**مجله کنترل**
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۸، صفحه۸۳-۷۱

# طراحی و تحلیل پایداری رؤیتگر و کنترل‌کننده بهینه تصادفی برای سیستم تعلیق فعال مبتنی بر مدل نامعین ایتو

علیرضارمضانی مقدم [۱]، حامد کبریایی [۲]

[۱] کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، a.ramezaney@ut.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، kebriaei@ut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۲۸ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۳/۲۰ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۲۷

**چکیده:** این مقاله به بررسی طراحی یک کنترل‌کننده خطی تصادفی برای مدل نامعین تعلیق خودرو می‌پردازد. برای سیستم یک چهارم خودرو که پارامترهای میرایی و سختی آن متاثر از اغتشاشات تصادفی است مدل تصادفی ایتو به دست آمده است. به‌منظور مقابله با عدم قطعیت مدل، قانون کنترلی بهینه تصادفی با استفاده از معادلات تصادفی همیلتون-جاکوبی-بلمن استخراج شده است. در ادامه با استفاده از لم ایتو و تعمیم تصادفی پایداری لیاپانوف، پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته اثبات می‌شود. کنترل‌کننده تصادفی طراحی شده، برای فرم کلی سیستم‌های نامعین ایتو که در آن نویزهای سفید گوسی مستقل در چندین کانال روی پارامترهای سیستم تاثیر می‌گذارند، استخراج شده است که در ادامه بر روی مدل تصادفی تعلیق خودرو پیاده‌سازی می‌شود. همچنین در این مقاله نشان خواهیم داد قانون استقلال طراحی رؤیتگر از کنترل‌کننده برای چنین سیستم‌های نامعینی که نویز در پارامترها ضرب می‌شود برقرار نخواهد بود. در نتیجه تمهیدی جهت طراحی رؤیتگر خطی برای این سیستم‌ها با استفاده از معادلات سیستم افزونه به دست آمده است. در نهایت نتایج شبیه‌سازی‌های عددی جهت صحه گذاری بر کارآمدی روش ارائه شده آورده شده است.

**کلمات کلیدی:** معادلات تصادفی ایتو، عدم قطعیت ضرب‌شونده، سیستم تعلیق فعال، پایداری تصادفی، رؤیتگر حالت.

# Design and stability analysis of optimal controller and observer for Itô stochastic model of active vehicle suspension system

**Alireza Ramezani Moghadam; Hamed Kebriaei**

**Abstract:** This paper investigates Itô-type stochastic linear quadratic controller design for uncertain model of vehicle suspension. The Itô stochastic model of quarter-car is constructed considering parametric stochastic perturbations in stiffness and damping characteristics of suspension. To tackle with uncertainties of model, a stochastic optimal control law is obtained applying stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equation. By means of Itô lemma and stochastic extension of Lyapunov method, stochastic stability of the closed-loop system is guaranteed. The stochastic optimal controller is designed for a general form of Itô uncertain model which is comprised multi-dimensional multiplicative perturbations and then it is implemented on perturbed model of vehicle suspension. Furthermore, it is shown that the separation principal does not hold for the system with state multiplicative noise; therefore, the synthesized observer-based controller guarantees the stability of augmented dynamic consists of system and estimation error dynamics. A simulation study is performed to evaluate the effectiveness of stochastic optimal control approach in satisfying objectives of active suspension. To this end, time and frequency responses of ride comfort and road holding characteristics are demonstrated for two specific road cases including sinusoidal bump and ISO random profile.

**Keywords:** Itô stochastic equations; multiplicative perturbation, Active suspension system; stochastic stability; Observer.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

## ۱) مقدمه

سیستم تعلیق نقشی اساسی در شکل‌دهی دینامیک خودرو و فراهم آوردن یک مصالحه مطلوب میان شاخصه‌های خوش‌سواری و فرمان‌پذیری خودرو ایفا می‌کند. تعلیق یک سامانه واسط است که بین چرخ‌های خودرو و کابین سرنشینان قرار دارد و مسئولیت اصلی آن، جذب نوسانات نامعین و نامطلوب پروفیل جاده است تا از انتقال آن‌ها به سرنشین جلوگیری به عمل آید. از این منظر می‌توان گفت تعلیق مهمترین عامل در فراهم آوردن راحتی سرنشین در طی حرکت خودرو است. همچنین این سیستم وظیفه نگهداری وزن خودرو، برقراری فاصله معین میان چرخ‌ها و بدنه و همچنین فرمان‌پذیری خودرو بر سطح جاده را نیز بر عهده دارد [۱]. به طور ذاتی، سیستم تعلیق غیرفعال در بازه محدودی قادر به نشان دادن عملکرد مطلوب است. در نتیجه جهت ایجاد مشخصه‌های سواری مناسب نیازمندیم به روش‌های فعال‌سازی تعلیق به وسیله استراتژی‌های مختلف کنترلی متوسل شویم [۲, ۳].

سیستم تعلیق خودرو تحت تاثیر عدم قطعیت‌های تصادفی قرار دارد که یا از اغتشاشات خارجی و یا از نامعینی‌های پارامتری ناشی می‌شوند. وجود عدم قطعیت می‌تواند خروجی سیستم را دستخوش تغییرات ناخواسته کند که به کاهش عملکرد سیستم حلقه بسته منجر می‌شود. در نتیجه برخورد صحیح با چنین نامعینی‌هایی از مهمترین چالش‌های پیش‌رو مهندسین خودرو است. از جمله مهمترین نامعینی‌های وارد بر سیستم تعلیق که یکی از چالش‌های کنترلی مهم در برخورد با این سیستم نیز محسوب می‌شود، وجود نامعینی پروفیل جاده است که به صورت یک عدم‌قطعیت نامتناسب خود را وارد معادلات سیستم می‌کند [۴]. همچنین، سیستم تعلیق خودرو مانند هر سیستم دیگری در طبیعت، علاوه بر نامعینی‌های خارجی در معرض نامعینی‌های داخلی و یا پارامتری نیز قرار دارد. در سیستم خودرو عوامل متعددی همچون وجود دینامیک‌های مدل‌نشده، ذات غیرخطی مشخصه‌های سختی و میرایی موجود در تعلیق، شرایط محیطی و فرسودگی قطعات باعث تحمیل نامعینی پارامتری به سیستم می‌شوند. با توجه به تاثیر این نامعینی‌ها بر روی پارامترهای سیستم‌های ارتعاشی، بسیاری از مطالعات در زمینه فعال‌سازی تعلیق بر اهمیت مقابله با نامعینی‌های پارامتری تاکید کرده‌اند [۵, ۶]. به طور مثال جهت مقابله با عدم قطعیت پارامتری [۷] از کنترل مقاوم و [۸] از کنترل تطبیقی بر روی سیستم تعلیق خودرو استفاده کرده‌اند. علی رغم اینکه نامعینی‌های پارامتری در سیستم‌های ارتعاشی به صورت فرآیندهای تصادفی قابل مدل شدن هستند [۹, ۱۰]، در تمامی این مطالعات نامعینی پارامتری به صورت یک سیگنال نامعلوم نرم-محدود مدل شده است. باید توجه داشت که قرار دادن حد بالا برای سیگنال به جای اینکه از توزیع احتمال آن استفاده کنیم، ریسک محافظه کاری را بالاتر برده و درنتیجه عملکرد سیستم افت خواهد کرد.

با درنظرگیری معادلات دینامیکی سیستم تعلیق به صورت معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو قادر خواهیم بود با دسته وسیعی از عدم قطعیت‌ها به فرم فرآیند تصادفی وینر[1] مقابله کنیم. مدل‌های تصادفی ایتو یکی از کاربردی‌ترین مدل‌های تصادفی در زمینه‌هایی همچون اقتصاد، کنترل پرواز، مهندسی سازه و سیستم‌های ارتعاشی است [۱۰-۱۲]. مطالعات زیادی در زمینه پایدارسازی و طراحی استراتژی کنترلی برای مدل‌های تصادفی ایتو انجام شده است که به طور مثال کار [۱۳, ۱۴] در زمینه پایدارسازی و [۱۵-۱۷] در بحث طراحی کنترل‌کننده قابل ملاحظه است.

از طرفی کنترل‌کننده خطی درجه دو یک روش بهینه کارا در زمینه فعال سازی سیستم تعلیق خودرو به حساب می‌آید. با توجه به ویژگی‌های کنترل‌کننده‌های بهینه همچون ایجاد مصالحه‌ای مطلوب بر پایه کمینه-کردن تابع هزینه‌ای شامل معیارهای عملکردی و نیز میزان انرژی کنترلی، علاقه‌مندی به این کنترل‌کننده‌ها به شکل چشم‌گیری افزایش یافته است. [۳] از یک روش مقاوم تطبیقی جهت کنترل سیستم تعلیق استفاده کرده است که یک کنترل درجه دو خطی در حلقه اصلی کنترلی آن به کار رفته است. [۱۸] با استفاده از یک کمک فنر مغناطیسی توانسته سیستم تعلیق را با استفاده از استراتژی درجه دو خطی کنترل نماید. [۱۹] به مدل‌سازی و شبیه‌سازی تعلیق فعال خودرو به کمک روش کنترلی ترکیبی $H_\infty / LQR$ پرداخته است. از طرفی تمامی متغیرهای حالت در سیستم تعلیق در دسترس نیستند و یا اندازه‌گیری همه آن‌ها هزینه‌بر است. بنابراین استفاده از رؤیتگر حالت در سیستم تعلیق فعال بسیار متداول است. به عنوان نمونه کارهای [۲۰, ۲۱] با استفاده از روش کنترلی درجه دو خطی و نیز یک فیلتر کالمن به عنوان رؤیتگر توانسته یک سیستم تعلیق فعال برای خودرو طراحی کند. اگرچه کنترل‌کننده درجه دو خطی به طور گسترده‌ای در سیستم تعلیق فعال استفاده شده است، همچنان چه در بحث طراحی کنترل بهینه و چه رؤیتگر حالت جای خالی تحلیل وجود عدم‌قطعیت‌های پارامتری تصادفی در سیستم تعلیق کاملا مشهود است.

[1] Wiener process



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

هدف این مقاله طراحی یک کنترل‌کننده درجه دو خطی بهینه برای سیستم تعلیق فعالی است که در معرض عدم‌قطعیت تصادفی ضرب شونده قرار دارد. نوآوری‌های موجود در این مطالعه عبارت است از: ۱) استفاده از یک مدل تصادفی ایتو برای سیستم تعلیق خودرو با در نظرگیری عدم قطعیت‌های تصادفی در مشخصه‌های سختی و میرایی مدل ۲) طراحی کنترل درجه دو خطی تصادفی برای سیستم‌های تصادفی دارای نویز پارامتریک چند بعدی و اعمال آن به سیستم تعلیق خودرو ۳) بررسی پایداری تصادفی قانون کنترل بهینه تصادفی با استفاده از لم ایتو و انتخاب تابع لیاپانوف مناسب و مستقل از شرایط کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری. به این ترتیب نشان داده شده است که کنترل درجه دو خطی غیر تصادفی در صورت اعمال به سیستم دارای نویز پارامتریک (ضرب شونده در حالت)، حتی در صورت برقراری شرایط کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری تحت شرایطی وابسته به شدت نویز، منجر به ناپایداری سیستم حلقه بسته می‌شود. در حالی که کنترل درجه دو خطی تصادفی که براساس ریاضیات ایتو گسترش یافته است قادر است سیستم حلقه بسته را پایدار سازد ۴) نشان داده شده است که در سیستم دارای نویز پارامتریک قانون تفکیک پذیری برای طراحی مستقل رؤیتگر خطی و کنترل‌کننده برقرار نیست. به این ترتیب راهکاری برای طراحی رؤیتگر حالت با استفاده از سیستم افزوده[2] پیشنهاد شده است و حاصل کار بر روی مدل تعلیق خودرو پیاده‌سازی شده است.

در ادامه روند این مقاله به این شرح است: مدل تصادفی ایتو سیستم تعلیق در بخش ۲ استخراج می‌شود. مساله کنترل بهینه تصادفی در بخش ۳ فرمول‌بندی می‌شود و پایداری سیستم حلقه بسته در فصل ۴ بررسی گردیده است. فصل ۵ به چالش‌های پیش رو در طراحی رؤیتگر برای سیستم تصادفی می‌پردازد و نیز در همین فصل رؤیتگر خطی تصادفی برای سیستم طراحی شده است. جهت ارزیابی استراتژی بهینه-تصادفی ارائه شده، فصل ۶ نتایج شبیه‌سازی‌های عددی را در بر می‌گیرد. درنهایت جمع‌بندی در بخش ۷ ارائه گردیده است.

**نمادگذاری:** $\Phi(\Omega,F,P)$ یک فضای احتمالاتی است با فضای نمونه $\Omega$ که $F$ یک سیگما الجبرا[3] از زیرمجموعه‌های فضای نمونه و $p$ اندازه احتمالاتی است. $E(.)$ معرف عملگر امید متناسب با اندازه $p$ است. برای یک ماتریس متقارن حقیقی، $M>0$ نشان‌دهنده مثبت معین بودن $M$ است. $\lambda(M)$ معرف مقادیر ویژه ماتریس $M$ و $\|g(t)\|$ نماد نرم اقلیدسی $g(t)$ است. همچنین مولد[4] خرد $L(.)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

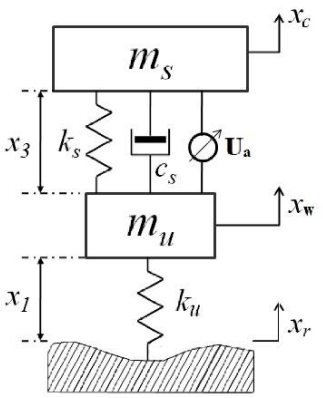
$$L\,.\,=\frac{\partial(.)}{\partial(x)}f(x,t)+\frac{1}{2}tr\left[g(x,t)g^{T}(x,t)\frac{\partial^{2}(.)}{\partial(x)^{2}}\right], \qquad (۱)$$

که در آن مدل تصادفی ایتو مطابق زیر است:

$$\begin{cases} d\vec{X}=f(X(t),u(t),t)dt+g(X(t),u(t),t)dw \\ \vec{X}(0)=\vec{X}_0 \end{cases} \qquad (۲)$$

## ۲) مدل نامعین یک چهارم خودرو

جهت مطالعه رفتاری ارتعاشی خودرو، یک مدل یک چهارم تعلیق شامل جسم‌های صلب بدنه (جسم معلق) و تایر (جسم نامعلق) و عناصر سختی و میرایی مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود.




شکل (۱) مدل یک چهارم خودرو

این مدل یکی از شناخته‌شده‌ترین مدل‌ها جهت مطالعه سیستم تعلیق خودرو است که در کاربردهای طراحی کنترل‌کننده تا امروز استفاده شده است [۲۲, ۲۳]. نکته حائز اهمیت در این مطالعه این است که با مدلسازی یک سیستم تعلیق غیرخطی به صورت خطی بسیاری از نکات ریز در مدلسازی آن را نادیده می‌گیریم. از جمله اینکه مشخصه‌های فنری و دمپری در تعلیق خودرو اساساً دارای ماهیتی غیرخطی و وابسته به تغییرات جابه جایی عمودی و سرعت عمودی چرخ‌ها (که خود از تغییرات جابه جایی عمودی جاده پیروی می‌کند) می‌باشند. از طرفی می‌دانیم خود جاده ماهیتی کاملا تصادفی دارد که این امر در مدلسازی های ایزو جاده مشخص است [۲۴]. بنابراین می‌توان اینگونه بیان کرد که عدم قطعیتهای تصادفی خود را درون مقدار پارامترهای فنری و دمپری نیز نشان

[2] augmented system
[3] sigma algebra
[4] infinitesimal generator



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

می‌دهد[۹, ۱۰]. جهت مطالعه عدم‌قطعیت‌ها در تعلیق، این مدل را به واسطه درنظرگرفتن نامعینی‌های پارامتری تصادفی و نیز عدم قطعیت پروفیل جاده، به مدل نامعین خودرو گسترش می‌دهیم. به این منظور با استفاده از اعمال قانون دوم نیوتن به دو جسم صلب، معادلات دیفرانسیل زیر برای دینامیک‌های این مدل به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= \frac{1}{m_s}\left[k_s(1+v_1)\ x_w - x_c\ + c_s(1+v_2)\ \dot{x}_w - \dot{x}_c\ + U_a\right.\\ \ddot{x}_w &= \frac{1}{m_u}\left[k_s(1+v_1)\ x_c - x_w\ - c_s(1+v_2)\ \dot{x}_w - \dot{x}_c\right.\\ &\quad \left.-U_a + k_u(1+v_3)\ x_r - x_w\ \right]\end{aligned} \tag{۳}$$

که در معادلات (۳) $m_s$ و $m_u$ به‌ترتیب نشان‌دهنده جرم جسم معلق یا کابین و جسم غیرمعلق یا تایر است، $x_c$ و $x_w$ جابه‌جایی بدنه و تایر است، $k_s$ و $k_u$ ضریب سختی جسم‌های معلق و غیرمعلق را نمایندگی می‌کند، $c_s$ ضریب میرایی سیستم است، $x_r$ جابه‌جایی عمودی جاده است و $U_a$ ورودی کنترلی است که به وسیله یک عملگر به سیستم اعمال می‌شود. در معادلات (۳) نامعینی‌های تصادفی به صورت ۳ فرآیند نویز سفید گوسی که مستقل و دارای توزیع یکسان[۵] هستند مدل را تحت تأثیر قرار داده‌اند. این سه فرآیند تصادفی $v_1$، $v_2$ و $v_3$ به ترتیب در سختی جسم معلق، میرایی جسم معلق و سختی جسم نامعلق وجود دارد.

به این ترتیب و با انتخاب متغیرهای حالت به شکل زیر:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_c - x_w, \dot{x}_c, x_w - x_r, \dot{x}_w \end{bmatrix}' \tag{۴}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d\vec{X} = &\ A\vec{X} + BU_a + Cr\ \ dt \\ &+\ D\vec{X}\ \ d\vec{w}_1 + E\vec{X}\ \ d\vec{w}_2 + F\vec{X}\ \ d\vec{w}_3, \end{aligned} \tag{۵}$$

که ماتریس‌های مدل در آن به قرار زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_s}{m_u} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_s}{m_u} & 0 & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix};\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_u}{m_u} & 0 \end{bmatrix}$$

پارامترهای مدل در جدول۱ آورده شده است. همچنین $\vec{w}$ ها فرآیندهای وینر هستند که بر روی فضای احتمالاتی $\Phi$ تعریف شده‌اند و داریم:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \begin{bmatrix} dw_1 & dw_2 & dw_3 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} v_1 dt & v_2 dt & v_3 dt \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

همچنین در معادلات (۳) $r = \dot{x}_r$ عدم قطعیت ورودی است.

قابل توجه است که متغیرهای حالت انتخاب شده در این بخش در عین مستقل بودن از هم دارای این خاصیت نیز هستند که معیارهای شناخته‌شده‌ای در ارزیابی عملکرد سواری خودرو به‌شمار می‌روند. $x_c - x_w$ فاصله بین کابین و تایر است که سنجشی بر معیار یکپارچگی تعلیق است و $x_r - x_w$ نیز نشان‌دهنده میزان قرار خودرو بر روی جاده و یا همان کنترل پذیری خودرو است. کنترل‌پذیری خودرو البته با میزان فشاری که تایر بر روی جاده وارد می‌کند ارتباط مستقیم دارد که در صورت مدل‌کردن تایر با یک فنر خطی با تقریب خوبی می‌توان گفت این نیرو نیز با فاصله میان تایر و جاده یا همان $x_r - x_w$ ارتباط مستقیم دارد. مهم‌ترین شاخصه عملکرد تعلیق خوش‌سواری است که با شتاب وارد بر کابین $\ddot{x}_c$ رابطه مستقیم دارد. اگرچه این شاخصه جایش در میان متغیرهای حالت خالی است اما می‌توان آن را به صورت خروجی سیستم در نظر گرفت و در شبیه‌سازی‌های پیش رو از آن جهت ارزیابی و مقایسه استفاده کرد. به این ترتیب معادله خروجی به صورت زیر است.

$$\ddot{x}_c = MX + N_1 X v_1 + N_2 X v_2 + PU_a \tag{۶}$$

که در این رابطه:

[5] independent and identically distributed (IID)



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

$$M=\begin{bmatrix}\frac{-k_s}{M_s} & \frac{-c_s}{M_s} & 0 & \frac{c_s}{M_s}\end{bmatrix};\ N_1=\begin{bmatrix}\frac{-k_s}{M_s} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};$$
$$N_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{-c_s}{M_s} & 0 & \frac{c_s}{M_s}\end{bmatrix};\ P=\frac{1}{M_s}$$

## ۳) فرمولاسیون مسأله درجه دوم خطی تصادفی

سیستم تصادفی خطی دارای عدم قطعت پارامتری، که روی فضای احتمالاتی $W(\Omega\ ,\ \mathrm{F}\ ,\ \mathrm{P})$ بنا شده است، به فرم معادلات دیفرانسیل ایتو زیر مفروض است.

$$dX = \ AX+BU(t)+b(t)\ \ dt+\sum_{i=1}^{r}D_iXdw_i(t), \qquad (۷)$$

در دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق $X(\mathrm{t})\in \mathrm{R}^n$ حالت‌های سیستم هستند، $U(\mathrm{t})\in \mathrm{R}^m$ ورودی کنترلی، $b(t)$ ورودی اغتشاشی و یا ورودی مرجع در مدل و $w_i(\mathrm{t})$ها فرآیندهای وینر مستقل دارای توزیع یکسان هستند. فرآیند وینر در $r$ تعداد کانال پارامترهای سیستم را دچار اغتشاش کرده است. بنابراین مشخص است که $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$، $B\in \mathrm{R}^{n\times m}$ و $D_i\in \mathrm{R}^{n\times n}$ که همگی ماتریس های حقیقی ثابت هستند.

تابع هزینه درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم

$$J_s=E\left(\left[\frac{1}{2}X^T(\mathrm{T})\Gamma X(\mathrm{T})+\Upsilon^T X(\mathrm{T})\right]+\frac{1}{2}\int_0^T\ X^T(t)QX(t)+u^TRu\ \ dt\right) \qquad (۸)$$

که در آن $\Gamma\in\Re^{n\times n}$ و $Q\in\Re^{n\times n}$ ماتریس‌های مثبت معین یا نیمه معین و $R\in\Re^{m\times m}$ مثبت معین است و همچنین $\Upsilon\in\Re^{n\times 1}$. اکنون مسأله کنترل بهینه تصادفی عبارت است از یافتن $u^*(\mathrm{t}):\ 0\ ,\ T\ \to U\subseteq\Re^m$ چنان که تابعک هزینه (۸) کمینه گردد یا به عبارتی:

$$J(u^*(\mathrm{t}))=\min_{u:\ 0\ ,\ T\to U}J(\mathrm{u(t)}) \qquad (۹)$$

**لم ۱:** تابع هزینه زیر را در نظر بگیرید.

$$J_s=E\left(K(X(\mathrm{T}))+\int_0^T L\ \ X(t),u(\mathrm{t}),t\ \ dt\right) \qquad (۱۰)$$

و همچنین مدل تصادفی ایتو زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases}dX=\ f(X(\mathrm{t}),\mathrm{u(t)},\mathrm{t})dt+g(X(\mathrm{t}),\mathrm{u(t)},\mathrm{t})dw\\ X(0)=X_0\end{cases}, \qquad (۱۱)$$

که در آن $K:\Re^n\to\Re$ و $f,g,L:\Re^n\times\Re^m\times\Re\to\Re^n$. با اعمال برنامه‌ریزی پویا بر روی این تابع هزینه و نیز استفاده از لم ایتو [۲۵] معادله تصادفی همیلتون-جاکوبی-بلمن به صورت زیر درخواهد آمد [۲۶].

$$-\frac{\partial J(\mathrm{x,t})}{\partial t}=\max_{u\in U}\left\{L(\mathrm{x,u,t})+\frac{\partial J(\mathrm{x,t})}{\partial x}\ f(\mathrm{x,u,t})+\frac{1}{2}tr\ \ g(\mathrm{x,u,t})g^T(\mathrm{x,u,t})\ \ \frac{\partial^2 J(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}\right\} \qquad (۱۲)$$

اکنون سیستم تصادفی با مدل ایتو (۷) و تابعک هزینه (۸) را در نظر بگیرید که بیانگر یک مساله ردیابی است. می‌توان نشان داد این تابع هزینه با قید دینامیکی مدل سیستم توسط قانون کنترلی زیر کمینه می‌شد (حالت دارای عدم قطعیت چندبعدی از قضیه بیان شده در [۲۷]).

$$\mathrm{u}^*(\hat{X},\mathrm{t})=-\mathrm{R}^{-1}B^T\ \ \mathrm{K(t)}\hat{X}(\mathrm{t})+\varphi(\mathrm{t}) \qquad (۱۳)$$

توجه شود که استفاده از ترم $\hat{X}$ به جای $X$ به این دلیل است که اساساً به دلیل تصادفی بودن حالت‌ها، در طراحی و شبیه‌سازی از حالت‌های تخمین زده شده $\hat{X}$ که توسط یک رؤیتگر تصادفی بازسازی شده‌اند استفاده می‌کنیم. همچنین تابع هزینه بهینه مطابق زیر است.

$$J^*(\hat{\mathrm{x}},\mathrm{t})=\frac{1}{2}\hat{X}^T(\mathrm{t})\mathrm{K(t)}\hat{X}(\mathrm{t})+\varphi^T(\mathrm{t})\hat{X}(\mathrm{t})+\psi(\mathrm{t}), \qquad (۱۴)$$

که پارامترهای $\mathrm{K(t)}$، $\varphi(\mathrm{t})$ و $\psi(\mathrm{t})$ در آن از حل معادلات دیفرانسیل ماتریسی زیر به دست می‌آید.

$$\dot{\mathrm{K}}=-Q+\mathrm{K}BR^{-1}B^T\mathrm{K}-A^T\mathrm{K}-\mathrm{K}A-\sum_{i=1}^{r}D_i^T\mathrm{K}D_i \qquad (۱۵)$$
$$\mathrm{K(T)}=\Gamma$$
$$\dot{\varphi}=-\ A-BR^{-1}B^T\mathrm{K}\ ^T\varphi-\mathrm{K}b \qquad (۱۶)$$
$$\varphi(\mathrm{T})=\Upsilon$$
$$\dot{\psi}=\frac{1}{2}\varphi^TBR^{-1}B^T\varphi-b^T\varphi \qquad (۱۷)$$
$$\psi(\mathrm{T})=0$$

**نکته ۱:** معادله دیفرانسیل ماتریسی (۱۵) در افق نامحدود به معادله جبری ریکاتی تعمیم‌یافته تبدیل می‌شود که مطابق (۱۸) است. شایان ذکر است که شرایط برقراری و صحت این معادله در [۲۷] بحث شده است:

$$-Q+\mathrm{K}BR^{-1}B^T\mathrm{K}-A^T\mathrm{K}-\mathrm{K}A-\sum_{i=1}^{r}D_i^T\Sigma D_i=0 \qquad (۱۸)$$

**نکته ۲:** عبارت $b(t)$ در معادله (۱۶) می‌تواند اغتشاش ورودی و یا ورودی مرجع در سیستم باشد. در صورت صرف نظر کردن از این



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

عبارت، قانون کنترلی در افق نامحدود به صورت زیر در خواهد آمد که از آن در تحلیل‌های مربوط به پایداری استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{u}^*(\mathrm{x},\mathrm{t}) = -\mathrm{R}^{-1} B^T \mathrm{K}\hat{X}(\mathrm{t}), \qquad (۱۹)$$

در معادله فوق ماتریس ثابت $K$ از حل معادله جبری ریکاتی (۱۸) تعیین می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود در این حالت ترم‌های $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ در معادله ورودی بهینه و تابع هزینه بهینه ظاهر نمی‌شود. وجود این ترم‌ها به این دلیل است که ورودی کنترلی بتواند نیاز ما را در ردیابی ورودی مرجع و یا حذف اغتشاشات ورودی برطرف سازد. در حالت‌هایی که مساله کنترلی ما صرفاً تنظیم و حفظ پایداری سیستم است دیگر نیازی به این ترم‌ها نیست.

## ٤) پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته

با توجه به تعیین قانون کنترل بهینه برای سیستم‌های تصادفی دارای عدم-قطعیت پارامتریک اکنون قصد داریم پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته را تحقیق نماییم. به این منظور از روابط به دست آمده فوق در افق نامحدود استفاده می‌کنیم. در استفاده از کنترل درجه دو خطی برای سیستم های معین و یا حتی سیستم‌های دارای نویز جمع شونده برقراری شروط کنترل‌پذیری و رؤیت پذیری کافی بود تا ادعا کنیم سیستم حلقه بسته پایدار خواهد شد. اما وجود نویز ضرب شونده در معادلات دینامیک، ذات سیستم را دستخوش تغییر می‌کند و دیگر تنها با اتکا به شرط کنترل‌پذیری نمی‌توان پایداری سیستم را نتیجه گرفت. در این بخش بدون استفاده از مفاهیم کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری حالت و با تکیه بر وجود جواب معادله ریکاتی جبری تعمیم یافته به تحلیل پایداری سیستم تصادفی خواهیم پرداخت. نشان خواهیم داد که در صورت وجود جواب این معادله، سیستم حلقه بسته مستقل از شدت نویز سفید پایدار در مفهوم متوسط درجه دو خواهد بود. همچنان نشان می‌دهیم در صورت استفاده از کنترل‌کننده درجه دو خطی قطعی برای سیستم تصادفی (۷) سیستم تحت شرایطی که وابسته به شدت نویز است ناپایدار تصادفی می‌شود. ابتدا مفهوم پایداری تصادفی که در [۲۸] به صورت کامل بررسی شده است را بیان می‌کنیم.

**تعریف۲:** سیستم تصادفی نامی به فرم (۷) با ورودی صفر را دارای پایداری متوسط درجه دو گویند اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که $E\left|x(\mathrm{t})\right|^2 < \varepsilon$ ، $\forall t$ هرگاه $\sup_{-d\le s\le 0} E\left|\varphi(\mathrm{s})\right| < \delta(\varepsilon)$ . همچنین اگر علاوه بر پایداری متوسط درجه دو، برای همه شرایط اولیه داشته باشیم $\lim_{t\to\infty} E\left|x(\mathrm{t})\right|^2 = 0$ آنگاه گوییم سیستم دارای پایداری مجانبی متوسط درجه دو است.

**لم ۲:** اگر تابع مثبت معین $V \in C^{2,1}(S_h \times [t_0,\infty); R_+)$ و ثابت‌های $C_1 > 0$ و $C_2 > 0$ چنان یافت شود که برای هر $X \neq 0$ و $t \ge t_0$ شرایط زیر برقرار شود:

$$\begin{aligned} &(i)\ \ c_1|x| \le V(x,t) \le c_2|x| \\ &(ii)\ L(V(x,t)) \le 0 \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

برای تمامی $(x,t) \in S_h \times [t_0,\infty)$، آنگاه سیستم (۷) پایدار متوسط درجه دو است. همچنین اگر مولد خرد فوق منفی معین شود آنگاه سیستم به صورت مجانبی پایدار متوسط درجه دو خواهد بود.

**قضیه ۱:** معادله تصادفی (۷) را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد در صورت وجود جواب برای معادله ریکاتی جبری تعمیم یافته[6] (۱۸)، کنترل‌کننده درجه دو خطی تصادفی با قانون کنترلی (۱۹) و پارامتر $\mathrm{K}$ به دست آمده از معادله ریکاتی مذکور سیستم حلقه بسته را پایدار متوسط درجه دو می‌کند.

اثبات: تابع کاندید لیاپانوف را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$V = \frac{1}{2} X^T \Sigma X, \qquad (۲۱)$$

که در آن $\Sigma$ ماتریس مثبت معین است. به کمک لم ایتو، دیفرانسیل تصادفی زیر به دست می‌آید.

$$dV\ \ x(\mathrm{t})\ = L\ V(\mathrm{x}(\mathrm{t}))\ dt + \sum_{i=1}^{r} X^T \Sigma D_i X dw_i,$$

که

$$L\ V(\mathrm{x}(\mathrm{t}))\ = X^T \Sigma\ AX + Bu^*\ + \frac{1}{2} tr\left\{ D_1 X \quad \cdots \quad D_r X \begin{bmatrix} X^T D_1^T \\ \vdots \\ X^T D_r^T \end{bmatrix} \Sigma \right\}$$

با جاگذاری $u^*(\mathrm{t})$ از (۱۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} L\ V(\mathrm{x}(\mathrm{t}))\ &= X^T \Sigma\ A - BR^{-1}B^T \mathrm{K}\ X \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} X^T D_i^T \Sigma D_i X \\ &= X^T \left\{ \Sigma\ A - BR^{-1}B^T \mathrm{K}\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} D_i^T \Sigma D_i \right\} X \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

[6] Generalized Riccati equation



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

جهت اثبات پایداری سیستم حلقه بسته، کافی است نشان دهیم (۲۲) منفی است. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\Sigma = \mathrm{K} > 0$، در نتیجه:

$$X^T \left\{ K\ A - BR^{-1}B^T \mathrm{K} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} D_i^T \Sigma D_i \right\} X \le 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{K}A - \mathrm{K}BR^{-1}B^T \mathrm{K} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} D_i^T \Sigma D_i \le 0$$

با استفاده از رابطه (۱۸) و رابطه فوق شرط پایداری تصادفی سیستم به قرار زیر در خواهد آمد.

$$Q + \mathrm{K}BR^{-1}B^T \mathrm{K} \ge 0$$

باتوجه به فرض‌های $R > 0$ و $Q \ge 0$ شرط بالا ارضا شده است و سیستم حلقه بسته پایدار تصادفی است.

همانطور که ملاحظه شد شرط پایداری در اینجا مستقل از واریانس نویز که در ماتریس $D$ ظاهر می‌شود به دست آمد. جهت تعیین کنترل‌کننده بهینه تصادفی پایدارساز کافی است معادله جبری ریکاتی تعمیم یافته جواب داشته باشد.

**قضیه ۲**: سیستم تصادفی با دینامیک ایتو (۷) را در نظر بگیرید. فرض کنید قانون کنترل بهینه قطعی به شکل زیر را به سیستم تصادفی اعمال کنیم [۲۹]:

$$u_D^*(\mathrm{t}) = -\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^T \mathrm{PX}, \qquad (۲۳)$$

که ماتریس مثبت $P$ از حل معادله جبری ریکاتی[۷] زیر به دست می‌آید.

$$-Q + PBR^{-1}B^T P - A^T P - PA = 0 \qquad (۲۴)$$

می‌توان نشان داد در شرایطی که $D_i$ها در ناتساوی ماتریسی زیر صدق کند سیستم ناپایدار تصادفی است.

$$Q + PBR^{-1}B^T P - \sum_{i=1}^{r} D_i^T P D_i \le 0; \quad P > 0 \qquad (۲۵)$$

اثبات: تابع لیاپانوف (۲۱) را در نظر بگیرید. با استفاده از مولد خرد داریم:

$$L\ V(\mathrm{x(t)}) = X^T \Sigma\ AX - Bu_D + \frac{1}{2} tr\left\{ \sum_{i=1}^{r} D_i X X^T D_i^T \Sigma \right\}$$
$$= X^T \left\{ \Sigma A - \Sigma BR^{-1}B^T P + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} D_i^T \Sigma D_i \right\} X$$

با جاگذاری $\Sigma = P > 0$ خواهیم داشت:

$$L(\mathrm{V(x(t))}) = X^T \left\{ P\ A - BR^{-1}B^T P + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} D_i^T P D_i \right\} X$$

برای اثبات ناپایداری تصادفی کافی است نشان دهیم:

$$PA - PBR^{-1}B^T P + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} D_i^T P D_i \ge 0 \qquad (۲۶)$$

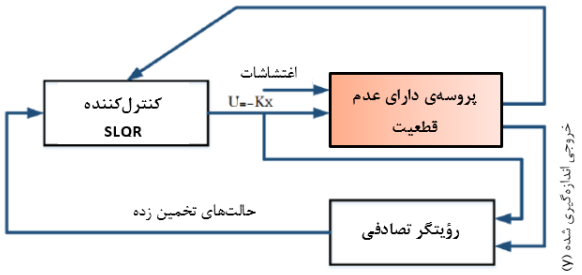
با استفاده از روابط (۲۴) و (۲۶) شرط ناپایداری سیستم به قرار زیر است:

$$Q + PBR^{-1}B^T P - \sum_{i=1}^{r} D_i^T P D_i \le 0; \quad P > 0$$

مهمترین نتیجه قضیه ۲ این است که نشان می‌دهد کنترل‌کننده درجه دو خطی که برای سیستم‌های معین کاربرد دارد در برخورد با سیستم‌های تصادفی، وابسته به واریانس نویز پارامتری است و در نتیجه در شرایطی حتی نمی‌تواند سیستم را پایدار کند. توجه داریم که حتی در صورت برقراری شرایط کنترل پذیری و رؤیت‌پذیری همچنان این کنترل‌کننده سنتی ممکن است در پایدارسازی سیستم ناکارآمد باشد و در نتیجه باید از نسخه تصادفی آن که پیش‌تر معرفی شد استفاده کرد. همچنین در شرایطی که هر دو کنترل کننده بهینه تصادفی و غیر تصادفی قادر به پایدار سازی سیستم حلقه بسته هستند نتایج شبیه سازی حاکی از عملکرد بهتر استراتژی تصادفی است.

## ۵) کنترل‌کننده‌ی تصادفی ایتو مبتنی بر رؤیت حالت

هدف از این بخش، طراحی یک رؤیتگر تصادفی برای مدل نامعین ایتو است. ساختار رؤیتگر تصادفی به همراه کنترل‌کننده فیدبک بهینه تصادفی در شکل (۲) نشان داده شده است.




شکل (۲) شماتیک کنترل کننده بهینه مبتنی بر رؤیت حالت

به منظور طراحی رؤیتگر تصادفی برای سیستم (۷)،فرض می‌کنیم خروجی سیستم به صورت (۲۷) تعریف شود.

$$y = FX + \gamma U + \sum_{i=1}^{r} G_i X v_i \qquad (۲۷)$$

[7] Algebraic Riccati equation



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

که در آن $V_i$ ها نویزهای سفید ضرب‌شونده مستقل و دارای توزیع یکسان هستند. یک رؤیتگر حالت خطی به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} d\hat{X} = \{A\hat{X} + BU\}dt + L\{y - \hat{y}\}dt \\ \hat{y} = F\hat{X} + \gamma U \end{cases} \quad (۲۸)$$

که در آن $\hat{X}$، $y$ و $L$ به ترتیب بردارحالت تخمین‌زده شده، خروجی تخمین‌زده شده و بهره رؤیتگر می‌باشند. حال با در نظر گرفتن خطای تخمین به شکل $\tilde{X} = X - \hat{X}$ و تعریف سیستم افزوده و خطای تخمین به وسیله $\bar{X} = [X \quad \tilde{X}]^T$ و همچنین با در نظر گرفتن $U = -\Psi X$ به صورت قاعده کنترلی فیدبک خواهیم داشت:

$$d\bar{X} = \begin{bmatrix} A - B\Psi & B\Psi \\ 0 & A - LF \end{bmatrix}\bar{X}dt + \sum_{i=1}^{r} \Delta_i \bar{X} dw_i \quad (۲۹)$$

که در آن:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} D_i & 0 \\ D_i - LG_i & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به دینامیک افزوده فوق و حضور عامل $\Delta_i$ می‌توان مشاهده کرد که در حضور نویز ضرب‌شونده، خطای تخمین وارد کانال حالت‌های سیستم شده است. به همین دلیل نمی‌توان کنترل‌کننده فیدبک حالت و رؤیتگر را به صورت جدا و مستقل از هم طراحی کرد. به عبارت دیگر، برای مدل سیستم ایتو با نویز حالت ضرب‌شونده، قاعده‌ی تفکیک‌پذیری قابل پیاده‌سازی نیست. در قضیه‌ی بعدی، یک شرط کافی برای بهره رؤیتگر و قانون کنترلی به دست آورده می‌شود که به طور هم‌زمان پایداری نمایی خطای تخمین و سیستم حلقه بسته را با قطعیت بالا اثبات می‌کند.

**قضیه‌ی ۳:** مدل تصادفی ایتو (۷) و دینامک رؤیتگر در (۲۸) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های $\Sigma > 0$، $L$ و $\Psi$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که در رابطه زیر صدق کنند:

$$\Sigma\begin{bmatrix} A - B\Psi & B\Psi \\ 0 & A - LF \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\Delta^T \Sigma \Delta < 0 \quad (۳۰)$$

که در آن

$$\Delta = [\Delta_1 \mid \cdots \mid \Delta_r] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & \bar{O} & \cdots & D_r & \bar{O} \\ D_1 - LG_1 & \bar{O} & \cdots & D_r - LG_r & \bar{O} \end{array}\right] \quad (۳۱)$$

در این صورت دینامیک رؤیتگر تصادفی با قطعیت بسیار بالا به صورت نمایی پایدار است.

*اثبات:* با در نظر گرفتن خطای تخمین به صورت $X = X - X$ و محاسبه‌ی مشتق‌هایش، دینامیک خطا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$d\tilde{X} = dX - d\hat{X} = \{(A - LF)\tilde{X}\}dt + \sum_{i=1}^{r}\{D_i X - LG_i X\}dw_i \quad (۳۲)$$

با در نظر گرفتن $\bar{X} = [X \quad \tilde{X}]^T$ دینامیک سیستم افزوده به شکل (۲۹) در می‌آید. تابع لیاپانف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$V = \frac{1}{2}\bar{X}^T \Sigma \bar{X} \quad (۳۳)$$

معادله دینامیک افزوده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$d\bar{X} = \begin{bmatrix} A - B\Psi & B\Psi \\ 0 & A - LF \end{bmatrix}\bar{X}dt + \underbrace{\left[\Delta_1\bar{X} \mid \cdots \mid \Delta_r\bar{X}\right]}_{g}\begin{bmatrix} dw_1 \\ \vdots \\ dw_r \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

با توجه به رابطه (۳۴) و (۱) مولد خرد برای تابع لیاپانوف (۳۳) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} &L(V(x(t))) \\ &= \bar{X}^T\Sigma\begin{bmatrix} A - B\Psi & B\Psi \\ 0 & A - LF \end{bmatrix}\bar{X} + \\ &\frac{1}{2}tr\left\{\bar{X}^T\left[\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & \bar{O} & \cdots & D_r & \bar{O} \\ D_1 - LG_1 & \bar{O} & \cdots & D_r - LG_r & \bar{O} \end{array}\right]^T \times \right. \\ &\left. \Sigma\left[\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & \bar{O} & \cdots & D_r & \bar{O} \\ D_1 - LG_1 & \bar{O} & \cdots & D_r - LG_r & \bar{O} \end{array}\right]\bar{X}\right\} \\ &= \bar{X}^T\left\{\Sigma\begin{bmatrix} A - B\Psi & B\Psi \\ 0 & A - LF \end{bmatrix}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\left[\Delta_1\bar{X} \mid \cdots \mid \Delta_r\bar{X}\right]^T\Sigma\left[\Delta_1\bar{X} \mid \cdots \mid \Delta_r\bar{X}\right]\right\}\bar{X} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

برای اثبات پایداری سیستم افزوده، کافی است نشان دهیم (۳۵) منفی است یا

$$\Sigma\begin{bmatrix} A - B\Psi & B\Psi \\ 0 & A - LF \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\Delta^T\Sigma\Delta < 0$$

بنابراین تخمین دینامیک خطا پایدار نمایی با قطعیت بالا است و خطا به سمت صفر همگرا می‌شود.

براساس قضیه ۳، شرط پایداری دینامیک سیستم افزوده شده را می‌توان به عنوان مسئله‌ی امکان‌پذیری LMI ها مطرح کرد و تابع هزینه مربوطه را به شکل زیر تعریف نمود:

$$\min J(\bar{X}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \bar{X}^T S \bar{X}\, dt \quad (۳۶)$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

در این صورت مسئله، به یک مسئله‌ی کمینه‌سازی با تابع هدف درجه دو (۳۶) و قید LMI (۳۰) تبدیل می‌شود. بهره فیدبک $\Psi$ و بهره رؤیتگر $L$ به گونه‌ای محاسبه می‌شوند که خطای تخمین حداقل شود. یک راه دیگر این است که بهره‌ی $\Psi$ با استفاده از روش کنترل بهینه تصادفی محاسبه و سپس مقدار $L$ با کمینه کردن تابع هزینه (۳۶) به دست آورده شود.

## ٦) نتایج شبیه‌سازی

در این بخش جهت شبیه‌سازی عددی و مقایسه نتایج کار، از گسسته-سازی معادلات تصادفی به روش مایل‌اشتین[8] که یک تخمین مرتبه دو است به صورت زیر استفاده می‌کنیم [۳۰].

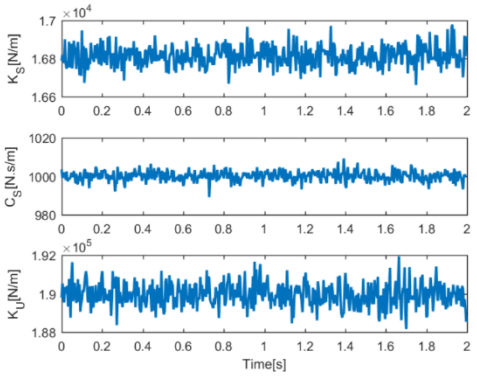
$$\begin{aligned} X(t_k) = X(t_{K-1}) + \\ (AX(t_{K-1}) + BU(t_{K-1}) + f(t_{K-1}))\Delta t + \\ (DX(t_{K-1}))\Delta w_1(t_K) + \\ \frac{1}{2}D(DX(t_{K-1}))(\Delta w_1(t_K) - \Delta t) + \ldots \end{aligned}$$

که در آن نمو فرآیند وینر به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\Delta w_i(t_K) = wgn * \sqrt{t}$$

در معادله فوق $wgn$ یک پروسه نویز سفید گسسته با میانگین صفر است. این تخمین مرتبه دو سرعت همگرایی بالاتری نسبت به تخمین مرتبه اول دارد. همچنین باید توجه داشت که در شبیه‌سازی‌های مربوط به پاسخ‌ها با توجه به ذات تصادفی سیستم هر بار اجرای کدها تنها یک تحقق و یا مسیر نمونه از منحنی پاسخ را ارائه می‌دهد. در نتیجه همه پاسخ-ها به صورت میانگین صد بار اجرای کد به تصویر کشیده شده است.

جهت ارزیابی روش پیشنهادی شبیه‌سازی‌ها برای دو نمونه جاده مختلف انجام می‌شود. در هر دو نمونه پارامترها به یک شکل دچار عدم قطعیت می‌شوند. شکل (۳) یک تحقق از پارامترها درحالت آشفته را نشان می-دهد.

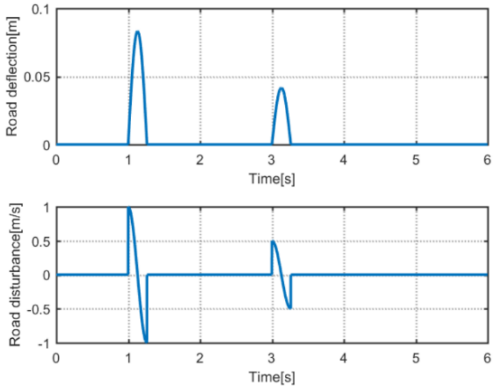



شکل (۳) اغتشاشات تصادفی در مشخصه‌های سختی و میرایی

### جاده نمونه اول:

در این قسمت یک پروفیل که دارای دو سرعت‌گیر سینوسی در طول خود است به عنوان جاده انتخاب شده است. وجود این گونه ناهمواری‌ها در جاده‌ها بسیار متداول است و خودرو باید بتواند در مواجهه با آن‌ها، نامعینی‌ها را هضم کرده و سواری مطلوبی نشان دهد. تغییرات عمودی شکل پروفیل جاده و نیز تغییرات سرعت عمودی جاده در شکل (۴) آورده شده است.

$$x_r = \begin{cases} \frac{1}{12}\sin(12t) & 1 \le t \le \frac{\pi}{12} \\ \frac{1}{24}\sin(12t) & 3 \le t \le 3+\frac{\pi}{12} \\ 0 & else \end{cases}$$



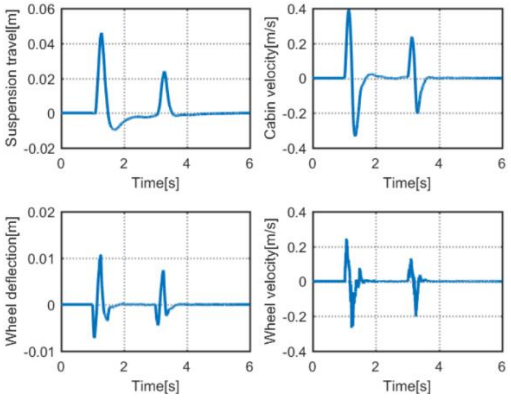

شکل (۴) تغییرات عمودی مکان و سرعت جاده (نمونه ۱)

شکل (۵) عملکرد سیستم تعلیق فعال شده با کنترل درجه دو خطی تصادفی را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم حلقه بسته با وجود عدم‌قطعیت‌های جاده و اغتشاشات تصادفی در پارامترها، مقاوم است. حالت‌های سیستم نشان می‌دهند خودرو از جانمایی تعلیق و فرمان-پذیری مناسبی برخوردار است. طبق این شکل تغییرات نسبی جابه‌جایی تعلیق در بازه $\pm 5cm$ محدود شده است و فاصله میان چرخ و جاده نیز در بازه $\pm 1cm$ حفظ می‌شوند.

[8] Milstein approximation

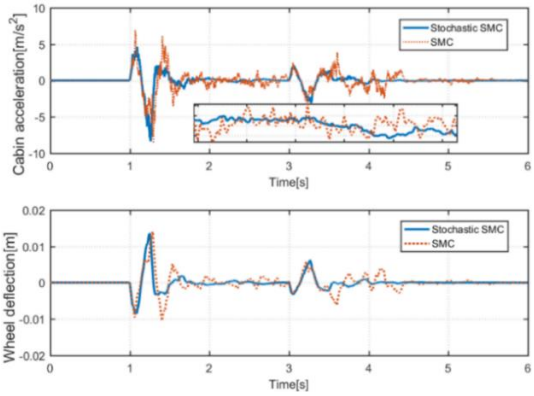


[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]



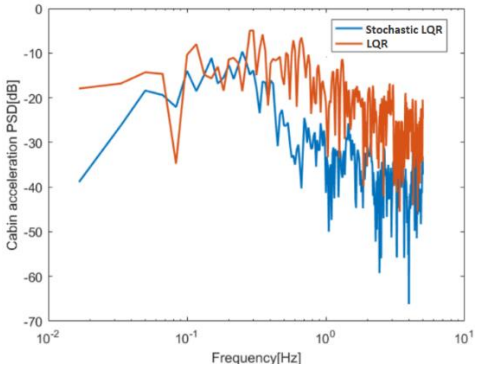

شکل (۵) پاسخ حالت‌های سیستم نامعین (جاده نمونه ۱)

شکل (۶) نشان‌دهنده عملکرد سیستم نامعین است که توسط کنترل‌کننده تصادفی و غیرتصادفی فعال شده است. در این شکل دو شاخصه مهم سواری یعنی خوش سواری که با شتاب وارد بر بدنه سنجیده می‌شود و فرمان‌پذیری خودرو که با فاصله میان چرخ و جاده مورد سنجش قرار می‌گیرد به تصویر کشیده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم کنترل کننده درجه دو خطی تصادفی توانسته سواری مطلوبی را نسبت به کنترل‌کننده درجه دو خطی غیر تصادفی فراهم کند و نسبت به نوسانات پارامترها مقاومت بیشتری نشان دهد.

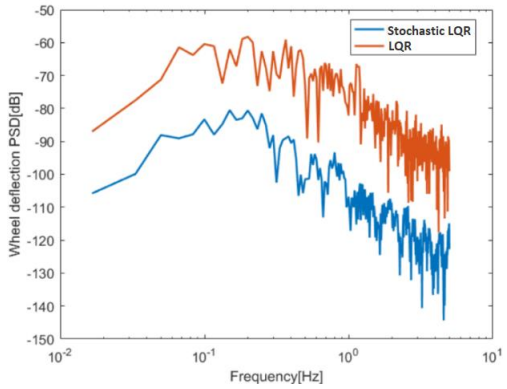



شکل (۶) عملکرد تعلیق نامعین در حالت استفاده از کنترل درجه دو خطی تصادفی و غیر تصادفی (جاده نمونه ۱)

اما یکی از مهم‌ترین معیارها در تعیین عملکرد سواری خودرو، چگالی طیفی توان پاسخ است که در فرکانس‌های مختلف رسم می‌شود. این معیار در شکل (۷) و شکل (۸) به ترتیب برای شتاب وارد به کابین و فاصله چرخ و جاده به تصویر کشیده شده است. مشخص است چه در فرکانس‌های نزدیک ۱ (که براساس مطالعات فرکانس نماینده کنترل‌پذیری خودرو است) و چه در فرکانس‌های نزدیک ۱۰ (که فرکانس نماینده راحتی سفر است) کنترل کننده تصادفی پایین کنترل‌کننده غیر‌تصادفی است.




شکل (۷) چگالی طیفی توان شتاب کابین برای فعال‌سازی تصادفی و غیرتصادفی (جاده نمونه ۱)




شکل (۸) چگالی طیفی توان فاصله نسبی چرخ تا جاده برای فعال‌سازی تصادفی و غیرتصادفی (جاده نمونه ۱)

## جاده نمونه دوم:

در این قسمت یک جاده واقعی براساس استاندارد ایزو انتخاب شده است. اطلاعات جمع‌آوری شده توسط موسسه استاندارد ایزو از جاده‌های مختلف به شکل جاده‌هایی در کلاس‌های مختلف شکل گرفته است که هرکدام دارای چگالی طیف توان[9] مشخصی هستند [۳۱]. جاده استاندارد در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی در این بخش دارای چگالی طیفی توان زیر است.

$$G_q(f) = 4\pi^2 G_q(n_0) n_0^{\ 2} v,$$

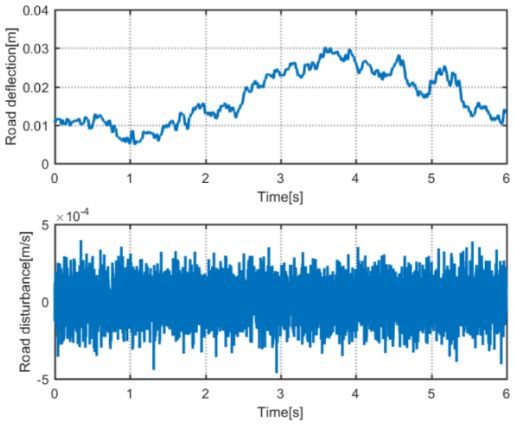
که در آن، $G_q(n_0)$ ضریب ناهمواری جاده، $n_0$ فرکانس فضایی مرجع و $v$ سرعت پیشرانه خودرو است. شکل جاده تصادفی ایزو با انتخاب

[9] Power spectral density(PSD)



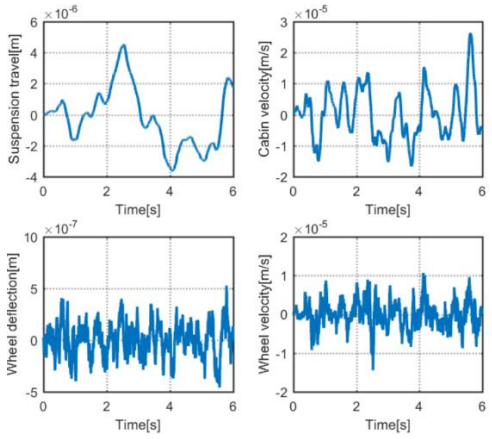
[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

$G_q(n_0) = 32\times10^{-6} m^3$ و $n_0 = 0.1$ در شکل (۹) آورده شده است.




شکل (۹) تغییرات عمودی مکان و سرعت جاده (جاده نمونه ۲)

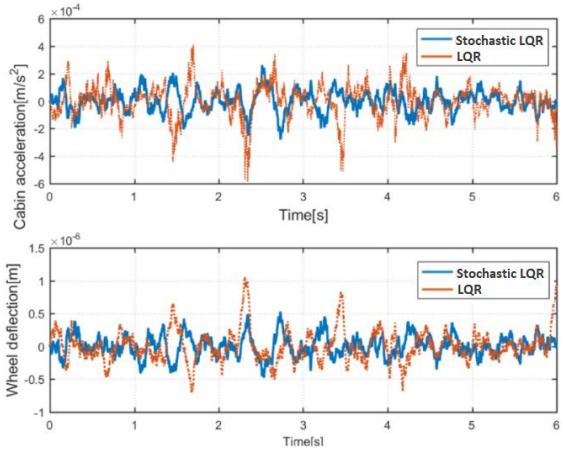
شکل (۱۰) عملکرد سیستم تعلیق فعال شده با کنترل درجه دو خطی تصادفی را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم حلقه بسته با وجود عدم قطعیت‌های نامتناسب جاده و اغتشاشات تصادفی در پارامترها، مقاوم است. حالت‌های سیستم نشان می‌دهند خودرو از جانمایی تعلیق و کنترل‌پذیری مناسبی برخوردار است. طبق این شکل تغییرات نسبی جابه‌جایی تعلیق و فاصله میان چرخ و جاده در بازه مشخصی حفظ می‌شوند.



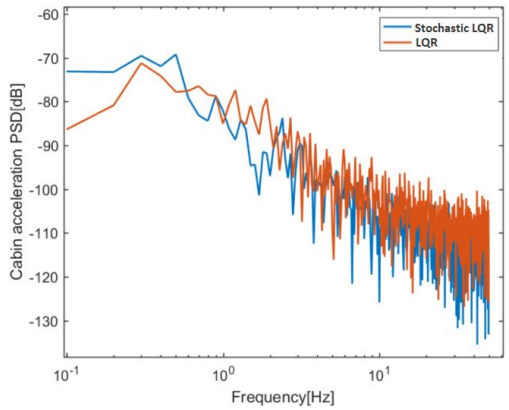

شکل (۱۰) پاسخ حالت‌های سیستم نامعین (جاده نمونه ۲)

شکل (۱۱) نشان‌دهنده عملکرد سیستم نامعین است که توسط کنترل‌کننده تصادفی و غیرتصادفی فعال شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم کنترل کننده درجه دو خطی تصادفی توانسته سواری مطلوبی را نسبت به مدلغزشی غیر تصادفی فراهم کند و نسبت به نوسانات پارامترها مقاومت بیشتری نشان دهد.

همچنین چگالی طیفی توان در فرکانس‌های مختلف در شکل (۱۲) برای شتاب وارد به کابین به تصویر کشیده شده است. مشخص است چه در فرکانس‌های نزدیک ۱ و چه در فرکانس‌های نزدیک ۱۰ کنترل کننده تصادفی پایین کنترل‌کننده غیرتصادفی است.




شکل (۱۱) عملکرد تعلیق نامعین در حالت استفاده از کنترل درجه دو خطی تصادفی و غیر تصادفی (جاده نمونه ۲)




شکل (۱۲) چگالی طیفی توان شتاب کابین برای فعال‌سازی تصادفی و غیرتصادفی (جاده نمونه ۲)

## ۷) جمع‌بندی

در این مقاله، مساله کنترل بهینه سیستم تعلیق با معادلات تصادفی ایتو که در معرض عدم قطعیت‌های پارامتری قرار دارد بررسی شد. در مدل ریاضی سیستم، نامعینی‌های پارامتری به صورت سه فرآیند تصادفی مستقل وینر در نظر گرفته شد. براساس مدل نامعین لحاظ شده از تعلیق و با استفاده از معادلات تصادفی همیلتون-جاکوبی-بلمن، کنترل‌کننده تصادفی درجه دو خطی به منظور مقابله با عدم قطعیت‌های ضرب شونده طراحی شد. جهت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته، تحلیل‌های لازم جهت اثبات پایداری تصادفی ارائه گردید. همچنین یک ساختار حلقه بسته شامل کنترل‌کننده و رویتگر چنان طراحی شد که سیستم حلقه بسته



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

حاصل پایدار تصادفی گردد. نتایج شبیه‌سازی‌ها حاکی از این است که سیستم حلقه بسته شامل کنترل‌کننده تصادفی بهینه توانسته عملکرد بهتری از کنترل‌کننده غیرتصادفی بهینه در زمینه کمینه کردن شاخصه‌های خوش‌سواری نشان دهد.

## ۸) ضمیمه

جدول ۱. پارامترهای سیستم تعلیق

| Parameter | Value |
|---|---|
| $m_s$ | 280[kg] |
| $m_u$ | 55[kg] |
| $c_s$ | $1000[N/(\mathrm{m/s})]$ |
| $k_s$ | $18800[N/m]$ |
| $k_u$ | $190000[N/m]$ |

جدول ۲. پارامترهای کنترل‌کننده

| Parameter | Value |
|---|---|
| $Q$ | $diag[1 \quad 10^{-2} \quad 1 \quad 10^{-2}]$ |
| $R$ | $10^{-6}$ |
| $\Gamma$ | $diag[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$ |
| $\Upsilon$ | $10^{-18}[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ |

## ۹) مراجع

[1] W. Sun, H. Gao, and O. Kaynak, "Finite Frequency $H_\infty$ Control for Vehicle Active Suspension Systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, pp. 416-422, 2011.

[2] H. Du, K. Y. Sze, and J. Lam, "Semi-active H∞ control of vehicle suspension with magneto-rheological dampers," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, pp. 981-996, 2005.

[3] S. Chantranuwathana and H. Peng, "Force tracking control for active suspensions-theory and experiments," in *Control Applications, 1999. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on*, 1999, pp. 442-447.

[4] Y. M. Sam, J. H. Osman, and M. R. A. Ghani, "A class of proportional-integral sliding mode control with application to active suspension system," *Systems & control letters*, vol. 51, pp. 2.2004 ,223-17

[5] W. Sun, H. Pan, Y. Zhang, and H. Gao, "Multi-objective control for uncertain nonlinear active suspension systems," *Mechatronics*, vol. 24, pp. 318-327, 2014.

[6] H. Li, X. Jing, H.-K. Lam, and P. Shi, "Fuzzy sampled-data control for uncertain vehicle suspension systems," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 44, pp. 1111-1126, 2014.

[7] M. S. Fallah, R. B. Bhat, and W. F. Xie, "Optimized Control of Semiactive Suspension Systems Using H $ _\ infty $ Robust Control Theory and Current Signal Estimation," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 17, pp. 767-778, 2012.

[8] Y. Huang, J. Na, X. Wu, X. Liu, and Y. Guo, "Adaptive control of nonlinear uncertain active suspension systems with prescribed performance," *ISA transactions*, vol. 54, pp. 145-155, 2015.

[9] R. A. Ibrahim, *Parametric random vibration*: Courier Dover Publications, 2008.

[10] C. W. To, *Nonlinear random vibration*: Swets & Zeitlinger, 2000.

[11] V. Capasso and D. Bakstein, "An introduction to continuous-time stochastic processes," *Birkhax user Boston*, p. 1, 2005.

[12] J. L. Speyer and W. H. Chung, *Stochastic processes, estimation, and control*: SIAM, 2008.

[13] H. Schioler, M. Simonsen, and J. Leth, "Stochastic stability of systems with semi-Markovian switching," *Automatica*, vol. 50, pp. 2961-2964, 2014.

[14] F. Li and Y. Liu, "Global stability and stabilization of more general stochastic nonlinear systems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 413, pp. 841-855, 2014.

[15] Q. Wang and C. Wei, "Decentralized robust adaptive output feedback control of stochastic nonlinear interconnected systems with dynamic interactions," *Automatica*, vol. 54, pp. 124-134, 2015.

[16] A. Mesbah, S. Streif, R. Findeisen, and R. D. Braatz, "Stochastic nonlinear model predictive control with probabilistic constraints," in *American Control Conference (ACC), 2014*, 2014, pp. 2413-2419.

[17] J. Hu, Z. Wang, H. Gao, and L. K. Stergioulas, "Robust sliding mode control for discrete stochastic systems with mixed time delays, randomly occurring uncertainties, and randomly occurring nonlinearities," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, pp. 3008-3015, 2012.

[18] K. D. Rao and S. Kumar, "Modeling and simulation of quarter car semi active suspension system using LQR controller ",in *Proceedings of the 3rd International Conference on Frontiers of Intelligent Computing: Theory and Applications (FICTA) 2014*, 2015, pp. 441-448.

[19] J.-l. Yao, W.-k. Shi, J.-q. Zheng, and H.-p. Zhou, "Development of a sliding mode controller for semi-active vehicle suspensions," *Journal of Vibration and Control*, vol. 19, pp. 1152-1160, 2013.

[20] A. Ulsoy, D. Hrovat, and T. Tseng, "Stability robustness of LQ and LQG active suspensions,"



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]

*Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 116, pp. 123-131, 1994.

[21] H.-C. Sohn, K.-T. Hong, K.-S. Hong, and W.-S. Yoo, "An adaptive LQG control for semi-active suspension systems," *International Journal of Vehicle Design*, vol. 34, pp. 309-326, 2004.

[22] B. Assadsangabi, M. Eghtesad, F. Daneshmand , and N. Vahdati, "Hybrid sliding mode control of semi-active suspension systems," *Smart Materials and Structures*, vol. 18, p. 125027, 2009.

[23] M. A. R. Ramezaney, E. Fathi, and M. M. Ansarey, "Optimum synthesis of sensory layout in active suspension based on linear observer," in *Electrical Engineering (ICEE), 2013 21st Iranian Conference on*, 2013, pp. 1-6.

[24] L. Xiao and Y. Zhu, "Sliding-mode output feedback control for active suspension with nonlinear actuator dynamics," *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, pp. 2721-2738, 2015.

[25] J.-Q. Sun, *Stochastic dynamics and control* vol. 4: Elsevier, 2006.

[26] J. Yong and X. Y. Zhou, *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations* vol. 43: Springer Science & Business Media, 1999.

[27] M. A .Rami and X. Y. Zhou, "Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 1131-1143, 2000.

[28] X. Mao, Stochastic differential equations and applications: Elsevier, 2007.

[29] F. Lin, Robust control design: an optimal control approach vol. 18: John Wiley & Sons, 2007.

[30] E. Platen, "An introduction to numerical methods for stochastic differential equations," *Acta numerica*, vol. 8, pp. 197-246, 1999.

[31] J. C. Dixon, *Suspension geometry and computation*: Wiley Online Library, 2009.

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.4.9 ]
[ DOI: 10.29252/joc.13.3.71 ]