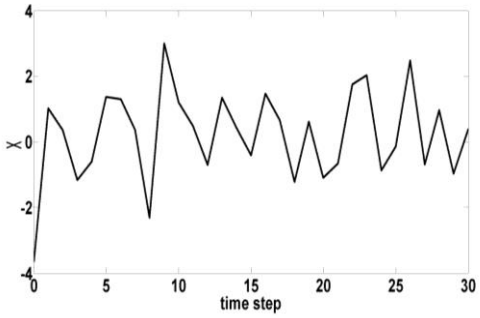
(۳۰)

برقرار است. از این رو همچنانکه در بالا بحث شد برای سیستم(۲۱) که بوسیله پارامترهای بالا توصیف می شود با احتمال یک داریم $X_t \to \Delta$ که در آن $\Delta = [-4,4]$ است.



شکل ۲- مسیر حالت بدون ورودی کنترل

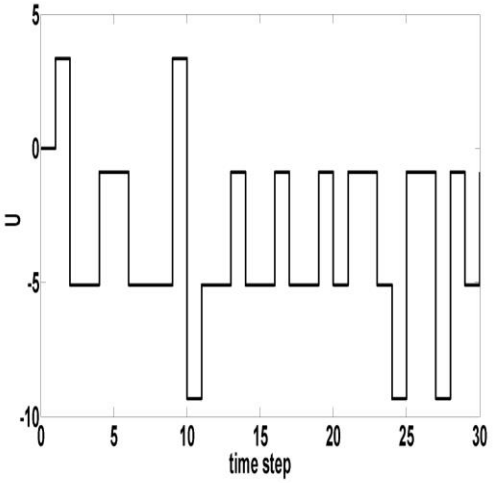
شکل۲ مسیر حالت سیستم (۲۱) را نشان می دهد که بوسیله پارامترهای بالا توصیف شده است و $U_t = 0$ می باشد. همچنانکه از شکل بالا واضح است بدون ورودی کنترل، سیستم نا پایدار است.



شکل ۳- مسیر حالت سیستم کنترل شده

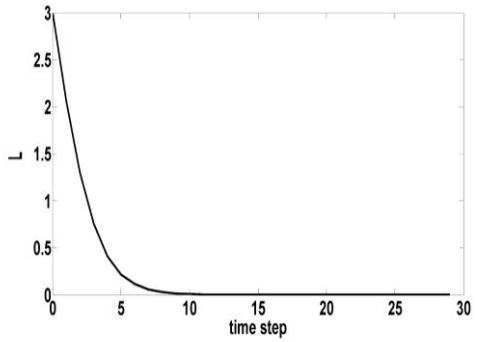
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]

شکل۳ مسیر حالت سیستم (۲۱) را که تحت تاثیر تکنیک پیشنهاد شده پایدار شده است را نشان می دهد.



شکل ۴- سیگنال کنترل

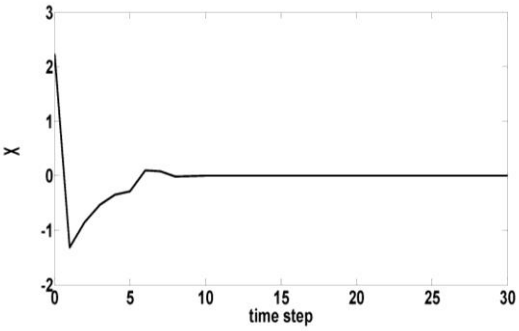
شکل۴ سیگنال کنترل را برای این حالت نشان می دهد هنگامی که انکودر، دیکودر و کنترل کننده پیشنهادی با نرخ $R = 2$ مورد استفاده قرار می گیرد. از شکل۳ واضح است که مسیر حالت سیستم همچنانکه انتظار می رود در بازه [-4,4] علی رغم وجود نویز سیستم و اعوجاج کمی سازی قرار دارد. حال برای $\omega = 0$ داریم: $\eta = 0$ و $L_{t+1} = \frac{1}{16}L_t^2 + \frac{1}{2}L_t$.



شکل ۵

شکل ۵، L_t را بر حسب زمان برای این حالت نشان می دهد. از این شکل واضح است که با افزایش زمان داریم: $L_t \to 0$. از شکل ۶ هم واضح است که همانگونه که انتظار می رود برای این حالت داریم که $X_t \to 0$.

نکته ۳: در مرجع [۱۰] محققان به مسئله تخمین یک سیستم کنترل نشده لیپشیتز غیرخطی بدون نویز سیستم بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز با میانگین مجذور خطای تخمین صفر می پردازند و در [۱۳] به مسئله تخمین یک سیستم کنترل نشده لیپشیتسز توزیع شده که در معرض نویز های سیستم و اندازه گیری است پرداخته می شود.[۷] به مسئله پایدارسازی سیستم های غیرخطی فاقد نویز بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز می پردازد. این در حالی است که این مقاله به مسئله پایدارسازی سیستمهای غیر خطی نویزی می پردازد. به علاوه در مرجع [۱۶] به مسئله پایدارسازی سیستم های دینامیکی غیرخطی دارای عدم قطعیت بر روی یک شبکه مخابراتی بدون نویز که در معرض تاخیر مخابراتی و محدودیت های ایجاد شده ناشی از اشتراک شبکه با سایر کاربران است، پرداخته است، اما این مرجع اثرات اعوجاج کمی سازی را مورد توجه قرار نمی دهد. حال آنکه در این مقاله نقل و انتقال اطلاعات در معرض اعوجاج کمی سازی قرار دارد. پایدارسازی با احتمال یک سیستمهای دینامیکی بر روی کانالهای مخابراتی در مقالات محدودی و برای مثال در [۱۹] و برای سیستهای دینامیکی خطی بررسی شده است. برای سیستمهای دینامیکی خطی فاقد نویز، تکنیک ارائه شده در این مقاله به تکنیک ارائه شده در [۱۹] تقلیل می یابد.



شکل ۶- مسیر حالت سیستم کنترل شده

۵- نتیجه گیری

این مقاله به مسئله پایدارسازی دسته خاصی از سیستم های چندجمله ای غیر خطی در معرض نویز سیستم که در آنها انتقال داده های اندازه گیری شده از سیستم توسط حسگر به کنترل کننده از طریق یک کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز صورت می گیرد، پرداخت. یک تکنیک پایدارسازی متشکل از یک انکودر، دیکودر و کنترل کننده جهت پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک، برای این مسئله ارائه شد. در صورت فقدان نویز سیستم نشان داده شد که این تکنیک پایدارسازی منجر به پایداری مجانبی می شود. عملکرد رضایت بخش این تکنیک برای پایدارسازی مجانبی باند محدود با احتمال یک و نیز پایداری مجانبی یک سیستم چندجمله ای غیر خطی بر روی کانال مخابراتی دیجیتال بدون نویز با استفاده از شبیه سازی کامپیوتری نمایش

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]

داده شد. برای تحقیقات آینده سعی می شود که این تکنیک برای کلاس وسیعتری از سیستم های چند جمله ای توسعه یابد.

مراجع

[1] D. Nesic, "Dead-beat control for polynomial systems," PhD thesis, the Australian National University, 1996.

[2] N. Elia, "When Bode meets Shannon: control-oriented feedback communication schemes," IEEE Trans. Automat. Contr., 49(9), pp. 1477-1488, 2004.

[3] N. Elia and J. N. Eisenbeis, "Limitations of linear control over packet drop networks," IEEE Trans. Automat. Contr., 56(4), pp. 826-841, 2011.

[4] N. C. Martins, A. Dahleh and N. Elia, "Feedback stabilization of uncertain systems in the presence of a direct link," IEEE Trans. Automat. Contr., 51(3), pp. 438-447, 2006.

[5] P. Minero, M. Franceschetti, S. Dey and N. Nair, "Data rate theorem for stabilization over time-varying feedback channels," IEEE Trans. Automat. Contr., 54(2), pp. 243-255, 2009.

[6] P. Minero, L. Coviello and M. Franceschetti, "Stabilization over Markov feedback channels: the general case," IEEE Trans. Automat. Contr., 58(2), pp. 349-362, 2013.

[7] G. N. Nair, R. J. Evans, I. M. Y. Mareels and W. Moran W, "Topological feedback entropy and nonlinear stabilization," IEEE Trans. Automat. Contr., 49(9), pp. 1585-1597, 2004.

[8] G. N. Nair and R. J. Evans, "Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates," SIAM J. Control Optimization, 43(3), pp. 413-436, 2004.

[9] C. Canudas de Wit, F. Gomez-Estern and F. Rodrigues Rubio, "Delta-modulation coding redesign for feedback-controlled systems," IEEE Transactions on Industrial Electronics, 56(7), pp. 2684-2696, 2009.

[10] G. N. Nair and R. J. Evans, "State estimation via a capacity limited communication channel," IEEE Conf. Decision Contr., pp. 866-871, 1997.

[11] C. D. Charalambous and A. Farhadi, "LQG optimality and separation principle for general discrete time partially observed stochastic systems over finite capacity communication channels," Automatica, 44(12), pp. 3181-3188, 2008.

[12] C. D. Charalambous, A. Farhadi and S. Z. Denic, "Control of continuous-time linear Gaussian systems over additive Gaussian wireless fading channels: a separation principle," IEEE Transactions on Automatic Control, 53(4), pp. 1013-1019, 2008.

[13] A. Farhadi and N. U. Ahmed, "Tracking nonlinear noisy dynamic systems over noisy communication channels," IEEE Transactions on Communications, 59(4), pp. 955-961, 2011.

[14] A. Farhadi, "Feedback channel in linear noiseless dynamic systems controlled over the packet erasure network," International Journal of Control, 88(8), pp. 1490-1503, 2015.

[15] A. Farhadi, J. Domun and C. Canudas de Wit, "A supervisory control policy over an acoustic communication network," International Journal of Control, 88(5), pp. 946-958, 2015.

[16] W. P. M. H. Heemels, A. R. Teel, N. Van de Wouw and D. Nesic, "Networked control systems with communication constraints: tradeoffs between transmission intervals, delays and performance," IEEE Transactions on Automatic Control, 55(8), pp. 1781-1796, 2010.

[17] G. E. Collins, "Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition," Lect. Notes Comp. Sci., 33, pp. 134-183, 1975.

[18] G. E. Collins and H. Hong, "Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination", J. Symbolic Comp., pp. 174-200, 1998.

[19] S. Tatikonda and S. Mitter, "Control over noisy channels," IEEE Trans. Automat. Contr., 49(7), pp. 1196-1201, 2004.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-17]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.2.1.0]