

سینماتیک وارون ربات بازوی ۷ درجه آزادی تحت محدودیت‌های موقعیت مفاصل و مانع در فضای کاری ربات با استفاده از شبکه عصبی-فازی و روش برنامه‌ریزی مرتبه دو

حمید توشنی^۱، محمد فرخی^۲

^۱ فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، h_toshany@yahoo.com

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، farrokhi@iust.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۱/۲۴، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۴/۱۷)

چکیده: تحلیل سینماتیک وارون ربات‌های بازوی سری افزونه از جمله ابزارهای ضروری در زمینه‌های مختلف رباتیکی مانند طراحی، تولید مسیر و کنترل این سیستم‌ها می‌باشد. با توجه به این که در بسیاری از ربات‌های افزونه، جواب تحلیلی برای سینماتیک وارون آن‌ها وجود ندارد، شیوه‌های حل عددی نیازمند اجرا و بررسی در این زمینه می‌باشند. در این مقاله، از ترکیب شبکه‌های عصبی، سیستم‌های فازی و روش برنامه‌ریزی مرتبه دو برای تعیین متغیر مفاصل استفاده خواهد شد. براساس رویکرد پیشنهادی، هفت شبکه عصبی متناظر با هر متغیر مفصل در نظر گرفته شده و با تطبیق وزن آن‌ها توسط روش برنامه‌ریزی مرتبه دو، پیکربندی مناسب ربات جهت ردیابی مسیر مطلوب در فضای دکارتی تعیین می‌شود. از طرفی، وزن اولیه شبکه‌ها با استفاده از سیستم فازی و براساس مجاورت مجری نهایی تا نقطه مطلوب و امکان‌پذیری متغیر مفاصل تعیین می‌شود. برنامه اجتناب از مانع با بررسی شرایطی چون انتخاب متغیر مفاصل درگیر در معادلات قیود بازوها و تعیین بحرانی‌ترین بازو صورت می‌گیرد. به منظور برقراری قیود مسئله در روش برنامه‌ریزی مرتبه دو، از تحقق یافتن شرایط کان-تاکر استفاده خواهد شد. ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی با شبیه‌سازی و تحلیل نتایج بر روی ربات بازوی PA-10 صورت خواهد گرفت.

کلمات کلیدی: سینماتیک وارون، ربات بازوی سری افزونه، شبکه عصبی، روش برنامه‌ریزی مرتبه دو، سیستم فازی، اجتناب از مانع.

Inverse Kinematics of 7 DOF Robot Manipulator under Joint Angle Limits and Obstacle in the Workspace of Robot using Neural network, Fuzzy System and Quadratic Programming Approach

Hamid Toshani, Mohammad Farrokhi

Abstract: Analysis of the inverse kinematics of redundant manipulators is one of the necessary tools in various robotic fields such as design, motion planning and control of these systems. Since, there is not an analytical solution for the inverse kinematics of several redundant manipulators, numerical approaches are needed to execute and investigate in this field. In this paper, combination of the neural networks, fuzzy systems and quadratic programming is used to obtain the joint variables. According to the proposed approach, seven neural networks are considered according to the each joint variable and by adaptation of the neural network's weights, suitable configurations of the robot is determined to track a desired trajectory in the Cartesian space. Meanwhile, initial weights of the neural networks are obtained by fuzzy systems based on the vicinity of the end-effector to desired point and feasibility of the joint variables. Obstacle avoidance scheme is

performed by investigation of the conditions including choosing the joint variables that involved in the equations of the arms constraints and determination of the most critical arm. In order to establish the constraints of the problem in the quadratic programming, realization of the Kun-Tucker conditions will be used. Evaluation of the proposed approach will be carried out on the PA-10 manipulator by simulation and analysis of the results.

Keywords: Inverse Kinematics, Redundant Manipulator, Neural Network, Quadratic Programming, Fuzzy System, Obstacle Avoidance.

۱- مقدمه

مسئله سینماتیک وارون به عنوان نگاشتی غیرخطی که وظیفه تعیین پیکربندی‌های مناسب مفاصل را در طول حرکت ربات برعهده دارد، از اهمیت بالایی در حوزه‌های مختلف رباتیکی برخوردار است. با توجه به این که این نگاشت بسته به ساختار طراحی شده برای ربات بازو ممکن است دارای جوابی به فرم بسته نباشد (مانند ربات‌های افزونه) و چالش‌های متفاوتی در ارتباط با آن وجود دارد، تحقیقات وسیعی در این زمینه و با توجه به اهداف تعریف شده برای آن صورت گرفته است. دسته‌ای از تحقیقات بر روی ربات‌هایی که جوابی به فرم بسته دارند تاکید دارند و دسته وسیعی نیز روی تعیین جواب تقریبی برای سینماتیک وارون با استفاده از روش‌های عددی متمرکز شده‌اند.

به‌طور معمول، برای مواجهه با قیود، ربات‌های افزونه مورد استفاده قرار می‌گیرند. این ربات‌ها، از مهارت و چابکی^۱ بیشتری نسبت به ربات‌های غیرافزونه برخوردار هستند. درواقع، در آن‌ها تعداد درجه‌های آزادی از تعداد درجه‌های آزادی (عملگرهای) مورد نیاز برای تعیین موقعیت و جهت مطلوب مجری نهایی بیشتر می‌باشد. با استفاده از ویژگی افزونگی می‌توان علاوه بر وظیفه اولیه ربات که به‌طور معمول ردیابی مسیر مطلوب می‌باشد، اهداف ثانویه یا قیود مسئله را نیز برآورده نمود. از جمله مهم‌ترین قیود سینماتیک وارون عبارتند از: اجتناب از محدودیت‌های فیزیکی مفاصل، اجتناب از موانع، اجتناب از تکیه‌گی، حداقل انرژی مفاصل، بهینه‌سازی گشتاور مفاصل و تکرارپذیری حرکت مفاصل. از آنجایی که حل مسئله سینماتیک وارون ربات‌های بازوهای افزونه می‌تواند به بی‌نهایت جواب منجر شود، یافتن جواب به فرم بسته امکان‌پذیر نیست. بنابراین، برای این ربات‌ها، صرفاً باید از روش‌های عددی استفاده کرد.

از جمله مهم‌ترین و پرکاربردترین روش‌های ارائه شده در حوزه سینماتیک وارون، روش‌های مبتنی بر وارون ماتریس ژاکوبی هستند. این رویکردها تقریبی مرتبه اول از نگاشت غیرخطی سینماتیک وارون هستند و از ارتباط بین سرعت مجری نهایی و سرعت مفاصل که توسط وارون ماتریس ژاکوبی صورت می‌گیرد، استفاده می‌کنند. در مرجع [۱] ماتریس

تطبیق موقعیت مفاصل براساس تابع لیاپانوف طراحی شده و از اطلاعات ژاکوبی و ترانواده آن در هر لحظه استفاده می‌شود. همچنین، به‌منظور اجتناب از مانع، از فرم توسعه‌یافته ژاکوبی استفاده شده که علاوه بر ژاکوبی، عبارتی که معرف تصویر تابع هزینه به فضای پوچ ژاکوبی است، اضافه شده است. روش ارائه شده در این مقاله ساده بوده لیکن محاسبه ماتریس تطبیق از بار محاسباتی بالایی برخوردار بوده و در هر لحظه نیاز به محاسبه ژاکوبی و ترانواده آن دارد. در مرجع [۲] از شبه‌وارون ژاکوبی به‌همراه برنامه اجتناب از مانع استفاده شده است. جهت اجتناب از مانع، فرم توسعه‌یافته‌ای از شبه‌وارون ژاکوبی ارائه شده که بخشی از آن معرف حداقل خطای دکارتی و بخشی دیگر معرف تجزیه افزونگی^۲ است که خود حرکت^۳ ربات را توصیف می‌کند. به‌طور مشابه، در مرجع [۳] با استفاده از این رویکرد و در قالب حلقه بسته و با فیدبک گرفتن از خطای دکارتی، سینماتیک وارون رباتی با هفت درجه آزادی تحت محدودیت‌های فیزیکی مفاصل حل شده است. رویکردهای پیشنهادی در نزدیکی نواحی تکیه دارای مشکلات ناپایداری عددی می‌باشند. با توجه به نتایج ارائه شده، زمان اجرای محاسبات بالا بوده و برای کاربردهای سریع مناسب نمی‌باشد.

در مرجع [۴] از شبه‌وارون ژاکوبی در سطح شتاب استفاده شده و با فرض معلوم بودن مسیر مطلوب و با تعریف مفهومی به نام زمان مجازی، مسیر حرکت ربات اصلاح شده است. در این روش، کندنمودن حرکت ربات جهت اجتناب از محدودیت فیزیکی ربات، باعث کاهش کیفیت عملکرد روش شده است. در مرجع [۵] از روش حداقل مربعات میرا به‌منظور میرانمودن حرکت مفاصل در نزدیکی نواحی تکیه استفاده شده است. فاکتور میرایی براساس کوچک‌ترین مقدار تکیه ماتریس ژاکوبی تعیین شده است. روش پیشنهادی از ناپایداری عددی جلوگیری می‌کند. لیکن، محاسبه فاکتور میرایی زمان‌بر بوده و روش را کند می‌کند. در مرجع [۶] برای حل سینماتیک وارون، ترکیب حداقل مربعات میرا و الگوریتم ژنتیک پیشنهاد شده است. در این روش، از توزیع گوسی برای فاکتور میرایی و از الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی پارامترهای توزیع مذکور استفاده شده است. با توجه به فرایند بهینه‌سازی قطع خط^۴، کاربرد

^۲ redundancy resolution

^۳ self motion

^۴ offline

^۱ manipulability

مرجع [۱۳] شبکه عصبی MLP^۳ برای تعیین زوایای مفاصل ربات سه درجه آزادی به همراه اجتناب از مانع به کار گرفته شده است. در این روش، جزئیات عملکرد روش در مواجهه با موانع در فضای کاری بررسی نشده و اشاره‌ای به دقت جواب‌های نهایی نشده است. در مرجع [۱۴] از دو شبکه عصبی MLP و RBF برای ربات شش درجه آزادی استفاده شده است. جهت آموزش قطع خط شبکه، علاوه بر موقعیت و جهت مجری نهایی، از تغییرات آن‌ها نیز استفاده شده و خروجی شبکه، تغییرات مفاصل می‌باشد که با دراختیارداشتن موقعیت قبلی آن‌ها، به‌روزرسانی آن‌ها صورت می‌گیرد. روش پیشنهادی برای کاربردهای استاتیکی مناسب است و ملاحظه قیود در آن کاری سخت و دشواری می‌باشد. در مرجع [۱۵] از شبکه SOM^۴ برای یافتن متغیر مفاصل ربات هفت درجه آزادی استفاده شده و برای یافتن چندین جواب سینماتیک وارون، الگوریتمی موسوم به زیرخوشه‌سازی ارائه شده است.

در مراجع [۱۶]، [۱۷] و [۱۸] از شبکه دوگان^۵ استفاده شده است. هدف مسئله، استفاده ترکیبی از نرم دو و بی‌نهایت سرعت مفاصل تحت محدودیت موقعیت و سرعت مفاصل می‌باشد. همچنین از این شبکه برای اجتناب از مانع استفاده شده است. از طرفی، بهینگی جواب اصلاح شده و شرایط همگرایی نمایی نیز بررسی شده است. در نهایت، این شبکه توسعه بیشتری یافته و فرم دیگری تحت عنوان شبکه اولیه-دوگان مطرح شده است. همچنین، دو مسئله اجتناب از محدودیت مفاصل و تکرارپذیری حرکت آن‌ها در نظر گرفته شده و شرایط لازم برای تحقق آن‌ها فراهم شده است. شبکه‌های عصبی دوگان و اولیه-دوگان، ساختاری ساده دارند. نیازی به هیچ گونه وارون ماتریسی ندارند و به‌صورت بی‌درنگ جواب را تعیین می‌کنند. اما، این روش‌ها به ساختار ربات وابسته‌اند و نیاز به محاسبه ژاکوبی و ترانزاده آن دارند. معادلات دینامیکی آن‌ها از ترم‌های غیرخطی بالایی برخوردار بوده و بار محاسبات آن‌ها در حالت کلی بالا بوده و برای کاربرد های سریع مناسب نیستند.

در این مقاله، سینماتیک وارون ربات بازوی ۷ درجه آزادی PA-10 با استفاده از روش بهینه‌سازی مقید که از ترکیب شبکه‌های عصبی، سیستم‌های فازی و روش برنامه‌ریزی مرتبه دو بهره می‌گیرد، تعیین خواهد شد. بر اساس رویکرد پیشنهادی، هفت شبکه عصبی RBF متناظر با هر متغیر مفصل در نظر گرفته شده است. ورودی هر شبکه موقعیت مطلوب در فضای دکارتی و خروجی آن یکی از زاویه مفاصل می‌باشد. با تطبیق وزن شبکه‌های عصبی توسط روش برنامه‌ریزی مرتبه دو، پیکربندی مناسب ربات جهت ردیابی مسیر مطلوب در فضای دکارتی تعیین می‌شود. از طرفی، وزن اولیه شبکه‌ها با استفاده از سیستم فازی و براساس مجاورت مجری نهایی تا نقطه مطلوب و امکان‌پذیری متغیر مفاصل تعیین

این روش در محیط‌های دینامیکی و نامنظم دشوار بوده و مستلزم در نظر گرفتن همه جوانب است.

دسته مهم دیگر روش‌های حل سینماتیک وارون، روش‌های مبتنی بر گرادینان تابع هزینه هستند که جوابی تقریبی را در قالب فرایندی تکراری به‌دست می‌آورند. در مرجع [۷] از روش نیوتن-رافسون برای حل سینماتیک وارون ربات‌های افزونه و غیرافزونه استفاده شده است. روش پیشنهادی به شرایط اولیه حساس بوده و بار محاسباتی بالایی دارد. در مرجع [۸] برای تعیین جواب سینماتیک وارون ربات شش درجه آزادی، روش‌هایی چون شبه‌نیوتن، حداقل مربعات میرا و روش خطی‌سازی با تصحیح تغییرات مفاصل مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته‌اند. در مرجع [۹] روشی تحت عنوان رویکرد مُدال برای تعیین جواب سینماتیک وارون ربات‌های فوق‌افزونه مطرح شده است. بر مبنای این روش، ساختار چنین ربات‌هایی را می‌توان با استفاده از منحنی‌ای به نام منحنی استقامت^۱ توصیف نمود. روش پیشنهادی قابلیت اعمال قیود را داشته و پیکربندی-های تکین را می‌تواند شناسایی کند. لیکن ساختاری وابسته به مدل دارد و حل آن پیچیده می‌باشد.

در مرجع [۱۰] رویکردی موسوم به نقشه راه سینماتیک^۲ مطرح شده که براساس تعریف معیاری جهت تعیین فاصله بین پیکربندی‌های ربات از یکدیگر عمل می‌کند. روش پیشنهادی، مسئله اجتناب از برخورد بازوها به یکدیگر را خطاب قرار داده است. اما جستجوی محلی برای تعیین پیکربندی بهینه، زمان‌بر بوده و روند آن دشوار می‌باشد. در مرجع [۱۱] از رویکردی تکراری بر مبنای اطلاعات هندسی پیکربندی ربات استفاده شده است. تکنیک پیشنهادی از دو مرحله تشکیل شده است. در فاز اول، روندی تکراری از مجری نهایی به سمت پایه ربات صورت گرفته و در آن ابتدا، دست‌یابی موقعیت هدف بررسی شده و روند تکراری دیگری از پایه ربات به سمت مجری نهایی طی می‌شود. با ترکیب این دو فاز و پس از تکرارهای نسبتاً کوتاه، پیکربندی مناسب مفاصل تعیین می‌شود. مشکل اساسی این روش، ایده هندسی آن برای یافتن جواب دقیق و با اجتناب از محدودیت مفاصل است که برای ربات‌هایی با درجه‌های آزادی بالا و ساختاری پیچیده مطلوب نمی‌باشد. در مرجع [۱۲] روشی هندسی مطرح شده که با ثابت فرض کردن زوایای دوم به بعد و در نظر گرفتن دو زاویه مجزا در معادلات سینماتیک مستقیم، پیکربندی مناسب مفاصل تعیین می‌شود. روش پیشنهادی به ساختار ربات وابسته بوده و برای ربات‌های پیچیده با دشواری روبرو خواهد بود.

شبکه‌های عصبی با توجه به محاسبات توزیع شده و موازی و قابلیت نگاشت غیرخطی و ویژگی‌هایی چون تطبیق‌پذیری با محیط، به‌طور گسترده‌ای در زمینه سینماتیک وارون مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در

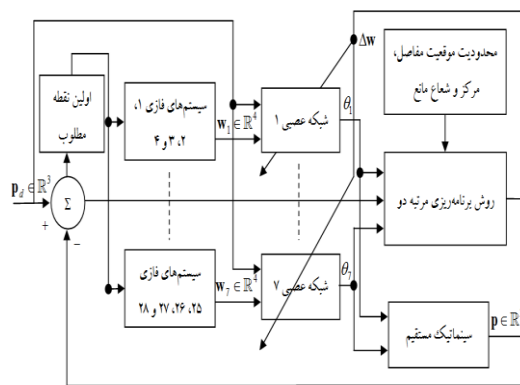
^۳ Multi Layer Perceptron

^۴ Self Organizing Map

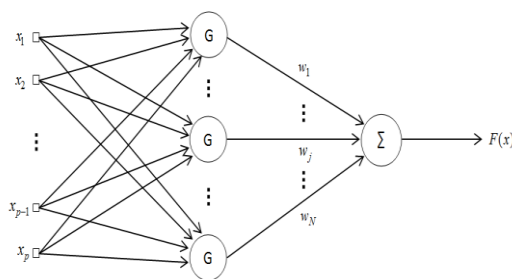
^۵ Dual network

^۱ backbone

^۲ kinematics roadmap



شکل ۱: ساختار کلی روش پیشنهادی



شکل ۲: ساختار شبکه RBF

۳- زیرسیستم‌های ساختار پیشنهادی

ساختار روش پیشنهادی از سه زیرسیستم اصلی تشکیل شده‌است که عبارتند از: شبکه عصبی، روش برنامه‌ریزی مرتبه دو و سیستم فازی. جواب سینماتیک وارون ربات بازوی هفت درجه آزادی با ترکیب این زیرسیستم‌ها تعیین خواهد شد. از طرفی، حل مسئله با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی چون موقعیت مفاصل و مانع در فضای کاری صورت گرفته‌است. جزئیات هر یک از زیرسیستم‌های مذکور در ادامه تشریح خواهد شد.

۱-۳ شبکه عصبی

شبکه عصبی مورد استفاده در ساختار پیشنهادی، شبکه تابع شعاعی پایه (RBF) می‌باشد که از سه لایه ورودی، پنهانی و خروجی برخوردار است. توابع فعال‌سازی لایه پنهانی، توابع گوسی هستند که مرکز و پهنای آن‌ها قابل تنظیم می‌باشد. وزن‌های لایه خروجی که ارتباط خطی بین لایه پنهانی و خروجی را فراهم می‌کنند، پارامترهای قابل تنظیم دیگر شبکه می‌باشند. با توجه به این که روش حل مسئله به صورت بی‌درنگ انجام می‌پذیرد، پارامترهای توابع گوسی ثابت در نظر گرفته شده و تنها وزن‌های لایه خروجی تطبیق داده می‌شوند. لازم به ذکر است که یادگیری با مراکز و پهنای ثابت از جمله روش‌های آموزش شبکه عصبی RBF می‌باشد. لذا، یادگیری شبکه عصبی با فرایندی بهینه‌سازی خطی و در فضای دکارتی صورت می‌گیرد. در این شیوه آموزش، بردار مراکز بطور تصادفی از میان داده‌های آموزش انتخاب شده و پهنای توابع نیز براساس

می‌شود. قیودی که در برنامه حل سینماتیک وارون در نظر گرفته شده‌اند شامل محدودیت موقعیت مفاصل و مانع در فضای کاری ربات می‌باشند. برنامه اجتناب از مانع با بررسی شرایطی چون انتخاب متغیر مفاصل درگیر در معادلات قیود بازوها و تعیین بحرانی‌ترین بازو صورت می‌گیرد. به منظور برقراری قیود مسئله در روش برنامه‌ریزی مرتبه دو، از تحقق یافتن شرایط کان-تاکر استفاده خواهد شد. ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی با شبیه‌سازی و تحلیل نتایج بر روی ربات بازوی PA-10 صورت خواهد گرفت. از مزایای روش پیشنهادی، قابلیت اجرای بی‌درنگ، در نظر گرفتن محدودیت مفاصل، اجتناب از موانع و حالت‌های تکیه می‌باشد. علاوه بر آن، روش پیشنهادی نیاز به تنظیمات زیادی نداشته و به سادگی برای کاربر قابل اجرا است.

در ادامه این مقاله، ابتدا در بخش ۲ ساختار کلی روش پیشنهادی مطرح شده و سپس در بخش ۳ به تشریح زیرسیستم‌های آن پرداخته خواهد شد. در بخش ۴، برنامه اجتناب از موانع تشریح خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی و تحلیل آنها در بخش ۵ بررسی خواهد شد. نتیجه‌گیری نیز در بخش ۶ ارائه خواهد شد.

۲- ساختار کلی روش پیشنهادی

در این مقاله، جهت تعیین پیکربندی مفاصل متناظر با موقعیت مطلوب دکارتی، از ترکیب شبکه عصبی با روش برنامه‌ریزی مرتبه دو استفاده می‌شود. متناظر با هر زاویه مفصل، یک شبکه عصبی RBF مورد استفاده قرار گرفته شده و در نتیجه، هفت شبکه عصبی به صورت موازی و برای تعیین هر یک از زاویه مفاصل ربات بازوی سری هفت درجه آزادی افزونه استفاده شده‌اند. فرایند یادگیری شبکه‌ها در فضای دکارتی و به صورت بی‌درنگ صورت می‌گیرد. شکل ۱ ساختار کلی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد، که در آن p_d موقعیت مطلوب در فضای دکارتی، p موقعیت لحظه‌ای مجری نهایی، θ_i ($i=1, \dots, 7$) زاویه مفصل نام، $w_i(0)$ بردار وزن‌های اولیه شبکه عصبی مفصل نام و Δw بردار تطبیق وزن‌های شبکه عصبی می‌باشد. جهت برآورده شدن قیود مسئله که عبارتند از: محدودیت‌های فیزیکی مفاصل و موانع در فضای کاری، روش برنامه‌ریزی مرتبه دو برای تطبیق وزن‌های لایه خروجی شبکه عصبی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از طرفی، سیستم فازی نیز شرایط اولیه مناسب را برای شبکه عصبی فراهم می‌کند.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{m \times m} & \mathbf{A}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbf{A}_{n \times m}^T & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (7)$$

فاصله بردار مراکز از یکدیگر تعیین می‌شوند. ساختار کلی شبکه عصبی RBF به صورت شکل ۲ می‌باشد.

با توجه به ساختار ارائه شده در شکل مذکور، رابطه بین ورودی و خروجی شبکه به صورت زیر می‌باشد:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|) \quad (1)$$

که در آن w_i وزن لایه خروجی متناظر با نرون شماره i ام، m تعداد نرون‌ها و $G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|)$ معرف تابع فعال‌سازی است که رابطه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{t}_i)^T(\mathbf{x} - \mathbf{t}_i)}{\sigma_i^2}\right)\right) \quad (2)$$

۲-۳ روش برنامه‌ریزی مرتبه دو

به طور کلی، هدف مسئله بهینه‌سازی مقید، تعیین بردار $\mathbf{w}$ به گونه‌ای است که تابع هزینه $f(\mathbf{w})$ مشروط به قید نامساوی $g(\mathbf{w}) \leq 0$ حداقل گردد. از جمله روش‌های مناسب جهت حل چنین مسائلی، روش برنامه‌ریزی مرتبه دو می‌باشد که معادلات کلی آن به صورت زیر می‌باشد [۱۹]:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{c}^T \mathbf{d} + .5 \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{d} &\leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن تابع $\bar{\mathbf{f}}$ ، بردارهای $\mathbf{c}$ ، $\mathbf{b}$ و ماتریس $\mathbf{A}$ برابر خواهند بود با

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}} &= f(\mathbf{w}^k + \Delta \mathbf{w}^k) - f(\mathbf{w}^k) \\ c_i &= \frac{\partial f(\mathbf{w}^k)}{\partial w_i}; b_j = -g_j(\mathbf{w}^k) \\ \mathbf{A} &= [a_{ij}]_{m \times n}; a_{ij} = \frac{\partial g_j(\mathbf{w}^k)}{\partial w_i} \\ d_i &= \Delta w_i^k; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

برای حل مسئله برنامه‌ریزی مرتبه دو، ابتدا با تعریف بردار $\mathbf{s}$ ، قیود نامساوی به صورت زیر به قیود مساوی تبدیل می‌شوند:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{d} + \mathbf{s} = \mathbf{b} \quad \mathbf{s} \geq 0 \quad (5)$$

سپس، تابع لاگرانژ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \mathbf{c}^T \mathbf{d} + .5 \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{d} + \mathbf{s} - \mathbf{b}) \quad (6)$$

که در آن $\mathbf{u}$ بردار ضریب لاگرانژ نام دارد. با مشتق‌گیری تابع لاگرانژ نسبت به بردار جستجوی $\mathbf{d}$ و بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{s}$ ، رابطه ماتریسی زیر تشکیل می‌شود که براساس آن می‌توان بردار جستجوی $\mathbf{d}$ را جهت تطبیق وزن‌های شبکه به دست آورد:

که در آن m تعداد متغیرهای طراحی $\mathbf{w}$ و n تعداد قیود مسئله می‌باشد. جهت برقراری قیود مسئله، شرایطی موسوم به کان-تاکر^۱ باید برآورده شوند. این شرایط عبارتند از:

- ماتریس $\mathbf{H}$ معین مثبت باشد.
- ماتریس $\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{m \times m} & \mathbf{A}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbf{A}_{n \times m}^T & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix}$ وارون پذیر باشد.
- بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{s}$ مثبت باشند.
- رابطه $\mathbf{u}^T \mathbf{s} = 0$ برقرار شود.

با محاسبه بردار جستجوی $\mathbf{d}$ ، وزن‌های شبکه عصبی به صورت زیر تطبیق می‌شوند:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \eta \mathbf{d}(k) \quad (8)$$

۳-۳ سیستم فازی

سیستم‌های فازی نیز مانند شبکه‌های عصبی دارای قابلیت نگاشت غیرخطی براساس جفت داده‌های ورودی-خروجی بوده و از چند بخش تشکیل شده‌است. بخش نخست آن فازی‌گر است که ورودی صریح را به مقداری فازی یا غیردقیق تبدیل می‌کند. موتور استنتاج با استفاده از قواعد فازی و توابع عضویتی که بر مبنای تجربه شخص ساخته شده‌اند، خروجی‌های فازی را تعیین می‌کند. در انتها نیز فازی‌زدا وجود دارد. جایی که خروجی‌های فازی، به مقادیر واضح تبدیل می‌شوند. ورودی-های سیستم فازی مورد نظر، مختصات دکارتی معجری نهایی و خروجی آن وزن متناظر لایه خروجی شبکه عصبی می‌باشد. به عبارتی، برای هر وزن شبکه عصبی، یک سیستم فازی در نظر گرفته می‌شود. هدف سیستم فازی این است که جواب اولیه مناسب را برای شبکه عصبی فراهم کند. با استفاده از شرایط اولیه مناسب، این امکان فراهم می‌شود که الگوریتم برنامه‌ریزی مرتبه دو با حداقل زمان ممکن به جواب بهینه همگرا شود. باید توجه داشت که تشکیل سیستم فازی و اجرای آن برای یافتن وزن‌های اولیه به صورت قطع خط انجام می‌شود. بنابراین، مشکلی را از نظر بی‌درنگ بودن روش برای مسائل کنترلی بوجود نمی‌آورد.

بنابراین، روند کلی الگوریتم پیشنهادی برای حل سینماتیک وارون ربات بازوی سری افزونه را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

۱- مسیر مطلوب دکارتی به تعدادی نقاط گسسته تقسیم می‌شود. این نقاط به عنوان ورودی به شبکه‌های عصبی اعمال می‌شوند.

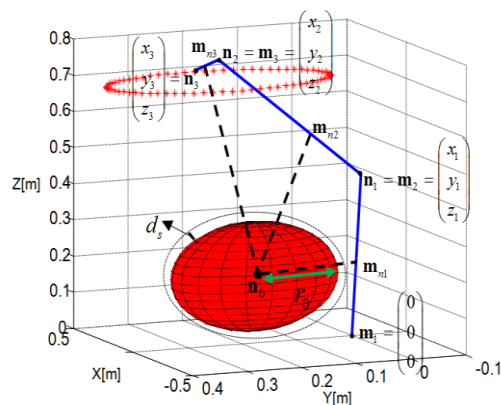
¹ Kun-Tucker

که در آن i شماره بازو و α پارامتری وابسته به مختصات مفاصل است
($0 \leq \alpha \leq 1$). فاصله نقطه دلخواه $\mathbf{m}_{ni}$ تا مرکز مانع $\mathbf{n}_0$ برابر است با

$$dist = \|\mathbf{m}_i + \alpha \mathbf{m}_i \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_0\|^2 \quad (10)$$

با مشتق‌گیری از رابطه حاصل نسبت به پارامتر α ، مختصات نقطه بحرانی $\mathbf{m}_{ni}^*$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{m}_{ni}^* = \mathbf{m}_i + \left(\frac{(\mathbf{m}_i \mathbf{n}_0)^T (\mathbf{m}_i \mathbf{n}_i)}{(\mathbf{m}_i \mathbf{n}_i)^T (\mathbf{m}_i \mathbf{n}_i)} \right) \mathbf{m}_i \mathbf{n}_i; i=1,2,3 \quad (11)$$



شکل ۳: موقعیت نقاط روی بازوها و مانع نسبت به یکدیگر

نقطه بحرانی معرف نقطه‌ای روی بازوی ربات است که از کمترین فاصله تا مرکز مانع نسبت به سایر نقاط بازو برخوردار می‌باشد. به منظور کاهش تعداد قیود مربوط به بازوها در شبکه‌های عصبی، دو راه کار در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا، معادلات قیود بازو استخراج شده و براساس آن‌ها، تنها قیودی در شبکه عصبی در نظر گرفته می‌شوند که متغیر مفصل متناظر با خروجی شبکه را در اختیار داشته باشند. لازم به ذکر است که در هر قید بازو، تنها مختصات ابتدا و انتهای بازو و اطلاعات مانع دخالت دارند. برای نمونه، مختصات ابتدا و انتهای بازوی نخست ربات بازوی PA-10 به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{m}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{n}_1 = [0.5c_1s_2 \ 0.5s_1s_2 \ 0.5c_2]^T \quad (12)$$

که در آن c_i و s_i معرف $\cos(\theta_i)$ و $\sin(\theta_i)$ ($i=1,2$) می‌باشند. با توجه به رابطه (۱۲)، قید بازوی نخست تنها در شبکه‌های عصبی اول و دوم شامل شده و سایر شبکه‌ها از این قید مستثنی می‌باشند. راه کار دیگر این است که در هر لحظه، بحرانی‌ترین بازو تعیین شود. این بازو از

۲- با توجه به محدوده تغییرات مسیر مطلوب دکارتی و میزان فاصله آنها از یکدیگر، بردار مراکز و پهنای توابع گوسی شبکه‌های عصبی تعیین می‌شوند. بردار مراکز به طور تصادفی از داخل بازه تغییرات مسیر مطلوب انتخاب شده و واریانس نیز به طور تقریبی بر اساس حداکثر فاصله مراکز از یکدیگر تعیین می‌شود. در این صورت، خروجی شبکه با استفاده از روابط (۱) و (۲) به طور لحظه‌ای بدست می‌آید.

۳- اطلاعات قیود مسئله شامل محدودیت موقعیت مفاصل ربات، شعاع و مرکز مانع یا موانع به روش برنامه‌ریزی مرتبه دو اعمال شده و این روش براساس رابطه (۷) و تحقق شرایط کان-تاکر، وزن‌های شبکه عصبی را به روز می‌نماید.

۴- متناظر با هر مسیر مطلوب در فضای دکارتی، اولین نقطه از آن مسیر به سیستم‌های فازی اعمال شده و آنها وزن‌های اولیه شبکه عصبی را براساس معیارهایی چون امکان‌پذیری جواب مفاصل و مجاورت مجری نهایی به اولین نقطه مطلوب دکارتی تعیین می‌نمایند.

۵- روند مذکور در جهت کاهش خطای دکارتی مجری نهایی طراحی شده و چنانچه این خطا از آستانه معینی کمتر شود، الگوریتم متوقف می‌شود. وزن‌های نهایی متناظر با هر نقطه از مسیر مطلوب به عنوان وزن‌های اولیه شبکه عصبی برای نقطه بعدی از مسیر مطلوب در نظر گرفته می‌شود.

۴- برنامه اجتناب از مانع

به منظور فرمول‌سازی مسئله اجتناب از مانع، فرض کنید که مانع موجود در فضای کاری توسط کره‌ای به شعاع r_0 و مرکز $\mathbf{n}_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ محصور شده باشد. همچنین، مختصات ابتدا و انتهای بازوی ربات هم به ترتیب با $\mathbf{m}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ و $\mathbf{n}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ ($i=1,2,3$) توصیف می‌شود. برای این که امکان هرگونه برخوردی بین بازو و مانع رخ ندهد، ناحیه‌ای امنیتی حول کره محصورکننده مانع در نظر گرفته می‌شود. فاصله بین نقطه بحرانی و مرکز مانع باید از مجموع شعاع کره و ناحیه امنیتی بیشتر باشد. نقطه بحرانی روی هر بازو، نزدیک‌ترین فاصله را به مرکز مانع دارد. شکل ۳، موقعیت مانع و بازوهای ربات، نقاط بحرانی و ناحیه امنیتی را نشان می‌دهد.

شعاع ناحیه امنیتی برابر d_s می‌باشد. مختصات هر نقطه روی بازوی i را می‌توان به صورت پارامتری و با اطلاعات موقعیت دکارتی مفاصل ابتدا و انتهای بازو تعیین نمود. فرض کنید $\mathbf{m}_{ni} = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ معرف مختصات نقطه‌ای دلخواه روی بازوی i باشد. مختصات نقطه مذکور را می‌توان به صورت پارامتری و با توجه به مختصات ابتدا و انتهای بازو نوشت. به عبارت دیگر

$$\mathbf{m}_{ni} = \mathbf{m}_i + \alpha \mathbf{m}_i \mathbf{n}_i \quad i=1,2,3 \quad (9)$$

شماره مفصل	نوع مفصل	محدوده موقعیت مفاصل بر حسب درجه	محدوده سرعت مفاصل بر حسب رادیان بر ثانیه
۱	دورانی	± ۱۷۷	± ۱
۲	دورانی	± ۹۱	± ۱
۳	دورانی	± ۱۷۴	± ۱
۴	دورانی	± ۱۳۷	± ۲
۵	دورانی	± ۲۵۵	$\pm ۲ \pi$
۶	دورانی	± ۱۶۵	$\pm ۲ \pi$
۷	دورانی	± ۳۶۰	$\pm ۲ \pi$

نزدیک‌ترین فاصله نسبت به سایر نقاط روی بازوها برخوردار است. چنانچه در هر لحظه، بازوی مذکور از مانع اجتناب ورزد، سایر بازوها نیز از برخورد حفظ خواهند شد. برای این منظور، کافی است که در هر مرحله از فرایند بهینه‌سازی، بازویی که نزدیک‌ترین فاصله را تا مانع دارد، تعیین شده و تنها قید مربوط به این بازو در شبکه‌های عصبی اعمال شود.

۵- نتایج شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

به‌منظور نشان‌دادن عملکرد روش پیشنهادی در این مقاله، شبیه‌سازی‌های کامپیوتری بر روی ربات بازوی PA-10 که ساخت شرکت میتسوبیشی است، انجام شده‌است. این ربات که یکی از متداول‌ترین ربات‌های افزونه است، دارای هفت درجه آزادی با مفاصل دورانی می‌باشد. پارامترهای دناویت-هارتبرگ (D-H) این ربات در جدول ۱ ارائه شده‌است که در آن $d_7 = 0.08m$ و $d_5 = 0.5m$ ، $d_3 = 0.45m$ ، محدودیت موقعیت و سرعت مفاصل این ربات در جدول ۲ ارائه شده‌است. جهت تطبیق مناسب وزن‌های شبکه به گونه‌ای که اهداف اولیه و ثانویه به خوبی برآورده شوند، از روش برنامه‌ریزی مرتبه دو که در بخش ۳-۲ ارائه شده، استفاده می‌شود. برای برقراری شرایط کان-تاکر، ابتدا با قراردادن پارامتر تنظیم λ به صورت λI و ترکیب با ماتریس

$$\begin{bmatrix} H_{m \times m} & A_{m \times n} & 0_{m \times n} \\ A_{n \times m}^T & 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

مشکل تکنیکی آن حل خواهد شد.

جدول ۱: پارامترهای D-H ربات بازوی PA-10

شماره مفصل	زاویه پیچش α_k	طول بازو a_k	آفست بازو d_k	متغیر مفصل θ_k
۱	۰	۰	۰	θ_1
۲	-۹۰	۰	۰	θ_2
۳	۹۰	۰	d_3	θ_3
۴	-۹۰	۰	۰	θ_4
۵	۹۰	۰	d_5	θ_5
۶	-۹۰	۰	۰	θ_6
۷	۹۰	۰	d_7	θ_7

جدول ۲: محدوده موقعیت و سرعت ربات PA-10

از طرفی، برای تعیین بردار کمبود s و بردار ضریب لاگرانژ u ، شرط $u^T s = 0$ در فرایند حل مسئله لحاظ شده‌است. همچنین، با انتخاب ماتریس $H = aI$ ، شرط مثبت معینی آن برآورده خواهد شد. پارامتر تنظیم λ نیز به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شرط $u_i, s_i \geq 0$ برقرار شود. پیکربندی‌های ربات در هر لحظه باید به گونه‌ای طراحی شوند که همواره قیود فیزیکی مفاصل برقرار شوند تا مجری نهایی قادر به ادامه حرکت خود بوده و ربات نیز دچار هیچ گونه آسیبی از این ناحیه نشود. این قیود به صورت زیر می‌باشند:

$$\theta_{i \min} \leq \theta_i \leq \theta_{i \max}; \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (۱۳)$$

که در آن $\theta_{i \min}$ و $\theta_{i \max}$ به ترتیب، حداقل و حداکثر مقدار موقعیت مفصل i ام می‌باشند. از طرفی، با توجه به اینکه در ربات PA-10، حداقل موقعیت هر مفصل برابر منفی حداکثر مقدار آن می‌باشد، قید موقعیت هر مفصل به صورت زیر خواهد بود:

$$|\theta_i| - \theta_{i \max} \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (۱۴)$$

تشکیل قیود اجتناب از موانع بر مبنای فاصله بین موقعیت نقطه بحرانی تا مرکز مانع، شعاع کره و ناحیه امنیتی صورت می‌گیرد. به عبارت دیگر، فرمول‌سازی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$r_0 + d_s - \|\mathbf{m}_{nj}^* - \mathbf{n}_0\| \leq 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (۱۵)$$

با توجه به روش برنامه‌ریزی مرتبه دو، بردار منفی قیود b و ماتریس مشتقات قیود A برابر خواهند بود با

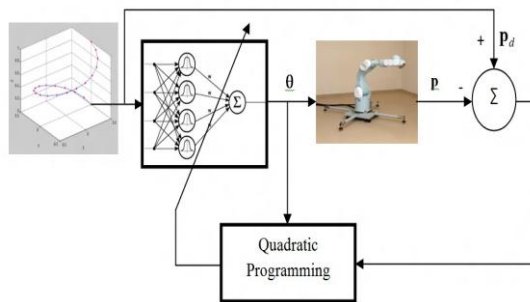
$$b_j = - \begin{bmatrix} h_{1j} \\ h_{2j} \end{bmatrix}; \quad A_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{1j}}{\partial \mathbf{w}_j} & \frac{\partial h_{2j}}{\partial \mathbf{w}_j} \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$h_{1j} = |\theta_j| - \theta_{j \max}; \quad h_{2j} = r_0 + d_s - \|\mathbf{m}_{nj}^* - \mathbf{n}_0\|$$

$$\mathbf{w}_j = [w_{1j} \quad w_{2j} \quad w_{3j} \quad w_{4j}]^T; \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

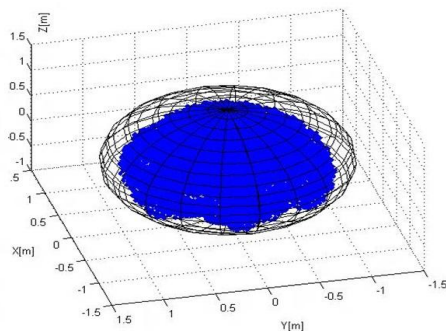
که در آن $\mathbf{m}_{nj}^*$ موقعیت بحرانی‌ترین نقطه نسبت به مرکز مانع

داده‌های ورودی، ابتدا مجموعه‌ای از نقاط دکارتی به‌طور یکنواخت از داخل فضای کاری ربات جمع‌آوری می‌شود. در شکل ۵ نمونه‌ای از داده‌های فضای کاری ربات بازوی PA-10 ارائه شده است. با استفاده از ساختار شکل ۴، داده‌های خروجی یا وزن‌های شبکه عصبی متناظر با داده‌های دکارتی ورودی به‌دست می‌آیند. به ازای این وزن‌ها، خطای مجری نهایی صرف‌نظر از زمان اجرای محاسبات حداقل شده است. بر-اساس اطلاعات به‌دست‌آمده، برای هر یک از داده‌های ورودی و خروجی، ۵ تابع عضویت مثلثی تعریف خواهد شد. در شکل ۶ توابع عضویت ورودی x نشان داده شده است. با استفاده از روش جدول ارجاع، متناظر با هر جفت داده ورودی-خروجی یک قاعده فازی تعیین می‌شود. این امر با مقداردهی توابع عضویت تعریف شده برای هر داده و یافتن تابع عضویتی با حداکثر مقدار صورت می‌گیرد. سپس، با تعریف درجه عضویتی برای هر قاعده، قواعد متناقض حذف می‌شوند.

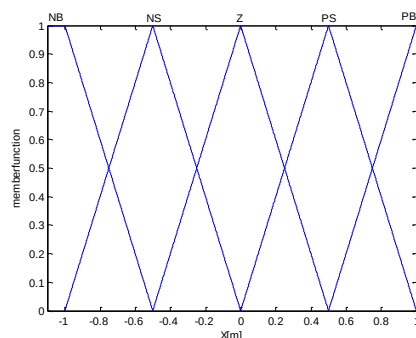


شکل ۴: ساختار پیشنهادی بدون سیستم فازی برای جمع‌آوری داده‌های لازم

جهت تشکیل سیستم فازی



شکل ۵: مجموعه‌ای از داده‌های فضای کاری ربات بازوی PA-10



می‌باشد. با استفاده از معادلات رابطه (۱۶) و رابطه (۷) بردار جستجوی d تعیین می‌شود. با تعیین بردار جستجو تحت برقراری شرایط کان-تاکر و با استفاده از رابطه (۷)، وزن‌های شبکه به‌صورت زیر تطبیق می‌شوند:

$$w_i(k+1) = w_i(k) + \eta \Delta w_i(k) \\ \Delta w_i(k) = d_i(k); i=1, 2, \dots, m \quad (17)$$

با به‌روز شدن وزن‌های شبکه، متغیر مفاصل ربات نیز به‌عنوان خروجی شبکه به‌صورت زیر به‌روز می‌شوند:

$$\theta_i(k) = \sum_{j=1}^4 w_j(k) G(\|x - t_i\|); i=1, 2, \dots, 7 \\ G(\|x - t_i\|) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(x_d - t_i)^T (x_d - t_i)}{\sigma_i^2} \right)\right) \quad (18)$$

از طرفی، با تعیین مقدار جدید موقعیت مفاصل، موقعیت مجری نهایی x و به دنبال آن اطلاعات خطای دکارتی e و مشتق آن به‌روز شده و برای تطبیق مجدد وزن‌های شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر

$$x(k) = [x(k) \ y(k) \ z(k)]^T; e(k) = x(k) - x_d \\ x_d = [x_d \ y_d \ z_d]^T; J = \frac{1}{2} \|e(k)\|^2 \quad (19)$$

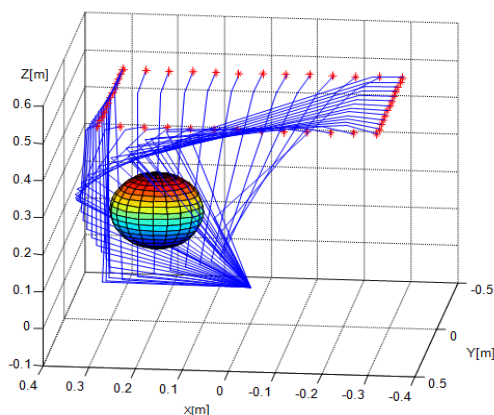
لازم به ذکر است که تمامی هفت شبکه عصبی RBF دارای ۴ نرون می‌باشد. در ارتباط با سینماتیک وارون، شرایط وزنی باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که موقعیت اولیه مجری نهایی تا حد امکان به اولین نقطه مطلوب نزدیک باشد و از طرفی، موقعیت اولیه مفاصل متناظر نیز شرط امکان‌پذیری جواب را رعایت کنند. چنانچه شرایط اولیه این شرط را برآورده ن سازند، زمان اجرای محاسبات به‌طور طبیعی افزایش خواهد-یافت. به‌منظور کاهش این زمان، از سیستم فازی برای مقداردهی اولیه وزن‌های شبکه عصبی استفاده می‌شود. تشکیل این سیستم فازی براساس برنامه جدول ارجاع صورت می‌گیرد [۲۰]. براساس این روش، ابتدا باید مجموعه‌ای از داده‌های ورودی و خروجی فراهم‌شود. داده‌های ورودی، موقعیت‌های متفاوت در فضای دکارتی و خروجی نیز وزن لایه خطی شبکه عصبی می‌باشد. از آنجایی که سیستم‌های فازی دارای یک خروجی می‌باشند، به ازای هر وزن شبکه عصبی یک سیستم فازی در نظر گرفته می‌شود. لذا، با توجه به این که هر شبکه عصبی دارای ۴ نرون می‌باشد، در مجموع ۲۸ سیستم فازی تشکیل می‌شود تا وزن‌های اولیه هفت شبکه عصبی را تعیین نمایند.

جهت جمع‌آوری داده‌های ورودی و خروجی، با استفاده از برنامه کنترل سینماتیکی پیشنهادی و بدون وجود سیستم فازی، وزن‌های نهایی شبکه که به ازای آن‌ها خطای دکارتی مجری نهایی حداقل شده‌است، تعیین شده و این وزن‌ها همراه با ورودی متناظر ذخیره می‌شوند. برای این منظور، از ساختاری مطابق با شکل ۴ استفاده می‌شود. برای جمع‌آوری

روند محاسباتی ساختار پیشنهادی در شکل ۷ نشان داده شده است. مطابق با این ساختار، ابتدا اولین نقطه از مسیر مطلوب به سیستم فازی اعمال می‌شود. خروجی این سیستم، به‌عنوان وزن‌های اولیه به شبکه عصبی تزریق می‌شود. شبکه‌ها با این وزن‌ها و نقطه مطلوب به‌عنوان ورودی، زاویه مفاصل را تعیین می‌کنند.

روش برنامه‌ریزی مرتبه دو از اطلاعات خطای دکارتی، بردار و ماتریس مشتقات قیود استفاده نموده و از این طریق، تطبیق مناسب وزن‌ها را با در نظر گرفتن شرایط همگرایی و برآورده شدن شرایط کان-تاکر صورت می‌دهد. شرط توقف الگوریتم این است که تابع هزینه رابطه (۱۹) باید کمتر از مقدار از پیش تعیین شده $\varepsilon = 10^{-6}$ باشد. در این صورت، نقطه بعدی از مسیر مطلوب به‌عنوان ورودی جدید اعمال می‌شود.

به‌منظور شبیه‌سازی و تحلیل روش پیشنهادی، مسیری مستطیل‌شکل در نظر گرفته شده است. از طرفی، مانعی با مرکز $(0.2, 0.2, 0.2)$ و شعاع 0.1 متر فضای کاری ربات را محدود نموده است. در ابتدا، حل مسئله به صورت نامعقد صورت می‌گیرد. شرایط اولیه ربات نیز صفر در نظر گرفته شده است. شکل ۸ پیکربندی‌های ربات را در حالت نامعقد و هنگام ردیابی مسیر مطلوب نشان می‌دهد. باتوجه به این شکل، تعدادی از بازو-های ربات هنگام ردیابی مسیر مطلوب به مانع برخورد نموده‌اند. حال مسیر مطلوب مذکور به برنامه پیشنهادی و مطابق با روند ارائه شده در شکل ۵ اعمال می‌شود. شکل ۹ پیکربندی‌های ربات را در حالت مقید و جهت ردیابی مسیر مستطیلی نشان می‌دهد. مطابق با این شکل، بازوهای ربات به‌طور کامل از مانع اجتناب ورزیده‌اند. از طرفی، جهت دستیابی به چنین پیکربندی‌هایی، متغیر مفاصل باید در محدوده مجاز خود قرار گیرند. به عبارت دیگر، جواب سینماتیک وارون باید امکان‌پذیر باشد تا ربات قادر به ردیابی مسیر مورد نظر باشد.



شکل ۸: پیکربندی‌های نهایی ربات در حالت نامعقد

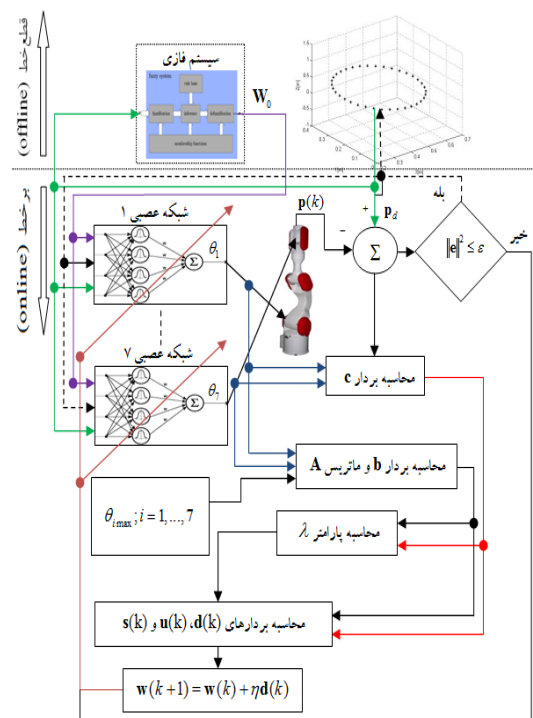
شکل ۶: توابع عضویت ورودی x

در نهایت، با انتخاب فازی گر تکین، فازی‌زدای میانگین مرکز و موتور جستجوی ضرب، سیستم فازی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$f(w) = \frac{\sum_{l=1}^n \bar{w}^l \mu_x^l(x) \mu_y^l(y) \mu_z^l(z)}{\sum_{l=1}^n \mu_x^l(x) \mu_y^l(y) \mu_z^l(z)} \quad (20)$$

که در آن، l شماره قاعده، $\bar{w}^l$ مرکز تابع عضویت خروجی و $\mu_x^l(x)$ ، $\mu_y^l(y)$ و $\mu_z^l(z)$ به ترتیب معرف توابع عضویت ورودی‌های x ، y و z می‌باشند.

نکته ۱: سیستم‌های فازی در الگوریتم پیشنهادی تنها برای اولین نقطه از هر مسیر مطلوب وارد عمل شده و هدف آن‌ها سرعت بخشیدن به فرایند حل سینماتیک وارون متناظر با نقطه دکارتی مذکور می‌باشد.



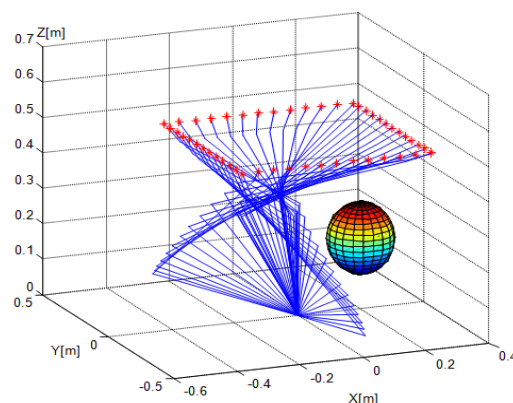
شکل ۷: روند محاسباتی ساختار پیشنهادی

نکته ۲: با توجه به اینکه هر سیستم فازی دارای سه ورودی و یک خروجی می‌باشد، امکان نمایش جدول قواعد فازی به صورت دو بعدی وجود ندارد. از طرفی، برای هر یک از داده‌های ورودی و خروجی تعداد ۵ تابع عضویت در نظر گرفته شده که با توجه به فضای کاری غیرخطی شدید ربات بازوی PA-10، برای هر سیستم فازی بیش از ۹۰ قاعده فازی با حذف قواعد متناقض بدست آمده است. لذا، از ارایه قواعد فازی در این مقاله صرف نظر شده و تنها چگونگی تشکیل این قواعد و نتایج حاصل از عملکرد سیستم‌های فازی تشریح شده است.

با توجه به این شکل، مجری نهایی ربات در فاصله کمتر از پنج میلی‌متر از موقعیت‌های مطلوب دکارتی قرار دارد و لذا، هدف اولیه ربات به‌خوبی محقق شده‌است. نکته‌ای که باید در این قسمت اشاره نمود این است که با توجه به حل عددی سینماتیک وارون، مسئله دقت جواب تا حدودی قربانی می‌شود. از طرفی، خطای دکارتی بدست آمده را می‌توان به میزان بیشتری کاهش داد، اما این امر زمان اجرای محاسبات را افزایش داده و اجرای بی‌درنگ روش پیشنهادی را با مشکل روبرو می‌نماید. بنابراین، باید مصالحه‌ای را بین زمان اجرای محاسبات و دقت جواب برقرار نمود. هنگام طراحی حرکت مفاصل ربات، هرچه بازوها از مانع دورتر باشند، ربات با پیوستگی بهتری مسیر موردنظر را طی خواهند نمود. فاصله بین بازو و مانع باید هر لحظه از مجموع شعاع مانع و ناحیه امنیتی بیشتر باشد. شکل ۱۲ معرف فاصله بین بحرانی‌ترین بازو تا مانع می‌باشد. مطابق با شکل مذکور، حداقل فاصله بحرانی‌ترین بازو تا مرکز مانع حدود ۰.۱۵ متر می‌باشد که از شعاع مانع ۰.۱ متر همواره بیشتر است. با توجه به این که حل مسئله سینماتیک وارون به‌صورت بی‌درنگ صورت می‌گیرد، زمان اجرای محاسبات بسیار حائز اهمیت می‌باشد. درواقع، روش پیشنهادی باید قادر باشد که در زمان نمونه‌برداری مناسب برای کاربرد-های بی‌درنگ، متغیر مفاصل را تعیین نماید.

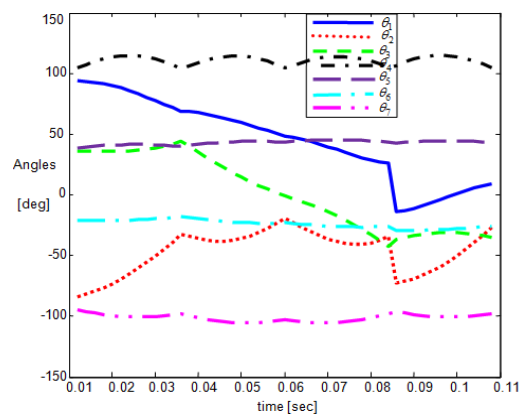
شکل ۱۳ زمان اجرای محاسبات را متناظر با نقاط گسسته مسیر مستطیلی نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، زمان اجرای محاسبات متناظر با هر نقطه دکارتی کمتر از ۶۰ میلی‌ثانیه (به‌غیر از نقطه اول) می‌باشد که برای شرایط بی‌درنگ مناسب می‌باشد. باید توجه داشت که برنامه کامپیوتری شبیه‌سازی در محیط MATLAB نوشته شده است. چنانچه از زبان‌های برنامه نویسی سطح پایین‌تر همانند C++ استفاده شود، زمان اجرای الگوریتم بسیار کمتر از آنچه در شکل ۱۳ نشان داده شده است، خواهد شد که به این ترتیب اجرای بی‌درنگ روش پیشنهادی همواره تضمین خواهد شد.

باید یادآور شد که زمان اجرای متناظر با نخستین داده از مسیر مطلوب تا حدودی بیشتر از سایر نقاط می‌باشد. دلیل این امر این است که همگرا شدن الگوریتم از وزن‌های اولیه شبکه عصبی که توسط سیستم-فازی بدست آمده‌اند، همواره زمان‌بر می‌باشد. در حالی که برای سایر نقاط دکارتی چنین وضعیتی وجود ندارد، زیرا از وزن‌های نهایی متناظر با نقطه قبلی به‌عنوان وزن‌های اولیه نقطه بعدی استفاده می‌شود. پیکربندی ربات متناظر با این وزن‌ها به پیکربندی مطلوب بسیار نزدیک می‌باشد و لذا، الگوریتم در زمان کوتاهی جواب مسئله را می‌یابد.

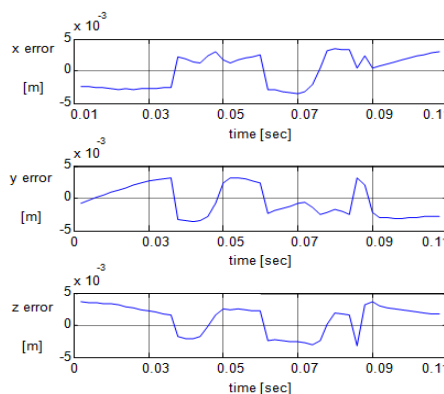


شکل ۹: پیکربندی‌های نهایی ربات در حالت مقید

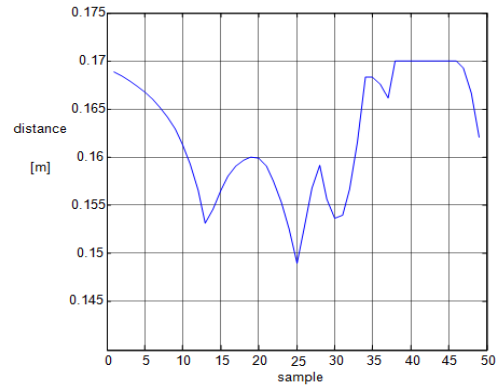
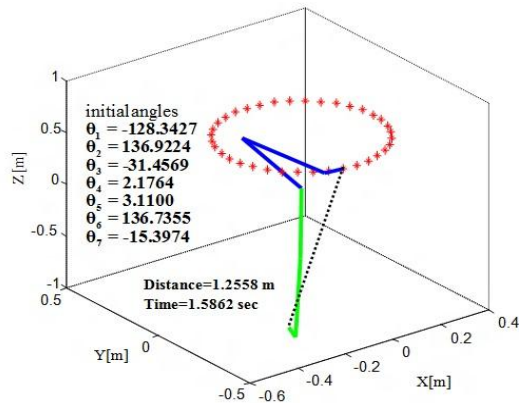
در ساختار پیشنهادی این مسئله نیز لحاظ شده و متناظر با پیکربندی-های شکل ۹ موقعیت نهایی مفاصل به‌گونه‌ای تعیین شده‌اند که همواره از محدودیت ساختاری خود اجتناب ورزیده‌اند. این مسئله در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود. اجتناب از مانع و محدودیت‌های فیزیکی ربات از جمله اهداف ثانویه ربات محسوب می‌شوند که با استفاده از خاصیت افزونگی قابل اجرا می‌باشند. به‌طور معمول، مهم‌ترین و اصلی‌ترین وظیفه ربات این است که مسیر طراحی شده برای حرکت آن را با حداقل خطای دکارتی تعقیب نماید. این خطا معرف اختلاف بین مجری نهایی و موقعیت هدف می‌باشد. خطای مذکور که متناظر با پیکربندی‌های نهایی ربات جهت ردیابی مسیر مستطیلی شکل می‌باشد، در شکل ۱۱ ارایه شده‌است.



شکل ۱۰: موقعیت نهایی مفاصل در حالت مقید

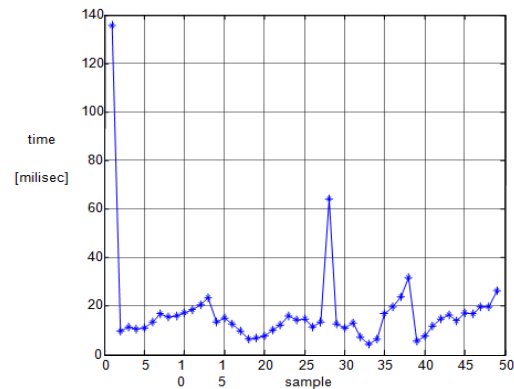
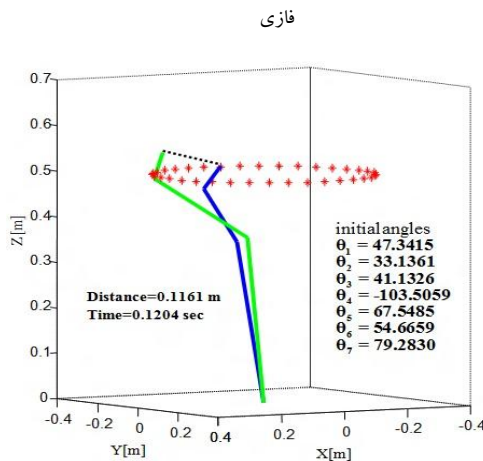


شکل ۱۱: خطای ردیابی مجری نهایی



شکل ۱۲: فاصله بین بحرانی‌ترین بازو و مانع

شکل ۱۴: پیکربندی اولیه و نهایی ربات متناظر با اولین نقطه مطلوب بدون سیستم فازی



شکل ۱۳: زمان اجرای محاسبات متناظر با نقاط مسیر مستطیلی

شکل ۱۵: پیکربندی اولیه و نهایی ربات متناظر با اولین نقطه مطلوب با سیستم فازی

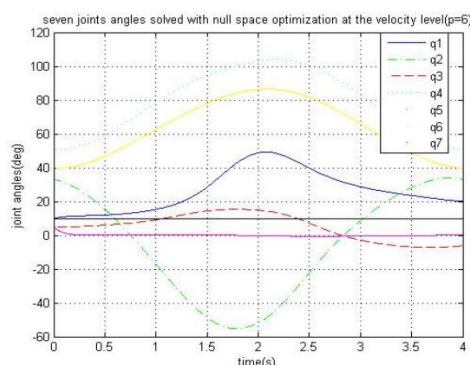
به منظور مقایسه عملکرد روش پیشنهادی در این مقاله با روش‌های موجود در مقالات، نتایج شبیه‌سازی با نتایج روش شبه‌وارون ژاکوبی که متداولترین و مهم‌ترین روش در زمینه حل سینماتیک وارون ربات‌های افزونه می‌باشد، مقایسه خواهد شد. در روش شبه‌وارون ژاکوبی، با بیان مسئله در سطح سرعت و براساس ارتباط بین سرعت مجری نهایی و سرعت مفاصل توسط ماتریس ژاکوبی، ابتدا سرعت مفاصل را تعیین نموده و سپس، موقعیت آن‌ها را تعیین می‌کند. در این‌جا مقایسه نتایج با فرم توسعه‌یافته روش شبه‌وارون ژاکوبی که در مرجع [۳] ارایه شده است، انجام خواهد شد. در این روش

همان‌طور که در قسمت‌های قبل اشاره شد، تعیین وزن‌های اولیه شبکه عصبی جهت دست‌یابی به اولین نقطه از مسیر مطلوب برعهده سیستم فازی می‌باشد. این سیستم بر مبنای دو معیار مجاورت مجری نهایی به اولین نقطه مطلوب و امکان‌پذیری متغیر مفاصل، وزن‌های اولیه شبکه عصبی را فراهم می‌نماید. برای ارائه عملکرد سیستم فازی، ابتدا شرایطی در نظر گرفته شده است که در آن، فاصله مجری نهایی تا موقعیت هدف زیاد بوده و متغیرهای اولیه مفاصل نیز شرط امکان‌پذیری مفاصل را رعایت نکرده‌اند. شکل ۱۴ نتیجه شبیه‌سازی را تحت چنین شرایطی و برای تنها اولین نقطه از مسیر دایروی نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، عدم وجود شرایط اولیه مناسب باعث شده است که ربات در زمانی بیشتر از یک ثانیه به موقعیت هدف خود دست‌یابد که هرگز برای کاربردهای بی‌درنگ و سریع مناسب نمی‌باشد. برای جبران‌سازی چنین وضعیتی، سیستم فازی به ساختار روش پیشنهادی اضافه شده است. شکل ۱۵ پیکربندی نهایی و اولیه ربات را متناظر با اولین نقطه از این مسیر نشان می‌دهد. با توجه به شکل مذکور، پیکربندی اولیه ربات در فاصله نسبتاً نزدیکی نسبت به موقعیت مطلوب قرار گرفته و متغیر اولیه مفاصل نیز در محدوده مجاز خود واقع می‌شوند. چنین شرایط اولیه‌ای باعث شده است که ربات در زمانی حدود ۱۲۰ میلی‌ثانیه به موقعیت هدف دست پیدا کند.

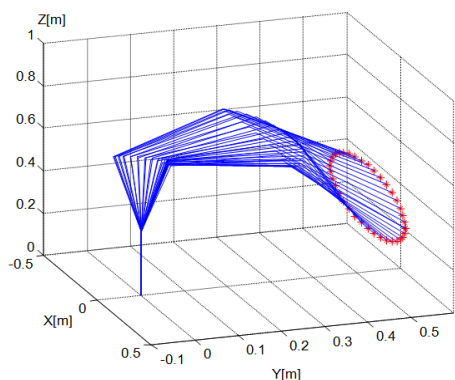
$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0, \quad \mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\gamma \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_d + k_p (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (21)$$

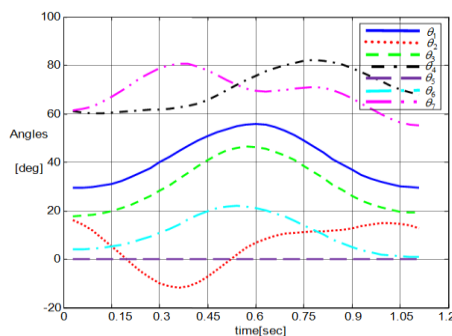
که در آن $\mathbf{q}$ ، $\dot{\mathbf{x}}$ ، $\dot{\mathbf{x}}_d$ و $\mathbf{J}^+$ به ترتیب سرعت مفاصل، سرعت مجری نهایی، سرعت مطلوب و شبه‌وارون ماتریس ژاکوبی می‌باشند. $\Phi(\mathbf{q})$ نیز تابع هزینه مناسب جهت برآورده شدن قیود می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این روش از دو بخش تشکیل شده است. در بخش



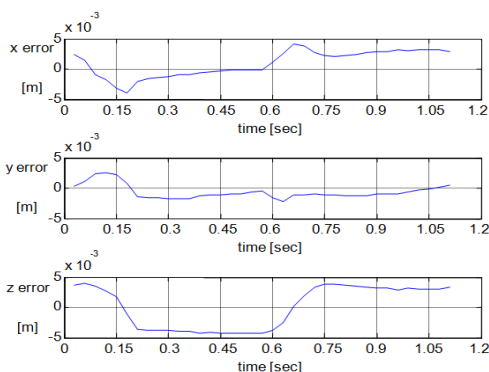
شکل ۱۷: موقعیت نهایی مفاصل ربات [3]



شکل ۱۸: پیکربندی‌های ربات با استفاده از روش پیشنهادی



شکل ۱۹: موقعیت نهایی مفاصل با استفاده از روش پیشنهادی

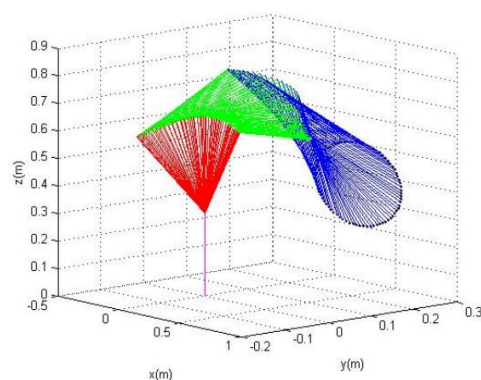


شکل ۲۰: خطای ردیابی مجری نهایی با استفاده از روش پیشنهادی

اول هدف این است که خطای دکارتی حداقل شود و در بخش دوم هدف مسئله برآورده شدن قیود می‌باشد. در ابتدا با توجه به این که در مرجع [۱۱] تنها قیود فیزیکی مفاصل در نظر گرفته شده است، مقایسه بین دو روش بر مبنای اجتناب از این قید صورت می‌گیرد. لازم به ذکر است در مرجع مذکور از ربات بازوی POWERCUBE استفاده شده است. تابع هزینه جهت اجتناب از محدودیت موقعیت مفاصل به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\Phi_1(\mathbf{q}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{iM}} \right)^2 \quad (22)$$

که در آن q_{iM} و q_{im} به ترتیب حداقل و حداکثر موقعیت زاویه ای q_i را نشان می‌دهند. $\bar{q}_i$ بیانگر مقدار میانی گستره تغییرات مفصل i ام می‌باشد و n درجه آزادی ربات است. براساس مرجع موردنظر، ردیابی بر روی مسیری بیضوی با شعاع بزرگ ۰.۳۵ متر و شعاع کوچک ۰.۱۵ متر و در صفحه $X-Y$ صورت می‌گیرد. شکل‌های ۱۶ و ۱۷ که از مرجع [۳] اقتباس شده است، به ترتیب پیکربندی‌های ربات و موقعیت نهایی مفاصل را نشان می‌دهند. براساس شکل ارائه شده، حل سینماتیک وارون برای تحقق جوابی امکان‌پذیر، ۴ ثانیه به طول انجامیده است. نتایج شبیه‌سازی-های روش پیشنهادی، در شکل ۱۸ ارائه شده است.

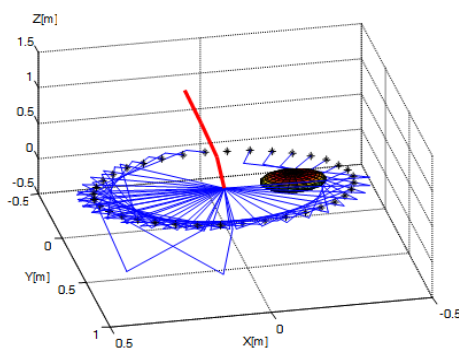


شکل ۱۶: پیکربندی‌های ربات [3]

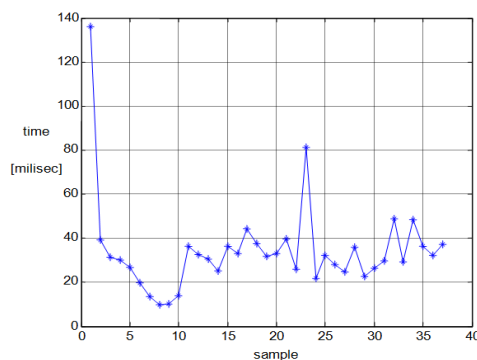
معایب این روش محسوب می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲۲ مشاهده می‌شود، روش شبه‌وارون به ازای یکی از نقاط مطلوب نتوانسته است پیکربندی مناسب را جهت حداقل ساختن خطای مجری نهایی تعیین کند. دلیل این امر وابستگی روش مذکور به شرایط اولیه و عدم تضمین همگرایی متغیر مفاصل می‌باشد. در واقع، چنانچه به ازای شرایط وزنی خاصی روش قادر به ادامه حرکت خود نباشد، در همان وضعیت باقی مانده و ناچار باید الگوریتم را متوقف نموده و داده بعدی به آن اعمال شود. از طرفی، در این روش حتماً باید مفاصل بحرانی در هر لحظه تشخیص داده شده و متوقف شوند تا سایر مفاصل، جبران‌سازی را انجام دهند. این مسئله عموماً منجر به ناپوستگی در حرکت ربات می‌شود.

اگر چه ساختار روش شبه‌وارون، ساده بوده و از حجم محاسباتی بالایی برخوردار نیست، اما در صورت بروز چنین مشکلی، زمان آن بسیار افزایش می‌یابد. زیرا باید بعد از تعداد تکرارهای مشخصی، الگوریتم را متوقف نموده و نقطه بعدی اعمال شود.

زمان کل محاسبات مسیر مذکور برابر ۲۸۶۹ ثانیه شده است. از طرفی، مشکل اساسی دیگر در روش مذکور وابستگی به تنظیم مناسب ضرایب وزنی است و از آنجایی که هیچ روش اصولی برای انتخاب مقادیر بهینه برای آنها وجود ندارد، در روش شبه‌وارون ژاکوبی تضمینی وجود ندارد که به ازای انتخاب مقادیر خاصی برای ضرایب وزنی توابع هزینه، جواب مناسب برای تمام نقاط مسیر مطلوب بدست آید. حال همین مسیر به ساختار پیشنهادی در این مقاله اعمال می‌شود. شکل ۲۴ پیکربندی‌های ربات و خطای مجری نهایی را نشان می‌دهد. در روش پیشنهادی، تنها پارامتر قابل تنظیم، نرخ همگرایی η می‌باشد که برابر ۰.۵ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پیکربندی‌های ربات به‌طوری که خطای مجری نهایی به حداقل مقدار مطلوب تنزل پیدا کند، تعیین شده‌اند.



شکل ۲۲: پیکربندی‌های ربات با استفاده از روش شبه‌وارون ژاکوبی



شکل ۲۱: زمان اجرای محاسبات با استفاده از روش پیشنهادی

خطای ردیابی مجری نهایی ناچیز بوده و زمان اجرای محاسبات نیز بسیار کمتر از روش حل مرجع [۳] می‌باشد (شکل‌های ۲۰ و ۲۱).

در ادامه، دو قید محدودیت موقعیت مفاصل و موانع در فضای کاری ربات در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که باتوجه به این که روش حل مرجع [۳] تنها محدودیت فیزیکی مفاصل را در نظر گرفته است، در این قسمت شبیه‌سازی‌ها بر روی ربات PA-10 صورت گرفته و تنظیم پارامترها به صورت سعی و خطا و با هدف یافتن بهترین مقادیر آنها انجام گرفته است. تابع هزینه مناسبی که به‌طور معمول استفاده می‌شود، به صورت مجموع وزن‌دار توابع جریمه می‌باشد. تابع جریمه مربوط به محدودیت موقعیت مفاصل به صورت زیر می‌باشد:

$$\Phi_2(h(q)) = \begin{cases} .5 \left(\frac{1}{h(q)} - \frac{1}{h_0} \right)^2 & h_0 < h(q) < 0 \\ 0 & h(q) \leq h_0 \end{cases} \quad (22)$$

$$h(q) = d_s + r_0 - dist_{\min}$$

که در آن $dist_{\min}$ حداقل فاصله بین نزدیک‌ترین نقطه روی بازو تا مرکز مانع می‌باشد، h_0 مقدار دلخواهی است که میزان تاثیر قیود را مشخص نموده و d_s نیز ناحیه امنیتی حول مانع می‌باشد. تابع هزینه نهایی برابر خواهد بود با

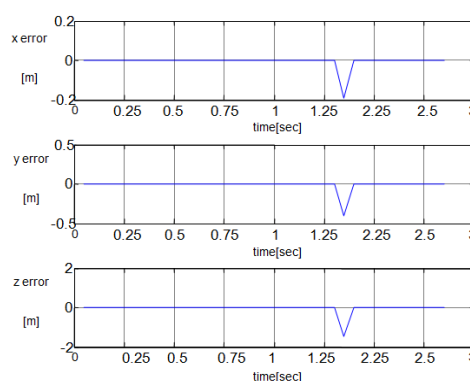
$$\Phi_e(q) = \alpha \Phi_1(q) + \sum_{i=1}^n \beta_i \Phi_2(h_i(q)) \quad (23)$$

که در آن α و β ضرایب وزنی توابع هزینه می‌باشند. مسیر در نظر گرفته شده، دایره‌ای با شعاع ۰.۴ متر و مرکز (۰، ۰، ۰) می‌باشد. همچنین، مانعی به شعاع ۰.۱ متر و مرکز (۰.۲، ۰.۲، -۰.۱۵) در نظر گرفته شده است. پارامترهای روش شبه‌وارون ژاکوبی عبارتند از: $\gamma = 0.6$ ، $\alpha = 0.52$ ، $\lambda = 0$ ، $\beta_1 = 0$ ، $\beta_2 = 0$ و $h_0 = -0.5$. این مقادیر با سعی و خطا بدست می‌آیند که در واقع یکی از

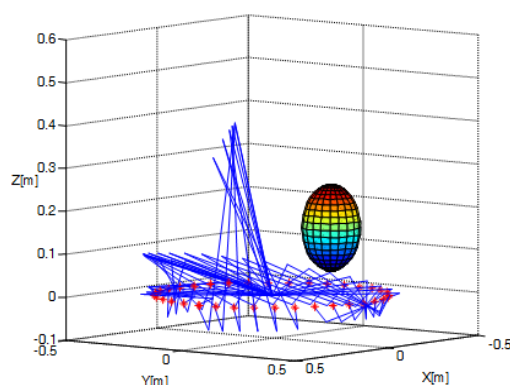
در این مقاله، از ترکیب شبکه عصبی، روش برنامه‌ریزی مرتبه دو و سیستم فازی برای تعیین جواب سینماتیک و ارون ربات بازوی هفت درجه آزادی افزونه و تحت محدودیت‌های موقعیت مفاصل و مانع در فضای کاری ربات استفاده شده‌است. در روش پیشنهادی، شبکه عصبی با استفاده از فرایند بهینه‌سازی خطی و بی‌درنگ در فضای دکارتی و بهره‌گیری از ساختاری بسیار ساده، متغیر مطلوب مفاصل را تعیین نموده‌است. روش برنامه‌ریزی مرتبه دو نیز با تطبیق مناسب وزن‌های شبکه، وظیفه برآورده‌نمودن قیود مسئله را برعهده داشته‌است. سیستم فازی بر مبنای دو معیار مجاورت مجری نهایی تا نقطه هدف و امکان‌پذیری جواب، وزن‌های اولیه شبکه عصبی را با هدف کاهش زمان اجرای محاسبات متناظر با نخستین نقطه از مسیر مطلوب تعیین نموده‌است. برنامه اجتناب از مانع با تعیین بحرانی‌ترین بازو در هر مرحله از اجرای الگوریتم صورت گرفته و این مسئله تعداد قیود بازوی درگیر در هر شبکه را به حداقل رسانده‌است. الگوریتم پیشنهادی بدون نیاز به تعریف هیچ گونه تابع هزینه و تنظیم ضرایب وزنی، مسئله را حل نموده و با توجه به فرایند یادگیری داده به داده، برای محیط‌های دینامیکی مطلوب می‌باشد. حل مسئله در سطح موقعیت صورت گرفته و هیچ گونه نیازی به اطلاعات صریح مدل ربات نمی‌باشد. لذا، روش ارائه شده از قابلیت تعمیم‌پذیری بالایی برخوردار بوده و قادر به مواجهه با هرگونه قید مرتبط با مسئله سینماتیک و ارون می‌باشد.

مراجع

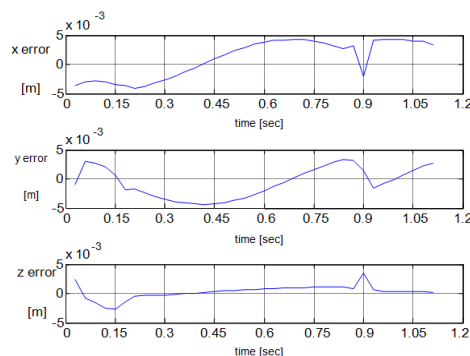
- [1] V. Perdereau, "Real-time control of redundant robotic manipulators for mobile obstacle avoidance," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 41, no. 1, pp. 41-59, 2002.
- [2] M. Benzaoui, "Redundant robot manipulator control with obstacle avoidance using extended jacobian method," *18th Mediterranean Conference in Control & Automation (MED)*, Morocco, Marrakech, pp. 371-376, 2010.
- [3] J. Wang, Y. Lee and X Zhao, "Inverse kinematics and control of a 7-DOF redundant manipulator based on the closed-loop algorithm," *Advanced Robotic Systems*, vol. 7, no. 4, pp. 1-10, 2011.
- [4] G. Antonelli, "A new on-line algorithm for inverse kinematics of robot manipulators ensuring path tracking capability under joint limits," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 19, no. 1, pp. 162-167, 2003.
- [5] C. W. Wampler, "Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares



شکل ۲۳: خطای ردیابی مجری نهایی با استفاده از روش شبه‌وارون ژاکوبی



شکل ۲۴: پیکربندی‌های ربات با استفاده از روش پیشنهادی



شکل ۲۵: خطای ردیابی مجری نهایی با استفاده از روش پیشنهادی

در این روش، مشکلاتی چون حساسیت به شرایط اولیه، گرفتاری در خطاهای محلی و عدم برقراری شرایط مناسب همگرایی وجود ندارد. از طرفی، هرگز نیاز به متوقف نمودن مفاصل بحرانی نبوده و ساختار پیشنهادی بدون نیاز به تنظیم هیچ گونه ضرایب وزنی، با حداقل تنظیمات ممکن به حل مسئله می‌پردازد و لذا، درجه سعی و خطا در آن حداقل می‌باشد. زمان اجرای محاسبات برابر ۱.۱۱۵۱ ثانیه می‌باشد و برای کاربردهای بی‌درنگ و سریع مناسب می‌باشد.

۸- نتیجه گیری

- [13] T. Bhattacharjee and A. Bhattacharjee, "A study of neural network based inverse kinematics solution for a planar three joint robot with obstacle avoidance," *Assam University Journal of Science and Technology*, vol. 5, no.2, pp. 1-7, 2010.
- [14] S. S. Chiddarwar and N. Ramesh Babu, "Comparison of RBF and MLP neural networks to solve inverse kinematic problem for 6R serial robot by a fusion approach," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 23, no. 7, pp. 1083-1092, 2010.
- [15] S. Kumar, N. Patel and L. Behera, "Visual motor control of a 7 DOF robot manipulator using function decomposition and sub-clustering in configuration space," *Neural Processing Letters*, vol. 28, no. 1, pp. 17-33, 2008.
- [16] Y. Xia and J. Wang, "A dual neural network for kinematic control of redundant robot manipulators," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 31, no. 1, pp. 147-154, 2001.
- [17] Y. Zhang, J. Wang and Y. Xu, "A dual neural network for bi-criteria kinematic control of redundant manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, no. 6, pp. 923-931, 2002.
- [18] Y. Zhang and J. Wang, "Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators using a dual neural network," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 34, no. 1, pp. 752-759, 2004.
- [19] A. Jasbir, *Introduction to Optimum Design*, Second Edition, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.
- [20] L. X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- methods," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 16, no. 1, pp. 93-101, 1986.
- [6] L. Phuoc, et al., "Damped least square based genetic algorithm with Gaussian distribution of damping factor for singularity-robust inverse kinematics," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 22, no. 7, pp. 1330-1338, 2008.
- [7] A. Goldenberg, et al., "A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 1, no. 1, pp. 14-20, 1985.
- [8] S. Sasaki., "Feasibility study of manipulator inverse kinematics problems with applications of optimization principles," *Mechanism and machine theory*, vol. 28, no. 5, pp. 685-697 1993.
- [9] G. S. Chirikjian and J. W. Burdick, "A modal approach to hyper-redundant manipulator kinematics," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 10, no. 3, pp. 343-354, 1994.
- [10] J. M. Ahuactzin and K. Gupta, "A motion planning based approach for inverse kinematics of redundant robots: the kinematic roadmap," *Expert Systems with Applications*, vol. 14, no. 1-2, pp. 159-167, 1998.
- [11] A. Aristidou and J. Lasenby, "FABRIK: A fast, iterative solver for the Inverse Kinematics problem," *Graphical Models*, vol. 73, no. 5, pp. 243-260, 2011.
- [12] S. Yahya, M. Moghavvemi and H. Mohamed, "Geometrical approach of planar hyper-redundant manipulators: Inverse kinematics, path planning and workspace," *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 19, no.1, pp. 406-422, 2011.