مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۳۸-۲۵

طراحی قانون کنترلی مقاوم جهت پایدارسازی سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با در نظرگرفتن عدم قطعیت در مدل و قید دامنه ورودی

مریم السادات اسدی نیا[۱]، طاهره بینازاده[۲]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک ، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، m.asadinia@sutech.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، binazadeh@sutech.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۵/۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۸/۱۸)

چکیده: در این مقاله، مساله پایدارسازی مقاوم برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی با در نظر گرفتن عدم قطعیت های مدل و محدودیت بر روی دامنه سیگنال کنترلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف از پایدارسازی مقاوم در اینجا، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت اشباع شده می‌باشد به نحویکه سیستم حلقه بسته حاصل، برای همه عدم قطعیت های مجاز، رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد. تأخیر زمانی به صورت متغیر با زمان با کران بالا و پایین معلوم در نظر گرفته شده و مساله پایدارسازی در دو حالت بررسی می‌شود. ابتدا، مساله پایدارسازی مقاوم برای سیستم های سینگولار دارای تأخیر در حضور اشباع محرک و عدم قطعیتهای مدل در نظرگرفته می‌شود. شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت پایدارساز مستقل از تأخیر بر اساس نامساوی های ماتریس خطی بیان شده است. علاوه بر آن تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته، در قضیه مربوطه ارائه می‌گردد. در حالت دوم، معیارهای پایدارسازی مقام وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تاخیر و ورودی محدود، طی دو قضیه ارائه شده است. این قضایا در دو نسخه ارائه شده اند. در این قضایا، شرایط تضمین پایداری وابسته به تأخیر در سیستم حلقه بسته بر اساس نامساوی های ماتریسی خطی برای تاخیر ثابت و تاخیر متغیر با زمان بیان گردیده است. ناحیه جذب سیستم حلقه بسته نیز برای حالت دوم تخمین زده شده است. در پایان، مثال های عملی و عددی ارائه شده است و نتایج شبیه سازی ها دستاوردهای تئوری مقاله را تایید می‌نمایند.

کلمات کلیدی: سیستم های سینگولار تاخیری، تأخیر متغیر با زمان، پایداری مقاوم، قید دامنه ورودی کنترلی، عدم قطعیت مدل.

Design of Robust Control Law for Stabilization of Singular Systems with Time-Varying Delay in The Presence of Model Uncertainty and Input Amplitude Constraint

Maryamsadat Asadinia, Tahereh Binazadeh

Abstract: This paper investigates the problem of robust stabilization of uncertain singular systems with time-varying delay in the presence of model uncertainties and input amplitude constraint. Here, the purpose of robust stabilization is to design a saturated state feedback such that the closed-loop system is regular, impulse free and stable for all admissible uncertainties. The time-delay has been considered to be time-varying with known lower and upper bound. The problem of stabilization is studied in two cases. First, the robust stabilization problem is considered for the singular systems with time-varying delay in the presence of actuator saturation and model uncertainties. In this case, the existence conditions of robust stabilizing delay-independent state feedback controller are given via the linear matrix inequalities. Additionally, an estimation of the domain of attraction of the closed-looped system is proposed in the related theorem. In the second case, delay-dependent criteria for robust stability of uncertain time-delay singular systems with

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

constrained input is given in two theorems. These theorems investigate delay-independent stability conditions via the linear matrix inequalities for constant and time-varying delay. Also, the domain of attraction for the closed-looped system is estimated in this case, too. Finally, practical and numerical examples are given and simulation results verify the theoretical achievements of paper.

Keywords: Time-varying singular systems, Robust stability, Input amplitude constraint, Model uncertainty.

۱- مقدمه

سیستم های سینگولار[1] که با نام های متفاوتی مانند سیستم های جبری دینامیکی[2]، توصیفی[3]، تعمیم یافته[4]، نیمه حالت[5]، ضمنی[6] و... نیز شناخته می‌شوند، ترکیبی از معادلات جبری و دیفرانسیلی هستند. از این رو این سیستم ها در مقایسه با سیستم های فضای حالت معمولی، در توصیف سیستم های فیزیکی تواناترند. این حقیقت موجب شده تا سیستم های سینگولار کاربرهای بسیاری در زمینه مدلسازی و تحلیل سیستم های فیزیکی از قبیل سیستم های قدرت [۱]، فرایند های شیمیایی [۲]، مهندسی هوا فضا [۳]، رباتیک [۴]، سیستم های مکانیکی [۵]، سیستم های اقتصادی [۶] و... داشته باشند. به دلیل ساختار پیچیده تری که سیستم های سینگولار نسبت به سیستم های معمولی دارند، روش های کنترلی بکار گرفته شده برای تحلیل این سیستم ها از پیچیدگی بیشتری برخوردارند. به عنوان مثال، در کنترل سیستم های سینگولار علاوه بر پایداری، به مسائل دیگری از جمله رگولار و ضربه آزاد بودن نیز توجه می‌شود که اصطلاحاً به سیستم سینگولاری که این ویژگی ها را دارا باشد، سیستم مجاز[7] می‌گویند. در دو دهه اخیر، تحقیقات زیادی در زمینه کنترل های سینگولار انجام شده است. اکثر مقالات در این حوزه، بر پایه تعمیم و گسترش تئوری سیستم های غیرسینگولار[8] به سیستم های سینگولار شکل گرفته اند. برای مطالعه ی تاریخچه بتفصیل و تحقیقات پایه صورت گرفته در خصوص کنترل سیستم های سینگولار می‌توان به مراجع [۷-۹] رجوع نمود.

یکی از عوامل اصلی که موجب ناپایداری و عملکرد ضعیف در سیستم های کنترل می‌شود، تأخیر است. بنابراین، کنترل سیستم های دارای تاخیر یکی از مسائلی است که در سال های اخیر بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است و مقالات مختلفی نیز درحوزه تحلیل و طراحی سیستم های دارای تأخیر ارائه شده اند [۱۰-۱۴]. تأخیر در سیستم های سینگولار نیز رخ می‌دهد و بدلیل ماهیت این سیستم ها مساله کنترل در سیستم های سینگولار تأخیری در مقایسه با سیستم های دارای تأخیر معمولی پیچیده تر است. با این وجود، کنترل سیستم های سینگولار تأخیر زمانی[9] از موضوعاتی است که در پژوهش های اخیر به آن پرداخته شده است [۱۵-۱۷].

از سوی دیگر، به دلیل خطا در مدلسازی و تغییر در شرایط محیطی و اجرایی، اغلب در سیستم ها نایقینی وجود دارد [۱۹-۱۸]. یکی از راه های توصیف سیستم های نامعین، نایقینی پارامتری در معادلات حالت سیستم می‌باشد. از آنجا که نایقینی عملکرد مطلوب سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد، بنابراین طراحی قانون کنترلی که بتواند در برابر نایقینی ها مقاوم عمل کند حائز اهمیت است. مسأله ی آنالیز پایداری مقاوم و همچنین پایدار سازی مقاوم سیستم های سینگولار نامعین [۲۰-۲۲] و سیستم های سینگولار نامعین دارای تاخیر زمانی [۲۳-۲۵] مورد مطالعه محققان قرار قرار گرفته است.

مساله مهم دیگری که در سیستم های عملی وجود دارد و باید به آن توجه داشت، محدودیت روی دامنه ورودی محرک ها می‌باشد. چنانچه این قید در حین طراحی قانون کنترلی در نظر گرفته نشود، پس از قرار گرفتن بلوک اشباع در خروجی کنترل کننده، در بسیاری از موارد پاسخ سیستم مطلوب نخواهد بود و حتی ممکن است سیستم حلقه بسته ناپایدار شود [۲۶-۲۷]. لذا طراحی قانون کنترلی با در نظر گرفتن اشباع محرک بسیار ضروری است. رویکردهای متنوعی در مقالات برای این منظور ارائه گردیده که بعضاً برای سیستم های سینگولار نامی‌آن هم بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت مدل و تأخیر زمانی می‌باشد [۲۸ و ۲۹]. در حوزه کنترل سیستم های سینگولار دارای تأخیر و نایقینی با قید اشباع محرک مطالعاتی صورت گرفته [۳۰]، که منحصراً به بحث پایداری وابسته به تأخیر پرداخته اند.

در این مقاله، مسأله پایدارسازی مقاوم برای سیستم های سینگولار نامعین همراه با تأخیر زمانی با در نظر گرفتن اشباع محرک در دو حالت مستقل از تأخیر و وابسته به تأخیر با رویکردی نو و متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد. ساختار در نظر گرفته شده برای سیستم های سینگولار دارای تاخیر، وجود ترم های نایقینی در فضای مدل حالت می‌باشد که می‌تواند ناشی از عدم قطعیت های مدل و یا اغتشاشات خارجی باشد. هدف، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت مقاوم با در نظر گرفتن اشباع محرک، به منظور مجاز نمودن سیستم حلقه بسته می‌باشد. تأخیر زمانی به صورت متغیر با زمان با کران بالا و پایین معلوم در نظر گرفته شده و مساله

[1] Singular Systems
[2] Algebraic-Differential
[3] Descriptor
[4] Generalized
[5] Semi-State
[6] Implicit
[7] Admissible System
[8] Non-Singular
[9] Time-Delay Singular Systems

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

پایدارسازی در دو حالت بررسی می‌شود. در حالت اول شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت پایدارساز به نحوی که پایداری سیستم حلقه بسته مستقل از تاخیر باشد، بر اساس نامساوی های ماتریس خطی مناسب حاصل می‌گردد. همچنین تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته، طی قضیه ای بیان می‌شود. سپس، به بررسی مسأله پایدارسازی وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار پرداخته می‌شود. در این حالت تأخیر زمانی، متغیر با زمان فرض شده و شرایط تضمین پایداری وابسته به تأخیر سیستم حلقه بسته بر اساس نامساوی های ماتریس خطی جدیدی بیان می‌گردد و تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته ارائه می‌شود. در پایان، به کمک مثال های ارائه شده و شبیه سازی صورت پذیرفته، کارایی قضایای پیشنهادی مقاله، نشان داده می‌شود و عملکرد مناسب قانون کنترلی مقاوم در حضور تاخیر بررسی می‌گردد.

ادامه مقاله بدین شرح می‌باشد. ابتدا در بخش ۲، سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک معرفی و تعاریف اولیه و قضایای پایه مربوط به آن مرور خواهد شد. سپس، قضایای ارائه شده برای حالت مستقل از تأخیر[10] در بخش ۱-۳ و قضایای وابسته به تأخیر[11] در بخش ۲-۳، شرایط وجود کنترل کننده پایدارساز مقاوم را بر اساس نامساوی های ماتریس خطی مناسب، برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر با در نظر گرفتن اشباع محرک، ارائه می‌دهند. برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده، در بخش ۴ به ارائه مثال های شبیه سازی شده خواهیم پرداخت. در آخر نیز، جمع بندی مطالب و نتیجه گیری آورده شده است.

تذکر: در این مقاله، علامت $K>0$ نشانه آن است که ماتریس نمونه K مثبت معین و متقارن می‌باشد. همچنین علامت $(*)$ در ماتریس ها مبین عناصر متقارن است.

۲- توصیف سیستم و تعاریف اولیه

در این بخش ابتدا تعاریف پایه مربوط به سیستم های سینگولار دارای تأخیر ارائه می‌گردد.

تعریف ۱- [۳۱]: سیستم سینگولار نامی‌تأخیر زمانی نامقید (۱) را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+A_d x(t-d(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \qquad t\in[-d_2,0] \end{aligned} \tag{۱}$$

۱. زوج (E,A) را رگولار گویند، اگر $\det(sE-A)$ متحد با صفر نباشد.

۲. زوج (E,A) را ضربه آزاد گویند، اگر $\deg(\det(sE-A))=rank(E)$.

تعریف ۲- [۳۱]: سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را در نظر بگیرید. آنگاه تعاریف زیر برقرار است:

۱. سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را رگولار و ضربه آزاد گویند، اگر زوج (E,A) رگولار و ضربه آزاد باشد.

۲. سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را پایدار گویند، اگر برای هر $\varepsilon>0$ اسکالر $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد به نحویکه برای هر شرایط اولیه همساز $\phi(t)$ که در شرط $\sup_{-d_2\le t\le 0}\|\phi(t)\|\le\delta(\varepsilon)$ صدق می‌کند، پاسخ سیستم (۱) شروط زیر را برآورده کند:

$$\|x(t)\|\le\varepsilon \quad for\ t\ge 0 \tag{۲}$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)\to 0 \tag{۳}$$

۳. سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را مجاز گویند، اگر رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد.

لم ۱- [۲۴] فرض کنید سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) رگولار و ضربه آزاد باشد، آنگاه پاسخ چنین سیستمی بر روی بازه $[0,\infty)$ یکتا و ضربه آزاد خواهد بود.

حال، سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر متغیر با زمان و قید اشباع محرک (۴) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t)+(A_d+\Delta A_d)x(t-d(t)) \\ &\quad +(B+\Delta B)\sigma(u(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \qquad t\in[-d_2,0] \end{aligned} \tag{۴}$$

که $x(t)\in R^n$ بردار حالت، $u(t)\in R^m$ بردار ورودی، $\phi(t)$ بردار شرایط اولیه است که المان های آن توابع پیوسته می‌باشند. تاخیر زمانی $d(t)$ یک تابع پیوسته و متغیر با زمان می‌باشد به نحویکه

$$0<d_1\le d(t)\le d_2,\ \ 0\le\dot{d}(t)\le\mu<1 \tag{۵}$$

که در آن d_1 و d_2 کران پایین و بالا برای تاخیر زمانی و μ حد بالای نرخ تغییرات تاخیر زمانی می‌باشند. به علاوه، تابع $\sigma:R^m\to R^m$ تابع اشباع ورودی می‌باشد که به صورت زیر تعریف شده است

$$\sigma(u)=\begin{bmatrix}\sigma(u_1) & \sigma(u_2) & \cdots & \sigma(u_m)\end{bmatrix}^T \tag{۶}$$

که در آن $\sigma(u_i)=sign(u_i)\min\{u_{i_{\max}},|u_i|\}$ بوده و $u_{i_{\max}}>0$ ماکزیمم دامنه مجاز اندازه مولفه ورودی i-ام است. همچنین، ماتریس $E\in R^{n\times n}$ سینگولار بوده و فرض می‌شود $rankE=r<n$. ماتریس های A، A_d و B ثابت، حقیقی و معلوم با ابعاد مناسب و ماتریس های ΔA، ΔA_d و ΔB معرف نایقینی های پارامتری سیستم هستند که فرض می‌شود در رابطه زیر صادق باشند:

[10] Delay-Independent
[11] Delay-Dependent

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta A_d(t) & \Delta B(t)\end{bmatrix} = DJ(t)\begin{bmatrix}E_a & E_d & E_b\end{bmatrix} \quad (۷)$$

که در آن D، E_a، E_d و E_b ماتریس های معلوم ثابت با ابعاد مناسب هستند و ماتریس نامعلوم $J(t)$ رابطه زیر را برآورده می کند:

$$J^T(t)J(t) \le I, \quad \forall t \quad (۸)$$

لم ۲- [۳۲]: برای ماتریس های داده شده C و G با ابعاد مناسب و O متقارن و هر $J(t)$ که در شرط (۸) صدق کند، رابطه زیر برقرار است:

$$O + GJ(t)C + C^T J^T(t)G^T < 0 \quad (۹)$$

اگر و تنها اگر اسکالر $\lambda > 0$ وجود داشته باشد به نحویکه:

$$O + \lambda GG^T + \lambda^{-1}C^T C < 0 \quad (۱۰)$$

تعریف ۳- [۲۴] سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۴) را پایدار مقاوم گویند اگر سیستم (۴) در غیاب ورودی به ازای همه نایقینی های ΔA و ΔA_d که در رابطه (۷) صدق می کنند، رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد.

تعریف ۴- [۲۴] سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی (۴) را پایدارپذیر مقاوم گویند، اگر قانون کنترل $u(t)$ وجود داشته باشد به نحویکه سیستم حلقه بسته از نقطه نظر تعریف (۳) پایدار مقاوم باشد.

در این مقاله، قانون کنترل برای سیستم (۴) به صورت فیدبک حالت خطی $u = Fx$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین معادلات توصیف کننده سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}E\dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-d(t)) \\ &\quad + (B+\Delta B)\sigma(Fx(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \qquad t \in [-d_2, 0]\end{aligned} \quad (۱۱)$$

برای ماتریس فیدبک F، ناحیه ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به x خطی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(F) = \left\{x \in \Re^n : |f_i x| \le u_{i_{\max}}, i = 1,2,...,m\right\} \quad (۱۲)$$

که در آن f_i در واقع i- امین سطر ماتریس F می‌باشد. در این مقاله، به منظور کاهش محافظه کاری مساله اشباع محرک، از تکنیک اضافه کردن ماتریس فیدبک کمکی بهره گرفته می‌شود. این تکنیک سابقاً نیز در مراجع مختلف [۷ و ۸] برای پایدار سازی سیستم های همراه با تاخیر معمولی با قید اشباع ورودی بکار گرفته شده است. در این مقاله، این تکنیک برای پایدارسازی سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک استفاده می‌شود، به این صورت که، برای دو ماتریس $F \in R^{m\times n}$، H و بردار $\alpha \in R^m$، یک مجموعه ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۶]:

$$W(\alpha,F,H) = \left\{W \in R^{m\times n} : W = \begin{bmatrix}\alpha_1 f_1 + (1-\alpha_1)h_1 \\ \vdots \\ \alpha_m f_m + (1-\alpha_m)h_m\end{bmatrix}\right\} \quad (۱۳)$$

که در آن h_i معرف i- امین سطر ماتریس فیدبک کمکی و α_i بیانگر i- امین المان بردار $\alpha \in \psi(\alpha)$ می‌باشد. همچنین مجموعه $\psi(\alpha)$ به صورت $\psi(\alpha) = \left\{\alpha \in R^m : \alpha_i = 0 \text{ or } 1\right\}$ تعریف می شود. از بردار $\alpha \in \psi(\alpha)$ برای انتخاب سطر های ماتریس F و H و تشکیل ماتریس جدید $W(\alpha,F,H)$ استفاده می گردد. به منظور برآورده شدن قید اشباع محرک نیاز است که ماتریس فیدبک کمکی H شرط $|h_i x| \le u_{i_{\max}}$ را به ازای $i = 1,...,m$ برآورده کند. برای ماتریس فیدبک کمکی H، ناحیه ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به x خطی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(H) = \left\{x \in \Re^n : |h_i x| \le u_{i_{\max}}, i = 1,2,...,m\right\} \quad (۱۴)$$

حال، یک بیضی از میان زیر مجموعه های مجموعه $\Gamma(H)$ به صورت $\varepsilon(P,1) = \left\{x : x^T Px \le 1\right\}$ انتخاب می‌شود. که در آن $P > 0$ است. یافتن ماتریس H به نحویکه شرط $|h_i x| \le u_{i_{\max}}$ به ازای x های متعلق به مجموعه $\varepsilon(P,1)$ برآورده شود معادل با حل نامساوی ماتریس خطی زیر است:

$$\begin{bmatrix}u_{i_{\max}} & h_i \\ * & u_{i_{\max}}P\end{bmatrix} \ge 0, \qquad i = 1,...,m \quad (۱۵)$$

بنابراین، با در نظر گرفتن $\sigma(Fx(t)) = W(\alpha,F,H)x(t)$، با هدف کاهش محافظه کاری، معادلات سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}E\dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-d(t)) \\ &\quad + (B+\Delta B)W(\alpha,F,H)x(t) \\ x(t) &= \phi(t), \qquad t \in [-d_2, 0]\end{aligned} \quad (۱۶)$$

هدف، طراحی ماتریس های بهره F و H است به نحویکه سیستم حلقه بسته (۱۶) برای همه تاخیرهای متغیر با زمان که شرط (۵) و همه نایقینی هایی که شرط (۷) را ارضا می کنند، مجاز باشد.

۳- پایدارسازی مقاوم سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک

۳-۱ پایداری مقاوم مستقل از تأخیر سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک

در این قسمت، بر مبنای لم ها و تعاریفی که در بخش قبل به آن اشاره شد، شرایط وجود کنترل کننده پایدار ساز مقاوم مستقل از تأخیر با

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

رویکرد نامساوی خطی ماتریسی و تخمین متناظری از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته (۱۶) طی قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۱- سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۱۶) را با شروط داده شده (۵) و (۷) در نظر بگیرید، اگر ماتریس های Y، L، P و ماتریس $Q>0$ وجود داشته باشند به نحویکه:

$$EP^T = PE^T \geq 0 \tag{۱۷}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11}+DD^T & \Sigma_{12} & \bar{E}_a^T \\ * & \Sigma_{22} & \bar{E}_d^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{۱۸}$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P^{-1}E \end{bmatrix} \geq 0, \qquad i=1,...,m \tag{۱۹}$$

که در آن $\bar{E}_a = E_a P^T + E_b W(\alpha,Y,L)$، $\bar{E}_d = E_d P^T$، l_i مبین i- امین سطر از ماتریس L و Σ_{ij} ها توسط رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= AP^T + PA^T + BW(\alpha,Y,L) \\ &\quad + (BW(\alpha,F,H))^T + Q \\ \Sigma_{12} &= \Sigma_{21}^T = A_d P^T \\ \Sigma_{22} &= -(1-\mu)Q \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

آنگاه سیستم (۱۶) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز $F = YP^{-T}$، پایدار مقاوم خواهد بود. همچنین مجموعه زیر یک مجموعه پایا درون ناحیه جذب می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\Lambda_1(\phi) = \Big\{ \phi \in C_{n,d_2} : \phi^T(0)P^{-1}E\phi(0) + \\ &\int_{-d_2}^{0} \phi^T(\theta)P^{-1}QP^{-T}\phi(\theta)ds \leq 1, \forall \theta \in [-d_2,0] \Big\} = \\ &\max_{\theta\in[-d_2,0]} \|\phi(\theta)\|^2 \left(\lambda_{\max}(P^{-1}E) + d_2 \lambda_{\max}(P^{-1}QP^{-T}) \right) \end{aligned} \tag{۲۱}$$

اثبات- تابعک $V(x_t)$ زیر به عنوان کاندید لیاپانوف برای سیستم (۱۶) پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)P^{-1}Ex(t) \\ &\quad + \int_{t-\dot{d}(t)}^{t} x^T(s)P^{-1}QP^{-T}x(s)ds \end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در آن $[-d_2,0]$ $x_t = x(t+\theta),\ \theta \in$ می‌باشد. مشتق $V(x_t)$ در راستای مسیر سیستم (۱۶) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \dot{x}(t)^T P^{-1}Ex(t) + x^T(t)P^{-1}E\dot{x}(t) \\ &\quad + x^T(t)P^{-1}QP^{-T}x(t) \\ &\quad - (1-\dot{d}(t))x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \tag{۲۳}$$

از آنجاییکه $P^{-1}E = P^{-1}EP^TP^{-T}$، لذا اگر رابطه (۱۷) برقرار گردد آنگاه $P^{-1}EP^TP^{-T} = P^{-1}PE^TP^{-T}$ خواهد بود. با این استدلال رابطه (۲۳) به صورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= (E\dot{x}(t))^T P^{-1}x(t) + x^T(t)P^{-1}E\dot{x}(t) \\ &\quad + x^T(t)P^{-1}QP^{-T}x(t) \\ &\quad - (1-\dot{d}(t))x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \tag{۲۴}$$

با جایگذاری معادلات سیستم (۱۶) در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}\Big[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T + \\ &\tilde{B}W(\alpha,FP^T,HP^T) + (\tilde{B}W(\alpha,FP^T,HP^T))^T \\ &+Q\Big]P^{-T}x(t) + 2x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d x(t-d(t)) \\ &-(1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \tag{۲۵}$$

در رابطه بالا برای سهولت $A+\Delta A = \tilde{A}$، $B+\Delta B = \tilde{B}$ و $A_d+\Delta A_d = \tilde{A}_d$ قرار داده شده اند. با انتخاب $FP^T = Y$، $HP^T = L$ و جایگزینی در روابط فوق، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}\Big[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T \\ &+\tilde{B}W(\alpha,Y,L) + (\tilde{B}W(\alpha,Y,L))^T \\ &+Q\Big]P^{-T}x(t) + 2x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d x(t-d(t)) \\ &-(1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \tag{۲۶}$$

رابطه فوق را می‌توان بصورت یک فرم کوادراتیک برحسب متغیر $\xi^T(t) = \left[x^T(t) \quad x^T(t-d(t)) \right]^T$ نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}\Big[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T \\ &+\tilde{B}W(\alpha,Y,L) + (\tilde{B}W(\alpha,Y,L))^T \\ &+Q\Big]P^{-T}x(t) + x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d P^T P^{-T}x(t-d(t)) \\ &+x^T(t-d(t))P^{-1}P\tilde{A}_d^T P^{-T}x(t) \\ &-(1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \\ &= \xi^T(t)\tilde{\Sigma}\xi(t) \end{aligned} \tag{۲۷}$$

که در آن ماتریس $\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} & \tilde{\Sigma}_{12} \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن با المان های زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11} &= \tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T + \tilde{B}W(\alpha,Y,L) \\ &\quad + (\tilde{B}W(\alpha,F,H))^T + Q \\ \tilde{\Sigma}_{12} &= \Sigma_{21}^T = \tilde{A}_d P^T \\ \tilde{\Sigma}_{22} &= -(1-\mu)Q \end{aligned} \tag{۲۸}$$

شرط مجاز بودن سیستم (۱۶) آن است که $\tilde{\Sigma}<0$ شود. بر اساس رابطه (۷) ماتریس های $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ و $\tilde{A}_d$ را با $A+DJ(t)E_a$، $B+DJ(t)E_b$ و $A_d+DJ(t)E_d$ در رابطه فوق جایگزین می کنیم:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

$$\tilde{\Sigma}=\Sigma+\begin{bmatrix}D\\0\end{bmatrix}J(t)\begin{bmatrix}\bar{E}_a & \bar{E}_d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{E}_a^T\\ \bar{E}_d^T\end{bmatrix}J^T(t)\begin{bmatrix}D^T & 0\end{bmatrix}<0 \qquad (۲۹)$$

$\bar{E}_a$ و $\bar{E}_d$ در صورت قضیه (۱) بعد از رابطه (۱۹) تعریف شده اند. همچنین ماتریس Σ در رابطه (۲۰) آورده شده است. با استناد به لم (۲) رابطه فوق برای همه $J(t)$ هایی که در نامساوی (۸) صدق می‌کنند بر قرار است اگر و تنها اگر اسکالر $\lambda>0$ وجود داشته باشد به نحویکه

$$\lambda\Sigma+\lambda^2\begin{bmatrix}D\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D^T & 0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}\bar{E}_a^T\\ \bar{E}_d^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{E}_a & \bar{E}_d\end{bmatrix}<0 \qquad (۳۰)$$

با تغییر متغیرهای λP و λD به P و D رابطه (۳۰) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\Sigma+\begin{bmatrix}DD^T & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{E}_a^T\\ \bar{E}_d^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{E}_a & \bar{E}_d\end{bmatrix}<0 \qquad (۳۱)$$

با استفاده از قضیه متمم شر، نامساوی ماتریس خطی زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\Sigma}=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}+DD^T & \Sigma_{12} & \bar{E}_a^T\\ * & \Sigma_{22} & \bar{E}_d^T\\ * & * & -I\end{bmatrix}<0 \qquad (۳۲)$$

اگر نامساوی ماتریسی فوق برقرار باشد، آنگاه:

$$\dot{V}(x_t)\le-\xi(t)(-\hat{\Sigma})\xi(t)\le-\lambda_{\min}(-\hat{\Sigma})\|x_t\|^2 \qquad (۳۳)$$

و نتایج زیر را در بر خواهد داشت:

$$\begin{aligned}&x^TP^{-1}Ex\le V(x_t)<V(x_t(0))=\\&\phi^T(0)P^{-1}E\phi(0)+\int_{-d(t)}^{0}\phi^T(\theta)P^{-1}QP^{-T}\phi(\theta)ds\\&\le\max_{\theta\in[-d_2,0]}\|\phi(\theta)\|^2\left(\lambda_{\max}(P^{-1}E)+d_2\lambda_{\max}(P^{-1}QP^{-T})\right)\\&=\Lambda_1(\phi)\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

روابط فوق اذعان می‌دارد که اگر $\Lambda_1(\phi)\le1$ باشد حتماً $x^TP^{-1}Ex\le1$ خواهد بود، بنابراین همه مسیرهای $x(t)$ که از $\Lambda_1(\phi)\le1$ شروع می‌شوند درون باقی $x^TP^{-1}Ex\le1$ می‌مانند و بدان وسیله قید $|h_ix|\le u_{i_{\max}}$ به سبب نامساوی ماتریسی (۱۹) برآورده می‌شود.

۲-۳ پایداری مقاوم وابسته به تأخیر سیستم های سینگولار نامعین همراه با تأخیر و قید اشباع محرک

در این بخش، پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم (۱۶) در دو حالت بررسی می‌شود. حالت اول، تأخیر زمانی را متغیر با زمان در نظر گرفته به نحویکه در شرط (۵) صدق کند و طی قضیه ای شرط وجود کنترل کننده پایدار ساز و تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته (۱۶) ارائه می‌شود. سپس تأخیر زمانی، ثابت فرض می‌شود و در این حالت قضیه پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار همراه با تأخیر و قید اشباع محرک پیشنهاد می‌شود.

قضیه ۲- سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر متغیر با زمان (۱۶) با شروط داده شده (۵) و (۷) پایدار مقاوم است، اگر ماتریس های Y، L، $P>0$، $Q_i>0, i=1,2,$، $Z_i>0, i=1,$، $T>0$ و $N_i, M_i, S_i, i=1,\dots,5$ با ابعاد مناسب وجود داشته باشند به نحویکه نا مساوی های ماتریسی خطی (۳۵) و (۳۶) زیر برقرار باشند:

$$\hat{\Delta}=\begin{bmatrix}\Phi & K\\ K^T & V\end{bmatrix}<0 \qquad (۳۵)$$

$$\begin{bmatrix}u_{i_{\max}} & l_i\\ * & u_{i_{\max}}P\end{bmatrix}\ge0,\qquad i=1,\dots,m \qquad (۳۶)$$

که در آن

$$K=\begin{bmatrix}d_2N_1 & d_{12}M_1 & d_{12}S_1 & \bar{E}_a^T\\ d_2N_2 & d_{12}M_2 & d_{12}S_2 & \bar{E}_d^T\\ d_2N_3 & d_{12}M_3 & d_{12}S_3 & 0\\ d_2N_4 & d_{12}M_4 & d_{12}S_4 & 0\\ d_2N_5 & d_{12}M_5 & d_{12}S_5 & 0\end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

و ماتریس $V=diag(V_1\ V_2\ \cdots\ V_4)$ با عناصر روی قطر زیر:

$$\begin{aligned}&V_1=-d_2Z_1, \qquad V_2=-d_{12}(Z_1+Z_2)\\&V_3=-d_{12}Z_2, \qquad V_4=-I\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

همچنین ماتریس متقارن Φ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15}\\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25}\\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35}\\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45}\\ * & * & * & * & \Phi_{55}\end{bmatrix} \qquad (۳۹)$$

$$\begin{aligned}&\Phi_{11}=Q_1+Q_2+Q_3+N_1+N_1^T+AT+DD^T\\&+BW(\alpha,Y,L)+(AT+BW(\alpha,Y,L))^T,\\&\Phi_{12}=N_2^T-N_1+S_1-M_1+A_dT,\\&\Phi_{13}=M_1+N_3^T,\quad \Phi_{14}=-S_1+N_4^T,\\&\Phi_{15}=N_5^T-ET+P+DD^T\\&\quad+(AT+BW(\alpha,Y,L))^T,\\&\Phi_{22}=(\mu-1)Q_3+S_2+S_2^T-N_2-N_2^T-M_2-M_2^T\\&\Phi_{23}=M_2-N_3^T+S_3^T-M_3^T\\&\Phi_{24}=-S_2-N_4^T+S_4^T-M_4^T\\&\Phi_{25}=TA_d^T+S_5^T-N_5^T-M_5^T\\&\Phi_{33}=-Q_1+M_3+M_3^T,\quad \Phi_{34}=-S_3+M_4^T\\&\Phi_{35}=M_5^T,\quad \Phi_{44}=-Q_2-S_4-S_4^T,\\&\Phi_{45}=-S_5^T,\quad \Phi_{55}=d_2Z_1+d_{12}Z_2-2ET\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

در رابطه (۳۷)، $\bar{E}_a=E_aT+E_bW(\alpha,Y,L)$ و $\bar{E}_d=E_dT$ می‌باشد. به علاوه، مجموعه $\Lambda_2(\rho)\le1$ تخمینی از ناحیه جذب خواهد بود:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

$$\Lambda_2(\rho)=\max_{\theta\in[0,d_2]}\Big\{\|\phi(\theta)\|^2\Big[\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1}P\,\mathrm{T}^{-1})+d_1\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1}Q_1\,\mathrm{T}^{-1})+d_2\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1}Q_2\,\mathrm{T}^{-1})+d_2\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1}Q_3\,\mathrm{T}^{-1})\Big]+\|\dot\phi(\theta)\|^2\Big[\frac{1}{2}d_2^2\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1}Z_1\,\mathrm{T}^{-1})+\frac{d_{12}}{2}(d_1+d_2)\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1}Z_2\,\mathrm{T}^{-1})\Big]\Big\} \quad (۴۱)$$

اثبات– تابع لیاپانوف زیر برای سیستم (۱۶) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}V(x_t)&=x^T(t)T^{-1}PT^{-1}x(t)\\&+\sum_{i=1}^{2}\int_{t-d_i}^{t}x^T(s)T^{-1}Q_iT^{-1}x(s)ds\\&+\int_{t-d(t)}^{t}x^T(s)T^{-1}Q_3T^{-1}x(s)ds\\&+\int_{-d_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^T(s)T^{-1}Z_1T^{-1}\dot x(s)dsd\theta\\&+\int_{-d_2}^{-d_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^T(s)T^{-1}Z_2T^{-1}\dot x(s)dsd\theta\end{aligned} \quad (۴۲)$$

از طرف دیگر، برای هر ماتریس $\bar N_i, i=1,\dots,5$، $\bar S_i, i=1,\dots,5$، $\bar M_i, i=1,\dots,5$ و $T>0$ معادلات زیر برقرار است:

$$2\Big[x^T(t)T^{-1}+\dot x^T(t)T^{-1}\Big]\times\Big[-E\dot x(t)+\tilde A x(t)+\tilde A_d x(t-d(t))+\tilde B\,\sigma(Fx)\Big]=0 \quad (۴۳)$$

$$2\Big[x^T(t)\bar N_1+x^T(t-d(t))\bar N_2+x^T(t-d_1)\bar N_3+x^T(t-d_2)\bar N_4+\dot x^T(t)\bar N_5\Big]\times\Big[x(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\dot x(s)ds-x(t-d(t))\Big]=0 \quad (۴۴)$$

$$2\Big[x^T(t)\bar S_1+x^T(t-d(t))\bar S_2+x^T(t-d_1)\bar S_3+x^T(t-d_2)\bar S_4+\dot x^T(t)\bar S_5\Big]\times\Big[x(t-d(t))-\int_{t-d_2}^{t-d(t)}\dot x(s)ds-x(t-d_2)\Big]=0 \quad (۴۵)$$

$$2\Big[x^T(t)\bar M_1+x^T(t-d(t))\bar M_2+x^T(t-d_1)\bar M_3+x^T(t-d_2)\bar M_4+\dot x^T(t)\bar M_5\Big]\times\Big[x(t-d_1)-\int_{t-d(t)}^{t-d_1}\dot x(s)ds-x(t-d(t))\Big]=0 \quad (۴۶)$$

در روابط فوق $\tilde A=A+\Delta A$، $\tilde B=B+\Delta B$، $\tilde A_d=A_d+\Delta A_d$، $\bar M_i=T^{-1}M_iT^{-1}$، $\bar N_i=T^{-1}N_iT^{-1}$ و $\bar S_i=T^{-1}S_iT^{-1}$ برای $i=1,\dots,5$ می‌باشد. از طرف دیگر، برای هر ماتریس متقارن مثبت نیمه معین X رابطه زیر به ازای مقادیر تأخیر که رابطه (۵) را برآورده می‌کنند برقرار است [۱۳]:

$$d_2\xi^T(t)X\,\xi(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\xi^T(t)X\,\xi(t)ds\ge 0 \quad (۴۷)$$

که در آن $\xi(t)=\big[\xi_{11}\ \ \xi_{12}\ \ \xi_{13}\ \ \xi_{14}\ \ \xi_{15}\big]$ و

$$\xi_{11}=x^T(t)T^{-1},\quad \xi_{12}=x^T(t-d(t))T^{-1},$$
$$\xi_{13}=x^T(t-d_1)T^{-1},\quad \xi_{14}=x^T(t-d_2)T^{-1},$$
$$\xi_{15}=\dot x^T(t)T^{-1},$$

حال، مشتق $V(x_t)$ در مسیر سیستم (۱۶) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot V(x_t)&=2\dot x(t)^TT^{-1}PT^{-1}x(t)\\&+\sum_{i=1}^{2}\{x^T(t)T^{-1}Q_iT^{-1}x(t)-\\&x^T(t-d_i)T^{-1}Q_iT^{-1}x(t-d_i)\}\\&+x^T(t)T^{-1}Q_3T^{-1}x(t)\\&-(1-\dot d(t))x^T(t-d(t))T^{-1}Q_3T^{-1}x(t-d(t))\\&+d_2\dot x^T(t)T^{-1}Z_1T^{-1}\dot x(t)+d_{12}\dot x^T(t)T^{-1}Z_2T^{-1}\dot x(t)\\&-\int_{t-d_2}^{t}\dot x^T(s)T^{-1}Z_1T^{-1}\dot x(s)ds\\&-\int_{t-d(t)}^{t-d_1}\dot x^T(s)T^{-1}Z_2T^{-1}\dot x(s)ds\end{aligned} \quad (۴۸)$$

با اضافه کردن روابط (۴۳) – (۴۷) را به رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned}\dot V(x_t)&\le\xi^T(t)(\tilde\Phi+d_2NZ_1^{-1}N^T+d_{12}S(Z_1+Z_2)^{-1}S^T+d_{12}MZ_2^{-1}M^T)\xi(t)\\&-\int_{t-d(t)}^{t}[\xi^T(t)N+\dot x(s)Z_1]Z_1^{-1}[\xi^T(t)N+\dot x(s)Z_1]^Tds\\&-\int_{t-d_2}^{t-d(t)}[\xi^T(t)S+\dot x(s)(Z_1+Z_2)](Z_1+Z_2)^{-1}[\xi^T(t)N+\dot x(s)(Z_1+Z_2)]^Tds\\&-\int_{t-d(t)}^{t-d_1}[\xi^T(t)M+\dot x(s)Z_2]Z_2^{-1}[\xi^T(t)M+\dot x(s)Z_2]^Tds\\&\le\xi^T(t)[\tilde\Phi+d_2NZ_1^{-1}N^T+d_{12}S(Z_1+Z_2)^{-1}S^T+d_{12}MZ_2^{-1}M^T]\xi(t)=\xi^T(t)\bar\Delta\xi(t)\end{aligned} \quad (۴۹)$$

که در آن

$$N=\big[N_1\ \ N_2\ \ \cdots\ \ N_5\big]^T$$
$$M=\big[M_1\ \ M_2\ \ \cdots\ \ M_5\big]^T$$
$$S=\big[S_1\ \ S_2\ \ \cdots\ \ S_5\big]^T$$

می‌باشد. برای آنکه سیستم (۱۶) مجاز باشد می‌بایست $\bar\Delta<0$ باشد. با استفاده از قضیه متمم شر می‌توان نشان داد که منفی معین بودن ماتریس $\bar\Delta$ معادل با منفی معین بودن ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix}\tilde\Phi & d_2N & d_{12}M & d_{12}S\\ * & -d_2Z_1 & 0 & 0\\ * & * & -d_{12}(Z_1+Z_2) & 0\\ * & * & * & -d_{12}Z_2\end{bmatrix}<0 \quad (۵۰)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

که در آن:

$$\tilde{\Phi}=\hat{\Phi}+\begin{bmatrix}D\\0\\0\\0\\D\end{bmatrix}J(t)\begin{bmatrix}\bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{E}_a^T\\\bar{E}_d^T\\0\\0\\0\end{bmatrix}J^T(t)\begin{bmatrix}D^T & 0 & 0 & 0 & D^T\end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

که در آن ماتریس $\hat{\Phi}\in R^{5\times5}$ متقارن می‌باشد و عناصر آن در رابطه (۵۲) تعریف شده اند. (تعریف مابقی عناصر $\hat{\Phi}$ از تقارن آن استخراج می گردد.

$$\begin{aligned}
&\hat{\Phi}_{11}=Q_1+Q_2+Q_3+N_1+N_1^T+AT\\
&+BW(\alpha,Y,L)+(AT+BW(\alpha,Y,L))^T\\
&\hat{\Phi}_{12}=N_2^T-N_1+S_1-M_1+A_dT,\\
&\hat{\Phi}_{13}=M_1+N_3^T,\quad \hat{\Phi}_{14}=-S_1+N_4^T,\\
&\hat{\Phi}_{15}=N_5^T-ET+P+(AT+BW(\alpha,Y,L))^T\\
&\hat{\Phi}_{22}=(\mu-1)Q_3+S_2+S_2^T-N_2-N_2^T-M_2-M_2^T\\
&\hat{\Phi}_{23}=M_2-N_3^T+S_3^T-M_3^T\\
&\hat{\Phi}_{24}=-S_2-N_4^T+S_4^T-M_4^T\\
&\hat{\Phi}_{25}=TA_d^T+S_5^T-N_5^T-M_5^T\\
&\hat{\Phi}_{33}=-Q_1+M_3+M_3^T,\qquad \hat{\Phi}_{34}=-S_3+M_4^T,\\
&\hat{\Phi}_{35}=M_5^T,\qquad \hat{\Phi}_{44}=-Q_2-S_4-S_4^T,\\
&\hat{\Phi}_{45}=-S_5^T,\qquad \hat{\Phi}_{55}=d_2Z_1+d_{12}Z_2-2ET
\end{aligned} \quad (۵۲)$$

اکنون، در رابطه (۵۰)، رابطه (۵۱) را جایگزین ماتریس $\tilde{\Phi}$ می کنیم:

$$\Theta+\begin{bmatrix}D\\0\\0\\0\\D\\0\\0\\0\end{bmatrix}J(t)\begin{bmatrix}\bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{E}_a^T\\\bar{E}_d^T\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}J^T(t)\begin{bmatrix}D^T & 0 & 0 & 0 & D^T & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \quad (۵۳)$$

که در آن Θ برابر است با:

$$\Theta=\begin{bmatrix}\hat{\Phi} & d_2N & d_{12}M & d_{12}S\\ * & -d_2Z_1 & 0 & 0\\ * & * & -d_{12}(Z_1+Z_2) & 0\\ * & * & * & -d_{12}Z_2\end{bmatrix} \quad (۵۴)$$

با توجه به لم (۲) رابطه (۵۳) برقرار است اگر:

$$\lambda\Theta+\lambda^2\begin{bmatrix}D\\0\\0\\0\\D\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D^T & 0 & 0 & 0 & D^T & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{E}_a^T\\\bar{E}_d^T\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \quad (۵۵)$$

برای تبدیل نامساوی ماتریسی غیر خطی فوق به یک نامساوی ماتریسی خطی از تغییر متغیرهای λP، λZ، λQ_i، λM_i، λN_i، λT و λS_i به ترتیب به جای P، Z، Q_i، M_i، N_i، T و S_i استفاده می کنیم:

$$\Theta+\begin{bmatrix}DD^T & 0 & 0 & 0 & DD^T & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ DD^T & 0 & 0 & 0 & DD^T & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{E}_a^T\\\bar{E}_d^T\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \quad (۵۶)$$

با استفاده از قضیه متمم شر، برقراری نامساوی ماتریسی خطی فوق معادل با منفی معین بودن ماتریس $\hat{\Delta}$ که در رابطه (۳۵) تعریف شده می‌باشد. اگر نامساوی ماتریسی (۳۵) برقرار باشد آنگاه

$$\dot{V}(x_t)\le-\xi^T(t)(-\hat{\Delta})\xi(t)\le-\lambda_{\min}(-\hat{\Delta})\|x_t\|^2 \quad (۵۷)$$

و متعاقباً:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

$$
\begin{aligned}
x^T Px \le & V(x_t) < V(x_t(0)) \\
& \le \max_{\theta\in[0,d_2]} \Big\{ \|\phi(\theta)\|^2 \Big[\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} P\, \mathrm{T}^{-1}) \\
& + d_1 \lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} Q_1 \mathrm{T}^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} Q_2 \mathrm{T}^{-1}) \\
& + d_2 \lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} Q_3 \mathrm{T}^{-1}) \Big] + \|\dot\phi(\theta)\|^2 \\
& \Big[\frac{1}{2} d_2^2 \lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} Z_1 \mathrm{T}^{-1}) \\
& + \frac{d_{12}}{2}(d_1 + d_2) \lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} Z_2 \mathrm{T}^{-1}) \Big] \Big\} = \Lambda_2(\phi, \dot\phi)
\end{aligned}
\tag{۵۸}
$$

آنگاه اگر مجموعه $\Lambda_2(\phi,\dot\phi)\le 1$ باشد حتماً $x^T Px \le 1$ خواهد بود و همه مسیرهای $x(t)$ که از $\Lambda_2(\phi,\dot\phi)\le 1$ شروع می‌شوند درون $x^T Px \le 1$ باقی می‌ماند و بدان وسیله قید $|h_i x| \le u_{i_{\max}}$ به سبب نامساوی ماتریسی (۳۶) برآورده می‌شود.

قضیه ۳- سیستم سینگولار (۱۶) را با $d_1 = d_2 = \tau$ و $\mu = 0$ در نظر بگیرید، اگر ماتریس های Y، L، $Q > 0$، $Z > 0$، $P > 0$ و ماتریس های $T > 0$ و $N_i, i = 1, \ldots,$ با ابعاد مناسب وجود داشته باشند به نحویکه:

$$
\begin{bmatrix}
\Psi_{11} + DD^T & \Psi_{12} & \Psi_{13} + DD^T & \tau N_1 & \bar{E}_a^T \\
* & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \tau N_2 & \bar{E}_d^T \\
* & * & \Psi_{33} & \tau N_3 & 0 \\
* & * & * & -\tau Z & 0 \\
* & * & * & * & -I
\end{bmatrix} < 0
\tag{۵۹}
$$

$$
\begin{bmatrix}
u_{i_{\max}} & l_i \\
* & u_{i_{\max}} P
\end{bmatrix} \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, m
\tag{۶۰}
$$

که در آن $\bar{E}_a = E_a T + E_b W(\alpha, Y, L)$، $\bar{E}_d = E_d T$ و Ψ_{ij} ها در رابطه زیر تعریف شده اند:

$$
\begin{aligned}
\Psi_{11} &= AT + BW(\alpha, Y, L) \\
&+ (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + N_1 + N_1^T + Q \\
\Psi_{12} &= A_d T - N_1 + N_2^T \\
\Psi_{13} &= (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + P - ET + N_3^T \\
\Psi_{22} &= -N_2 - N_2^T - Q, \qquad \Psi_{23} = -N_3 + TA_d^T, \\
\Psi_{33} &= \tau Z - 2ET
\end{aligned}
\tag{۶۱}
$$

آنگاه سیستم (۱۶) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز $F = T^{-1} Y$ پایدار مقاوم خواهد بود و مجموعه $\Lambda_3(\phi,\dot\phi)\le 1$ یک مجموعه پایا درون ناحیه جذب خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_3(\phi,\dot\phi) = \max_{\theta\in[0,\tau]} \Big\{ & \|\phi(\theta)\|^2 \left(\lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(Q) \right) \\
& + \|\dot\phi(\theta)\|^2 \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(Z) \Big\}
\end{aligned}
\tag{۶۲}
$$

اثبات- $V(x_t)$ را کاندید لیاپانوف برای سیستم (۱۶) با تأخیر زمانی ثابت τ در نظر می گیریم:

$$
\begin{aligned}
V(x_t) = & x^T(t) T^{-1} P T^{-1} x(t) + \int_{t-\tau}^{t} x^T(s) T^{-1} Q T^{-1} x(s) ds \\
& + \int_{-\tau}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) T^{-1} Z T^{-1} \dot{x}(s) ds d\theta
\end{aligned}
\tag{۶۳}
$$

با بکار بستن روندی مشابه با اثبات قضیه (۲)، نامساوی ماتریسی خطی (۵۹) حاصل خواهد شد. اگر LMI فوق برقرار باشد، آنگاه $\dot{V}(x_t(t))$ منفی می باشد. در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
& x^T Px \le V(x_t) < V(x_t(0)) \\
& \le \max_{\theta\in[0,\tau]} \Big\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[\lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} P\, \mathrm{T}^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} Q\, \mathrm{T}^{-1}) \right] \\
& + \|\dot\phi(\theta)\|^2 \left[\frac{1}{2} \tau^2 \lambda_{\max}(\mathrm{T}^{-1} Z\, \mathrm{T}^{-1}) \right] \Big\} = \Lambda_3(\phi, \dot\phi)
\end{aligned}
\tag{۶۴}
$$

اگر $\Lambda_3(\phi,\dot\phi)\le 1$ باشد حتماً $x^T Px \le 1$ خواهد بود در نتیجه همه مسیرهای $x(t)$ که از $\Lambda_3(\phi,\dot\phi)\le 1$ شروع می‌شوند درون $x^T Px \le 1$ باقی می‌ماند و به این طریق قید $|h_i x| \le u_{i_{\max}}$ به سبب نامساوی ماتریسی (۶۰) برآورده می‌شود.

۴- شبیه سازی کامپیوتری

در این بخش، شبیه سازی هایی انجام می‌پذیرد تا عملکرد قانون کنترلی مقاوم پیشنهادی نشان داده شود. برای این منظور، یک مثال کاربردی و یک مثال عددی در نظر گرفته شده اند.

مثال ۱: سیستم سینگولار نا معین دارای تأخیر (۴) را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -1.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & -0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}, \; A_d = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \\
E &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۶۵}
$$

ماتریس های نایقینی به فرم مجاز زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$
\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d & \Delta B \end{bmatrix} = DJ(t) \begin{bmatrix} E_a & E_d & E_b \end{bmatrix}
\tag{۶۶}
$$

که در آن،

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, \; E_a = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \\
E_d &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \; E_b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \; J(t) = \sin(t)
\end{aligned}
\tag{۶۷}
$$

تأخیر زمانی $d(t)$ و قید دامنه ورودی از روابط زیر پیروی می کند:

$$
\begin{aligned}
& 1 \le d(t) \le 3, \qquad 0 \le \dot{d}(t) \le 1 \\
& -1 \le u(t) \le 1
\end{aligned}
\tag{۶۸}
$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

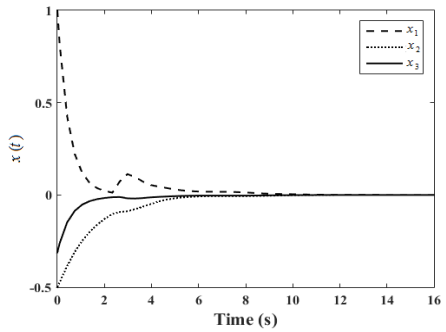
هدف طراحی کنترل کننده پایدار ساز مقاوم وابسته به تأخیر می‌باشد به نحویکه ضمن برآورده شدن قید اشباع، سیستم حلقه بسته داده شده پایدار مقاوم باشد. بدین منظور، طبق قضیه (۲) می‌بایست به حل LMI (۳۵) و (۳۶) بپردازیم. از نرم افزار متلب برای حل LMI استفاده شده است. نتایج بدست آمده به صورت زیر می‌باشد:

$$L = l_1 = \begin{bmatrix} -0.7918 & -0.5351 & -0.5394 \end{bmatrix},$$
$$\alpha = 0,\ T = \begin{bmatrix} 1.9681 & -0.3307 & -0.6283 \\ -0.3307 & 0.8752 & 0.0175 \\ -0.6283 & 0.0175 & -0.1437 \end{bmatrix} \qquad (۶۹)$$

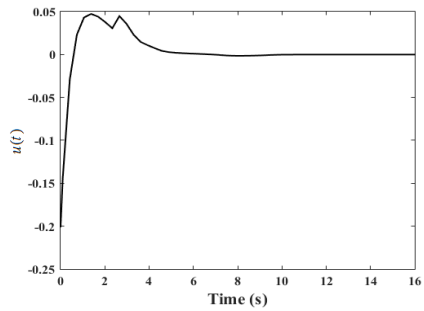
و نهایتاً کنترل کننده فیدبک حالت مقاوم پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = l_1 T^{-1} x(t) = \begin{bmatrix} 0.2845 & -0.5527 & 2.4424 \end{bmatrix} x(t) \qquad (۷۰)$$

حال، سیستم سینگولار نامعین تأخیر زمانی (۵) با پارامترها و قیود داده شده را به ازای شرایط اولیه $\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.3 \end{bmatrix}^T,\ t \in [-3, 0]$ در محیط سیمولینک شبیه سازی کرده و نتایج بدست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شکل (۱) وضعیت حالت های سیستم حلقه بسته را به تصویر می‌کشد. نتایج حاکی از آن است که کنترل کننده طراحی شده ضمن دفع مطلوب نایقینی، منجر به پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته گردیده است. همچنین در شکل (۲)، که وضعیت سیگنال کنترلی را نمایش می‌دهد، ملاحظه می‌کنید که قید اشباع ورودی نیز برآورده شده است.



شکل ۱: وضعیت پاسخ حالت های سیستم سینگولار تأخیر زمانی نامعین تحت کنترل کننده پایدارساز مقاوم



شکل ۲: پاسخ سیگنال کنترلی سیستم سینگولار تأخیر زمانی نامعین تحت کنترل کننده پایدارساز مقاوم

مثال ۲: در نظریه مدارهای الکتریکی، مدل‌های مدارهای خطوط انتقال و نیز مدار معادل برخی المان‌های جزئی (PEEC)، به معادلات دیفرانسیل تأخیردار خنثی (NDE) منجر می‌شود [۳۳]. از آنجاییکه حل عددی معادلات تأخیری نوع NDE سخت است، رویکرد پیشنهادی در مراجع مختلف [۱۳، ۳۴] آن است که ابتدا معادلات را به صورت معادلات سینگولار تأخیری از نوع تأخیردار عقب‌افتاده (RDE) بازنویسی کرده و سپس آنها را حل نمود. یک مدار الکتریکی با المان‌های جزئی با معادلات زیر قابل توصیف است [۳۵]:

$$\begin{cases} C_0 \dot{y}(t) + G_0 y(t) + C_1 \dot{y}(t - d(t)) \\ \qquad + G_1 y(t - d(t)) = B_0 u(t) \\ y(t) = \phi(t); \qquad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \qquad (۷۱)$$

که در آن C_0 یک ماتریس قطری و G_0، C_1 و G_1 ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. همانطور که واضح است این دسته معادلات تأخیری از نوع NDE می باشند. معادلات فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \bar{G}_0 y(t) + \bar{C}_1 \dot{y}(t - d(t)) \\ \qquad + \bar{G}_1 y(t - d(t)) + \bar{B}_0 u(t) \\ y(t) = \phi(t); \qquad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \qquad (۷۲)$$

که در آن بردار $y(t) \in R^n$ و شامل ولتاژ و جریان گره های مدار می‌باشد، همچنین تمامی ماتریس‌های $\bar{C}_1$، $\bar{G}_0$، $\bar{G}_1$ و $\bar{B}_0$ دارای مقادیر حقیقی با ابعاد مناسب هستند. با تعریف:

$$\eta(t) = y(t), \qquad \zeta(t) = \dot{y}(t) - \bar{G}_0 y(t) \qquad (۷۳)$$

دسته معادلات سیستم (۷۲) قابل تبدیل به معادلات سینگولار تأخیری RDE به صورت زیر خواهد بود:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) + Bu(t)$$
$$\begin{cases} \eta(t) = \phi(t), \qquad t \in (-d_2, 0) \\ \zeta(t) = \dot{\phi}(t) - \bar{G}_0 \phi(t), \qquad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \qquad (۷۳)$$

که در آن $x(t) = \begin{bmatrix} \eta^T(t) & \zeta^T(t) \end{bmatrix}^T$ و $\phi(t)$ بردار شرایط اولیه است که المان‌های آن توابع پیوسته مشتق پذیر می‌باشند و

$$E = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \bar{G}_0 & I_{n\times n} \\ 0 & -I_{n\times n} \end{bmatrix}$$
$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{C}_1 + \bar{G}_1 \bar{G}_0 & \bar{G}_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_0 \end{bmatrix} \qquad (۷۴)$$

مدار الکتریکی با معادل PEEC شامل یک سلف و یک خازن را با پارامترهای داده‌شده زیر در نظر بگیرید [۳۴]:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

$$\bar{G}_0=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \bar{C}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\bar{G}_1=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}$$
$$\bar{B}_0=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\Delta\bar{G}_0(t)=\begin{bmatrix}\Delta_1 & 0\\ 0 & \Delta_2\end{bmatrix},\Delta\bar{C}_1(t)=\begin{bmatrix}\Delta_3 & 0\\ 0 & \Delta_4\end{bmatrix} \quad (۷۵)$$

که Δ_i ها نایقینی‌های پارامتری بوده و در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$|\Delta_1|\le 1.6,\quad |\Delta_2|\le 0.05,\quad |\Delta_3|\le 0.1,\quad |\Delta_4|\le 0.3 \quad (۷۶)$$

بردارهای $\eta(t)$ و $\zeta(t)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\eta(t)=y(t)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$$
$$\zeta(t)=\dot{y}(t)-\bar{G}_0y(t)=\begin{bmatrix}x_3 & x_4\end{bmatrix}^T \quad (۷۷)$$

که در آن x_1 ولتاژ خازن و x_2 جریان سلف بوده و متغیرهای x_3 و x_4 تعریف شده‌اند تا سیستم با معادلات تأخیری نوع NDE را به سیستم با معادلات سینگولار دارای تأخیر نوع RDE تبدیل کنند. با این تعریف ماتریس های زیر جهت توصیف سیستم حاصل می گردد:

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}-2&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},$$
$$A_d=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1.2&0&0.1&0\\-1&-1.1&0&0.1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad (۷۸)$$
$$E_a=\begin{bmatrix}1.6&0&0&0\\0&0.05&0&0\end{bmatrix},E_d=\begin{bmatrix}0.1&0&0&0\\0&0.3&0&0\end{bmatrix},J(t)=\sin(t)$$

در ادامه دو سناریوی مختلف ارائه می‌گردد و در هر مورد بر اساس تکنیک‌های پیشنهادی در مقاله، کنترل‌کننده مناسب طراحی و عملکرد مطلوب آن نشان داده می‌شود.

سناریوی اول: سیستم سینگولار دارای تأخیر با پارامترهای (۷۸) لحاظ می‌گردد. تأخیر زمانی از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$1\le d(t)\le 3,\qquad 0\le \dot{d}(t)\le 1 \quad (۷۹)$$

همچنین سیگنال کنترلی می‌بایست قید زیر را برآورده سازد:

$$-0.1\le u(t)\le 0.1 \quad (۸۰)$$

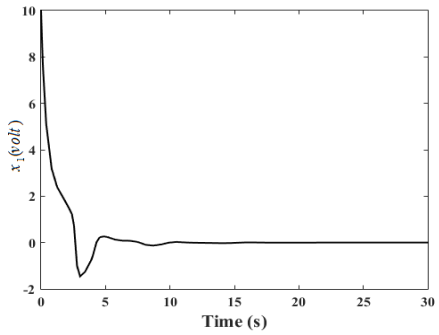
هدف، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت $u(t)=[\alpha f+(1-\alpha)h]x(t)$ می‌باشد به‌نحوی‌که ضمن برآورده‌کردن قید اشباع، سیستم حلقه بسته مجاز نیز باشد. از حل LMI های (۳۵) و (۳۶) با استفاده از نرم افزار MATLAB نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha=0, l=\begin{bmatrix}0.0574 & -0.0176 & -0.0852 & -0.0091\end{bmatrix} \quad (۸۱)$$
$$T=\begin{bmatrix}0.2662 & -0.1774 & 0.0826 & 0.0336\\ -0.1774 & 0.4847 & -0.0775 & 0.0067\\ 0.0826 & -0.0775 & 0.9589 & -0.1803\\ 0.0336 & 0.0067 & -0.1803 & 1.0951\end{bmatrix}$$

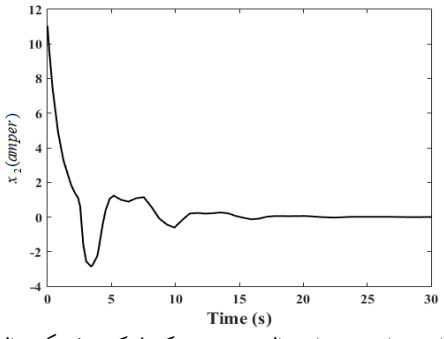
در نتیجه کنترل‌کننده فیدبک حالت پایدارساز برای سیستم داده‌شده (بر اساس قضیه ۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t)=\begin{bmatrix}0.2912 & 0.0522 & -0.1166 & -0.0368\end{bmatrix}x(t) \quad (۸۲)$$

برای بررسی کارایی کنترل‌کننده طراحی‌شده، سیستم حلقه بسته سینگولار را با پارامترهای داده‌شده تحت کنترل‌کننده (۸۲) به ازای تابع اولیه‌ی $\phi(t)=[\ 1\ 0\quad 1\ 1\quad 0\quad 0\ ]^T$ شبیه‌سازی کرده و نتایج شبیه‌سازی در شکل های ۶-۳ آورده شده است.

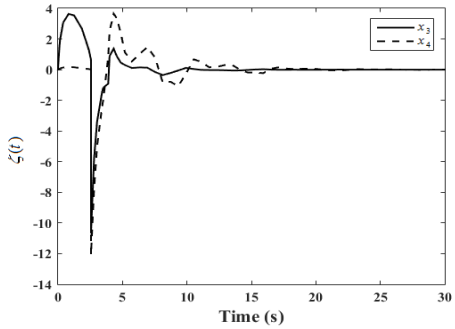


شکل ۳: پاسخ زمانی متغیرهای حالت x_1 تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول

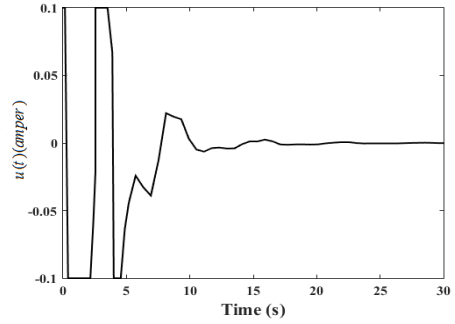


شکل ۴: پاسخ زمانی متغیرهای حالت x_2 تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]



شکل ۵: پاسخ زمانی متغیرهای حالت $\zeta(t)=[x_3 \quad x_4]^T$ تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



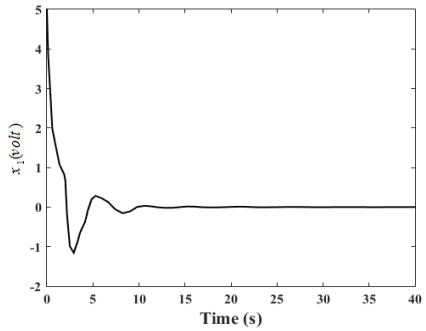
شکل ۶: پاسخ سیگنال کنترلی اشباع شده در سناریوی اول

همانطور که در شکل (۶) مشاهده می‌کنید سیگنال کنترلی به اشباع رفته اما با این وجود کنترل‌کننده طراحی‌شده در این بخش منجر به پایداری سیستم حلقه بسته گردیده است. نتایج حاصل حاکی از آن است که تکنیک پیشنهادشده در مقاله از کارایی لازم برای کنترل سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر متغیربازمان و در حضور اشباع محرک برخوردار است.

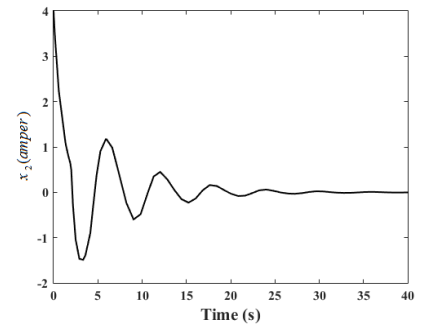
سناریوی دوم: در این بخش، مدل PEEC با پارامترهای داده‌شده (۷۸) را با تأخیر ثابت $d_1=d_2=2$ و سیگنال کنترلی با دامنه محدود $|u|\le 0.1$ درنظر گرفته و برای طراحی کنترل‌کننده مشابه آنچه در سناریوی قبل گفته شد عمل می‌کنیم. با مد نظر قراردادن قضیه (۲) و با کمک نرم افزار MATLAB نتایج زیر حاصل‌می شود:

$$u(t)=[-0.0231 \quad -0.0728 \quad -0.0654 \quad -0.0454]x(t) \qquad (۸۳)$$

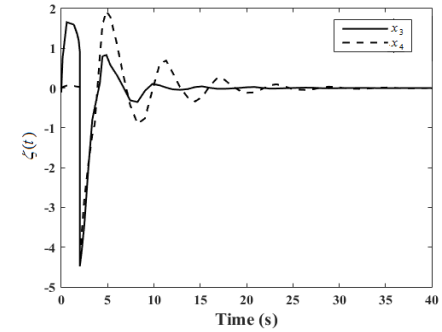
به منظور تحلیل کارایی کنترل‌کننده طراحی‌شده (۸۵)، سیستم حلقه بسته سینگولار را با پارامترهای داده‌شده در رابطه (۷۸) و با تأخیر ثابت، به ازای تابع اولیه‌ی $\phi(t)=[5 \quad 4 \quad 0]^T \quad \theta\in[-\quad]$ شبیه‌سازی می‌کنیم. شکل‌های ۱۰-۷ نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها را نشان می‌دهد. همانطور که پیداست، علی رغم محدودترکردن دامنه سیگنال کنترلی، کنترل‌کننده پیشنهادی در حضور قید اشباع محرک منجر به پایداری سیستم حلقه بسته شده است. بنابراین نتایج حاصل، حکایت از کارایی مطلوب قضایای ارائه‌شده در این مقاله برای کنترل سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر ثابت عملی دارد.



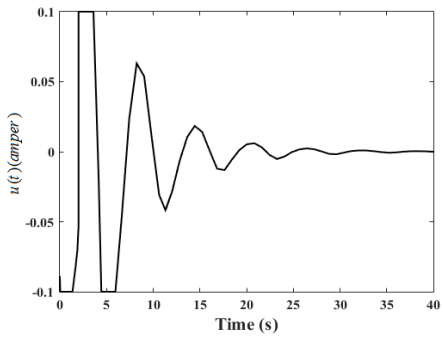
شکل ۷: پاسخ زمانی متغیر حالت x_1 تحت کنترل‌کننده فیدبک حالت اشباع‌شده در سناریوی دوم



شکل ۸: پاسخ زمانی متغیر حالت x_2 تحت کنترل‌کننده فیدبک حالت اشباع‌شده در سناریوی دوم



شکل ۹: پاسخ زمانی متغیرهای حالت $\zeta(t)=[x_3 \quad x_4]^T$ تحت کنترل‌کننده فیدبک حالت اشباع‌شده در سناریوی دوم



شکل ۱۰: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی اشباع شده در سناریوی دوم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله پایدارسازی سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با در نظر گرفتن اشباع محرک در دو حالت مستقل از تأخیر و وابسته به تأخیر بررسی شد. ابتدا، برای سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی متغیر با زمان، شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت، مستقل از تأخیر، با در نظر گرفتن اشباع محرک با هدف مجاز نمودن سیستم حلقه بسته در قالب قضیه ای ارائه شد. سپس قضایای پایداری مقاوم وابسته به تأخیر برای این سیستم ها در دو نسخه تأخیر متغیر با زمان و تأخیر ثابت، شرایط پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده را از نقطه نظر LMI نتیجه دادند. در انتها، از مثالهای عددی و عملی شبیه سازی شده برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده، استفاده شد.

پیوست

قضیه- (لیاپانوف-کراسوفسکی) سیستم سینگولار دارای تأخیر (۱) را در نظر بگیرید. اگر سیستم (۱) ضربه آزاد و رگولار باشد و ثوابت مثبت υ، σ و ς و $V(x_t): R\times C[-\dot{d},0]\to R$ وجود داشته باشند، به نحویکه:

$$\sigma\|x(t)\|^2 \le V(x_t) \le \upsilon\|x_t\|^2 \qquad (۸۴)$$
$$\dot{V}(x_t) \le -\varsigma\|x_t\|^2$$

و تابعک $V(x_t)$ برای x_t هایی که در معادله (۱) صدق می‌کنند، مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه سیستم (۱) پایدار مجانبی می‌باشد. [۳۷]

قضیه- (متمم شر) دو گزاره زیر معادلند[۳۷]:

$$(i) \qquad A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22}\end{bmatrix} < 0 \qquad (۸۵)$$

$$(ii) \qquad A_{22} < 0 \quad \& \quad A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T < 0 \qquad (۸۶)$$

مراجع

[1] S. Ayasun, CH.O. Nwankpa, and H.G. Kwatny, "An efficient method to compute singularity induced bifurcations of decoupled parameter-dependent differential algebraic power system model," Applied Mathematics and Computation, vol. 167, no. 1, pp. 435–453, 2005.

[2] R. Gani, and I.T. Cameron, "Modelling for dynamic simulation of chemical processes: the index problem," Chemical Engineering and Science, vol. 47, no. 5, pp. 1311-1315, 1992.

[3] Y. Liu, and X. Wen, Variable structure Control for singular systems, South China University of technology Press, Guangzhou, 1997.

[4] H. Krishnan, and N. H. Mcclamroch, "Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems," Automatica, vol. 30, no. 12, pp. 1885-1897, 1994.

[5] L. SH. You, and B. S. Chen, "Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic contrained mechanical systems: a unified viewpoint," International Journal of Control, vol. 58, no. 3, pp. 587-612, 1993.

[6] D. G. Luenberger, and A. Arbel, "Singular dynamic Leontief systems," Econometrica, vol. 45, no. 4, pp. 991–995, 1977.

[7] A. Azarfar, H. Toossian Shandiz, and M. Shafiee, "Adaptive feedback control for linear singular systems," Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, vol. 22, pp. 132-142, 2014.

[8] J. Y. Ishihara, and M. H. Terra, "On the Lyapunov theorem for singular systems," Automatic Control, IEEE Transactions, vol. 47, no. 11, pp. 1926-1930, 2002.

[9] Ch. Yang, Q. Zhang, and L. Zhou, Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems, Applied Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2013.

[10] L. Zhang, E. K. Boukas, A. Haidar, "Delay-range-dependent control synthesis for time-delay systems with actuator saturation," Automatica, vol. 44, pp. 2691–2695, 2008.

[11] Y. Y. Cao, and T. Hu, "Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation," IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 49, no. 2, pp. 233–240, 2002.

[12] T. Binazadeh, and M. Yousefi, "Designing a cascade-control structure using fractional-order controllers: time delay fractional-order proportional-derivative controller and fractional-order sliding-mode controller," ASCE's Journal of Engineering Mechanics, doi: 10.1061/(ASCE) EM.1943-7889.0001234, 2017.

[13] M. Yousefi, and T. Binazadeh, "Delay-independent sliding mode control of time-delay linear fractional order systems," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, doi: 0142331216678059, 2017.

[14] M. Hosseini Toodeshki, S. Hosseinnia, and J. Askari, "Adaptive robust control of uncertain systems with state and input delay," International Journal of Control, Automation and systems, vol. 8, no. 6, pp. 1212-1220, 2010.

[15] H. Gao, and C. Wang, "Comments and further results on: A descriptor system approach to Hinf control of linear time-delay systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, pp. 520-525, 2003.

[16] U. Ascher, and L. R. Petzold, "The numerical solution of delay-differential-algebraic equations of retarded and neutral type," SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 32, pp. 1635–1657, 1995.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]

[17] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[18] H. Chenarani, and T., Binazadeh, "Flexible structure control of unmatched uncertain nonlinear systems via passivity-based sliding mode technique," Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering, doi: 10.1007/s40998-017-0012-x, 2017

[19] A.R. Hakimi, and T. Binazadeh, "Robust generation of limit cycles in nonlinear systems: application on two mechanical systems," Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 12, no. 4, pp. 041013(1-8), 2017.

[20] E. Uezato, and M. Ikeda, "Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and control of descriptor systems," Proceedings of the 38th conference on decision and control, Phoenix, Arizona USA, vol. 4, pp. 4092-4097, 1999.

[21] R. Lu, H. Su, and A. Xue, The robust control theory of singular systems, Science Press, Beijing, 2008.

[22] S.Y. Xu, and J. Lam, Robust control and filtering of singular systems, Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[23] L. Wu, and W. X. Zheng, "Passivity-based sliding mode control of uncertain singular time-delay systems," Automatica, vol. 45, pp. 2120-2127, 2009.

[24] S. Xu, P. Van Dooren, R. Stefan, and J. Lam, "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, pp. 1122-1128, 2002.

[25] N. Chaibi, E. H. Tissir, "Delay-dependent robust stability of singular systems with time-varying delay," International Journal of Control and Information, vol. 28, no. 2, pp. 147-162, 2011.

[26] T. Binazadeh, and M. Bahmani, "Design of robust controller for a class of uncertain discrete-time systems subject to actuator saturation," IEEE Transactions on Automatic Control, doi: 10.1109/TAC.2016.2580662, 2017.

[27] T. Binazadeh, and M. Bahmani, "Robust time-varying output tracking control in the presence of actuator saturation," Transactions of the Institute of Measurement and Control, doi: 0142331216650022, 2017.

[28] Y. Liu, Y. Kao, Sh. Gu, and H. R. Karimi, "Soft variable structure controller design for singular systems," Jornal of the Franklin Institute, vol. 352, no. 4, pp. 1613-1626, 2015.

[29] Y. Liu, C. Zhang, and C. Gao, "Dynamic soft variable structure control of singular systems," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 17, no. 8, pp. 3345-3352, 2012.

[30] Y. Ma, and L. Fu, "Robust exponential stability and memory state feedback control for uncertain singular time-delay systems with saturating actuators," IET Control Theory & Applications, vol. 10, no. 3, pp. 328-338, 2016.

[31] L. Dai, Singular Control Systems, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.

[32] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," System Control Letter, vol. 8, pp. 351–357, 1987.

[33] A. Bellen, N. Guglielmi, and A. E. Ruehli, "Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 46, no. 1, pp. 212-215, 1999.

[34] D. Yue, and Q. L. Han, "A delay-ependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 51, no. 12, pp. 685-689, 2004.

[35] J. Cullum, A. Ruehli, and T. Zhang, "A method for reduced-order modeling and simulation of large interconnect circuits and its application to PEEC models with retardation," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 47, no. 4, pp. 261-273, 2000.

[36] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," Automatica, vol. 38, no. 2, 351–359, 2002

[37] L. L. Liu, J. G. Peng, B. W. Wu, "On parameterized Lyapunov–Krasovskii functional techniques for investigating singular time-delay systems," Applied Mathematics Letters, vol. 24, pp. 703-708, 2011.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.1.5]