مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹، صفحه ۷۱-۶۵

طراحی یک کنترل‌کننده ژنتیکی کوانتومی در ردیابی مسیر سیستم های کوانتومی

آمنه ارجمندزاده[۱]، مجید یاراحمدی[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، Arjmandzadeh.am@fs.lu.ac.ir
[۲] استادیار، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، Yarahmadi.m@lu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۵ ویرایش اول: ۱۳۹۷/۰۲/۰۵ ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۰۴/۱۰ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۳

چکیده: کنترل سیستم‌های کوانتومی مبتنی بر روش‌های کنترل یادگیر و هوش محاسباتی از موضوعات مورد توجه در حوزه مهندسی کنترل می‌باشد. آنچه دارای اهمیت است تضمین همگرایی فرآیند کنترل موردنظر در عین وضوح و سادگی روش می‌باشد. در این مقاله یک فرآیند کنترل یادگیر مبتنی بر یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی به منظور ردیابی مسیر در سیستم‌های کوانتومی بسته ارائه شده است. کنترل‌کننده طراحی شده برای ردیابی یک مسیر متناظر یک تابع متغیر با زمان به کار گرفته شده است. برای این منظور یک مساله بهینه‌سازی مقید با تابع هدف حداقل‌سازی انحراف از مسیر و محدودیت ناشی از ساختار تکراری جواب معادله دینامیکی شرودینگر طراحی شده است. با توجه به نرخ بالای همگرائی در الگوریتم ژنتیک کوانتومی، از الگوریتم ژنتیک کوانتومی برای حل مساله بهینه‌سازی استفاده شده است. بر اساس یک اندازه‌گیری تصادفی از نسل اول جمعیت حالات کوانتومی، الگوریتم ژنتیک حاصل بهترین کنترل‌کننده را برای ردیابی مسیر ارائه می‌دهد. ردیابی موثر و بهینه مسیر با حداقل خطای انحراف از مسیر و حداقل نوسانات سیگنال کنترل از مزایای روش ارائه شده است. دو مثال عددی برای نشان دادن عملکرد کنترل‌کننده طراحی و مزایای آن ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده نمایانگر صحت عملکرد روش پیشنهادی در کنترل سیستم‌های کوانتومی است.

کلمات کلیدی: الگوریتم ژنتیک کوانتومی، ردیابی مسیر، سیستم کوانتومی، کنترل یادگیر

Designing a Quantum Genetic Controller for Tracking the Path of Quantum Systems

Ameneh Arjmandzadeh, Majid Yarahmadi

Abstract: Based on learning control methods and computational intelligence, control of quantum systems is an attractive field of study in control engineering. What is important is to establish control approach ensuring that the control process converges to achieve a given control objective and at the same time it is simple and clear. In this paper, a learning control method based on genetic quantum controller approach is presented. For tracking a time variant function trajectory, in a closed quantum system, the presented controller is used. For this purpose a constrained optimization problem, based on minimization of difference between a given trajectory and system states subject to an iteration relation of the dynamical solution be satisfied, is designed. According to high convergence rate in quantum genetic algorithm, a quantum genetic algorithm for solving the optimization problem is used. A stochastic measure for observation the initial population is used. Efficient an optimal tracking, with at least tracking errors and at least learned chattering are advantages of the presented method. A couple of examples for demonstrating the advantages are simulated. Simulation results reflect the good performance of the proposed method for controlling the quantum systems.

Keywords: Quantum Genetic Algorithm, Tracking Algorithm, Quantum Systems, Learning Control

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-04]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.2.0]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.65]

۱- مقدمه

طی دو دهه اخیر کنترل سیستم‌های کوانتومی محققین بسیاری را به خود جذب نموده است چون دارای کاربردهای مهمی در زمینه‌های اپتیک کوانتومی، شیمی فیزیک، پردازش اطلاعات کوانتومی و غیره است و امروزه کنترل پدیده‌های کوانتومی به هدفی دست یافتنی برای محققان شیمی و فیزیک کوانتومی تبدیل شده است [۱]. این حوزه مطالعاتی با دینامیک‌های تحول سیستم بر روی سیستم های مقیاس مولکولی و اتمی سر و کار دارد [۲]. سیستم کوانتومی اسپین-$\frac{1}{2}$ گزینه مناسبی برای مطالعه کیوبیت‌ها در پردازش اطلاعات و کامپیوتر کوانتومی می‌باشد. بسیاری از مسائل کنترل کوانتومی به صورت ماکزیمم سازی یک تابع نمایش هدف فرموله می‌شوند و برای حل این گونه مسائل الگوریتم ژنتیک انتخاب مناسبی است. این الگوریتم‌های تکاملی کاربردهای بسیاری در مسائل بهینه‌سازی، یادگیری ماشین و ... دارند. الگوریتم ژنتیک کوانتومی[۱] (QGA) حاصل ترکیب محاسبات کوانتومی و الگوریتم ژنتیک است و اولین بار توسط مور و نارایانان در [۳] معرفی شد.

هدف اصلی نظریه کنترل کوانتوم توسعه روش‌های نظام‌مند برای کنترل و اجرای سیستم‌های کوانتومی است و به دلیل ویژگی‌های خاص سیستم‌های میکروسکوپی که در سیستم‌های کلاسیکی اتفاق نمی‌افتد، دستیابی به این هدف دارای پیچیدگی‌هایی است. یکی از مهمترین مسائل در کنترل کوانتومی هدایت حالت‌های کوانتومی است. لازم است مجموعه‌ای از قوانین کنترلی طراحی گردد تا حالت اولیه سیستم را به یک حالت هدف مطلوب ببریم. در صورتی که حالت هدف ساکن باشد، مساله فوق کنترل انتقال- حالت[۲] نامیده می‌شود که در سال‌های اخیر بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است. اگر حالت هدف تابع وابسته به زمان باشد، آنگاه مساله کنترل یک مساله ردیابی خواهد بود. البته مساله کنترل ردیابی مسیر بدلیل پیچیدگی تاکنون کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. یک ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی در [۴] توسط لیو و همکارانش انجام شده است که در آن با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف قانون کنترلی برای ردیابی تطبیقی مسیر[۳] (ATT) بدست آورده‌اند. در [۵] نیز یک تکنیک ردیابی تطبیقی برای رفع مشکل تکین‌هایی که در امتداد مسیر با آن مواجه می‌شوند توسعه داده شده است. در [۶] یک کنترل کننده سوئیچینگ بهینه کوانتومی برای ردیابی تطبیقی مسیر[۴] (SOAQTT) معرفی شده است که تعداد نقاط تکینی را مدیریت نموده و خطا و هزینه کنترل که به صورت نرم کنترل است، کاهش داده است.

در واقع معمولا هنگام مدیریت یک سیستم کوانتومی درهمتنیده، تشخیص پارامترهای همیلتونین، کنترل واکنش‌های شیمیایی و ردیابی حالت‌های کوانتومی، کنترل بهینه با سایر روش‌ها مثل کنترل یادگیر حلقه بسته مورد ترکیب واقع می‌شود[۷]. این کنترل شامل عملیات حلقه بسته است که در آن هر چرخه با یک نمونه‌ی جدید اجرا می‌شود. خروجی هر چرخه وارد یک الگوریتم یادگیر شده و الگوریتم با توجه به فرمول‌بندی مناسب خود ورودی بعدی سیستم را به نحوی بهتر تعیین می‌کند. این فرایند تا آنجا ادامه می‌یابد که بهترین ورودی برای سیستم توسط الگوریتم تعیین شود [۸]. همانطور که در منبع [۵,۴] دیده می‌شود قوانین کنترلی موردنظر به صورت عبارات کسری هستند و با توجه به اینکه مخرج کسر وابسته به حالت سیستم است ممکن است مقدار آن عبارتی با مخرج صفر حاصل شود و برای رفع تکین بودن این نقاط اصلاح روش موردنیاز است. یک کنترل‌کننده‌ی تطبیقی که اثرات نامطلوب ناشی از بروز پدیده‌ی تکینی و دامنه بزرگ سیگنال‌های کنترل را حذف می‌کند، در [۹] معرفی شده است. در منبع [۱۰] یک آنسامبل کوانتومی که اعضای آن دارای عدم قطعیت در پارامترهای همیلتونی هستند، با استفاده از QGA کنترل شده است. یک آنسامبل کوانتومی شامل تعداد زیادی (حدود 10^{23}) سیستم کوانتومی تنهاست.

در این مقاله یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی در ردیابی مسیر[۵] (QGATT) طراحی شده است و قابلیت روش ارائه شده را در سیستم‌های کوانتومی ساده نشان می‌دهد. الگوریتم ژنتیک کوانتومی نسبت به الگوریتم ژنتیک معمولی دارای قابلیت و تاثیرگذاری بیشتری در بهینه‌سازی است. روش موردنظر بر پایه بهینه سازی و کنترل یادگیر بنا نهاده شده است. از مزیت‌های روش گفته شده مواجه نشدن با نقاط تکین و عدم نیاز به مشتق-گیری است.

در این مقاله ابتدا توصیفی از مفاهیم مقدماتی محاسبات کوانتومی و اصول الگوریتم ژنتیک کوانتومی در بخش ۲ ارائه می‌شود، در بخش ۳ توضیح مختصری در مورد QGA داده شده است. بخش ۴ به مدلسازی مساله کنترلی می‌پردازد و در بخش ۵ دو مثال عددی حل شده و نتایج شبیه‌سازی آورده شده است. در پایان بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۶ انجام شده است.

۲- مفاهیم اولیه مکانیک کوانتومی

هر سیستم کوانتومی در فضای هیلبرت H قرار دارد که این فضا پایه ریاضی برای مفاهیمی که در مکانیک کوانتومی موردنیاز هستند را فراهم می‌کند[۱۱].

۲-۱ کیوبیت

بیت پایه‌ای ترین مفهوم محاسبات کلاسیکی است که می‌تواند یکی از دو مقدار "درست" یا "غلط" (۱ یا ۰) را به خود اختصاص دهد. کیوبیت معادل کوانتومی بیت است و یک سیستم کوانتومی دارای دو حالت پایه $|0\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $|1\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ می‌باشد.

[1] Quantum Genetic Algorithm
[2] State-Transfer
[3] Adaptive Trajectory Tracking
[4] Switching Optimal Adaptive of Quantum Trajectory Tracking
[5] Quantum Genetic Algorithm Trajectory Tracking

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-04]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.2.0]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.65]

۲-۲ حالت سیستم کوانتومی

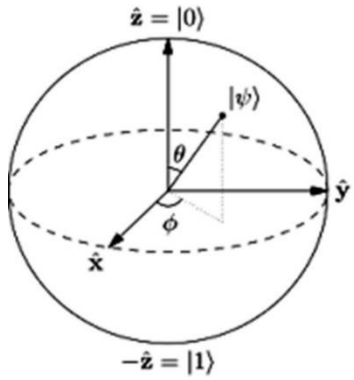
حالت سیستم کوانتومی اطلاعاتی است که وضعیت سیستم را به طور کامل بیان می‌کند. هر حالت $|\Psi\rangle$ از یک سیستم کوانتومی دوسطحی به صورت برهمنهشی از دو حالت پایه فوق به صورت (۱) نوشته می شود.

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \qquad (۱)$$

که در آن α و β اعداد مختلط هستند و در رابطه $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ صدق می‌کنند [۱۲]. حالت فیزیکی هر سیستم کوانتومی با یک بردار نشان داده می‌شود که از مبدا شروع می‌شود و انتهای آن روی کره بلاخ واقع است. بنابراین نمایش دیگر یک حالت کوانتومی به صورت فرمول

$$|\Psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle \qquad (۲)$$

است که اعداد θ و φ مختصات کروی آن هستند. شکل ۱ حالت کوانتومی بر روی کره بلاخ را نشان می‌دهد.



شکل ۱: نمایش حالت خالص یک سیستم کوانتومی روی کره بلاخ

فضای هیلبرت سیستم‌های مرکب از ضرب تانسوری فضاهای سیستم‌های کوچکتر به دست می‌آید. در واقع اگر $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ و $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ پایه‌های فضاهای هیلبرت H_A و H_B معادل دو کیوبیت A و B باشند، فضای هیلبرت متناظر با سیستم ترکیبی این دو کیوبیت برابر است با:

$$\mathrm{H}_{AB} = \mathrm{H}_A \otimes \mathrm{H}_B \qquad (۳)$$

که با پایه متعامد یکه‌ی ذیل مشخص می شود.

$$\{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\} = |00\rangle_{AB}, |01\rangle_{AB}, |10\rangle_{AB}, |11\rangle_{AB} \qquad (۴)$$

۳- الگوریتم ژنتیک کوانتومی

کیوبیت‌ها و حالت برهمنهش کوانتومی، پایه‌ای ترین مفاهیم الگوریتم ژنتیک کوانتومی هستند. الگوریتم‌های ژنتیک (GAs) روش‌های عددی هستند که بر پایه تکرار و جستجو بنا نهاده شده‌اند و الهام گرفته از قوانین ژنتیکی طبیعت هستند. در الگوریتم ژنتیک کوانتومی هر فرد از جمعیت به صورت یک کروموزوم از حالات کوانتمی معرفی می‌شود. کروموزوم‌ها در طول چندین نسل بر اساس عملگرها و تابع برازندگی بهبود می یابند. یک دسته از نقاط فضای جستجو، در هر مرحله از اجرای الگوریتم ژنتیک کوانتومی مورد پردازش‌های تصادفی قرار می‌گیرند. به این صورت که به هر نقطه دنباله‌ای از کاراکترها نسبت داده می‌شود و براساس این که تابع هدف در هر یک از نقاط چه مقدار باشد، بر روی این دنباله‌ها، عملگرهای ژنتیکی کوانتومی اعمال می‌شود به طوری که هر کیوبیت از هر کروموزوم به سمت کیوبیت متناظر بهترین پاسخ دوران می‌کند. سپس دنباله‌های بدست آمده رمزگشایی می‌گردد تا نقاط جدیدی در فضای جستجو بدست آید. این فرایند تا برقراری شرط توقف ادامه می‌یابد.

۳-۱ کروموزوم کوانتومی:

j -امین کروموزوم از p -امین نسل از جمعیت به صورت

$$q_j^p = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^p & \alpha_{12}^p & \dots & \alpha_{1k}^p & \alpha_{21}^p & \alpha_{22}^p & \dots & \alpha_{2k}^p & \dots & \alpha_{m1}^p & \alpha_{m2}^p & \dots & \alpha_{mk}^p \\ \beta_{11}^p & \beta_{12}^p & \dots & \beta_{1k}^p & \beta_{21}^p & \beta_{22}^p & \dots & \beta_{2k}^p & \dots & \beta_{m1}^p & \beta_{m2}^p & \dots & \beta_{mk}^p \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

نوشته می‌شود که در آن k نمایانگر تعداد کیوبیت‌های هر ژن و m معرف تعداد ژن‌های هر کروموزوم است [۱۳]. معمولا برای تولید جمعیت اولیه به هر حالت (α, β) مقدار $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ را اختصاص می‌دهیم که باعث می‌شود هر حالت با احتمال برابر به حالت‌های پایه شکسته شود.

۳-۲ گیت‌های دوران:

گیت‌های دوران به صورت

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

تعریف می‌شوند که در آن U عملگر دوران و θ زاویه دوران است. فرایند بروزرسانی یک کیوبیت $\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$ با گیت دوران U به صورت(۷)است [۷].

$$\begin{bmatrix} \alpha_i' \\ \beta_i' \end{bmatrix} = U(\Delta\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta_i) & -\sin(\Delta\theta_i) \\ \sin(\Delta\theta_i) & \cos(\Delta\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

$\begin{bmatrix} \alpha_i' \\ \beta_i' \end{bmatrix}$دوران یافته‌ی یک کیوبیت $\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$ به اندازه زاویه $\Delta\theta_i$ به وسیله گیت دوران U است. در الگوریتم ژنتیک کوانتومی مقدار و علامت $\Delta\theta_i$ با استراتژی تنظیم مشخص می‌شود و چرخش کیوبیت‌ها در جهتی انجام می‌شود که حالت جواب کنونی را به سمت حالت جواب بهینه حرکت دهد که در جدول ۱ ارائه شده است [۱۴]. در جدول ۱ x_i ، i -امین بیت کروموزوم جمعیت حاضر است؛ $best_i$ ، i -امین بیت از کروموزوم بهینه جمعیت حاضر است؛ $f(x)$ تابع برازندگی است؛ $s(\alpha_i, \beta_i)$ جهت چرخش زاویه دوران را نشان می‌دهد؛ $\Delta\theta_i$ اندازه زاویه چرخش است و معمولا حدود 0.01π انتخاب می‌شود [۱۳].

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-04]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.2.0]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.65]

جدول ۱: استراتژی تنظیم زاویه چرخش کیوبیت‌ها

x_i	$best_i$	$f(x) > f(best)$	$\Delta\theta_i$	$s(\alpha_i, \beta_i)$			
				$\alpha_i \beta_i > 0$	$\alpha_i \beta_i < 0$	$\alpha_i = 0$	$\beta_i = 0$
0	0	غلط	0	0	0	0	0
0	0	درست	0	0	0	0	0
0	1	غلط	$\Delta\theta_i$	+1	-1	0	± 1
0	1	درست	$\Delta\theta_i$	-1	+1	± 1	0
1	0	غلط	$\Delta\theta_i$	-1	+1	± 1	0
1	0	درست	$\Delta\theta_i$	+1	-1	0	± 1
1	1	غلط	0	0	0	0	0
1	1	درست	0	0	0	0	0

٤- مدلسازی و روش حل

هدف اصلی این مقاله ردیابی مسیر حالت خالص سیستم‌های کوانتومی بسته است. یک سیستم کوانتومی با تابع موج $\psi(t)$ با معادله شرودینگر (۸) تعریف می‌شود:

$$i\hbar\dot{\psi}(t) = H\psi(t) \qquad (۸)$$

که در آن i عدد واحد موهومی و $\hbar = 6.626068*10^{-34}\,js$ ثابت پلانک است و معمولا در محاسبات زیر اتمی $\hbar = 1$ فرض می‌شود [۱۲]. $H = H_0 + \sum_{m=x,y} u_m(t) H_m$ همیلتونین کنترل سیستم است، H_0 (همیلتونین آزاد سیستم) و $H_m, m = x, y$ (همیلتونین کنترل خارجی سیستم) مستقل از زمان فرض شده‌اند. هدف کنترلی در این مقاله هدایت مسیر دینامیکی سیستم است به طوریکه مسیر مطلوب $s(t)$ را دنبال کند. یعنی

$$\langle\psi(t)|P(t)|\psi(t)\rangle = s(t) \qquad (۹)$$

در واقع برای یک سیستم کوانتومی بسته، کمیت‌ها یا مشاهده‌پذیرها در فضای هیلبرت با عملگر خطی خودالحاق $P(t)$ نشان داده می‌شوند. اگر $P(t)$ اندازه‌گیری شود، خروجی آن یک بردارویژه از $P(t)$ خواهد بود. فرض کنید $S(t)$ مجموعه‌ای از طیف $P(t)$ است اگر حالت در لحظه اندازه‌گیری $|\psi\rangle$ باشد، احتمال بدست آوردن یک مقدار $\gamma \in S$ بعنوان نتیجه اندازه‌گیری به صورت زیر است:

$$P_\gamma(\gamma \in S) = \langle\psi|P_j|\psi\rangle \qquad (۱۰)$$

که در آن P_j تصویر کننده‌ی $P(t) = \sum_j \gamma_j P_j$ روی بردار ویژه j ام در حالت طیف گسسته است. لذا زمانی که سیستم در حالت $|\psi\rangle$ قرار دارد، مقدار چشمداشتی عملگر اندازه‌پذیر $P(t)$ به صورت زیر نشان داده می‌شود [۴]:

$$Y(t) = \sum_j \gamma_j \langle\psi(t)|P_j|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|P(t)|\psi(t)\rangle \qquad (۱۱)$$

معادله (۱۱) متغیر کنترل‌شده است که خروجی سیستم کنترل شده (۸) نیز می‌باشد. فرض کنید $|\lambda_j\rangle$ نمایانگر j -امین ویژه حالت همیلتونین آزاد H_0 باشد. عملگر تصویر ویژه حالت اول $|\lambda_1\rangle$ بعنوان عملگر مشاهده-پذیر $P(t)$ در نظر گرفته می‌شود یعنی $P = |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1|$.

مساله مورد نظر، کنترل مقدار چشمداشتی عملگر مشاهده پذیر توسط میدان خارجی u_x و u_y است:

$$\begin{aligned} &Min\left\|s(t) - \langle\psi(t)|P(t)|\psi(t)\rangle\right\| \\ &s.t.\ \ i\hbar\dot{\psi}(t) = H\psi(t) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

اگر $u_m(t) = u_m, m = x, y$ که u_m یک ثابت است، از معادله شرودینگر و عملگر تحول زمانی، فرمول

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m H_m)\Delta t}|\psi(0)\rangle \qquad (۱۳)$$

حاصل می‌شود. لذا چون در عمل یافتن کنترل به صورت یک تابع پیوسته وابسته به زمان مشکل است [۱۵] با فرض ثابت بودن u_x و u_y مساله (۱۲) را می‌توان به صورت (۱۴) نوشت:

$$Min\left\|s(t) - \langle\psi(0)|e^{-i(H_0+\sum_{m=x,y} u_m H_m)\Delta t} P(t) e^{-i(H_0+\sum_{m=x,y} u_m H_m)\Delta t}|\psi(0)\rangle\right\| \qquad (۱۴)$$

اما در تابع هدف پارامتر t هم وجود دارد برای حذف پارامتر t بایستی طول زیربازه‌های $[t(k-1), t(k)]$, $k = 1, 2, ..., Q$ به قدری کوچک انتخاب شود که بتوان یک $t \in [t(k-1), t(k)], k = 1, 2, ..., Q$، به عنوان نماینده کل زیر بازه در نظر گرفت. بنابراین بازه $[0, T]$ را به Q زیر بازه به طول

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-04]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.2.0]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.65]

$t=\frac{T}{Q}$ تقسیم می‌کنیم و در هر زیربازه u_x و u_y را ثابت فرض می-کنیم. همچنین $t_k=t(k)\in[t(k-1),t(k)]$ را به عنوان نماینده هر زیربازه $[t(k-1),t(k)], k=1,2,...,Q$ در نظر می‌گیریم. در زیربازه k-ام $|\psi(0)\rangle=|\psi(t(k-1))\rangle$ حالت اولیه سیستم خواهد بود. مساله مورد نظر به صورت :

$$\begin{aligned}&Min\left\|s(t_k)-\langle\psi(t_k)|P(t_k)|\psi(t_k)\rangle\right\|\\&s.t.\ |\psi(t_k)\rangle=e^{-i(H_0+\sum_{m=x,y}u_m(t_k)H_m)\Delta t}|\psi(t_{k-1})\rangle\end{aligned}\qquad(۱۵)$$

است که در آن $|\psi(t_k)\rangle$ انتقال یافته $|\psi(t_{k-1})\rangle$ توسط کنترل بهینه است. در مساله (۱۵) هدف یافتن کنترل u_x و u_y است به طوریکه مقدار تابع هدف از ε کمتر باشد. با جایگزینی قید مساله در تابع هدف و به کارگیری QGA جواب‌های بهینه $u_x^*(t_k)$ و $u_y^*(t_k)$ برای هر زیربازه یافت می‌شود. الگوریتم فرایند موردنظر در زیر آورده شده است.

الگوریتم QGA برای ردیابی مسیر

۱.قرار دهید: $j=1$ (شمارنده زیربازه‌ها)

۲.قرار دهید: $|\psi^{j-1}(0)\rangle=|\psi(0)\rangle$

۳.تا زمانی که $j<Q$ ، مراحل ذیل را تکرار کنید:

- کنترل‌های آغازین دلخواه u_x^{0j} و u_y^{0j} را انتخاب کنید
- مسأله

$$Min\left\|s(t)-\langle\psi^{j-1}(0)|e^{-i(H_0+\sum_{m=x,y}u_mH_m)\Delta t}P(t)e^{-i(H_0+\sum_{m=x,y}u_mH_m)\Delta t}|\psi^{j-1}(0)\rangle\right\|$$

را با QGA حل نموده و جواب بهینه u_x^{*j} و u_y^{*j} را به دست آورید

- قرار دهید:

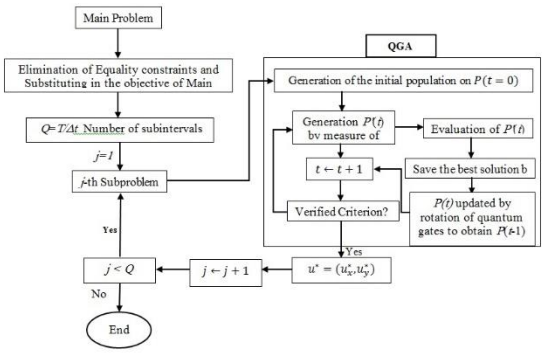
$$|\psi^j(0)\rangle=e^{-i(H_0+\sum_{m=x,y}u_m^{*j}H_m)\Delta t}|\psi^{j-1}(0)\rangle$$

$$j\leftarrow j+1$$

۴.جواب بهینه عبارت است از:

$$u_m^*=\{u_m^{*j}, j=1,2,...,Q\}, m=x,y$$

همچنین در شکل ۲ دیاگرام فرایند روش مذکور نشان داده شده است.



شکل۲: نمایش حالت خالص یک سیستم کوانتومی روی کره بلاخ

الگوریتم‌های ژنتیک روش‌های مبتنی بر تکرار هستند و این تکرار تا برقراری شرط توقف انجام می‌شود. در این مقاله شرط توقف این است که مقدار تابع هدف که همان خطای ردیابی می‌باشد از ε کمتر باشد، یعنی

$$\|e(t)\|=\|s(t)-Y(t)\|<\varepsilon\qquad(۱۶)$$

۵- نتایج شبیه سازی

در این بخش دو مثال عددی به روش مذکور حل می‌شود تا تاثیرگذاری آن را تحقیق کنیم. یکی از توابعی که اغلب برای آزمایش اجرای سیستم-های کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرد تابع نمایی

$$s(t)=1-e^{-t/2\tau^2}, t\geq 0\qquad(۱۷)$$

است که در آن τ نمایانگر نرخ تغییر خروجی هدف است. هدف کنترلی ردیابی خروجی سیستم هدف (۱۷) در هر لحظه است. برای این مثال یک سیستم کوانتومی چهارسطحی در نظر بگیرید با همیلتونین کنترلی آزاد $H_0=\sum_{j=1}^4E_j|j\rangle\langle j|$ که در آن $E_1=0.4948$، $E_2=1.4529$، $E_3=2.3691$ و $E_4=3.2434$ و لذا:

$$H_0=diag(0.4948,1.4529,2.3691,3.2434)\qquad(۱۸)$$

برای این سیستم، برای راحتی یک همیلتونین کنترلی کاملا متصل در نظر گرفته شده است که نشان می‌دهد برهمکنش (تعامل) میان هر دو سطح مجاز است. بنابراین همیلتونین کنترلی به صورت

$$H_c=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\qquad(۱۹)$$

است و دو همیلتونین کنترلی به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$H_x=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},\quad H_y=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad(۲۰)$$

همیلتونین کلی سیستم عبارت است از

$$H=H_0+u_x(t)H_x+u_y(t)H_y\qquad(۲۱)$$

مقادیر ویژه ماتریس H_0 با $\lambda_i(i=1,2,3,4)$ که $\lambda_1=0.4948$، $\lambda_2=1.4529$، $\lambda_3=2.3691$، $\lambda_4=3.2434$ نشان داده می‌شوند و بردار ویژه‌های متناظر عبارتند از:

$$|\lambda_1\rangle=[1,0,0,0]^T,\quad |\lambda_2\rangle=[0,1,0,0]^T,\quad |\lambda_3\rangle=[0,0,1,0]^T,\quad |\lambda_4\rangle=[0,0,0,1]^T\qquad(۲۲)$$

در این آزمایش عملگر مشاهده پذیر به صورت زیر است:

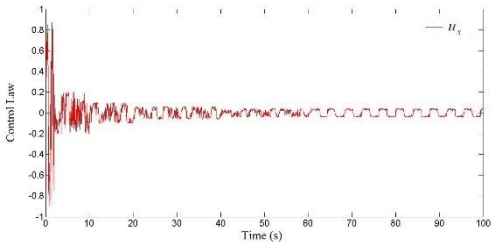
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-04]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.2.0]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.65]

$$p = |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

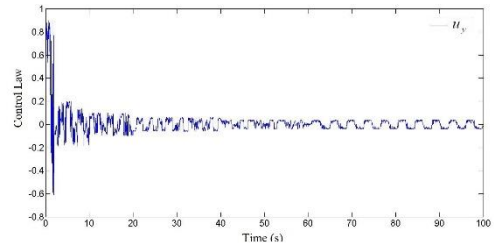
حالت اولیه برای سیستم کنترل شده (۸) برهمنهش بردار ویژه‌های $|\lambda_i\rangle \ , i = 1,2,3,4$ به صورت زیر است:

$$|\Psi_0\rangle = 0.5|\lambda_1\rangle + 0.5|\lambda_2\rangle + 0.5|\lambda_3\rangle + 0.5|\lambda_4\rangle \qquad (۲۴)$$

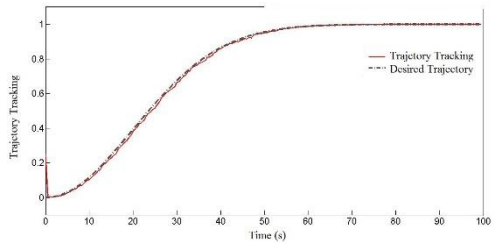
مقدار ε برابر 0.01 انتخاب شده است و $\tau = 20$ است. مسیر در بازه زمانی $[0,100]$ ردیابی می‌شود که به ۲۰۰۰ زیر بازه با طول مساوی $\Delta t = \frac{T}{Q} = 0.05$ ثانیه تقسیم شده است همچنین فرض می‌شود که در هر قطعه زمانی مقادیر کنترل ثابت است. تعداد جمعیت ۵۰ و طول هر کروموزوم کوانتومی ۱۶ کیوبیت در نظر گرفته شده است. مقادیر کنترل محدود به حدود پایین و بالای -0.9 و $+0.9$ فرض شده است. بعد از ۱۰ ثانیه مقادیر سیگنال کنترل به بازه $[-0.1, 0.1]$ و بعد از ۲۰ ثانیه به بازه $[-0.06, 0.06]$ محدود شده است. زاویه چرخش کیوبیت‌ها برابر با 0.01π در نظر گرفته شده است. همانطور که از تصاویر پیداست روش پیشنهادی نتایج خوبی به دست می‌دهد. شکل ۳ و شکل ۴ قوانین کنترلی را نشان می‌دهند که با استفاده از QGA به دست آمده‌اند و شکل‌های ۵ و ۶ ردیابی مسیر تابع و خطای ردیابی به روش مذکور را نشان می‌دهند.



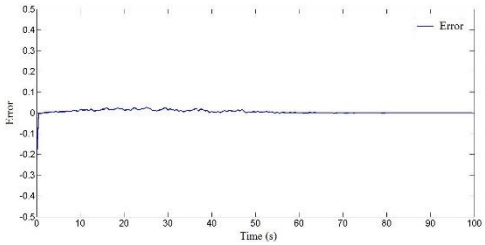
شکل۳ کنترل u_x برای ردیابی تابع



شکل۴ کنترل u_y برای ردیابی تابع



شکل۵ ردیابی مسیر با استفاده از QGA



شکل۶ خطای ردیابی در هر لحظه

مثال فوق در منبع [۴] با استفاده از روش لیاپانوف در ردیابی تطبیقی مسیر حل شده و دقت کنترل 0.99 حاصل شده است یعنی ردیابی با خطای 0.01 انجام شده است. مقایسه نتایج روش ارائه شده در این مقاله با روش ATT و SOAQTT در جدول ۲ آورده شده است [۶]. در همه این روش ها بعد از ۴۰ ثانیه خطا به صفر میل می کند. خروجی سیستم در ATT مسیر موردنظر را نسبتا خوب ردیابی می کند اما در QGATT با تنظیم پارامترهای مساله می توان با هر دقت مورد نظر ردیابی مسیر را انجام داد.

جدول ۲: مقایسه نتایج ردیابی مسیر در روش های QGATT و ATT

شاخص عملکرد/ روش	ATT	SOAQTT	QGATT
IAE	0.0182	0.0175	0.02
تعداد نقاط تکینی	702	372	0
$\|u_x\|$	39.7493	33.3815	5.2813
$\|u_y\|$	18.9577	18.7795	5.2245

شاخص خطای کنترل به صورت $IAE = \int_0^{100} |e(t)|^2 dt$ در نظر گرفته شده است. تعداد ۷۰۲ نقطه تکینی در روش ATT و تعداد ۳۷۲ نقطه تکینی در SOAQTT وجود دارد در حالی که در روش ارائه شده نقطه تکینی وجود ندارد. شاخص انرژی کنترل به صورت $\|u_m\| = \int_0^{100} |u_m(t)|^2 dt, \ \ m = x, y$ تعریف شده [۶] و مقایسه نرم کنترل کننده نیز نشان می دهد که روش AGATT دارای هزینه کنترل کمتری نسبت به بقیه روش هاست.

٦- نتیجه گیری

در این مقاله مبتنی بر رویکرد کنترل یادگیر و بهینه‌سازی یک کنترل کننده کوانتومی در ردیابی مسیر برای سیستم‌های کوانتومی بسته ارائه شده است. در روش مزبور یک مساله بهینه‌سازی مدلسازی شده و سپس مبتنی بر الگوریتم ژنتیک کوانتومی با هدف حداقل سازی خطای ردیابی مسیر به کار گرفته شده با توجه به دقت و سرعت همگرایی در الگوریتم ژنتیک کوانتومی و سازگاری این ساختار با مدل سیستم کوانتومی تحت بررسی نتایج خوبی در مثال‌های شبیه‌سازی مشاهده شد. مقدار خطای مطلوب در روش ارائه شده، قابل تنظیم است و می توان با تغییر پارامترهای الگوریتم ژنتیک و سایر پارامترهای مساله، با هر دقت دلخواهی مسیر را ردیابی نمود. از مزیت‌های روش ارائه شده، عدم مواجهه با تکینی است. در مقایسه با روش های بکار برده شده در سایر منابع که قوانین کنترلی توابع کسری هستند، در این روش عبارات کنترلی به صورت توابع غیرکسری بوده و مشکل تکینی در این روش به وجود نمی آید. همچنین اندازه کوچکتر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-04]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.2.0]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.65]

سیگنال کنترلی معرف هزینه کمتر کنترل است. راهبرد گفته شده را می‌توان در کاربردهای مختلفی به کار بست. جداسازی کوانتومی و متعاقبا طبقه بندی آنسامبل‌های کوانتومی یکی از این کاربردهاست.

مراجع

[1] A. Daeichian and F. Sheikholeslam, 2012, "Survey and Comparison of Quantum Systems: Modeling, Stability and Controllability", *Journal of Control*, Vol. 5, No. 4, pp. 20-31.

[2] C. Chen, L. C. Wang and Y. Wang, 2013, "Closed-Loop and Robust Control of Quantum Systems", *The Scientific World Journal*, Vol. 2013, 869285-1–869285-11.

[3] A. Narayanan and M. Moore, 1996, "Quantum-inspired genetic algorithms", *in Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, pp.61–66, Nagoya, Japan.

[4] J. Liu, S. Cong, and Y. Zhu, 2012, "Adaptive Trajectory Tracking of Quantum Systems", *12th International Conference on Control, Automation and Systems*, Jeju Island, Korea, Oct. 17-21.

[5] W. Zhu and H. Rabitz, 2003, "Quantum control design via adaptive tracking", *Journal of Chemical Physics*, Vol. 119, No 7, pp. 3619-3625.

[6] Z. Sahebi and M. Yarahmadi, 2018, "Switching optimal adaptive trajectory tracking control of quantum systems", *Optim Control Appl Meth*. DOI: 10.1002/oca.2412.

[7] D. Dong and I. R. Petersen, 2011, "Quantum control theory and applications: A survey", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 4, No. 12, pp. 2651-2671.

[8] H. Sedghee Rostami and B. Rezaie, 2016, "Controlling state of quantum system using fuzzy controller", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 124-134, (in Persian)

[9] Z. Sahebi and M. Yarahmadi, 2018, "Hybrid adaptive intelligent controller design using quantum wavelet neural networks for trajectory tracking control in finite dimensional closed quantum systems", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 179-188. (in Persian)

[10] A. Arjmandzadeh and M. Yarahmadi, 2017, "Quantum genetic learning control of quantum ensembles with Hamiltonian uncertainties", *Entropy*, Vol. 19, No. 8, pp. 1-12.

[11] D. D'Alessandro, *Introduction to Quantum Control and Dynamics*, Taylor & Francis Group, LLC, 2008.

[12] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, New York, 2010.

[13] H. Wang, J. Liu, J. Zhi, and C. Fu, 2013, "The Improvement of Quantum Genetic Algorithm and Its Application on Function Optimization", Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering.

[14] Z. Laboudi and S. Chikhi, 2011, "Comparison of Genetic Algorithm and Quantum Genetic Algorithm", *The International Arab Journal of Information Technology*, Vol. 9, No. 3, pp. 243-249.

[15] D. Dong, M. A. Mabrok, I. R. Petersen, B. Qi, C. Chen and H. Rabitz, 2015, "Sampling-Based Learning Control for Quantum Systems With Uncertainties", I*EEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, Vol. 23, NO. 6, 2155-2166.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-04]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.2.0]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.65]