مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۷۰-۶۱

کنترل مقاوم یک گروه خودرو با لحاظ تاخیر زمانی و ساختار ارتباطی زمان متغیر

حسین چهاردولی[۱]، محمدرضا همایی نژاد[۲]

[۱] دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hchehardoli@gmail.com

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، mrhomaeinezhad@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۶/۱۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۹/۲۱)

چکیده: در این مقاله به طراحی کنترلر و تحلیل پایداری داخلی و رشته‌ای یک گروه خودرو در حرکت یک بعدی پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه ارسال داده و اندازه‌گیری سنسورها در یک دسته خودرو می‌تواند با تاخیر رخ دهد، لذا در مدل‌سازی سیستم، تاخیر زمانی درنظر گرفته می‌شود. تغییر ساختار شبکه ارتباطی یک دسته خودرو می‌تواند منجر به ناپایداری داخلی و رشته‌ای سیستم گردد. با درنظر گرفتن تاخیر زمانی و ساختار شبکه متغیر با زمان به طراحی یک کنترلر مقاوم برای حفظ پایداری داخلی و رشته‌ای دسته خودرو پرداخته می‌شود. با استفاده از قضایای لیاپانوف کراسوفسکی و لیاپانوف رازومیخین، دو روش جدید برای تحلیل پایداری داخلی دسته خودرو ارائه می‌گردد. همچنین در ادامه قضیه‌ای نو برای تحلیل پایداری رشته‌ای در حضور تاخیر زمانی و ساختار شبکه متغیر بیان می‌گردد. نشان داده می‌شود که کنترلر مربوطه پایداری داخلی و رشته‌ای دسته را تحت عمل سوئیچ و تاخیر زمانی تضمین می‌نماید. کیفیت روش‌های ارائه شده با انجام مثال‌های شبیه‌سازی متعدد بررسی می‌گردد.

کلمات کلیدی: یک دسته خودرو ، تاخیر زمانی، ساختار ارتباطی متغیر، سیستم سوئیچینگ، پایداری رشته‌ای.

Robust Control of a Platoon of Vehicles with Communication Time Delay and Switched Interaction Topology

Hossein Chehardoli, Mohammadreza Homaeinezhad

Abstract: In this paper the problem of vehiclular platoons control with time delay and switching topology is considered. Due to data transmitions and sensors mesuarements, time delay should be investigated in system's modeling and controller design. Changes in communication topology may cause the internal and string instability of the vehicular platoons. Based on constant spacing policy, a robust controller is designed to provide internal and string stability of the vehicular platoons. By using Lyapunov-Krassovski and Lyapunov-Razumikhn theorems, two new approaches are presented to perform the internal stability of the proposed switched linear time-delay system. In continuance, a new theorem is presented to attain conditions satisfying string stability. Several simulation studies are provided to show the effectiveness of the proposed approaches.

Keywords: Platoon of vehicles, Time delay, Time varying topology, Switching system, String stability.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

۱- مقدمه

به منظور افزایش ایمنی سرنشینان و نیز بالا بردن ظرفیت ترافیکی جاده‌ها بحث اتوبان خودکار[1] در دو دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱-۳]. یک دسته خودرو[2] شامل تعدادی خودرو است که به صورت مرتبط با هم در حرکت هستند. یک خودرو در حال تبادل اطلاعات با سایر خودروها و خودروی راهنما[3] می‌باشد که خودروی راهنما اطلاعات اساسی مورد نیاز برای حرکت خود را از زیرساخت‌های اتوبان دریافت می‌کند [۴]. ساختار موردنظر دسته بر مبنای فاصله نسبی مطلوب خودروها حاصل می‌گرددکه این فاصله بر مبنای دو استراتژی کنترل فاصله ثابت[4] [۵-۸] و کنترل زمان پیشرفت ثابت[5] [۹-۱۱] صورت می‌گیرد. در روش کنترل فاصله ثابت، فاصله بین دو خودرو مقداری ثابت درنظر گرفته می‌شود در حالی که در روش دیگر مدت زمان رسیدن خودرو به موقعیت فعلی خودروی جلویی مقداری ثابت درنظر گرفته می‌شود.

در کنترل یک دسته خودرو علاوه بر پایداری داخلی[6] سیستم، پایداری رشته‌ای[7] نیز اهمیت بالایی دارد. مفهوم پایداری رشته‌ای اولین بار در[۲] مطرح شد. یک دسته خودرو پایدار رشته‌ای است اگر با ورود اغتشاش به خودروی راهنما، خطای موقعیت در طول دسته افزایش نیابد. بحث پایداری رشته‌ای برای مسائلی چون ساختار یکسویه [۷]، دوسویه [۹]، مسئله ایمنی دسته خودرو [۱۰]، مدل‌سازی با ساختار معادله دیفرانسیلی پاره‌ای [۱۱] در کارهای گذشته مورد توجه قرار گرفته است.

مدل‌سازی حرکت طولی خودرو با استفاده از مدل مرتبه دو در [۱۲،۹،۸] و مدل مرتبه سه در [۱۱،۱۰] انجام شده است. مدل مرتبه سه برای توصیف حرکت طولی خودرو برای اولین بار در [۱۳] ارائه گردید و در [۱۴] با انجام آزمایش‌های تجربی، صحت آن مورد تأیید قرار گرفت. در این مقاله نیز از مدل مرتبه سه برای توصیف حرکت طولی خودرو استفاده شده است.

در کنترل سیستم‌های چند عاملی مانند یک دسته خودرو، قانون کنترلی تابعی از توپولوژی ارتباطی شبکه می‌باشد. لذا با تغییر شبکه ارتباطی، ساختار قانون کنترلی نیز دچار تغییر شده که این امر منجر به تغییر دینامیک حلقه بسته سیستم می‌گردد. طبق تئوری سیستم‌های سوئیچینگ، عمل سوئیچ بین زیر سیستم‌های (حتی) پایدار می‌تواند منجر به ناپایداری سیستم حلقه بسته گردد [۱۶،۱۵]. این امر در مورد یک دسته خودرو اهمیت بیشتری می‌یابد چرا که علاوه بر پایداری داخلی، پایداری رشته‌ای نیز ممکن است در اثر عمل سوئیچ مختل گردد.

تحقیقات انجام شده در حوزه کنترل گروهی خودروها در دو دسته کنترل سیستم بدون لحاظ عدم قطعیت و اغتشاش [۸-۱۱، ۱۷-۱۹] و کنترل سیستم با لحاظ عدم قطعیت و اغتشاش [۸، ۲۰، ۲۱] قابل تقسیم می‌باشند. در نگرش اول جبران عدم قطعیت‌ها و اغتشاش اعمالی به خودرو به عهده دینامیک سطح پایین[8] خودرو گذاشته می‌شود در حالی‌که در نگرش دوم علاوه بر وظیفه تعیین شتاب مطلوب، وظایف فوق به عهده دینامیک سطح بالای[9] خودرو محول می‌شود. در [۱۱] با تقریب معادلات دیفرنسیلی جزئی به مدل‌سازی و کنترل طولی حرکت خودرو پرداخته شده است. در [۸، ۲۱] اثرات اغتشاش و عدم قطعیت‌های نیروی درگ در دینامیک سطح بالا لحاظ شده و کنترلری مقاوم برای تضمین پایداری رشته‌ای ارائه شده است. تاخیر زمانی در حرکت گروهی خودروها در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته است[۸، ۹، ۱۴]. مسئله توافق[10] بر اساس اندازه‌گیری موقعیت مطلق خودروها در [۹] و بر اساس اندازه‌گیری موقعیت نسبی در [۶، ۱۰، ۱۷، ۲۱] بررسی شده است. اکثر تحقیقات گذشته به تحلیل گروه همگن[11] خودرو متمرکز بوده‌اند [۷، ۸، ۱۴، ۱۹، ۲۰] در حالی‌که کارهای بسیار کمی به تحلیل گروه‌های ناهمگن[12] خودرو پرداخته‌اند [۹، ۱۱].

در تمامی کارهای گذشته در حوزه کنترل حرکت گروهی خودروها، ساختار شبکه ارتباطی ثابت و بدون تغییر درنظر گرفته شده است. در حالی‌که تغییر ساختار ارتباطی امری محتمل در سیستم‌های چند عاملی به شمار می‌رود. یک سیستم سوئیچینگ تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی است اگر تمامی زیر سیستم‌های آن پایدار مجانبی باشند و یک تابع لیاپانوف مشترک[13] وجود داشته باشد که مشتق آن به ازای تمامی زیر سیستم‌ها منفی باشد[۱۵، ۱۶].

در این مقاله برای اولین بار به طراحی کنترلر به منظور پایداری داخلی و رشته‌ای یک گروه خودرو با لحاظ تغییر ساختار شبکه پرداخته می‌شود. علاوه بر این امر، تاخیر زمانی ارتباطی در مدل‌سازی و طراحی کنترلر لحاظ می‌گردد. همچنین گروه خوردو، ناهمگن در نظر گرفته می‌شود. طور خلاصه مهمترین نوآوری این مقاله عبارتست از:

۱- تحلیل پایداری داخلی در حضور تاخیر زمانی و شبکه زمان متغیر
۲- تحلیل پایداری رشته‌ای در حضور تاخیر زمانی و شبکه زمان متغیر
۳- تحلیل گروه ناهمگن خودرو

ادامه مقاله به شرح زیر سازمان‌دهی شده است. در قسمت ۲ مسئله مورد نظر شرح داده شده و به استخراج معادلات مرتبه ۳ حرکت طولی خودرو پرداخته می‌شود. در قسمت ۳ به طراحی کنترلر و تحلیل پایداری داخلی پرداخته می‌شود و به کمک قضایای لیاپانوف کراسوفسکی[14] و

[1] Autonomous highways
[2] Platoon of vehicles
[3] Lead vehicle
[4] Constant spacing control
[5] Constant time headway control
[6] Internal stability
[7] String stability
[8] Lower level dynamic
[9] Upper level dynamic
[10] Consensus
[11] Hemogenous
[12] Heterogenous
[13] Common Lyapunov function
[14] Lyapunov-Krassovski

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

لیاپانوف رازومیخین[1] رهیافت‌های جدیدی برای تحلیل سیستم‌های سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی ارائه می‌گردد. در قسمت ۴ به تحلیل پایداری رشته‌ای مجموعه پرداخته می‌شود. در قسمت ۵ به بررسی کیفیت روش‌های ارائه شده، به کمک نتایج شبیه‌سازی پرداخته می‌شود. در نهایت مقاله در قسمت ۶ جمع بندی و نتیجه گیری می گردد.

۲- توصیف مسئله

۲-۱ – مدل طولی مرتبه سه خودرو:

حرکت طولی یک گروه شامل N+1 خودرو (یک خودرو رهبر و N خودرو پیرو) مطابق شکل (۱) درنظر گرفته می‌شود. معادله طولی یک خودرو به صورت یک معادله دیفرانسلی غیر خطی به صورت زیر قابل بیان است [۱۳، ۱۴، ۲۲]:

$$\dot{a}_i = h_i(v_i, a_i) + l_i(v_i)\, r_i \qquad (۱)$$

که در آن r_i ورودی موتور است و همچنین داریم:

$$h_i(v_i, a_i) = -\frac{1}{\tau_i}\left(a_i + \frac{\rho A_i c_{di}}{2 m_i} v_i^2 + \frac{R_i}{m_i}\right) - \frac{\rho A_i\, c_{di} v_i a_i}{m_i}$$

$$l_i(v_i) = \frac{1}{\tau_i\, m_i} \qquad (۲)$$

در رابطه فوق $R_i, c_{di}, A_i, \tau_i, \rho$ به ترتیب چگالی هوا، ثابت موتور، سطح مقطع عمودی خودرو، ضریب درگ هوا و مقاومت غلتشی لاستیک خودرو می‌باشند. اگر ورودی موتور به صورت زیر درنظر گرفته شود:

$$r_i = u_i\, m_i + 0.5\, \rho A_i\, c_{di}\, v_i^2 + d_{mi} + \tau_i \rho A_i\, c_{di}\, v_i\, a_i \qquad (۳)$$

معادله (۱) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\tau_i\, \dot{a}_i + a_i = u_i \qquad (۴)$$

که در آن u_i ورودی کنترلی جدید است که طراحی بر اساس آن صورت می‌گیرد. مدل دینامیکی فوق اولین بار در [۱۳] ارائه گردید. در [۱۴] با انجام آزمایش‌های تجربی صحت مدل فوق برای حرکت طولی خودرو با دقت خوبی اعتبارسنجی شده است. این مدل تاکنون مورد استفاده بسیاری از محققان قرار گرفته است [۱۰، ۱۱، ۲۲، ۲۳].

۲-۲ – مقدمه‌ای بر تئوری گراف

در یک گروه شامل N خودرو، رابطه بین خودروها را می‌توان با یک گراف مدل کرد که معرف توپولوژی شبکه می‌باشد. رئوس این گراف، خودروها و یال‌ها ارتباط بین خودروها هستند. یک گراف جهت‌دار از مرتبه N عبارتست از سه تایی $G = (V, \varepsilon, A)$ که $V = \{1, 2, ..., N\}$ نشان دهنده مجموعه راس‌ها، $\varepsilon \in V \times V$ و $A \in \Re^{N \times N}$ ماتریس مجاورت[2] رئوس می‌باشد. فرض می‌شود هر خودرو فقط از سایر خودروها اطلاعات دریافت می کند. بنابراین به ازای هر $i \in V$، اگر $(i,i) \notin \varepsilon$ و $a_{ii} = 0$. آنگاه $(i, j) \in \varepsilon$ $a_{ij} > 0$ و در غیر اینصورت $a_{ij} = 0$. ماتریس لاپلاسین[3] گراف G به صورت $\mathbf{L} = [l_{ij}],\ l_{ii} = \sum a_{ij},\ l_{ij} = -a_{ij}$ تعریف می‌شود. می‌توان نشان داد که این ماتریس دارای حداقل یک مقدار ویژه صفر است و بنابراین تمام رتبه[4] نمی‌باشد [۲۴]. همچنین برای یک گراف، ماتریس مجاورت راس صفر به صورت $\mathbf{B} = [b_{ij}],\ b_{ii} = a_{i0},\ b_{ij} = 0$ تعریف می گردد.

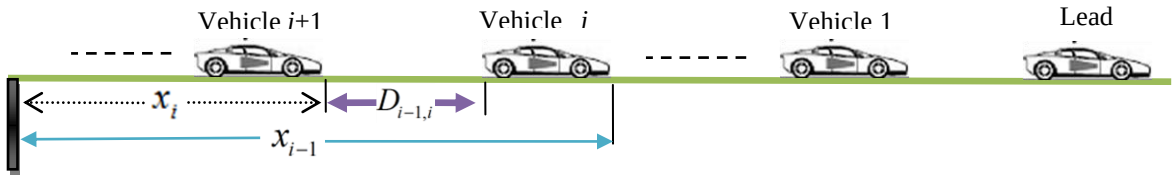
تعریف: یک راس از گراف G قابل دسترس سراسری است اگر از آن راس به سایر رئوس حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۳- تحلیل پایداری داخلی

بر مبنای استراتژی فاصله ثابت و با لحاظ تاخیر زمانی ارتباطی بین خودروها قانون کنترلی زیر برای هر خودرو در نظر گرفته می‌شود:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{\sigma} k_{ij} [x_j(t-\xi) - x_i(t-\xi) - d_{ji}] + \\ + b_i^{\sigma} k_i^{l} [x_0(t-\beta) - x_i(t-\beta) - d_{0i}] + b_i^{\sigma} \beta_i (v_0 - v_i) \qquad (۵)$$

که در آن k_i^l, k_{ij} و β_i ضرایب کنترلی، a_{ij}^{σ} عناصر ماتریس مجاورت خودرو i و b_i^{σ} عناصر ماتریس مجاورت خودروی راهنما هستند. x_i، v_i و v_0, x_0 به ترتیب موقعیت و سرعت خودروی iام و موقعیت و سرعت خودروی راهنما می‌باشد. $\xi(t)$ تاخیر زمانی ارتباطی است که کراندار و نامعلوم درنظر گرفته می‌شود: $0 \le \xi(t) \le \bar{\xi}$. $\sigma(t) : [0, \infty) \to \{1, 2, ..., n_\sigma\}$ سیگنال سوئیچینگ و n_σ تعداد زیر سیستم‌های سیستم سوئیچینگ می‌باشد. همچنین d_{0i} و d_{ij} به ترتیب فاصله بین خودروی صفر و j با خودروی iام دسته می‌باشد. بر اساس استراتژی کنترل فاصله ثابت، فاصله بین خودروی راهنما و خودروی i ام به صورت $d_{0i} = \sum_{j=1}^{i} (D_{j-1,j} + L_{j-1})$ تعریف می‌گردد. همچنین موقعیت مطلوب هر خودرو به صورت $x_i^d = x_0 - \sum_{j=1}^{i} \left(D_{j-1,j} + L_{j-1}\right)$ تعریف می‌شود که در آن L معرف



شکل ۱: حرکت طولی یک گروه خودرو

[1] Lyapunov-Razumikhin

[2] Adjacency matrix
[3] Laplacian matrix
[4] Full rank

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

طول خودرو و $D_{j-1,j}$ فاصله مطلوب بین دوخودروی متوالی است. با فرض سرعت ثابت برای خودروی راهنما خطای تعقیب و مشتق آن برای هر خودرو به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$e_i = x_i - x_i^d \Rightarrow \dot{e}_i = \dot{x} - v_0 \Rightarrow \ddot{e}_i = \ddot{x}_i \qquad (۶)$$

بنابراین ورودی کنترلی (۵) برحسب دینامیک خطا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{\sigma} k_{ij} [e_j(t-\xi) - e_i(t-\xi)] - \\ - b_i^{\sigma} k_i^{l} e_i(t-\xi) - b_i^{\sigma} \beta_i \dot{e}_i \qquad (۷)$$

با جایگذاری (۷) در (۴) دینامیک حلقه بسته هر خودرو به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\tau_i \dddot{e}_i + \ddot{e}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{\sigma} k_{ij} [e_j(t-\xi) - e_i(t-\xi)] - \\ - b_i^{\sigma} k_i^{l} e_i(t-\xi) - b_i^{\sigma} \beta_i \dot{e}_i \qquad (۸)$$

با تعریف بردار خطا به صورت $\mathbf{e} = [e_1,...,e_n, \dot{e}_1,...,\dot{e}_n, \ddot{e}_1,...,\ddot{e}_n]^T$ دینامیک حلقه بسته دسته خودرو را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_1^{\sigma} \mathbf{e} + \mathbf{A}_2^{\sigma} \mathbf{e}(t-\xi) \qquad (۹)$$

که در آن:

$$\mathbf{A}_1^{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}_{N\times N} & -\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma} & -\bar{\mathbf{I}}_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2^{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} \\ -\bar{\mathbf{H}}^{\sigma} & \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{0}_{N\times N} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{H}}^{\sigma} = \bar{\mathbf{L}}^{\sigma} + \bar{\mathbf{B}}_2^{\sigma}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma} = diag(\frac{b_i^{\sigma}\beta_i}{\tau_i}), \bar{\mathbf{I}}_1 = diag(\frac{1}{\tau_i}),$$

$$\bar{\mathbf{B}}_2^{\sigma} = diag(\frac{b_i^{\sigma}k_i^{l}}{\tau_i}), \bar{\mathbf{L}} = [\bar{l}_{ij}], \bar{l}_{ij} = \frac{k_{ij} l_{ij}^{\sigma}}{\tau_i}$$

برای اثبات آنکه دسته خودرو تحت ورودی کنترلی (۵) و تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی است در ادامه قضایایی ارائه می‌گردد. به منظور تحلیل پایداری سیستم سوئیچینگ تاخیر زمانی (۹) در ادامه روش‌هایی نوین بر اساس قضایای لیاپانوف-رازومیخین و لیاپانوف-کراسوفسکی ارائه می‌گردد. در ابتدا قضیه لیاپانوف-رازومیخین ارائه می‌شود.

قضیه ۱ (لیاپانوف-رازومیخین) [۲۵]: سیستم تاخیردار زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_t) \\ \mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \in [-\beta, 0] \end{cases} \qquad (۱۰)$$
$$\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t+\theta),\ \forall \theta \in [-\beta, 0],\ f(0) = 0$$

توابع پیوسته، غیرمنفی و غیرکاهشی $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ را درنظر بگیرید به نحوی که به ازای $s > 0$: $\phi_1(s) > 0, \phi_2(s) > 0\ \phi_3(s) > 0,$.

همچنین $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$. برای سیستم (۱۰)، فرض کنید تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f : C([-\beta, 0], \Re^n) \to \Re^n$ مجموعه محدود $C([-\beta, 0], \Re^n)$ را به یک مجموعه محدود در $\Re^n$ می نگارد. اگر یک تابع پیوسته $V(\mathbf{x}, t)$ وجود داشته باشد به نحوی که

$$\phi_1(\|\mathbf{x}\|) \le V(t, \mathbf{x}) \le \phi_2(\|\mathbf{x}\|), t \in \Re, \mathbf{x} \in \Re^n \qquad (۱۱)$$

و در ادامه اگر یک تابع غیرکاهشی $\phi(s), \phi(s) > s$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\dot{V}(t, x) \le -\varphi_3(\|x\|), \\ if\ V(t+\theta, x(t+\theta)) < \varphi(V(t, x(t))),\ \theta \in [-\beta, 0] \qquad (۱۲)$$

آنگاه مبدا یک نقطه پایدار مجانبی برای سیستم (۱۰) خواهد بود.

لم ۱ [۲۶]: به ازای هر دو بردار (با ابعاد مناسب) $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همچنین ماتریس مثبت معین $\boldsymbol{\psi}$ نامساوی زیر موسوم به نامساوی یانگ[1] بر قرار است:

$$2\mathbf{a}^T\mathbf{b} \le \mathbf{a}^T \boldsymbol{\psi}\, \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi}^{-1} \mathbf{b} \qquad (۱۳)$$

لم ۲ [۲۷]: ماتریس متقارن $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید که $\mathbf{A}$ معکوس‌پذیر است. آنگاه $\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$ اگر و فقط اگر:

$$\mathbf{A} \succ \mathbf{0},\ \mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \succ \mathbf{0} \qquad (۱۴)$$

لم ۳ [۲۸]: اگر $\lambda_i, i = 1,..,v$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A} \in \Re^{v\times v}$ و $\mu_j, j = 1,..,w$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{B} \in \Re^{w\times w}$ باشند، آنگاه ماتریس $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ دارای vw مقدار ویژه به فرم $\lambda_1 \mu_1, \ldots, \lambda_1 \mu_w, \lambda_2 \mu_1, \ldots, \lambda_2 \mu_w, \ldots, \lambda_v \mu_w$ خواهد بود.

قضیه ۲: سیستم سوئیچینگ تاخیر زمانی (۹) به ازای هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر است اگر به ازای هر سیگنال سوئیچینگ :

۱- خودروی راهنما برای کل دسته قابل دسترس باشد.

۲- یک ماتریس مثبت معین $\bar{\mathbf{P}}$ وجود داشته باشد که معادله زیر برقرار باشد:

$$\bar{\mathbf{P}}\, \bar{\mathbf{H}}^{\sigma} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} \bar{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0} \qquad (۱۵)$$

۳- $\gamma\bar{\lambda} > \mu$ که در آن:

$$\gamma = \min(eig(\mathbf{Z})); \bar{\lambda} = \min(eig(\bar{\mathbf{P}})); \\ \mu = \max(eig(\mathbf{W}))$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} -2\mathbf{I} + 2\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma} & -(D+1)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T} + \bar{\mathbf{I}}_1 \\ -(D+1)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma} & -2\mathbf{I} + 2\bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \bar{\mathbf{P}} \otimes \begin{pmatrix} -D\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma} \\ -\mathbf{I} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma} + \bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{P}}\, \bar{\mathbf{H}}^{\sigma} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} \bar{\mathbf{P}})^{-1} \\ \begin{pmatrix} -D\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} & -\mathbf{I} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} + \bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix} \otimes \bar{\mathbf{P}}$$

[1] Young's inequality

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

اثبات: شرط آنکه معادله (۱۵) به ازای هر سیگنال سوئیچینگ جواب داشته باشد آن است که ماتریس $\bar{\mathbf{H}}^{\sigma}=\bar{\mathbf{L}}^{\sigma}+\bar{\mathbf{B}}_2^{\sigma}$ مثبت معین باشد. که لازمه این امر در دسترس بودن راس صفر برای کل گراف است. در ادامه اثبات، تابع لیاپانوف رازومیخین $V=\mathbf{e}^T\mathbf{P}\,\mathbf{e}$ را در نظر بگیرید که در آن:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} D\mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & D\mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \end{pmatrix}\otimes\bar{\mathbf{P}},\ D>1 \qquad (۱۶)$$

با استفاده از رابطه نیوتن-لایبنیتز[1]

$$\mathbf{e}(t-\xi)=\mathbf{e}(t)-\int_{t-\xi}^{t}\dot{\mathbf{e}}(s)ds \qquad (۱۷)$$

و با توجه به آنکه $(\mathbf{A}_2^{\sigma})^2=\mathbf{0}$،می‌توان معادله (۹) را به شکل زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{F}^{\sigma}\,\mathbf{e}-\int_{t-\xi}^{0}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)}\mathbf{A}_1^{\sigma(s)}\mathbf{e}(s)\,ds,\quad \mathbf{F}^{\sigma}=\mathbf{A}_1^{\sigma}+\mathbf{A}_2^{\sigma} \qquad (۱۸)$$

مشتق V در امتداد (۱۸) به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{V}=\mathbf{e}^T\left\{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_1^{\sigma(t)}+\mathbf{A}_2^{\sigma(t)}\right)+\left(\mathbf{A}_1^{\sigma(t)}+\mathbf{A}_2^{\sigma(t)}\right)^T\mathbf{P}\right\}\mathbf{e}+ \\ +\int_{t-\xi}^{t}-2\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)}\left\{\mathbf{A}_1^{\sigma(s)}\mathbf{e}(s)+\mathbf{A}_2^{\sigma(s)}\mathbf{e}(s-\xi)\right\}ds \qquad (۱۹)$$

با استفاده از نامساوی یانگ (لم ۱) و لحاظ $\varphi(s)=qs,\ q>1$ خواهیم داشت: $-\xi\le\theta\le 0,\ V\left(\mathbf{e}(t+\theta)\right)<qV\left(\mathbf{e}(t)\right)$.

$$\dot{V}\le\mathbf{e}^T\left\{\mathbf{P}\mathbf{F}^{\sigma}+\mathbf{F}^{\sigma T}\mathbf{P}\right\}\mathbf{e}+2q\int_{t-\xi}^{t}\mathbf{e}^T(s)\mathbf{P}\mathbf{e}(s)ds+ \\ +\mathbf{e}^T\left\{\int_{t-\xi}^{t}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)}\mathbf{A}_1^{\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_1^{\sigma(s)T}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)T}\mathbf{P}+\right.\right. \\ \left.\left.+\mathbf{P}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)}\mathbf{A}_2^{\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_2^{\sigma(s)T}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)T}\mathbf{P}\right)ds\right\}\mathbf{e} \qquad (۲۰)$$

حال فرض کنید در بازه $[-\xi,0]$ زیر سیستم iام به اندازه α_i فعال باشد که $\sum_1^{ns}\alpha_i=1, 0\le\alpha_i\le 1$. بنابراین داریم:

$$\dot{V}\le-\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\,\mathbf{e}+\xi_{\max}\mathbf{e}^T\left\{\bar{\mathbf{Q}}^k+2q\mathbf{P}\right\}\mathbf{e} \qquad (۲۱)$$

که در آن:

$$\bar{\mathbf{Q}}^k=\mathbf{P}\mathbf{A}_2^k\left\{\sum_{i=1}^{n_s}\alpha_i\left(\mathbf{A}_1^i\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_1^{i\,T}+\mathbf{A}_2^i\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_2^{i\,T}\right)\right\}\mathbf{A}_2^{k^T}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_{11}&\mathbf{Q}_{12}&\mathbf{Q}_{13}\\ *&\mathbf{Q}_{22}&\mathbf{Q}_{23}\\ *&*&\mathbf{Q}_{33}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{11}=\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{H}}+\bar{\mathbf{H}}^T\bar{\mathbf{P}},\ \mathbf{Q}_{12}=\bar{\mathbf{H}}^T\bar{\mathbf{P}}-D\bar{\mathbf{P}}+\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma}$$
$$\mathbf{Q}_{13}=\bar{\mathbf{H}}^T\bar{\mathbf{P}}-\bar{\mathbf{P}}+\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{I}}_1,\ \mathbf{Q}_{22}=-2\bar{\mathbf{P}}+2\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma}$$
$$\mathbf{Q}_{23}=-(D+1)\bar{\mathbf{P}}+\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T}\bar{\mathbf{P}}+\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{I}}_1,\ \mathbf{Q}_{33}=-2\bar{\mathbf{P}}+2\bar{\mathbf{P}}\,\bar{\mathbf{I}}_1$$

طبق لم۲ ماتریس $\mathbf{Q}$ مثبت معین است اگر و فقط اگر ($\otimes$ حاصلضرب کرانیکر):

$$\begin{pmatrix}-2\mathbf{I}+2\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma}&-(D+1)\mathbf{I}+\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T}+\bar{\mathbf{I}}_1\\ -(D+1)\mathbf{I}+\bar{\mathbf{I}}_1+\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma}&-2\mathbf{I}+2\bar{\mathbf{I}}_1\end{pmatrix}\otimes\bar{\mathbf{P}}- \\ -\bar{\mathbf{P}}\begin{pmatrix}-D\mathbf{I}+\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T}+\bar{\mathbf{H}}^{\sigma}\\ -\mathbf{I}+\bar{\mathbf{H}}^{\sigma}+\bar{\mathbf{I}}_1\end{pmatrix}(\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{H}}^{\sigma}+\bar{\mathbf{H}}^{\sigma T}\bar{\mathbf{P}})^{-1} \qquad (۲۲)$$
$$\left(-D\mathbf{I}+\bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma}+\bar{\mathbf{H}}^{\sigma T}\quad -\mathbf{I}+\bar{\mathbf{H}}^{\sigma T}+\bar{\mathbf{I}}_1\right)\bar{\mathbf{P}}\succ 0$$

با توجه به لم ۳ ماتریس $\mathbf{Q}$ مثبت معین است اگر:

$$\gamma\bar{\lambda}>\mu \qquad (۲۳)$$

حال اگر تاخیر زمانی رابطه $\xi_{\max}<\dfrac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}\left(\bar{\mathbf{Q}}^k+2q\mathbf{P}\right)}$ را ارضا کند آنگاه:

$$\dot{V}\le-\eta\mathbf{e}^T\mathbf{e},\quad \eta>0 \qquad (۲۴)$$

بنابراین پایداری مجانبی سیستم سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی (۹) تحت هر سوئیچ دلخواه تضمین می‌گردد.

در ادامه تحلیل قضیه‌ای نو بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسوفسکی برای تحلیل سیستم (۹) ارائه می‌گردد.

قضیه ۳: سیستم سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی (۹) تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر است اگر:

۱- خودرو راهنما به ازای تمامی سیگنال‌های سوئیچینگ قابل دسترس سراسری باشد.

۲- $\gamma\bar{\lambda}>\mu$.

۳- بتوان ماتریس‌هایی مانند $\mathbf{N}_{k3},\mathbf{N}_{k2},\mathbf{N}_{k1},\mathbf{X}_k,\mathbf{S},\mathbf{R},\mathbf{Q},\mathbf{P}$ پیدا کرد به نحوی که روابط (۲۵) تا (۲۷) برقرار باشند:

$$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{S}\succ\mathbf{0} \qquad (۲۵)$$

$$\mathbf{X}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{11}^k&\mathbf{X}_{12}^k&\mathbf{X}_{13}^k\\ *&\mathbf{X}_{22}^k&\mathbf{X}_{23}^k\\ *&*&\mathbf{X}_{33}^k\end{bmatrix}\succ\mathbf{0},$$

$$\mathbf{\Psi}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{11}^k&\mathbf{X}_{12}^k&\mathbf{X}_{13}^k&\mathbf{N}_{k1}\\ *&\mathbf{X}_{22}^k&\mathbf{X}_{23}^k&\mathbf{N}_{k2}\\ *&*&\mathbf{X}_{33}^k&\mathbf{N}_{k3}\\ *&*&*&\mathbf{S}\end{bmatrix}\succ 0 \qquad (۲۶)$$

$$\mathbf{\Phi}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_{11}^k&\mathbf{\Phi}_{12}^k&\mathbf{\Phi}_{13}^k\\ *&\mathbf{\Phi}_{22}^k&\mathbf{\Phi}_{23}^k\\ *&*&\mathbf{\Phi}_{33}^k\end{bmatrix}\prec 0 \qquad (۲۷)$$

که در آن:

$$\begin{cases}\mathbf{\Phi}_{11}^k=\mathbf{P}\mathbf{A}_1^{kT}+\mathbf{A}_1^{kT}\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\mathbf{A}_1^{kT}\left(\mathbf{R}+\xi\mathbf{S}\right)\mathbf{A}_1^k+\xi\mathbf{X}_{11}^k+\\ \quad+\mathbf{N}_{k1}+\mathbf{N}_{k1}^T\\ \mathbf{\Phi}_{12}^k=\mathbf{P}\mathbf{A}_2^{kT}+\mathbf{A}_1^{kT}\left(\mathbf{R}+\xi\mathbf{S}\right)\mathbf{A}_2^{kT}+\xi\mathbf{X}_{12}^k-\mathbf{N}_{k1}+\mathbf{N}_{k2}^T\\ \mathbf{\Phi}_{13}^k=\xi\mathbf{X}_{13}^k+\mathbf{N}_{k3}^T\\ \mathbf{\Phi}_{22}^k=-\mathbf{Q}+\mathbf{A}_2^{kT}\left(\mathbf{R}+\xi\mathbf{S}\right)\mathbf{A}_2^{kT}+\xi\mathbf{X}_{22}^k-\mathbf{N}_{k2}-\mathbf{N}_{k2}^T\\ \mathbf{\Phi}_{23}^k=\xi\mathbf{X}_{23}^k-\mathbf{N}_{k3}^T\\ \mathbf{\Phi}_{33}^k=\xi\mathbf{X}_{33}^k-\mathbf{R}\end{cases}$$

[1] Newton-Leibnitz

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

اثبات. موارد ۱ و ۲ مشابه قضیه قبل قابل اثبات است. شرط لازم برای پایداری سیستم (۹)، پایداری آن در حالت بدون تاخیر زمانی است. مشابه روال اثبات قضیه قبل، پایداری سیستم (۹) بدون تاخیر زمانی منجر به ارضای شرایط ۱ و ۲ می‌گردد. در ادامه اثبات تابع لیاپانوف مشترک زیر را درنظر بگیرید:

$$V = \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e} + \int_{t-\xi}^{t}\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e}ds + \int_{t-\xi}^{t}\dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{R}\dot{\mathbf{e}}ds + \int_{-\xi}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}\dot{\mathbf{e}}dsd\theta \quad (۲۸)$$

که مشتق آن به صورت زیر است:

$$\dot{V} = 2\mathbf{e}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} - \mathbf{e}^T(t-\xi)\mathbf{Q}\mathbf{e}(t-\xi) + \dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{R}\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi)\mathbf{R}\dot{\mathbf{e}}(t-\xi) + \xi\dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{S}\dot{\mathbf{e}} - \int_{-\xi}^{0}\dot{\mathbf{e}}^T(t+\theta)\mathbf{S}\dot{\mathbf{e}}(t+\theta)d\theta \quad (۲۹)$$

با جایگذاری از (۹) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & \mathbf{e}^T\mathbf{P}\left[\mathbf{A}_1^k\mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k\mathbf{e}(t-\xi)\right] + \\ & + \left[\mathbf{A}_1^k\mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k\mathbf{e}(t-\xi)\right]^T\mathbf{P}\mathbf{e} + \\ & + \mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} - \mathbf{e}^T(t-\xi)\mathbf{Q}\mathbf{e}(t-\xi) + \\ & + \left[\mathbf{A}_1^k\mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k\mathbf{e}(t-\xi)\right]^T(\mathbf{R}+\xi\mathbf{S})\left[\mathbf{A}_1^k\mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k\mathbf{e}(t-\xi)\right] - \\ & - \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi)\mathbf{R}\dot{\mathbf{e}}(t-\xi) - \int_{-\xi}^{0}\dot{\mathbf{e}}^T(t+\theta)\mathbf{S}\dot{\mathbf{e}}(t+\theta)d\theta\end{aligned} \quad (۳۰)$$

روابط زیر بدیهی هستند:

$$\mathbf{e} - \mathbf{e}(t-\xi) - \int_{-\xi}^{0}\dot{\mathbf{e}}(t+\theta)d\theta = 0 \quad (۳۱)$$

$$\left(\mathbf{e}^T\mathbf{N}_1 + \mathbf{e}^T(t-\xi)\mathbf{N}_{k2} + \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi)\mathbf{N}_{k3}\right)\left(\mathbf{e} - \mathbf{e}(t-\xi) - \int_{-\xi}^{0}\dot{\mathbf{e}}(t+\theta)d\theta\right) = 0 \quad (۳۲)$$

$$\xi\boldsymbol{\delta}_1^T\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}_1 - \int_{-\xi}^{0}\boldsymbol{\delta}_1^T\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}_1 d\theta = 0 \quad (۳۳)$$

که در آن: $\boldsymbol{\delta}_1 = \left[\mathbf{e}^T, \mathbf{e}^T(t-\xi), \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi)\right]^T$. حال با افزودن روابط (۳۱) تا (۳۳) به (۳۰) و ساده‌سازی، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{V} = \boldsymbol{\delta}_1^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\delta}_1 - \int_{-\xi}^{0}\boldsymbol{\delta}_2^T\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\delta}_2 d\theta \quad (۳۴)$$

که در آن: $\boldsymbol{\delta}_2 = \left[\mathbf{e}^T, \mathbf{e}^T(t-\xi), \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi), \dot{\mathbf{e}}^T(t+\theta)\right]^T$. حال با توجه به رابطه فوق اگر $\boldsymbol{\Phi} \prec \mathbf{0}$ و $\boldsymbol{\psi} \succ \mathbf{0}$ آنگاه $\dot{V} \le 0$ و پایداری مجانبی سیستم سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی (۹) تحت هر سوئیچ دلخواه تضمین می‌گردد.

۴- پایداری رشته‌ای

به منظور بررسی پایدرای رشته‌ای باید ساختار ارتباطی مشخص گردد. در این مقاله ساختار ارتباطی گروه خودرو به صورت دوسویه-رهبر پیرو[1] درنظر گرفته می‌شود. بنابراین ساختار شبکه ارتباطی بین ساختارهای مختلف رهبر-پیرو[2]، رهبر-پیشین پیرو[3] و دوسویه[4] در حال تغییر خواهد بود. در ادامه این بخش به استخراج شرایط لازم روی بهره-های کنترلی به منظور پایدار سازی رشته‌ای گروه خودرو پرداخته می-شود. با فرض فوق قانون کنترلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}u_i = {} & -k_{i,\sigma}^f(x_{i,\xi} - x_{i-1,\xi} + d_{i,i-1}) - k_{i,\sigma}^b(x_{i,\xi} - x_{i+1,\xi} + d_{i+1,i}) - \\ & - k_{i,\sigma}^l(x_{i,\xi} - x_{0,\xi} + d_{i0}) - \beta_{i,\sigma}(\dot{x}_i - \dot{x}_0)\end{aligned} \quad (۳۵)$$

که در آن: $k_{i,\sigma}^f \in \{0, k_i^f\}$ که صفر متناظر با $a_{i,i-1} = 0$ و k_i^f متناظر با $a_{i,i-1} = 1$ می‌باشد. به طور مشابه $k_{i,\sigma}^b \in \{0, k_i^b\}$ ، $\beta_{i,\sigma} \in \{0, \beta_i\}$ و $k_{i,\sigma}^l \in \{0, k_i^l\}$ تعریف می-گردند. در روابط فوق k_i^l, k_i^b, k_i^f و β_i به ترتیب بهره‌های کنترلی موقعیت نسبی با خودروی جلو، موقعیت نسبی با خودروی عقب و موقعیت و سرعت نسبی با خودروی راهنما می‌باشند.

قضیه ۴: اگر پارامترهای کنترلی خودروهای دسته در روابط زیر صادق باشند آنگاه پایداری رشته‌ای دسته تحت عمل سوئیچ و تاخیر زمانی کراندار تضمین می‌گردد ($i = 1, \ldots, N$):

$$k_{i,\sigma}^l \ge \left|k_{i,\sigma}^f - k_{i,\sigma}^b\right| \quad (۳۶)$$

$$\beta_{i,\sigma}^2 - 2(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)(1 + 2\bar{\xi}\beta_{i,\sigma}) \ge 0 \quad (۳۷)$$

$$1 - 2\tau_i\beta_{i,\sigma} - 2\bar{\xi}\tau_i(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) \ge 0 \quad (۳۸)$$

اثبات: اگر رابطه زیر صادق باشد آنگاه دسته خودرو پایدار رشته‌ای خواهد بود[۲۳]:

$$\left|\frac{E_i(j\omega)}{E_{i-1}(j\omega)}\right| \le 1,\ \omega > 0 \quad (۳۹)$$

جایگذاری (۳۵) در رابطه (۴) و دو بار مشتق زمانی از رابطه حاصله، منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$\tau_i\dddot{a}_i + \ddot{a}_i = -k_{i,\sigma}^f(\ddot{x}_{i,\xi} - \ddot{x}_{i-1,\xi}) - k_{i,\sigma}^b(\ddot{x}_{i,\xi} - \ddot{x}_{i+1,\xi}) - k_{i,\sigma}^l\ddot{x}_{i,\xi} - \beta_{i,\sigma}\ddot{x}_i \quad (۴۰)$$

تبدیل لاپلاس طرفین رابطه (۴۰) منجر به رابطه زیر خواهد شد:

$$E_i = \Gamma_{i-1}E_{i-1} + \Gamma_{i+1}E_{i+1}$$

$$\Gamma_{i-1} = \frac{k_{i,\sigma}^f e^{-\xi s}}{\tau_i s^3 + s^2 + \beta_{i,\sigma}s + (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)e^{-\xi s}}, \quad (۴۱)$$

$$\Gamma_{i+1} = \frac{k_{i,\sigma}^b e^{-\xi s}}{\tau_i s^3 + s^2 + \beta_{i,\sigma}s + (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)e^{-\xi s}}$$

با انجام ساده‌سازی، رابطه (۴۱) به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{\Gamma_{i-1}}{1 - \Gamma_{i+1}\frac{E_{i+1}}{E_i}} \quad (۴۲)$$

[1] Bi-directional leader follower (BDLF)

[2] Leader follower (LF)
[3] Leader predecessor follower (LPF)
[4] Bi-directional (BD)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

طبق رابطه (۴۲) اگر شرایط $|\Gamma_{i+1}|\le 0.5, |\Gamma_{i-1}|\le 0.5$ و $\left|\frac{E_N}{E_{N-1}}\right|\le 1$ برقرار باشند آنگاه $\left|\frac{E_i}{E_{i-1}}\right|\le 1$. در ادامه روند اثبات درنظر بگیرید: $|\Gamma_{i-1}|=\sqrt{\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow q_{i-1}-4p_{i-1}\ge 0$ که معادل عبارت زیر است:

$$(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)^2-4(k_{i,\sigma}^f)^2+\beta_{i,\sigma}^2\omega^2+(1-2\tau_i\beta_{i,\sigma})\omega^4+$$
$$+\tau_i^2\omega^6-2\omega^2(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)\cos\xi\omega+$$
$$+2\omega(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)(\tau_i\omega^2-\beta_{i,\sigma})\sin\xi\omega\ge 0 \quad (۴۳)$$

برای تحلیل رابطه (۴۳) با توجه به علامت عبارت $\tau_i\omega^2-\beta_{i,\sigma}$ دو حالت زیر ممکن است:

الف- $\tau_i\omega^2>\beta_{i,\sigma}$ و ب- $\tau_i\omega^2<\beta_{i,\sigma}$. در حالت الف با لحاظ $-1\le-\cos\xi\omega$ و $\sin\xi\omega\ge-\xi\omega$ $(\xi\omega>0)$ و در حالت ب با لحاظ $-1\le-\cos\xi\omega$ و $-\sin\xi\omega\ge-\xi\omega$ رابطه (۴۳) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)^2-4(k_{i,\sigma}^f)^2+$$
$$+\left(\beta_{i,\sigma}^2-2(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)\pm\right.$$
$$\left.\pm\left(2\xi(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)\beta_{i,\sigma}\right)\omega^2+\right.$$
$$\left.+\left(1-2\tau_i\beta_{i,\sigma}\pm 2\xi\tau_i(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)\right)\omega^4+\tau_i^2\omega^6\ge 0\right. \quad (۴۴)$$

که علامت منفی برای حالت الف و علامت مثبت برای حالت ب می‌باشد.

با انجام محاسبات مشابه برای $|\Gamma_{i+1}|=\sqrt{\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow q_{i+1}-4p_{i+1}\ge 0$ روابط زیر حاصل خواهند شد:

$$(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)^2-4(k_{i,\sigma}^b)^2+$$
$$+\left(\beta_{i,\sigma}^2-2(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)\pm\right.$$
$$\left.\pm(2\xi(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l)\beta_{i,\sigma}\right)\omega^2+$$
$$+(1-2\tau_i\beta_{i,\sigma}\pm 2\xi\tau_i(k_{i,\sigma}^f+k_{i,\sigma}^b+k_{i,\sigma}^l))\omega^4+\tau_i^2\omega^6\ge 0 \quad (۴۵)$$

دو معادله اخیر چند جمله‌ای‌هایی از توان‌های زوج ω هستند. بنابراین اگر ضرایب این دو معادله مثبت باشند هر دو نامساوی برقرار خواهند بود. حال اگر روابط (۳۶) تا (۳۸) برقرار باشند معادلات (۴۴) و (۴۵) نیز برقرار خواهند بود. گام آخر، یافتن شرایط برقراری $\left|\frac{E_N}{E_{N-1}}\right|\le 1$ می‌باشد. با درنظر گرفتن قانون کنترلی زیر برای خودروی آخر:

$$u_N=-k_{N,\sigma}^f(x_{N,\xi}-x_{N-1,\xi}+d_{N,N-1})-$$
$$-k_{N,\sigma}^l(x_{N,\xi}-x_{0,\xi}+d_{i0})-\beta_{N,\sigma}(\dot{x}_N-\dot{x}_0) \quad (۴۶)$$

باجایگذاری در دینامیک آخرین خودرو، مشتق زمانی از طرفین و تبدیل لاپلاس رابطه زیر حاصل می‌گردد:

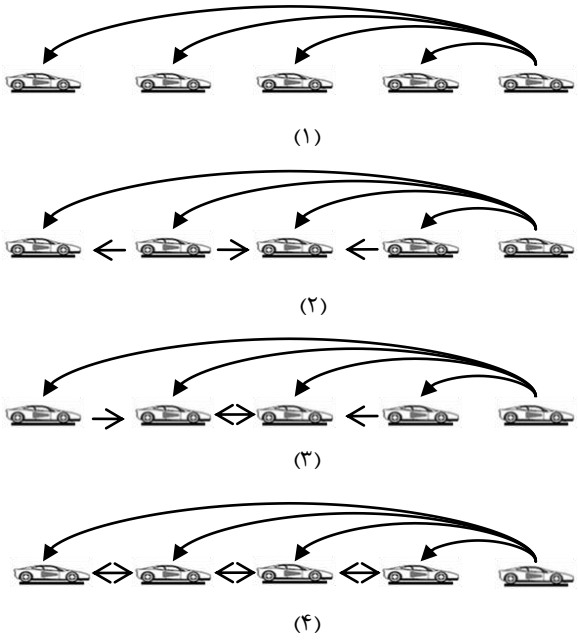
$$\Gamma_{N-1}=\frac{k_{N,\sigma}e^{-\xi s}}{\tau_i s^3+s^2+\beta_{N,\sigma}s+(k_{N,\sigma}+k_{N,\sigma}^l)e^{-\xi s}} \quad (۴۷)$$

حال اگر روابط (۳۷) و (۳۸) برقرار باشند آنگاه $\left|\frac{E_N}{E_{N-1}}\right|\le 1$.

توجه: همانطور که قضایای ۲ و ۳ بیان می‌کنند، دسته خودرو تحت هر سوئیچ دلخواه می‌تواند پایدار داخلی باشد اگر خودرو راهنما در دسترس سراسری باشد. اما طبق قضیه ۴ در دسترس سراسری بودن خودرو راهنما به تنهایی پایداری رشته‌ای را تحت عمل سوئیچینگ تضمین نمی‌کند. بلکه اگر اطلاعات سرعت خودروی راهنما در دسترس باشد پایداری رشته‌ای تضمین می‌گردد.

۵- نتایج شبیه‌سازی

مطابق شکل۲ یک دسته شامل ۵ خودرو درنظر گرفته شده است.



شکل ۲: ساختار سوئیچینگ در یک دسته خودرو

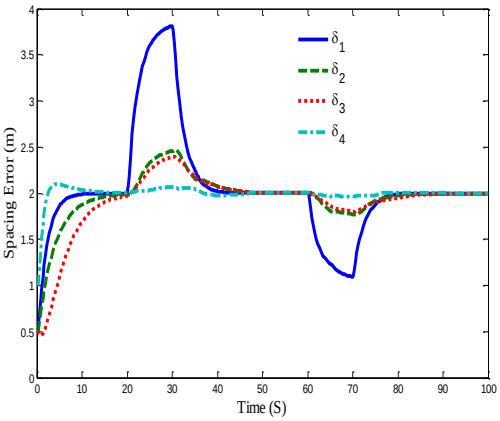
نتایج شبیه‌سازی برای چهار سناریوی مختلف ارائه شده‌اند. در تمام شبیه‌سازی‌ها طول خودرو راهنما برابر ۴متر و فاصله مطلوب بین خودرویی ۲متر لحاظ شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

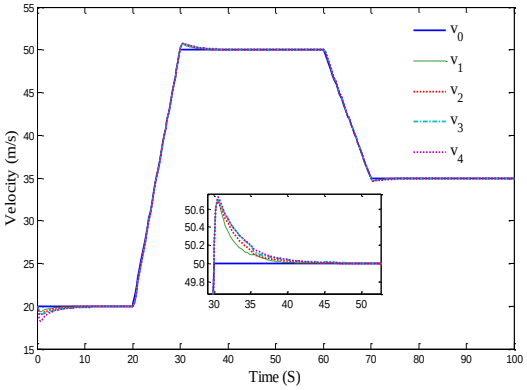
جدول ۱: پارامترهای کنترلی در سناریوهای مختلف $\tau, \beta, k^l, k^b, k^f$

سناریو	خودرو ۱	خودرو ۲	خودرو۳	خودرو ۴
۱	0.1, 4.1, 0, 0.7, 1.8	0.1, 4.2, 1.1, 0.6, 1.4	0.1, 4, 0.9, 0.8, 1.3	0.1, 3.8, 1, 0, 1.7
۲	0.1, 4.1, 0, 0.7, 1.8	0.1, 4.2, 1.1, 0.6, 1.4	0.1, 4, 0.9, 0.8, 1.3	0.1, 3.8, 1, 0, 1.7
۳	0.1, 3.5, 4.1, 0, .7, 1.8	0.15, 2.8, 2.9, 0.7, .5, 0.8	0.12, 3.1, 3, 0.6, 0.5, 0.8	0.12, 4.5, 2.7, 0.5, 0, 0.8
۴	0.1, 0.04, 0, 0.7, 2.8	0.1, 0.4, 1.5, 0.75, 2	0.1, 0.4, 1.2, 0.9, 3	0.1, 0.4, 1, 0, 2.7

سناریو۱: شکل ۳ نتایج شبیه‌سازی برای سناریوی ۱ را نشان می‌دهد. در این سناریو تمامی خودروهای دسته یکسان درنظر گرفته شده‌اند. طول تمامی خودروها در این سناریو برابر ۴ متر درنظر گرفته می‌شود. همچنین تاخیر زمانی ارتباطی در این سناریو برای کلیه خودروها مقدار $\xi(t) = 0.1|\sin(t)|$ درنظر گرفته شده است. همانطور که از این شکل پیداست با وجود تاخیر زمانی و سوئیچ بین زیر سیستم‌ها، کلیه خودروها به فاصله مطلوب ۲ متر از یکدیگر می‌رسند و سرعت خودروهای دسته با سرعت خودروی راهنما برابر می‌گردد. جدول ۱ پارامترهای کنترلی $\tau, \beta, k^l, k^b, k^f$ استفاده شده در سناریوهای مختلف را نشان می‌دهد. در کلیه شبیه‌سازی‌ها خطای تعقیب به صورت $\delta_i = x_i - x_{i-1} - L_{i-1}$ تعریف می‌شود. شکل ۳ خطای تعقیب گروه خودرو را برای سناریو ۱ نشان می‌دهد. مطابق این شکل دامنه خطا در طول دسته کاهش می‌یابد که نشان دهنده پایداری رشته‌ای مجموعه می‌باشد.

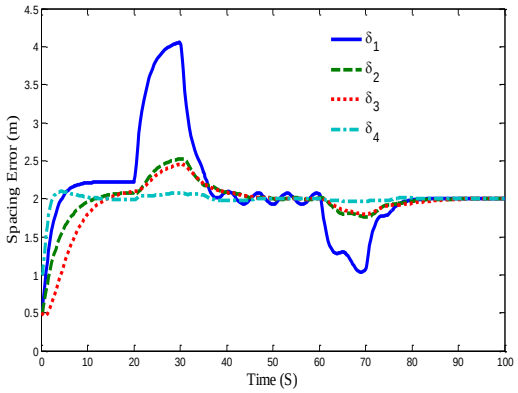


شکل ۳: خطای تعقیب موقعیت برای سناریو ۱



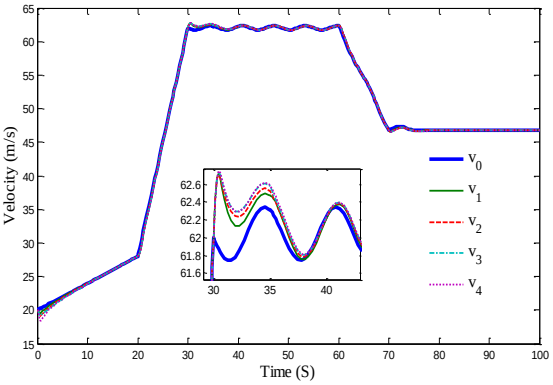
شکل ۴: خطای تعقیب سرعت برای سناریو ۱

سناریو ۲: در این سناریو پایداری رشته‌ای مجموعه در برابر اغتشاش اعمالی به خودرو راهنما مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک سیگنال اغتشاش به صورت $d = \begin{cases} 0.4, & t \le 30 \\ 0.3\sin(t), & 30 < t \le 70 \\ e^{-0.1t}\sin t, & t > 70 \end{cases}$ به خودرو راهنما اعمال می‌گردد. در این سناریو تاخیر زمانی به صورت رابطه $\xi(t) = 0.11|\sin(2t)|$ درنظر گرفته می‌شود. شکل ۵ خطای تعقیب سیستم را نشان می‌دهد. مطابق این شکل با وجود اغتشاش اعمالی به سیستم، پایداری رشته‌ای سیستم حفظ می‌گردد. شکل ۶ خطای تعقیب سرعت گروه را نشان می‌دهد.



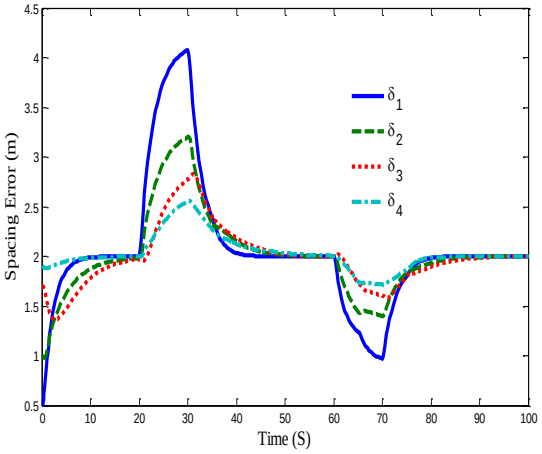
شکل ۵: خطای تعقیب موقعیت برای سناریو ۲

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

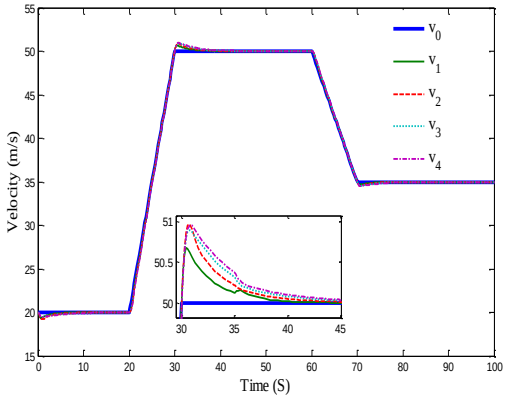


شکل ۶: خطای تعقیب سرعت برای سناریو ۲

سناریو ۳: در این سناریو خودروهای گروه متفاوت درنظر گرفته می‌شوند. جدول ۱ پارامترهای استفاده شده در این سناریو را نشان می‌دهد. طول و ثابت موتور برای هر خودرو متفاوت فرض می‌شوند. شکل ۷ خطای تعقیب موقعیت را نشان می‌دهد. مطابق این شکل سیستم پایدار رشته‌ای است. شکل ۸ خطای تعقیب سرعت را نشان می‌دهد. تاخیر زمانی در این سناریو مشابه سناریو قبل درنظر گرفته شده است.

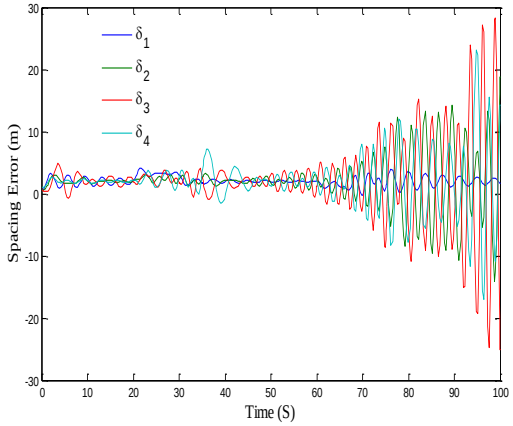


شکل ۷: خطای تعقیب موقعیت برای سناریو ۳



شکل۸: خطای تعقیب سرعت برای سناریو ۳

سناریو ۴: در این سناریو پارامترهای کنترلی به گونه‌ای تنظیم می‌شوند تا پایداری رشته‌ای سیستم ارضا نشود. شکل ۹ ناپایداری داخلی و ناپایداری رشته‌ای سیستم را نشان می‌دهد.



شکل۹: ناپایداری رشته‌ای و داخلی سیستم در سناریو ۴

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به کنترل مقاوم یک دسته خودرو در برابر تاخیر زمانی و تغییر توپولوژی ارتباطی پرداخته شد. یک مدل مرتبه ۳ که صحت آن توسط کارهای عملی گذشته تایید شده است جهت مدل‌سازی دسته خودرو مورد استفاده قرار گرفت. استراتژی فاصله ثابت بین خودرویی برای حرکت دسته درنظر گرفته شد و برای نیل به این هدف یک کنترلر خطی برای سیستم طراحی گردید. با استفاده از دو روش لیاپانوف-کراسوفسکی و لیاپانوف-رازومیخین دو رهیافت جداگانه به منظور یافتن تابع لیاپانوف مشترک برای اثبات پایداری دسته در لحظات سوئیچ ارائه گردیدند. در ادامه به استخراج شرایط لازم برای پایداری رشته‌ای سیستم در شرایط عادی و در لحظات سوئیچ پرداخته شد و نشان داده شد که اگر شرایط مزبور رعایت گردند پایداری رشته‌ای سیستم همچون پایداری داخلی آن در لحظات سوئیچ تضمین می‌گردد. در انتها با ارائه شبیه-سازی‌های متعدد به بررسی کیفیت روش ارائه شده در حالات مختلف پرداخته شد.

مراجع

[1] P. Varaiya, “Smart cars on smart roads: problems of control”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, no. 2, pp. 195-207, 2000.

[2] D. Swaroop, J. K. Hedrick, “Constant spacing strategies for platooning in automated highway systems,” Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 121, no. 3, pp. 462-470, 1999.

[3] A. Yahiaoui, “Using optimal control for safe analysis of vehicles in a platoon of automated highway systems,” Summer Computer Simulation Conference, pp. 467-472, 2004.

[4] R. Bishop, “Whatever happened to automated highway systems (AHS) traffic technology

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]

in strict feedback form with unknown time delay," IMA Journal of Mathematical Control And Information, vol. 32, pp. 761–779, 2015.

[17] S. Eben, F. Gao, D. Cao, and K. Li, "Multiple-model switching control of vehicle longitudinal dynamics for platoon-level automation", IEEE Transaction on Intelligent Transportation, vol. 65, no. 6, pp. 4480-4492, 2016.

[18] Y. Zheng, S. Eben, K. Li, and L. Wang, "Stability margin improvement of vehicular platoon considering undirected topology and asymmetric control," IEEE Transaction on Control Systems Technology, vol. 24, no. 4, pp. 1253-1266, 2016.

[19] G. Guo and S. Wen, "Communication scheduling and control of a platoon of vehicles in VANETs," IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 7, no. 1, pp. 14-21, 2016.

[20] J. Kwon and D. Chwa, "Adaptive bidirectional platoon control using a coupled sliding mode control method," IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 15, no. 5, pp. 2040-2049, 2014.

[21] X. Guo, J. Wang, F. Liao and R. Teo, "Distributed adaptive integrated-sliding-mode controller synthesis for string stability of vehicle platoons," IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 17, no. 9, pp. 2419-2432, 2016.

[22] Y. Zheng, S. Eben, J. Wang, D. Cao, "Stability and scalability of homogeneous vehicular platoon: study on the influence of information flow topologies," IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 7, no. 1, pp. 14-21, 2016.

[23] R. Kianfar, P. Falcone, J. Frekricson, "A control matching model predictive control approach to string stable vehicle platooning," Control Engineering Practice, vol. 45, pp. 163-172, 2015.

[24] C. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory, New York: Springer, 2004.

[25] K. Gu, V. Kharitonov, J. Chen, Stability of Time-Delay Systems, Birkhauser, 2003.

[26] J. Hu, "On robust consensus of multi-agent systems with communication delays," Kybernetika, vol. 45, no. 5, pp. 768-784, 2009.

[27] B. Gallier, The Schur Complement and Symmetric Positive Semi-definite (and Definite) Matrices, December 10, 2010.

[28] A. J. Laub, "Matrix Analysis for Scientists and Engineers," SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, vol.3, pp. 213-219, 2004.

international", IFAC Control Conference, pp. 135-142, 2001.

[5] V. L. Bageshwar, W. L. Garrard and R. Rajamani, "Model predictive control of transitional maneuvers for adaptive cruise control vehicles," IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 53, no. 5, pp. 1573-1585, 2004.

[6] W. B. Dunbar and D. S. Caveney, "Distributed receding horizon control of vehicle platoons: stability and string stability," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 3, pp. 620-633, 2012.

[7] A. Ghasemi, R. Kazemi, S. Azadi, "Stability analysis of longitudinal control of a platoon of vehicles by considering lags subject to communication delay", International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 6, pp. 134-142, 2015.

[8] A. A. Peters, R. H. Middelton and O. Mason, "Leader tracking homogeneous platoons with broadcast delays," Automatica, vol. 50, pp. 64-74, 2014.

[9] M. Bernardo, A. Salvi and S. Santini, "Distributed consensus strategy for platooning of vehicles in the presence of time-varying heterogeneous communication delay," IEEE Transaction on Intelligent Transportation System, vol. 16, no. 1, pp. 102-112, 2015.

[10] A. Alan, G. Garcia, P. Martinet, "The flatbed platoon towing model for safe and dense platooning on highways," IEEE Transportation Systems Magazine, vol. 3, pp. 58-68, 2015.

[11] A. Ghasemi, R. Kazemi, S. Azadi, "Stable decentralized control of platoon of vehicles with heterogeneous information feedback," IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 62, no. 7, pp. 4299-4308, 2013.

[12] F. Lin, M. Fardad, R. Mihailo, "Optimal control of vehicular formations with nearest neighbor interaction," IEEE Transaction On Automatic Control, vol. 57, no. 9, pp. 2203-2209, 2012.

[13] S. Sheikholeslam, C. A. Desoer, "Longitudinal control of a platoon of vehicles III: Nonlinear model," PATH, Res. Rep. UCB-ITS-PRR-90-1, pp. 19-26, 1990.

[14] G. Naus, R. Vugts, J. Ploeg, R. Molengraft and M. Steinbuch, "String-stable cacc design and experimental validation: A frequency-domain approach," IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 59, pp. 4268 – 4279, 2010.

[15] D. Liberzon, Switching in Systems and Control, Birkhauser, 2003.

[16] H. Chehardoli and M. Eghtesad, "Robust adaptive control of switched nonlinear systems

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.6.0]