مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۸، صفحه ۲۷-۱۵

توسعه ناحیه جذب کلاس خاصی از سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته بر اساس تابع لیاپانوف قطعه‌ای مجذوری ناپیوسته

فریده چراغی شامی[۱]، علی‌اکبر قره ویسی[۲]، ملیحه مغفوری فرسنگی[۳]، محسن محمدیان[۴]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، cheraghi.fa@eng.uk.ac.ir
[۲] استادیار، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، a_gharaveisi@yahoo.com
[۳] استاد تمام، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، mmaghfoori@mail.uk.ac.ir
[۴] استادیار، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، m.mohammadian@mail.uk.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۱۷ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۲/۲ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۲۱

چکیده: این مقاله به ارائه روش جدیدی جهت تخمین و توسعه ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین دوبعدی زمان-پیوسته پرداخته است. تاکنون برای تخمین و توسعه ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته از توابع لیاپانوف پیوسته گوناگونی استفاده شده است. در روش پیشنهادی، در قالب نگاهی نو و به‌کمک تابع لیاپانوف قطعه‌ای مجذوری ناپیوسته، ناحیه جذب سیستم حول مبدأ مختصات با طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت توسعه می‌یابد. در این مقاله نشان داده می‌شود که شرط پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرز سلول‌ها، محافظه‌کاری تخمین ناحیه جذب سیستم را افزایش می‌دهد و تصحیح این شرط، قابلیت جستجوی قدرتمندتری را به الگوریتم تخمین ناحیه جذب می‌بخشد. نتایج شبیه‌سازی گویای برتری روش پیشنهادی نسبت به روش مبتنی بر تابع لیاپانوف پیوسته است به‌نحوی‌که با استفاده از این روش، ناحیه جذب بزرگتری نسبت به روش پیوسته متناظرش بدست آمده است.

کلمات کلیدی: ناحیه جذب، سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته، کنترل‌کننده فیدبک حالت، تابع لیاپانوف قطعه‌ای مجذوری ناپیوسته

Enlarging Domain of Attraction for a Special Class of Continuous-time Quadratic Lyapunov Function Piecewise Affine Systems based on Discontinuous Piecewise

Farideh Cheraghi-Shami , Ali Akbar Gharaveisi , Malihe M. Farsangi , Mohsen Mohammadian

Abstract: This paper presents a new approach to estimate and to enlarge the domain of attraction for a planar continuous-time piecewise affine system. Various continuous Lyapunov functions have been proposed to estimate and to enlarge the system's domain of attraction. In the proposed method with a new vision and with the aids of a discontinuous piecewise quadratic Lyapunov function, the domain of attraction at the origin is enlarged by designing a state feedback controller. This paper shows that the continuity of the Lyapunov function on the boundaries, increases the conservativeness in estimating the domain of attraction, and gives more powerful search ability to the domain of attraction estimation algorithm by relaxing this continuity condition. The simulation results show the superiority of the proposed method so that using this method the larger estimation of the domain of attraction is obtained than continuous one.

Keywords: domain of attraction, continuous-time piecewise affine systems, state feedback controller, discontinuous piecewise quadratic Lyapunov functions.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

۱- مقدمه

مباحث مربوط به ناحیه جذب سیستم‌ها در کنار پیچیدگی‌های طبیعی آن بسیار کاربردی است. کاربردهای عملی این موضوع در سیستم‌های کنترل و قدرت [۱-۳]، فرآیندهای شیمیایی [۴]، هوا-فضا [۵]، سیستم‌های بیولوژیکی [۶]، اکولوژی [۷] و ترافیک [۸] بسیار مورد توجه قرار گرفته است. به‌طورحتم، بررسی این مباحث در سیستم‌های هایبرید نیز به همین میزان ارزشمند خواهد بود، زیرا بسیاری از سیستم‌های فیزیکی و مهندسی در کلاس سیستم‌های هایبرید قرار می‌گیرند. سیستم‌های قطعه‌ای آفاین (PWA)[1] در کلاس خاصی از سیستم‌های هایبرید هستند که هم‌ارزی آن با چند کلاس دیگر از سیستم‌های هایبرید نشان داده شده است [۹]، به‌عنوان مثال سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته، کلاسی از سیستم‌های سوئیچ‌شونده با حالت‌های عملکردی مختلف است که درآن فرامین سوئیچ وابسته به متغیرهای حالت است [۱۰]. از دیگر مزیت‌های سیستم قطعه‌ای آفاین این است که ابزاری برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی پیچیده و غیرخطی در اختیار می‌گذارد [۱۱]. غالباً سیستم‌های هایبرید مرتبه ۳ و بالاتر از آن سیستم‌های بسیار پیچیده‌ای هستند؛ در تقریب قطعه‌ای آفاین سیستم‌های غیرخطی، برای مواجهه با این مشکل، ابتدا از روش‌های کاهش مرتبه استفاده می‌شود و سپس سیستم در قالب قطعه‌ای آفاین مرتبه ۲ یا ۳ فرمول‌بندی می‌شود [۱۲]. لازم به ذکر است که تقریب قطعه‌ای آفاین بدست آمده برای سیستم غیرخطی، بر روی مرز سلول‌ها پیوسته است و این در حالی است که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی موجود دارای غیرخطی‌هایی مانند اشباع، ناحیه مرده و هیسترزیس هستند که ذاتاً بر روی مرز نواحی پیوسته است [۱۳].

روش‌های تخمین ناحیه جذب را بطورکلی می‌توان در دو دسته روش‌های مبتنی بر توابع لیاپانوف [۱۴] و روش‌های غیرلیاپانوفی [۱۵] قرار داد. با توجه به ساختار قطعه‌ای سیستم مورد بحث در این مقاله، محاسبه ناحیه جذب آن امری دشوار است. اخیراً، روشی غیر لیاپانوفی بر اساس تحلیل پیوستگی توابع انتقال گسسته[2]، به منظور تخمین ناحیه جذب یک سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته حول نقاط تعادلش و یا چرخه حدی آن در [۱۶] ارائه شده است. در [۱۷]، ناحیه پایداری سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته حول چرخه حدی آن به کمک الگوریتم ژنتیک تعیین می‌گردد. برای سیستمی با یک نقطه تعادل پایدار، می‌توان زیر مجموعه‌ای از ناحیه جذب را با جستجوی تابع لیاپانوف سیستم تخمین زد. قابل ذکر است که بیشتر روش‌های موجود تخمین ناحیه جذب مبتنی بر توابع لیاپانوف است. توابع لیاپانوف گوناگونی برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین معرفی شده‌اند، از قبیل: توابع لیاپانوف مشترک مجذوری [۱۸]، چندجمله‌ای [۱۹]، قطعه‌ای مجذوری (PWQ)[3] [۱۸, ۲۰, ۲۱]، قطعه‌ای آفاین [۲۲, ۲۳]، قطعه‌ای چندجمله‌ای همگن (PHP)[4] [۲۴] و PWQ ناپیوسته [۲۵]. از جمله توابع لیاپانوف رایج جهت آنالیز پایداری سیستم‌های قطعه‌ای آفاین، تابع لیاپانوف PWQ است.

به منظور تحلیل پایداری و همچنین تخمین ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین غالباً از شکل پیوسته تابع لیاپانوف PWQ استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال مراجعی همچون [۱۸, ۲۰, ۲۶]، از تابع لیاپانوف PWQ جهت تخمین ناحیه جذب در قالب یک مسأله بهینه‌سازی کمک گرفته‌اند. در [۲۷]، ابتدا یک سیستم غیرخطی در قالب یک سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته تقریب زده شده است، سپس ناحیه جذب سیستم حاصل حول مبدأ مختصات به کمک یک تابع لیاپانوف PWQ پیوسته تعیین گردیده است. برای کلاس خاصی از سیستم‌های قطعه‌ای آفاین پیوسته که در آن فضای حالت به تعداد محدودی نواحی محدب، بدون کران و چندوجهی افراز می‌شود، از تابع لیاپانوف PWQ پیوسته همبسته-مخروطی[5] به منظور محاسبه تخمین ناحیه جذب حول مبدأ مختصات استفاده شده است [۲۸]. در [۲۹]، سیستم‌های قطعه‌ای مولتی-آفاین[6] به عنوان کلاسی از سیستم‌های فازی با نتایج تک تک[7] مورد مطالعه قرار گرفته است که می‌توان از این سیستم‌ها برای تقریب هر سیستم غیرخطی هموار با دقت دلخواه استفاده نمود. در مرجع مذکور، تحلیل پایداری مجانبی این سیستم‌ها توسط تابع لیاپانوف PWQ پیوسته صورت گرفته است.

در طراحی کنترل‌کننده با هدف گسترش ناحیه جذب، علاوه بر لحاظ پایداری نقطه تعادل سیستم، ناحیه جذب متناسب با توانایی تابع لیاپانوف گسترش می‌یابد. در [۳۰] برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری[8]، سیستم‌هایی که فقط یک متغیر مسئول افراز فضای حالت می‌باشد، کنترل‌کننده فیدبک حالت به کمک تابع لیاپانوف مشترک مجذوری طراحی شده است. در [۳۱]، طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت قطعه‌ای آفاین برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری با ارائه شرطی جهت جلوگیری از مد لغزشی و بر اساس تابع لیاپانوف PWQ پیوسته صورت گرفته است. در [۳۲]، ابتدا دینامیک سیستم خودرو به صورت قطعه‌ای آفاین نواری مدل شده است و سپس کنترل‌کننده فیدبک حالت با هدف جلوگیری از خروج ناخواسته خودرو از لاین توسط تابع لیاپانوف PWQ پیوسته طراحی گردیده است. در [۳۳]، ماتریس‌های کنترل‌کننده فیدبک حالت و تابع لیاپانوف مشترک مجذوری با حل مسأله بهینه‌سازی ارائه شده در جهت پایدارسازی یک سیستم قطعه‌ای آفاین نواری زمان-پیوسته نامعین حول نقطه تعادل مطلوب بدست آمده است. در تحقیق دیگری سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری همراه با نویز وینر[9] مورد بررسی قرار گرفته‌اند و کنترل‌کننده فیدبک حالت با هدف پایدارسازی سیستم حلقه بسته و با اعمال تابع لیاپانوف مشترک مجذوری طراحی شده است [۳۴].

[1] Piecewise Affine
[2] Discrete Transition Functions
[3] Piecewise Quadratic
[4] Piecewise Homogeneous Polynomial
[5] Cone-copositive
[6] Multi-Affine
[7] Singleton Consequents
[8] Slab
[9] Wiener

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

در تعمیم این کار، طراحی رویتگر برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری دارای نویز وینر به وسیله تابع لیاپانوف PWQ پیوسته صورت گرفته است [۳۵]. در [۳۶]، سیستم‌های قطعه‌ای خطی پیوسته دومودال[1]، به عنوان کلاسی از سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی با دو حالت عملکردی مختلف و میدان‌های برداری پیوسته که درآن فرامین سوئیچ وابسته به متغیرهای حالت است، مورد بررسی قرار گرفته‌اند و با بکارگیری تابع لیاپانوف مشترک مجذوری، کنترل‌کننده فیدبک حالت در جهت پایدارسازی سیستم حلقه بسته حول مبدأ مختصات طراحی شده است. در [۳۶, ۳۷]، کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین چندمدلی[2] که در آن ماتریس‌های حالت دارای شکل خاصی هستند به کمک توابع لیاپانوف مشترک صورت گرفته است.

در [۳۸]، ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-گسسته به کمک تابع لیاپانوف قطعه‌ای آفاین ناپیوسته تخمین زده شده است. اخیراً در [۳۹]، کنترل‌کننده فیدبک حالت پریودیک به منظور پایدارسازی سیستم‌های قطعه‌ای آفاین پریودیک زمان-پیوسته به کمک یک تابع لیاپانوف گسسته متغیر با زمان پیشنهاد شده است. برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته دوبعدی دارای یک نقطه تعادل در مبدأ مختصات اثبات شده است که نوع تعمیم یافته تابع لیاپانوف PWQ پیوسته، که از حذف شرط پیوستگی حاصل می‌گردد [۲۵]، محافظه‌کاری بسیار پایینی در آنالیز سیستم‌های قطعه‌ای آفاین دارا می‌باشد. پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سیستم تضمین می‌کند که چنانچه مسیر حالت از سلولی وارد سلول دیگر شود، در لحظه عبور از مرز، مقدار تابع لیاپانوف تغییر نمی‌کند. این در حالی است که اگر در حین عبور از مرز مقدار تابع لیاپانوف کاهش یابد نیز شرایط پایداری برقرار است. این نکته ایدهٔ کلیدی در تعریف توابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته بوده است. در این مقاله با الهام از این روش، ناحیه جذب سیستم به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته تخمین و توسعه می‌یابد، به گونه‌ای که توسعه ناحیه جذب با طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت قطعه‌ای آفاین صورت می‌گیرد. در این راستا، دو مسأله بهینه‌سازی مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی دوخطی (BMI)[3] پیشنهاد می‌گردد. تخمین بهینه ناحیه جذب شامل بزرگ‌ترین مجموعه‌ی سطح تابع لیاپانوف است که در فضای کاری محصورشده باشد. در این مقاله نشان داده می‌شود که برای یک سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته با میدان‌های برداری پیوسته، ناحیه جذب بهینه حول مبدأ مختصات حاصل از تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته نسبت به روش پیوسته متناظرش ارتقاء می‌یابد.

بخش‌بندی مقاله بدین صورت سازماندهی شده است. در بخش۲، به توصیف سیستم قطعه‌ای آفاین و تبیین مسأله پرداخته می‌شود. بخش۳ به آنالیز پایداری سیستم هایبرید اختصاص داده شده است. در بخش۴، آنالیز پایداری سیستم و طراحی کنترل‌کننده برای آن به کمک تابع لیاپانوف ناپیوسته صورت می‌گیرد. سپس، بخش ۵ به ارائه دو مسأله بهینه‌سازی به منظور محاسبه تخمین ناحیه جذب سیستم حلقه باز و توسعه آن به کمک کنترل‌کننده فیدبک حالت می‌پردازد. در نهایت، شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری در بخش‌های ۶ و ۷ آورده می‌شود.

۲- معرفی سیستم و تبیین مسأله

۲-۱ معرفی سیستم

یک سیستم قطعه‌ای آفاین پیوسته دو بعدی به صورت

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + a_i + B_i u(t) \\ , x \in \hat{X}_i,\ i \in I, x(0) = x_0 \qquad (۱)$$

توصیف می‌شود که $u(t) \in U \subset R^m$ ، $x(t) \in X \subset R^2$ و x_0 به‌ترتیب بردار ورودی، بردار متغیر حالت و بردار شرط اولیه سیستم می‌باشد. همچنین، $X = \bigcup_{i \in I} \hat{X}_i$ ناحیه کاری سیستم است که به زیر نواحی چندوجهی X_i ، $i \in I$، افراز شده است و I مجموعه مدهای سیستم می‌باشد به طوری که برای $\forall i, j \in I$ ، $i \neq j$، داریم $X_i \bigcap X_j = \phi$. به علاوه، ماتریس‌های A_i و B_i و بردار a_i با ابعاد مناسب تعریف می‌گردد. $\hat{X}_i$ پوسته[4] مجموعه X_i است که برای X_i چندوجهی، به‌صورت زیر قابل توصیف می‌باشد:

$$\hat{X}_i = \left\{ x \in R^2 : E_i x \geq e_i \right\},\ i \in I \qquad (۲)$$

که در آن E_i و e_i به‌ترتیب ماتریس و بردار با مقادیر ثابت هستند. چنانچه برای $\forall i, j \in I$ ، $i \neq j$ ، $\hat{X}_i \bigcap \hat{X}_j \neq \phi$ باشد، مرز دو ناحیه هم‌جوار X_i و X_j به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{X}_i \bigcap \hat{X}_j \subset \left\{ x \middle| \ x = F_{ij} s + f_{ij}, s \in R \right\} \qquad (۳)$$

که در آن S پارامتری حقیقی و $F_{ij} \in R^2$ و $f_{ij} \in R^2$ بردارهای قابل محاسبه هستند. برای ناحیه مرزی تعریف شده در (۳)، اگر $F_{ij} \neq 0$ ، مرز بخشی از یک خط است و اگر $F_{ij} = 0$ ، مرز یک نقطه است. برای دو ناحیه همجوار X_i و X_j با $F_{ij} \neq 0$ ، می‌توان مقادیر C_{ij} و c_{ij} و خط $S_{ij} = \left\{ x \middle| C_{ij} x + c_{ij} = 0 \right\}$ را به‌گونه‌ای تعریف کرد که $\hat{X}_i \bigcap \hat{X}_j \subset S_{ij}$ و C_{ij} بردار نرمال S_{ij} (یک بردار عمود بر S_{ij}) با جهت از X_i به X_j باشد.

۲-۲ تبیین مسأله

تعریف ۱. ناحیه جذب

سیستم $\dot{x}(t) = f(x)$ دارای نقطه تعادل مبدأ مختصات را در نظر بگیرید. ناحیه جذب سیستم مجموعه‌ای از شرایط اولیه‌ی ممکن است که به ازای آنها همگرایی به مبدأ مختصات تضمین می‌گردد، یا به بیان دیگر،

[1] Bimodal
[2] Multimodel
[3] Bilinear Matrix Inequality
[4] Closure

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

$$D=\{x_0\in R^n \mid x(0)=x_0, \lim_{t\to\infty} x(t)=0\}. \quad (۴)$$

در این مقاله، دو مسأله زیر بررسی خواهد شد:

مسأله۱: محاسبه ناحیه جذب سیستم (۱)، با $u=0$، حول مبدأ مختصات به کمک تابع لیاپانوف ناپیوسته.

مسأله۲: تعیین ماتریس‌های $M_i\in R^{m\times 2}$ و بردارهای $m_i\in R^m$ برای $i\in I$، به کمک تابع لیاپانوف ناپیوسته به‌گونه‌ای که کنترل‌کننده فیدبک حالت قطعه‌ای آفاین پیوسته

$$u(t)=M_i x(t)+m_i, x\in\hat{X}_i, i\in I \quad (۵)$$

پایداری نمایی سیستم کنترل شده (۱) با ورودی (۵) را حول مبدأ مختصات تضمین کند و ناحیه جذب سیستم حلقه بسته را توسعه دهد.

سیستم کنترل شده (۱) با ورودی (۵) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\dot{x}=(A_i+B_iM_i)x+(a_i+B_im_i), x\in\hat{X}_i, i\in I \quad (۶)$$

در ادامه، با تعریف $\bar{x}=\begin{bmatrix}x^T & 1\end{bmatrix}^T$، روابط (۵)، (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب زیر بازنویسی می‌شوند:

$$u=\bar{M}_i\bar{x},\ x\in\hat{X}_i,\ i\in I \quad (۷)$$

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}_i\bar{x}+\bar{B}_iu, x\in\hat{X}_i,\ i\in I \quad (۸)$$

$$\hat{X}_i=\left\{x\in R^2:\ \bar{E}_i\bar{x}\geq 0\right\},\ i\in I \quad (۹)$$

$$\hat{X}_i\cap\hat{X}_j\subset\left\{x\middle|\bar{x}=\bar{F}_{ij}\bar{s}, \bar{s}=[s^T\ 1]^T, s\in R\right\} \quad (۱۰)$$
$$, i,j\in I, i\neq j$$

که در آن $\bar{A}_i=\begin{bmatrix}A_i & a_i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$، $\bar{B}_i=\begin{bmatrix}B_i\\ 0\end{bmatrix}$، $\bar{M}_i=[M_i\quad m_i]$، $\bar{E}_i=\begin{bmatrix}E_i & -e_i\end{bmatrix}$ و $\bar{F}_{ij}=\begin{bmatrix}F_{ij} & f_{ij}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. همچنین، برای دو ناحیه همجوار X_i و X_j با $F_{ij}\neq 0$، چنانچه $\bar{C}_{ij}=[C_{ij}\quad c_{ij}]$ باشد، $S_{ij}=\left\{x\middle|\bar{C}_{ij}\bar{x}=0\right\}$ تعریف می‌گردد.

تذکر ۱: ازآنجایی‌که فرض شده است که سیستم (۱) دارای نقطه تعادل مبدأ مختصات است، پس برای $i\in I_0$ و $I_0=\left\{i\in I\middle|0\in\hat{X}_i\right\}$، لازم است $a_i=0$ و همچنین $\det(A_i)\neq 0$ باشد.

تذکر ۲: شرط پیوستگی کنترل‌کننده فیدبک حالت (۷) بر روی مرزهای سیستم (۸) به صورت زیر لحاظ می‌شود

$$\bar{M}_i\bar{x}=\bar{M}_j\bar{x},\ x\in\hat{X}_i\cap\hat{X}_j, \forall i\in I,\ j\in N_i \quad (۱۱)$$

که در آن $N_i=\left\{k\mid k\in I, k\neq i,\ \hat{X}_i\cap\hat{X}_k\neq\phi\right\}$.

تذکر۳: شرط پیوستگی سیستم (۸) بر روی مرزهای $\hat{X}_i\cap\hat{X}_j$ معادل رابطه زیر است

$$(\bar{A}_i+\bar{B}_i\bar{M}_i)\bar{x}=(\bar{A}_j+\bar{B}_j\bar{M}_j)\bar{x} \quad (۱۲)$$
$$, x\in\hat{X}_i\cap\hat{X}_j, \forall i\in I,\ j\in N_i$$

که در آن $N_i=\left\{k\mid k\in I, k\neq i,\ \hat{X}_i\cap\hat{X}_k\neq\phi\right\}$ تعریف می‌گردد.

۳- تحلیل پایداری

سیستم پیوسته هایبرید زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=f_i(x),\ x\in\hat{X}_i,\ i\in I \quad (۱۳)$$

که در آن $x(t)\in X\subset R^n$ بردار حالت سیستم می‌باشد و $f_i:\hat{X}_i\to R^n$ تابع پیوسته و کراندار محلی است. فرض می‌شود $x=0$ تنها نقطهٔ تعادل سیستم (۱۳) است. همچنین، ناحیه X توسط X_i، $i\in I$، به‌گونه‌ای افراز شده است که $\bigcup_{i\in I}\hat{X}_i=X$ و $\forall i,j\in I$، $i\neq j$، شرط $X_i\cap X_j=\phi$ برقرار باشد. شرط پیوستگی میدان‌های برداری سیستم (۱۳) ایجاب می‌کند که برای $x\in\hat{X}_i\cap\hat{X}_j$، $i\neq j$، $f_i(x)=f_j(x)$ باشد.

قابل ذکر است وجود یک تابع لیاپانوف مشترک برای همه زیرسیستم‌های $\dot{x}=f_i(x)$، پایداری سیستم را تضمین می‌کند، اما محافظه‌کاری بالایی دارد. برای کاهش محافظه‌کاری، قضیه تابع لیاپانوف چندگانه[1] ارائه شده است که برای هر زیرسیستم $\dot{x}=f_i(x)$، تابع پیوسته $V_i(x)$ اختصاص می‌یابد.

$$V(x)=V_i(x),\quad x\in X_i, i\in I \quad (۱۴)$$

معین مثبت بودن توابع $V_i(x)$ و کاهشی بودن این توابع وقتی $x\in X_i$ است، پایداری سیستم (۱۳) را تضمین نمی‌کند. از جمله روش‌های ارائه شده برای حل این مشکل، تضمین پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سیستم (۱۳) می‌باشد، یعنی برای $x\in\hat{X}_i\cap\hat{X}_j$، $i\neq j$، تساوی $V_i(x)=V_j(x)$ برقرار باشد [۴۰]؛ که همین شرط سبب محافظه‌کاری روش آنالیز پایداری مذکور می‌گردد، زیرا پیوستگی بر روی مرزها تنها تضمین می‌کند که چنانچه مسیر حالت از سلولی وارد سلول دیگر شود، در لحظه عبور از مرز، مقدار تابع لیاپانوف تغییر نمی‌کند. در [۱۸, ۴۱]، با حذف شرط پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سلول‌ها، شرایط پایداری بر اساس توابع لیاپانوف ناپیوسته ارائه شده است، اما روش ارائه شده در مقالات مذکور، برای حالت‌های بسیار خاص و بر طبق دانش کسب‌شده از رفتار سیستم بر روی مرزها می‌باشد که کاربرد آن را بسیار محدود می‌کند. در [۲۵]، برای سیستم‌های دوبعدی با فرض توابع

[1] Multiple Lyapunov Function

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

پیوسته $V_i(x): \hat{X}_i \to R, i \in I$، تابع ناپیوسته زیر به عنوان تابع لیاپانوف سیستم معرفی می‌شود

$$V(x) = \begin{cases} V_i(x) & x \in X_i \\ \min\{V_i(x)\}_{i\in I_x} & x \in \bigcap_{i\in I_x} \hat{X}_i \end{cases} \quad (۱۵)$$

که در آن $I_x = \{i \mid x \in \hat{X}_i\}$. اثبات می‌گردد که چنین تابع لیاپانوف ناپیوسته‌ای، بر روی مرزها در جهت میدان برداری کاهشی است. همچنین نشان داده می‌شود که آنالیز پایداری سیستم به کمک این تابع ناپیوسته با محافظه‌کاری بسیار پایین‌تری نسبت به تابع لیاپانوف پیوسته متناظرش صورت می‌گیرد و نیاز به هیچ دانش قبلی از رفتار سیستم بر روی مرزها نیز ندارد به طوری که آنالیز پایداری تنها بر اساس میدان‌های برداری سیستم انجام می‌شود. از این پس در این مقاله منظور از تابع لیاپانوف ناپیوسته، همان تابع رابطه (۱۵) می‌باشد. در ادامه، قضیه‌ای برای آنالیز پایداری سیستم (۱۳) در فضای دوبعدی، با تعمیم روش آنالیز ارائه شده [۲۵] برای تابع لیاپانوف ناپیوسته (۱۵) پیشنهاد می‌گردد.

قضیه ۱- سیستم (۱۳) متعلق به فضای دوبعدی X، تعریف شده بر افراز چندوجهی $\{X_i\}_{i\in I}$، را در نظر بگیرید. اگر برای $i \in I$، مجموعه‌ای از توابع پیوسته $V_i(x): \hat{X}_i \to R$، اسکالرهای $\alpha_i \geq 0$ و $\varepsilon \geq 0$ و مقادیر اسکالر نامنفی $\omega_{ij}^1, \omega_{ij}^2$، $\forall i, j \in I$، وجود داشته باشند به طوری که در روابط (۱۶) تا (۱۹) صدق کنند، آنگاه برای این سیستم، نقطه تعادل مبدأ مختصات پایدار نمایی است و تابع ناپیوسته رابطه (۱۵) با نرخ همگرایی $\min \alpha_i$، $i \in I$، تابع لیاپانوف سیستم می‌باشد.

$$V_i(0) = 0,\ i \in I_0 \quad (۱۶)$$

$$V_i(x) \succ \varepsilon \|x\|_2, x \in \hat{X}_i, x \neq 0, i \in I \quad (۱۷)$$

$$\dot{V}_i(x) \prec -\alpha_i V_i(x), x \in \hat{X}_i, x \neq 0,\ i \in I \quad (۱۸)$$

$$V_i(x) - V_j(x) = \omega_{ij}^1 C_{ij} f_i(x) + \omega_{ij}^2 C_{ij} f_j(x), x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j, \forall i, j \in I, i \neq j,\ F_{ij} \neq 0 \quad (۱۹)$$

که $\|\cdot\|_2$ به نرم ۲ و عملگر $\succ$ ($\prec$) به مثبت معین بودن (منفی معین بودن) اشاره دارد.

اثبات- تابع $V(x)$ تعریف شده در (۱۵) را به عنوان یک کاندید برای تابع لیاپانوف در نظر بگیرید. روابط (۱۶) و (۱۷) بر معین مثبت بودن $V(x)$ دلالت دارد [۴۰]. برای اثبات پایداری کافی است نشان دهیم که تابع $V(x)$ در طول همه مسیرهای حالت سیستم (۱۳) کاهشی است. برای این منظور، یک مسیر حالت نوعی $x(t)$ از سیستم را در نظر بگیرید. در هر لحظه t، $x(t)$ می‌تواند به یک سلول یا به مرزهای بین سلول‌ها تعلق داشته باشد. طبق تعریف، $card\{I_x\}$ دلالت بر تعداد عناصر مجموعه شمارش پذیر I_x دارد. اگر $x(t) \in \hat{X}_i$ و $card\{I_x\} = 1$، آنگاه $V(x) = V_i(x)$ و بر اساس (۱۸)، $\dot{V}(x) \prec \alpha V(x) \prec 0$، در نتیجه، $V(x)$ کاهشی می‌باشد [۴۰]. اگر $x \in \bigcap_{i\in I_x} \hat{X}_i$، دو حالت متفاوت وجود دارد: $card\{I_x\} = 2$ و $card\{I_x\} > 2$. حالت $card\{I_x\} = 2$، به این معنا است که مرز بخشی از یک خط است و معادل این است که برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$، $\forall i, j \in I$، $i \neq j$، $F_{ij} \neq 0$ برقرار باشد و $card\{I_x\} > 2$ یعنی مرز یک نقطه است. با برقراری تساوی (۱۹)، شرط کاهشی بودن تابع لیاپانوف در هر دو حالت برقرار است [۲۵]. در نتیجه، همه مسیرهای حالت سیستم (۱۳) در X، بطور نمایی با نرخ همگرایی $\min \alpha_i$، $i \in I$، به سمت مبدأ مختصات همگرا می‌شوند. این نکته اثبات قضیه ۱ را به پایان می‌رساند. ■

٤- تحلیل پایداری و پایدارسازی

تابع $V(x)$ بیان شده در رابطه (۱۵) را به عنوان یک تابع لیاپانوف کاندید در نظر بگیرید که در آن

$$V_i(x) = \bar{x}^T \bar{P}_i \bar{x},\ x \in \hat{X}_i \subset R^2, \forall i \in I \quad (۲۰)$$

که ماتریس متقارن $\bar{P}_i = \bar{P}_i^T \in R^{3\times 3}$ به‌صورت

$$\bar{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & q_i \\ q_i^T & r_i \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

تعریف می‌شود به طوری که $q_i \in R^2, P_i \in R^{2\times 2}$ و $r_i \in R$. در این بخش، به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته فوق، شرایط کافی برای آنالیز پایداری و پایدارسازی سیستم قطعه‌ای آفاین (۱) ارائه می‌گردد.

٤-۱ تحلیل پایداری سیستم حلقه باز به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته

در قضیه ۲، برای سیستم (۱)، با $u = 0$، یا

$$\dot{x} = A_i x + a_i,\ x \in \hat{X}_i,\ i \in I, x(0) = x_0 \quad (۲۲)$$

که به صورت $\dot{\bar{x}} = \bar{A}_i \bar{x}$ قابل بازنویسی می‌باشد، شرایط پایداری به‌کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته بدست می‌آید.

قضیه ۲- چنانچه به ازای هر $i \in I$، مجموعه‌ای از ماتریس‌های متقارن $\bar{P}_i \in R^{3\times 3}$، ماتریس‌های با درایه‌های نامنفی Z_i و Λ_i، مقادیر اسکالر نامنفی α_i و ε و به ازای هر $i, j \in I$، بردارهای $\bar{\omega}_{ij}^1, \bar{\omega}_{ij}^2$ با ابعاد مناسب و درایه‌های نامنفی وجود داشته باشند به طوری که روابط (۲۳) تا (۲۸) برقرار باشد، آنگاه سیستم (۲۲) پایدار نمایی است و مسیرهای حالت آن با نرخ همگرایی $\min \alpha_i$، $i \in I$، به سمت مبدأ مختصات همگرا می‌شود.

$$q_i = 0, r_i = 0, \forall i \in I_0 \quad (۲۳)$$

$$\bar{P}_i - \varepsilon I_3 - \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i \succ 0, \forall i \in I, i \notin I_0 \quad (۲۴)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

$$P_i - \varepsilon I_2 - E_i{}^T Z_i E_i \succ 0, \forall i \in I_0 \quad (۲۵)$$

$$\overline{A}_i{}^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \overline{A}_i + \overline{E}_i{}^T \Lambda_i \overline{E}_i + \alpha_i \overline{P}_i \prec 0 \quad (۲۶)$$
$$, \forall i \in I, i \notin I_0$$

$$A_i{}^T P_i + P_i A_i + E_i{}^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i \prec 0 \quad (۲۷)$$
$$, \forall i \in I_0$$

$$\overline{F}_{ij}^T \left(\overline{P}_i - \overline{P}_j\right)\overline{F}_{ij} = \overline{F}_{ij}^T \left(\overline{H}_{ij} + \overline{H}_{ij}^T\right)\overline{F}_{ij} \quad (۲۸)$$
$$, \forall i \in I,\ j \in N_i,\ F_{ij} \neq 0$$

که در (۲۸)، $N_i = \left\{k \mid k \in I, k \neq i, \hat{X}_i \cap \hat{X}_k \neq \phi\right\}$ و $\overline{H}_{ij}$ به‌صورت

$$\overline{H}_{ij} = \overline{E}_i{}^T \overline{\omega}_{ij}^1 \overline{C}_{ij} \overline{A}_i + \overline{E}_j{}^T \overline{\omega}_{ij}^2 \overline{C}_{ij} \overline{A}_j \quad (۲۹)$$

تعریف می‌گردد.

اثبات- تابع PWQ ناپیوسته رابطه (۲۰) را به‌عنوان تابع لیاپانوف کاندید در نظر بگیرید.

- برای $x \in X_i$ و $i \in I_0$:

رابطه (۲۳) معادل (۱۶) می‌باشد و تضمین می‌کند که $V_i(0) = 0$. ازآنجایی‌که برای هر $x \in X_i$، داریم $x^T E_i{}^T Z_i E_i x > 0$، بنابراین رابطه (۲۵) معادل رابطه (۱۷) می‌باشد که به معنای مثبت بودن تابع لیاپانوف است. به همین صورت، رابطه (۲۷)، رابطه (۱۸) را نتیجه می‌دهد که معادل شرط منفی بودن مشتق تابع لیاپانوف است.

- برای $x \in X_i$ و $i \notin I_0$:

ازآنجایی‌که برای $x \in X_i$، $\bar{x}^T \overline{E}_i{}^T Z_i \overline{E}_i \bar{x} > 0$، رابطه (۲۴)، (۱۷) را برآورده می‌کند که همان شرط مثبت بودن تابع لیاپانوف است. به همین صورت، رابطه (۲۶) ایجاب می‌کند که رابطه (۱۸) برقرار باشد.

- برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$:

بر اساس قضیه۲ از [۲۵]، رابطه (۲۸) تضمین می‌کند که تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سلول‌ها در راستای مسیر حالت غیر افزایشی خواهد بود.

با توجه به روابط (۲۶) و (۲۷)، نرخ همگرایی تابع لیاپانوف درون X_i برابر α_i می‌باشد. ازآنجایی‌که تابع لیاپانوف به ازای نقاط روی مرزهای سلول‌ها، افزایشی ندارد، بنابراین در کل فضای افراز شده $X = \bigcap_{i \in I_x} \hat{X}_i$، نرخ همگرایی $\min\ \alpha_i$ ، $i \in I$، برای تابع لیاپانوف تضمین می‌گردد. ■

۲-۴ طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته

در قضیه ۳، شرایط پایدارسازی سیستم (۸) با کنترل‌کننده فیدبک حالت (۷) به‌کمک تابع PWQ ناپیوسته رابطه (۲۰) به عنوان تابع لیاپانوف کاندید، ارائه می‌شود.

قضیه ۳- سیستم (۸) را با وروی کنترل (۷) در نظر بگیرید. اگر به ازای هر $i \in I$، مجموعه‌ای از ماتریس‌های متقارن $\overline{P}_i \in R^{3\times 3}$، ماتریس‌های با درایه‌های نامنفی Z_i و Λ_i، ماتریس‌های $\overline{M}_i \in R^{m\times 3}$، مقادیر اسکالر نامنفی α_i و ε و به ازای هر $i, j \in I$، بردارهای $\overline{\omega}_{ij}^1$ و $\overline{\omega}_{ij}^2$ با ابعاد مناسب و درایه‌های نامنفی وجود داشته باشند، به طوری که روابط (۳۰) تا (۳۷) برقرار باشد، آنگاه سیستم کنترل شده (۸) پایدار نمایی است و مسیرهای حالت سیستم با نرخ همگرایی $\min\ \alpha_i$ ، $i \in I$، به سمت مبدأ مختصات همگرا می‌شود.

$$q_i = 0, r_i = 0, \forall i \in I_0 \quad (۳۰)$$

$$\overline{P}_i - \varepsilon I_3 - \overline{E}_i{}^T Z_i \overline{E}_i \succ 0, \forall i \in I, i \notin I_0 \quad (۳۱)$$

$$P_i - \varepsilon I_2 - E_i{}^T Z_i E_i \succ 0, \forall i \in I_0 \quad (۳۲)$$

$$\left(\overline{A}_i + \overline{B}_i \overline{M}_i\right)^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \left(\overline{A}_i + \overline{B}_i \overline{M}_i\right) \quad (۳۳)$$
$$+ \overline{E}_i{}^T \Lambda_i \overline{E}_i + \alpha_i \overline{P}_i \prec 0, \forall i \in I, i \notin I_0$$

$$\left(A_i + B_i M_i\right)^T P_i + P_i \left(A_i + B_i M_i\right) \quad (۳۴)$$
$$+ E_i{}^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i \prec 0, \forall i \in I_0$$

$$\overline{F}_{ij}^T \left(\overline{P}_i - \overline{P}_j\right)\overline{F}_{ij} = \overline{F}_{ij}^T \left(\overline{\Gamma}_{ij} + \overline{\Gamma}_{ij}^T\right)\overline{F}_{ij} \quad (۳۵)$$
$$, \forall i \in I,\ j \in N_i,\ F_{ij} \neq 0$$

$$\left(\overline{M}_i - \overline{M}_j\right)\overline{F}_{ij} = 0, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0 \quad (۳۶)$$

$$(\overline{A}_i + \overline{B}_i \overline{M}_i)\overline{F}_{ij} = (\overline{A}_j + \overline{B}_j \overline{M}_j)\overline{F}_{ij} \quad (۳۷)$$
$$, \forall i \in I,\ j \in N_i,\ F_{ij} \neq 0$$

که در رابطه (۳۵)، $\overline{\Gamma}_{ij}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\overline{\Gamma}_{ij} = \overline{E}_i{}^T \overline{\omega}_{ij}^1 \overline{C}_{ij} \left(\overline{A}_i + \overline{B}_i \overline{M}_i\right) \quad (۳۸)$$
$$+ \overline{E}_j{}^T \overline{\omega}_{ij}^2 \overline{C}_{ij} \left(\overline{A}_j + \overline{B}_j \overline{M}_j\right)$$

اثبات- رابطه (۳۶) پیوستگی سیگنال کنترل را بر روی مرزهای سلول‌ها تضمین می‌کند به این صورت که $(\overline{M}_i - \overline{M}_j)\overline{F}_{ij}\bar{s} = 0$ و بر اساس رابطه (۱۰)، $\overline{M}_i \bar{x} = \overline{M}_j \bar{x}$ که در آن $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$. به همین صورت، رابطه (۳۷) به پیوستگی میدان‌های برداری سیستم حلقه بسته بر روی مرزهای سلول‌ها اشاره دارد. حال تابع PWQ ناپیوسته رابطه (۲۰) را به‌عنوان تابع لیاپانوف کاندید در نظر بگیرید.

- برای $x \in X_i$ و $i \in I_0$:

رابطه (۳۰) معادل رابطه (۱۶) است که تضمین می‌کند $V_i(0) = 0$. ازآنجایی‌که برای $x \in X_i$ داریم $x^T E_i{}^T Z_i E_i x > 0$، بنابراین رابطه (۳۲) معادل رابطه (۱۷) می‌باشد که به معنای شرط مثبت بودن تابع لیاپانوف

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

است. به همین صورت، رابطه (۳۴)، رابطه (۱۸) را نتیجه می‌دهد که معادل با شرط منفی بودن مشتق تابع لیاپانوف است.

- برای $x \in X_i$ و برای $i \notin I_0$:

ازآنجایی‌که برای هر $x \in X_i$، $\bar{x}^T \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i \bar{x} > 0$ است، بنابراین رابطه (۳۱)، (۱۷) را برآورده می‌کند که همان شرط مثبت بودن تابع لیاپانوف است. همچنین $\bar{x}^T \bar{E}_i^T \Lambda_i \bar{E}_i \bar{x} > 0$ و رابطه (۳۳) ایجاب می‌کند که رابطه (۱۸) برقرار باشد.

- برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$:

بر اساس قضیه ۱، رابطه (۱۹) شرط کاهشی بودن تابع لیاپانوف ناپیوسته چندگانه را بر روی مرزهای سیستم برآورده می‌کند. در ادامه با توجه به تعریف تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته، نشان می‌دهیم که رابطه (۳۵) معادل رابطه (۱۹) است. رابطه (۳۵) را از چپ در $\bar{s}^T$ و از راست در $\bar{s}$ ضرب می‌کنیم،

$$\bar{s}^T \bar{F}_{ij}^T \left(\bar{P}_i - \bar{P}_j\right) \bar{F}_{ij} \bar{s} = \bar{s}^T \bar{F}_{ij}^T \left(\bar{\Gamma}_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^T\right) \bar{F}_{ij} \bar{s}$$

آنگاه با توجه به توصیف نواحی مرزی $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$ بر اساس رابطه (۱۰)، داریم:

$$\bar{x}^T \left(\bar{P}_i - \bar{P}_j\right) \bar{x} = \bar{x}^T \left(\bar{\Gamma}_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^T\right) \bar{x} \qquad (۳۹)$$

که $\bar{\Gamma}_{ij}$ در رابطه (۳۹) بر اساس (۳۸) معادل‌گذاری می‌شود. سپس، با بازنویسی رابطه (۳۹) به کمک (۲۰) تساوی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} V_i(x) - V_j(x) = & \bar{x}^T \bar{E}_i^T \bar{\omega}_{ij}^1 \bar{C}_{ij} \left(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i\right) \bar{x} \\ & + \bar{x}^T \bar{E}_j^T \bar{\omega}_{ij}^2 \bar{C}_{ij} \left(\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j\right) \bar{x} \\ & + \bar{x}^T \left(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i\right)^T \bar{C}_{ij}^T (\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x} \\ & + \bar{x}^T \left(\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j\right)^T \bar{C}_{ij}^T (\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x} \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

ازآنجایی‌که برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$، $\bar{E}_i \bar{x} \geq 0$ و $\bar{E}_j \bar{x} \geq 0$ می‌باشد، بنابراین $(\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x}$ و $(\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x}$ مقادیر اسکالر نامنفی هستند و از طرف دیگر

$$\begin{aligned} & \bar{C}_{ij} \left(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i\right) \bar{x} \\ & = [C_{ij} \quad c_{ij}] \begin{bmatrix} A_i + B_i M_i & a_i + B_i m_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \\ & = C_{ij} \left((A_i + B_i M_i) x + (a_i + B_i m_i)\right) \end{aligned}$$

حال می‌توان رابطه (۴۰) را به شکل زیر بازنویسی نمود

$$\begin{aligned} & V_i(x) - V_j(x) = \\ & \left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x}\right)^T C_{ij} \left((A_i + B_i M_i) x + (a_i + B_i m_i)\right) \\ & + \left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x}\right)^T C_{ij} \left((A_j + B_j M_j) x + (a_j + B_j m_j)\right) \\ & + \left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x}\right)^T C_{ij} \left((A_i + B_i M_i) x + (a_i + B_i m_i)\right) \\ & + \left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x}\right)^T C_{ij} \left((A_j + B_j M_j) x + (a_j + B_j m_j)\right)^T \\ & = 2\left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x}\right)^T C_{ij} \left((A_i + B_i M_i) x + (a_i + B_i m_i)\right) \\ & + 2\left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x}\right)^T C_{ij} \left((A_j + B_j M_j) x + (a_j + B_j m_j)\right) \end{aligned} \qquad (۴۱)$$

که با تعریف $\omega_{ij}^1 = 2\left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x}\right)^T$ و $\omega_{ij}^2 = 2\left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x}\right)^T$ و جایگذاری آنها در تساوی (۴۱)، رابطه (۱۹) برای $f_i(x) = (A_i + B_i M_i) x + (a_i + B_i m_i)$ و $f_j(x) = (A_j + B_j M_j) x + (a_j + B_j m_j)$ بدست می‌آید. با برآورده شدن روابط (۱۶) تا (۱۹) و طبق قضیه ۱، پایداری نمایی سیستم حلقه بسته تضمین می‌گردد. بر طبق روابط (۳۳) و (۳۴)، نرخ همگرایی تابع لیاپانوف درون X_i برابر α_i می‌باشد. ازآنجایی‌که تابع لیاپانوف به ازای نقاط روی مرزهای سلول‌ها افزایشی ندارد، بنابراین، سیستم (۸) با کنترل‌کننده پیوسته (۷) با نقطه تعادل مبدأ مختصات پایدار نمایی است و نرخ همگرایی $\min \alpha_i$، $i \in I$، برای تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته در کل فضای افراز شده $X = \bigcup_{i \in I_x} \hat{X}_i$، تضمین می‌گردد. ■

تذکر ٤: در قضیه‌های ۲ و ۳، چنانچه به ازای هر $i, j \in I$، $\bar{\omega}_{ij}^1 = 0, \bar{\omega}_{ij}^2 = 0$ باشد، آنگاه شرایط پایداری سیستم، معادل با شرایط پایداری بر اساس تابع لیاپانوف PWQ پیوسته می‌باشد.

۵- محاسبه تخمین ناحیه جذب

سیستم $\dot{x}(t) = f(x)$ با نقطه تعادل مبدأ مختصات را در نظر بگیرید. روش‌های مختلف تحلیلی و عددی زیادی جهت تخمین ناحیه جذب یک نقطه تعادل پایدار ارائه شده است. بسیاری از این روش‌ها مبتنی بر تعریف تابع لیاپانوف است که به وسیله آن ناحیه جذب حول نقطه تعادل محاسبه می‌گردد. تابع لیاپانوف معین مثبت $V(x)$ را در نظر بگیرید. ازآنجایی‌که تخمین ناحیه جذب، مسأله‌ای دشوار است عموماً زیرمجموعه‌ای از ناحیه جذب تخمین زده می‌شود. طبق قضیه لاسال برای مجموعه‌های پایا [۴۲]، مجموعه‌ی محدود $\Omega(c)$ که به صورت زیر تعریف شده است، مجموعه‌ی سطح تابع لیاپانوف $V(x)$ و زیرمجموعه‌ای از ناحیه جذب سیستم می‌باشد.

$$\Omega(c) = \left\{x \in R^n \mid V(x) \leq c\right\}, \forall c > 0 \qquad (۴۲)$$

فرض کنید مجموعه‌ی D^- بصورت $D^- = \{x \in R^n \mid \dot{V}(x) \prec 0\}$ تعریف شود، واضح است که هر عضو مانند x روی مرز ناحیه‌ی D^- در رابطه $\dot{V}(x) = 0$ صدق می‌کند. اعضایی از مجموعه $\Omega(c)$ که عضو

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

D^- باشند مجموعه‌ای پایا را تشکیل می‌دهند و هر مسیر رها شده در آن به نقطه تعادل مبدأ مختصات همگرا خواهد شد. یک تخمین مناسب، بزرگ‌ترین ناحیه $\Omega(c)$ واقع در D^- است، چنانچه این تخمین مناسب با D_{est} نشان داده شود رابطه زیر برقرار است:

$$D_{est} = \Omega(c^*) \qquad (۴۳)$$

که در آن c^* مقدار ماکزیمم c است که به ازای آن $D_{est} \subseteq D^-$ باشد. برای محاسبه c^* مسأله بهینه‌سازی زیر حل می‌شود [۴۳]:

$$\begin{aligned} c^* &= \sup\ c \\ &\quad s.t. \\ &\Omega(c) \subseteq D^-, \\ &D^- = \{0\} \bigcup \{x \mid \dot{V}(x) \prec 0\} \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

در [۴۴]، تخمین بهینه‌ای از ناحیه جذب سیستم‌های چندجمله‌ای به‌صورت

$$\begin{aligned} &\Omega(c^*) = \sup_{V(x)} volume(\Omega(c)) \\ &s.t.\ \dot{V}(x) \prec 0, \forall x \in \Omega(c), x \neq 0 \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

ارائه شد که در آن $volume(\Omega(c))$ به حجم[1] ناحیه $\Omega(c)$ اشاره دارد. بنابراین، تخمین بهینه‌ای از ناحیه جذب بوسیله ماکزیمم کردن حجم مجموعه‌ی سطح تابع لیاپانوف حاصل می‌شود. قابل ذکر است که برای تابع لیاپانوف مجذوری $V(x) = x^T Px$، تعریف شده در $X \subset R^n$، تساوی $\sup volume(\Omega(c)) = \min trace(P)$ برقرار است. با توجه به ساختار دوبعدی سیستم (۱)، ماکزیمم کردن حجم $\Omega(c)$ معادل با این است که مساحت $\Omega(c)$ در X ماکزیمم گردد. با بکارگیری تابع لیاپانوف مجذوری مشترک برای سیستم (۱)، با $u=0$، تخمین بزرگ‌ترین ناحیه جذب سیستم با می‌نیمم‌سازی $trace(P)$، که همان مجموع مقدارهای ویژه‌ی P است، محاسبه می‌شود. البته همان‌طور که قبلا ذکر شد، تابع لیاپانوف مجذوری مشترک محافظه‌کاری بالایی در آنالیز و در نتیجه تخمین ناحیه جذب سیستم (۲۲) دارد. با توجه به ساختار قطعه‌ای آفاین سیستم (۱)، ناحیه جذب آن غیرمحدب است [۲۴]. در [۲۳, ۴۵, ۴۶]، برای یافتن تخمین بهینه ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین، مسأله بهینه‌سازی $\min \sum_{i \in I} trace(P_i)$ مطرح شده است که در آن مسأله می‌نیمم‌سازی مجموع $trace(P_i)$ با توجه به شرایط پایداری حل می‌گردد. در این مقاله پیشنهاد می‌شود که مسأله بهینه‌سازی با هدف می‌نیمم‌سازی بزرگ‌ترین $trace(\overline{P}_i)$ لحاظ گردد. در ادامه تابع لیاپانوف مناسب جهت تخمین و توسعه ناحیه جذب با حل دو مسأله بهینه‌سازی BMI به ترتیب برای سیستم حلقه باز (۲۲) و سیستم حلقه بسته (۸) با ورودی کنترل (۷)، در قالب مسأله ۱ و مسأله ۲، بدست می‌آید.

مسأله ۱: مسأله بهینه‌سازی تخمین ناحیه جذب سیستم (۲۲)، حول مبدأ مختصات بر اساس تعاریف ارائه شده در قضیه ۲، با هدف محاسبه $\overline{P}_i$، Z_i، γ، $\overline{\omega}_{ij}^1$، Λ_i، $\overline{\omega}_{ij}^2$ و α_i برای $i \in I$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min\ \gamma \\ &s.t. \\ &\gamma>0, \\ &trace(\overline{P}_i) \le \gamma, \forall i \in I, \\ &q_i = 0, r_i = 0, \forall i \in I_0, \\ &\overline{P}_i - \varepsilon I_3 - \overline{E}_i^T Z_i \overline{E}_i \succ 0, \forall i \in I, i \notin I_0, \\ &P_i - \varepsilon I_2 - E_i^T Z_i E_i \succ 0, \forall i \in I_0, \\ &\overline{A}_i^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \overline{A}_i + \overline{E}_i^T \Lambda_i \overline{E}_i + \alpha_i \overline{P}_i \prec 0 \\ &, \forall i \in I, i \notin I_0, \\ &A_i^T P_i + P_i A_i + E_i^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i \prec 0, \forall i \in I_0, \\ &\overline{F}_{ij}^T \left(\overline{P}_i - \overline{P}_j\right) \overline{F}_{ij} = \overline{F}_{ij}^T \left(\overline{H}_{ij} + \overline{H}_{ij}^T\right) \overline{F}_{ij} \\ &, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0, \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

مسأله ۲: مسأله بهینه‌سازی زیر در خصوص توسعه ناحیه جذب سیستم حلقه بسته (۸) با طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت پیوسته (۷) بر اساس تعاریف ارائه شده در قضیه ۳ و با هدف محاسبه $\overline{M}_i$، $\overline{P}_i$، γ، Z_i، $\overline{\omega}_{ij}^2$، $\overline{\omega}_{ij}^1$، Λ_i و α_i برای $i \in I$ پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min\ \gamma \\ &s.t. \\ &\gamma>0, \\ &trace(\overline{P}_i) \le \gamma, \quad \forall i \in I, \\ &q_i = 0, r_i = 0, \quad \forall i \in I_0, \\ &\overline{P}_i - \varepsilon I_3 - \overline{E}_i^T Z_i \overline{E}_i \succ 0, \quad \forall i \in I, i \notin I_0, \\ &P_i - \varepsilon I_2 - E_i^T Z_i E_i \succ 0, \quad \forall i \in I_0, \\ &\left(\overline{A}_i + \overline{B}_i \overline{M}_i\right)^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \left(\overline{A}_i + \overline{B}_i \overline{M}_i\right) \\ &+ \overline{E}_i^T \Lambda_i \overline{E}_i + \alpha_i \overline{P}_i \prec 0, \quad \forall i \in I, i \notin I_0, \\ &\left(A_i + B_i M_i\right)^T P_i + P_i \left(A_i + B_i M_i\right) \\ &+ E_i^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i \prec 0, \quad \forall i \in I_0, \\ &\overline{F}_{ij}^T \left(\overline{P}_i - \overline{P}_j\right) \overline{F}_{ij} = \overline{F}_{ij}^T \left(\overline{\Gamma}_{ij} + \overline{\Gamma}_{ij}^T\right) \overline{F}_{ij} \\ &, \forall i \in I, \ j \in N_i, \ F_{ij} \neq 0, \\ &\left(\overline{M}_i - \overline{M}_j\right) \overline{F}_{ij} = 0, \quad \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0, \\ &(\overline{A}_i + \overline{B}_i \overline{M}_i) \overline{F}_{ij} = (\overline{A}_j + \overline{B}_j \overline{M}_j) \overline{F}_{ij} \\ &, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0, \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

تذکر ۵: بزرگترین تخمین ناحیه جذب سیستم (۱)، متناظر با تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته بدست آمده از مسأله ۱و۲، مجموعه سطح $\Omega(c^*)$ می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$D_{est} = \Omega(c^*) = \{x \mid \bar{x}^T \overline{P}_i \bar{x} \le c^*, x \in X_i, i \in I\} \qquad (۴۸)$$

واضح است که $D_{est} \subseteq X$ است و c^* بزرگ‌ترین مقداری است که به ازای آن مجموعه‌ی سطح $\Omega(c)$ در فضای X محصور می‌گردد.

[1] Volume

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

با توجه به ساختار دوبعدی سیستم (۱)، مجموعه‌ی بسته‌ی $\Omega(c^*)=\{x\,|\,\bar{x}^T\bar{P}_i\bar{x}\le c^*,\ x\in X_i, i\in I\}$ دارای بیشترین مساحت در ناحیه کاری X می‌باشد که همان تخمین بهینه ناحیه جذب است. برای انتخاب c^* الگوریتمی نوشته شده است که c را با عدد اسکالر مثبت کوچکی مقداردهی اولیه می‌کند و سپس در گام‌های بعدی هر بار مقدار c را اندکی افزایش می‌دهد. c^* اولین مقداری است که به ازای آن $\Omega(c)$ بر مرزهای X مماس می‌شود.

با توجه به تذکر ۴، با فرض $\bar{\omega}_{ij}^1=0,\ \bar{\omega}_{ij}^2=0$ و حل دو مسأله ۱و۲، می‌توان ناحیه جذب بهینه سیستم (۱) حول مبدأ مختصات را توسط تابع لیاپانوف PWQ پیوسته نیز بدست آورد. انتظار می‌رود که تخمین‌های بهینه بدست آمده به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته بزرگتر از تخمین‌های بهینه بدست آمده توسط تابع لیاپانوف PWQ پیوسته باشد، زیرا تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته محدودیت کمتری نسبت به تابع لیاپانوف PWQ پیوسته دارد که در آن $\bar{\omega}_{ij}^1$ و $\bar{\omega}_{ij}^2$، فقط مقادیر صفر را می‌پذیرد. این موضوع با ارائه دو مثال در بخش شبیه‌سازی بررسی می‌شود.

۶- نتایج شبیه‌سازی

مثال ۱- سیستم

$$\begin{cases}\dot{x}_1=ax_1+bx_2\\ \dot{x}_2=cx_1+dx_2+e\,\mathrm{sat}(x_1+x_2)\end{cases},\ |x_1|\le 10,\ |x_2|\le -10 \qquad (۴۹)$$

را در نظر بگیرید که در آن تابع $sat(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$sat(x)=\begin{cases}1 & x\ge 1\\ x & -1<x<1\\ -1 & x\le -1\end{cases} \qquad (۵۰)$$

به دلیل وجود تابع $sat(x)$ دامنه به سه زیرناحیه زیر افراز می‌شود

$$\hat{X}_1=\{x\in R^2 : x_1+x_2\le -1\},$$
$$\hat{X}_2=\{x\in R^2 : -1\le x_1+x_2\le 1\},$$
$$\hat{X}_3=\{x\in R^2 : x_1+x_2\ge 1\},$$

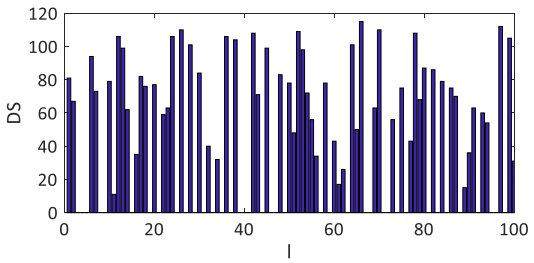
که در آن $I=\{1,2,3\}$ و $I_0=2$. همچنین، برای زیرسیستم

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}a & b\\ c+e & d+e\end{bmatrix}x, -1\le x_1+x_2\le 1 \qquad (۵۱)$$

که در ناحیه $\hat{X}_2$ تعریف شده و شامل مبدأ مختصات است، مقداردهی تصادفی متغیرهای a,b,c,d و e به گونه‌ای انجام شده است که این زیرسیستم پایدار باشد. واضح است که با وجود پایداری زیرسیستم (۲)، هیچ تضمینی برای پایداری این مجموعه از سیستم‌ها وجود ندارد. هدف این مثال این است که با تولید تعداد زیادی سیستم و حل مسأله ۱ برای آنها به‌کمک توابع لیاپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته، مقایسه‌ای منصفانه میان این دو روش تخمین ناحیه جذب سیستم صورت گیرد. بدین منظور، صد سیستم قطعه‌ای آفاین مطابق با توصیف فوق بطور تصادفی تولید شده است و مسأله ۱ برای این سیستم‌ها توسط YALMIP حل می‌گردد [۴۷]. برای l امین سیستم، $1\le l\le 100$، مساحت ناحیه جذب بهینه حاصل از تابع لیاپانوف PWQ پیوسته را $S_C(l)$ و مساحت ناحیه جذب بهینه حاصل از تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته را $S_D(l)$ در نظر بگیرید. تفاضل این دو مساحت به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$DS=S_D(l)-S_C(l) \qquad (۵۲)$$

در شکل ۱، نمودار میله‌ای DS بر حسب l رسم شده است.



شکل ۱: نمودار میله‌ای تفاضل مساحت DS بر حسب l

با توجه به شکل ۱، از میان یک‌صد سیستم منتخب، تعداد شصت و یک سیستم با استفاده از تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته در مقایسه با روش پیوسته متناظرش به تخمین بزرگتری از ناحیه جذب رسیده‌اند و در باقی سیستم‌ها ناحیه جذب یکسان بدست آمده است. این مثال نشان می‌دهد که روش پیشنهادی بهبود قابل ملاحظه‌ای در تخمین ناحیه جذب سیستم حلقه باز و کاهش محافظه‌کاری ایجاد کرده که این کاهش بدلیل خفیف کردن[1] شرط پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرزها می‌باشد.

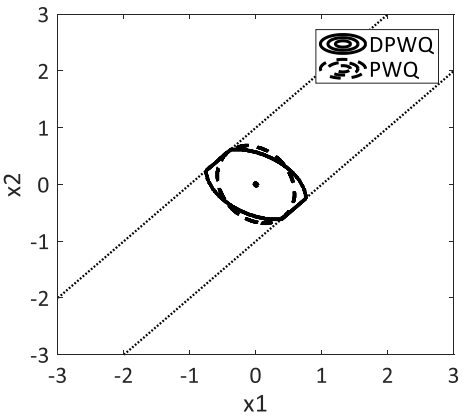
مثال ۲- سیستم قطعه‌ای آفاین با اشباع واحد زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0.9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ sat(x_1-x_2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad (۵۳)$$
$$,|x_1|\le 3,\ |x_2|\le 3$$

در این مثال حل دو مسأله ۱ و ۲ و محاسبه تخمین بهینه ناحیه جذب سیستم به‌کمک تابع لیاپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته مورد نظر است. حل مسأله توسط PENBMI انجام شده است [۴۸]. با حل مسأله ۱، مساحت تخمین‌های بهینه برای ناحیه جذب سیستم حول مبدأ مختصات برای هر دو تابع لیاپانوف پیوسته و ناپیوسته تقریبا یکسان می‌باشد که در شکل ۲ قابل مشاهده است.

[1] relaxation

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]



شکل ۲: ناحیه جذب سیستم حلقه باز به‌کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته (خط‌ضخیم) و به‌کمک تابع لیاپانوف PWQ پیوسته (خط‌چین)

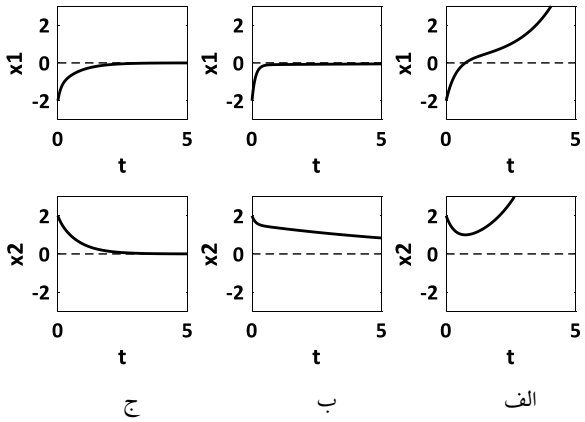
با حل مسأله ۲، به ازای هر $i \in I$، ضرایب کنترل‌کننده فیدبک حالت $\overline{M}_i$ و ماتریس‌های $\overline{P}_i$ متناظر با تابع لیاپانوف PWQ پیوسته به صورت زیر بدست آمده است:

$$\overline{M}_1 = [\text{-}4.6589 \;\; \text{-}13.2212 \;\; 8.4244]$$
$$\overline{M}_2 = [\text{-}5.9894 \;\; \text{-}1.5082 \;\; 0]$$
$$\overline{M}_3 = [\text{-}4.6589 \;\; \text{-}13.2212 \;\; \text{-}8.4244]$$
$$\overline{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & \text{-}2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & \text{-}6.2849 \\ \text{-}2.4619 & \text{-}6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$
$$P_2 = \begin{bmatrix} 13.2875 & 0.9908 \\ 0.9908 & 13.7096 \end{bmatrix}$$
$$\overline{P}_3 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & 2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & 6.2849 \\ 2.4619 & 6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$

و همچنین ماتریس‌های $\overline{M}_i$ و $\overline{P}_i$ متناظر با تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته به صورت زیر بدست آمده است.

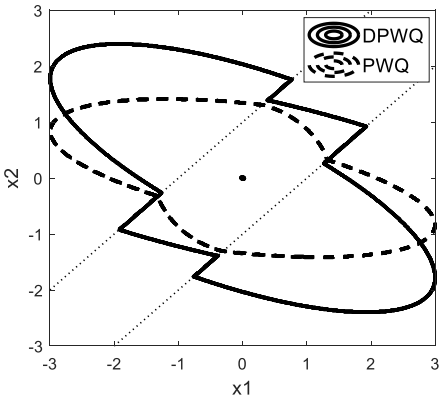
$$\overline{M}_1 = [\text{-}0.4708 \;\; \text{-}3.0561 \;\; 2.8199]$$
$$\overline{M}_2 = [\text{-}8.5203 \;\; \text{-}7.3693 \;\; 0]$$
$$\overline{M}_3 = [\text{-}0.4708 \;\; \text{-}3.0561 \;\; \text{-}2.8199]$$
$$\overline{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & \text{-}2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & \text{-}6.2849 \\ \text{-}2.4619 & \text{-}6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$
$$P_2 = \begin{bmatrix} 13.2875 & 0.9908 \\ 0.9908 & 13.7096 \end{bmatrix}$$
$$\overline{P}_3 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & 2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & 6.2849 \\ 2.4619 & 6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$

در شکل ۳، به‌ترتیب مسیرهای حالت سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته پایدار شده به کمک تابع لیاپانوف PWQ پیوسته و سیستم حلقه بسته پایدار شده به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته با شرط اولیه $x_0 = [-2 \;\; 2]^T$ رسم شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، سیستم ناپایدار (۵۳) به کمک کنترل‌کننده فیدبک حالت پایدار شده است.



شکل ۳: مسیرهای حالت رسم شده به ازای شرط اولیه $x_0 = [-2 \;\; 2]^T$ برای الف) سیستم حلقه باز ب) سیستم حلقه بسته پایدار شده توسط تابع لیاپانوف PWQ پیوسته ج) سیستم حلقه بسته پایدار شده توسط تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته

ناحیه‌های جذب توسعه یافته سیستم حلقه بسته متناظر با توابع لیاپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته در شکل ۴ به تصویر کشیده است و مساحت حاصل از آنها نیز در جدول ۱ آورده شده است.



شکل ٤: ناحیه جذب گسترش یافته سیستم حلقه بسته به‌کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته (خط‌ضخیم) و به‌کمک تابع لیاپانوف PWQ پیوسته (خط‌چین)

جدول ۱: مساحت ناحیه جذب توسعه یافته بهینه برای توابع لیاپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته

Lyapunov function Type	Areas of the DA
Continuous PWQ	10.54
Discontinuous PWQ	16.42

با توجه به جدول ۱، مساحت ناحیه جذب توسعه یافته بهینه برای تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته برابر ۱۶/۴۲ و برای تابع لیاپانوف PWQ پیوسته برابر ۱۰/۵۴ محاسبه می‌گردد که مؤیّد این نکته است که استفاده از تابع

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

لیاپانوف PWQ ناپیوسته در مقایسه با روش پیوسته متناظرش به تخمین بزرگتری از ناحیه جذب منجر شده است.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت، ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین دوبعدی و زمان-پیوسته توسعه داده شد. روش پیشنهادی شامل استفاده از تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته برای تخمین و گسترش ناحیه جذب و یافتن بزرگ‌ترین تخمین یا تخمین بهینه ناحیه جذب به‌کمک مجموعه‌ی سطح تابع لیاپانوف بود. مسأله‌های تخمین ناحیه جذب سیستم حلقه باز و حلقه بسته در قالب BMI حل شد. سپس، بزرگ‌ترین مجموعه‌ی سطح تابع لیاپانوف محصورشده در فضای کاری محاسبه گردید و به عنوان تخمین بهینه ناحیه جذب لحاظ شد. محاسبه تخمین بهینه ناحیه جذب به‌کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته، از انعطاف بیشتری نسبت به روش پیوسته‌ی متناظرش برخوردار بود زیرا شرط پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرز شرطی محافظه‌کارانه است که این موضوع در قالب مثال به تصویر کشیده شد. ازآنجایی‌که تابع لیاپانوف PWQ پیوسته از جمله موثرترین و رایج‌ترین نوع توابع جهت آنالیز پایداری و طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین می‌باشد، با جایگزینی قیود پیوستگی تابع لیاپانوف با قیدی با محافظه‌کاری کمتر، نتایج بهتری حاصل شد.

مراجع

[1] P. Siewniak and B. Grzesik, "A generalized geometrical piecewise-affine model of DC-DC power electronic converters," International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 43, pp. 342-373, 2015.

[2] P. Siewniak and B. Grzesik, "The piecewise-affine model of buck converter suitable for practical stability analysis," International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 43, pp. 3-21, 2015.

[۳] کاردهی مقدم ریحانه، پریز ناصر، مدیر شانه چی حسن، وحیدیان کامیاد علی. افزایش زمان بحرانی سیستمهای غیر خطی بوسیله گسترش جهت‌دار ناحیه جذب. مجله کنترل. ۱۳۸۹؛ ۴ (۲) :۱-۱۰.

[4] S. Anbu and N. Jaya, "Design of gain scheduling adaptive control for continuous stirred tank reactor," International Journal of Automation and Control, vol. 8, pp. 141-157, 2014.

[5] A. Chakraborty, P. Seiler, and G. J. Balas, "Nonlinear region of attraction analysis for flight control verification and validation," Control Engineering Practice, vol. 19, pp. 335-345, 2011.

[6] M. L. Matthews and C. M. Williams, "Region of attraction estimation of biological continuous Boolean models," in Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2012 IEEE International Conference on, 2012, pp. 1700-1705.

[7] S. Sundar, "Effect of Elevated Carbon Dioxide Concentration on Plant Growth: A Mathematical Model," American Journal of Applied Mathematics and Statistics, vol. 3, pp. 59-67, 2015.

[8] J. Haddad and N. Geroliminis, "On the stability of traffic perimeter control in two-region urban cities," Transportation Research Part B: Methodological, vol. 46, pp. 1159-1176, 2012.

[9] A. Bemporad, "Efficient conversion of mixed logical dynamical systems into an equivalent piecewise affine form," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, pp. 832-838, 2004.

[۱۰] ملااحمدیان کاسب حامد، کریم پور علی، پریز ناصر. سیستم های تکه‌ای خطی تبار مستقیم: کلاس جدیدی از سیستم‌های هایبرید با دینامیک‌های خطی تبار و مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم. مجله کنترل. ۱۳۹۱؛ ۶ (۱) :۲۱-۲۹.

[11] N. Eghbal, N. Pariz, and A. Karimpour, "Uniform modeling of parameter dependent nonlinear systems," Journal of Zhejiang University SCIENCE C, vol. 13, pp. 850-858, 2012.

[۱۲] کشوری خور هادی، کریم پور علی، پریز ناصر. شناسائی سیستم های سوئیچ شونده خطی با استفاده از نگاشت معادلات خطی همزمان. مجله کنترل. ۱۳۹۳؛ ۸ (۱) :۲۱-۳۰.

[13] J. H. Richter, W. Heemels, N. van de Wouw, and J. Lunze, "Reconfigurable control of piecewise affine systems with actuator and sensor faults: stability and tracking," Automatica, vol. 47, pp. 678-691, 2011.

[14] L. Khodadadi, B. Samadi, and H. Khaloozadeh, "Estimation of region of attraction for polynomial nonlinear systems: A numerical method," ISA transactions, 2013.

[15] H. K. Khalil and J. Grizzle, Nonlinear systems vol. 3: Prentice hall Upper Saddle River, 2002.

[16] Y. Chen, Y. Sun, C.-S. Tang, Y.-G. Su, and A. P. Hu, "Characterizing regions of attraction for piecewise affine systems by continuity of discrete transition functions," Nonlinear Dynamics, vol. 90, pp. 2093-2110, 2017.

[17] Y. Chen, Y. Sun, C. Tang, Y. Su, and A. P. Hu, "Computing Regions of Stability for Limit Cycles of Piecewise Affine Systems," Information Technology And Control, vol. 46, pp. 459-469, 2017.

[18] M. Johansson and A. Rantzer, "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems," IEEE transactions on automatic control, vol. 43, pp. 555-559, 1998.

[19] B. Samadi and L. Rodrigues, "A unified dissipativity approach for stability analysis of piecewise smooth systems," Automatica, vol. 47, pp. 2735-2742, 2011.

[20] H. Nakada and K. Takaba, "Local stability analysis of piecewise affine systems," Rn, vol. 10, p. 1, 2003.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

[21] R. Iervolino, F. Vasca, and L. Iannelli, "Cone-copositive piecewise quadratic lyapunov functions for conewise linear systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, pp. 3077-3082, 2015.

[22] M. Johansson, "Analysis of piecewise linear system via convex optimization-a unifying approach," in Proceedings of the 1999 IFAC World Congress, 1999, pp. 521-526.

[23] M. K.-J. Johansson, Piecewise linear control systems: a computational approach vol. 284: Springer, 2003.

[24] J. Xu and L. Xie, "Homogeneous polynomial Lyapunov functions for piecewise affine systems," in American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005, 2005, pp. 581-586.

[25] N. Eghbal, N. Pariz, and A. Karimpour, "Discontinuous piecewise quadratic Lyapunov functions for planar piecewise affine systems," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 399, pp. 586-593, 2013.

[26] T. González and M. Bernal, "Progressively better estimates of the domain of attraction for nonlinear systems via piecewise Takagi–Sugeno models: Stability and stabilization issues," Fuzzy Sets and Systems, 2015.

[27] S. Gering, L. Eciolaza, J. Adamy, and M. Sugeno, "A piecewise approximation approach to nonlinear systems: Stability and region of attraction," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 23, pp. 2231-2244, 2015.

[28] R. Iervolino, D. Tangredi, and F. Vasca, "Lyapunov stability for piecewise affine systems via cone-copositivity," Automatica, vol. 81, pp. 22-29, 2017.

[29] A.-T. Nguyen, M. Sugeno, V. Campos, and M. Dambrine, "LMI-based stability analysis for piecewise multi-affine systems," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 25, pp. 707-714, 2017.

[30] L. Rodrigues and S. Boyd, "Piecewise-affine state feedback for piecewise-affine slab systems using convex optimization," Systems & Control Letters, vol. 54, pp. 835-853, 2005.

[31] K. Liu, Y. Yao, D. Sun, and V. Balakrishnan, "Improved state feedback controller synthesis for piecewise-linear systems," International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 8, pp. 6945-6957, 2012.

[32] A. Benine-Neto, S. Mammar, B. Lusetti, and S. Scalzi, "Piecewise affine control for lane departure avoidance," Vehicle System Dynamics, vol. 51, pp. 1121-1150, 2013.

[33] N. Dadkhah and L. Rodrigues, "Non-fragile state-feedback control of uncertain piecewise-affine slab systems with input constraints: a convex optimisation approach," IET Control Theory & Applications, vol. 8, pp. 626-632, 2014.

[34] J. Raouf and L. Rodrigues, "Stability and stabilization of piecewise-affine slab systems subject to Wiener process noise," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 25, pp. 949-960, 2015.

[35] H. Razavi, K. Merat, H. Salarieh, A. Alasty, and A. Meghdari, "Observer based minimum variance control of uncertain piecewise affine systems subject to additive noise," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 19, pp. 153-167, 2016.

[36] Y. Eren, J. Shen, and K. Camlibel, "Quadratic stability and stabilization of bimodal piecewise linear systems," Automatica, vol. 50, pp. 1444-1450, 2014.

[37] M. di Bernardo, U. Montanaro, R. Ortega, and S. Santini, "Extended hybrid model reference adaptive control of piecewise affine systems," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 21, pp. 11-21, 2016.

[38] M. Rubagotti, L. Zaccarian, and A. Bemporad, "A Lyapunov method for stability analysis of piecewise-affine systems over non-invariant domains," International Journal of Control, vol. 89, pp. 950-959, 2016.

[39] P. Li, J. Lam, and K. C. Cheung, "Stability, stabilization and L2-gain analysis of periodic piecewise linear systems," Automatica, vol. 61, pp. 218-226, 2015.

[40] L. Rodrigues, Dynamic output feedback controller synthesis for piecewise-affine systems: Stanford University, 2002.

[41] S. Pettersson and B. Lennartson, "Exponential stability of hybrid systems using piecewise quadratic Lyapunov functions resulting in LMIs," in IFAC, 14th Triennial World Congress, Beijing, PR China, 1999.

[42] J. P. LaSalle and S. Lefschetz, Stability by Liapunov's direct method: with applications vol. 4: Academic Press New York, 1961.

[43] O. Hachicho, "A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions," Journal of the Franklin Institute, vol. 344, pp. 535-552, 2007.

[44] G. Chesi, Domain of attraction: analysis and control via SOS programming vol. 415: Springer Science & Business Media, 2011.

[45] M. Johansson, "Piecewise quadratic estimates of domains of attraction for linear systems with saturation," in CD-ROM of 15th IFAC World Congress, 2002.

[46] T. González and M. Bernal, "Progressively better estimates of the domain of attraction for nonlinear systems via piecewise Takagi–Sugeno models: Stability and stabilization issues," Fuzzy Sets and Systems, vol. 297, pp. 73-95, 2016.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]

[47] J. Lofberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on, 2004, pp. 284-289.

[48] D. Henrion, J. Lofberg, M. Kocvara, and M. Stingl, "Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI," in Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on, 2005, pp. 7581-7586.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.1.6]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.15]