مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۹، صفحه ۱۴۱-۱۳۳

طراحی کنترل‌گر برای مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک‌های غیرخطی یکسان و گراف ارتباطی جهت دار ثابت

آرش جدائی[۱]، جمال صفار اردبیلی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[۲] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

دریافت: ۱۳۹۷/۰۷/۰۳ ویرایش اول : ۱۳۹۸/۰۵/۱۳ ویرایش دوم : ۱۳۹۸/۰۷/۱۳ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۱۸

چکیده: در این مقاله، طراحی کنترلگر برای مسئله مهار یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های یکسان، مستقل از زمان، پیوسته از زمان ، غیرخطی وگراف ارتباطی جهت دار ثابت مطالعه می‌شود. در اثبات این مسئله از قضیه پایداری لیاپانوف و نظریه گراف و نامساوی خطی ماتریسی استفاده می شود. عامل ها به دو گروه پیشروها و دنباله روها تقسیم می شوند. در مسئله مهار، عوامل دنباله رو طوری کنترل می شوند که به پوش محدب تولید شده به وسیله عامل های پیشرو بصورت مجانبی همگرا شوند لذا بردار های کنترلی توزیع شده(پروتکل) زمان تاخیری با تاخیر ثابت جهت حل آن پیشنهاد می شود. الگوریتم چهار مرحله ای جهت طراحی پارامتر ها و ماتریس بهره بردارهای کنترلی ارائه شده و موارد ذکر شده بصورت شرایط کافی تحت قضیه اثبات می شود. به منظور نشان دادن قابلیت وکارائی روش پیشنهادی، مثال عددی همراه با چند شبیه سازی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های چند عامله، مهار، پیشرو، دنباله‌رو

Controller design for containment problem of a Class of multi-agent systems with nonlinear identical dynamics and fixed directed graph

Arash Jodaei-Jamal Saffar-Ardabili

Abstract: This paper, studies the controller design for containment problem for a class of multi-agent systems with identical time-invariant continuous-time nonlinear dynamics and fixed directed communication graph. In this problem, the Lyapunov stability theorem, the graph theory and matrix linear inequality are used. The agents are divided into two groups of leaders and followers. In containment problem, all the followers are controlled under which will asymptotically converge to the convex hull spanned by the leaders so distributed communication protocol with fixed time delay is considered and four-step algorithm is proposed for obtaining parameters and gain matrix. The above case is proved to be sufficient condition under theorem. To illustrate the reliability and efficiency of the proposed method, numerical example with simulations are presented.

Keywords: Multi-Agent Systems, Containment, Leader, Follower

نویسنده عهده دار مکاتبات: آرش جدائی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر مطالعه سیستم‌های چند عامله[1] به علت کاربرد وسیع آن در علوم مهندسی، بیولوژیکی، کامپیوتر و غیره گسترش زیادی داشته است. چند کاربرد آنرا می‌توان در زمینه‌هایی همچون حامل‌های فضایی بدون سرنشین[2](UAV) ، حامل‌های زمینی بدون سرنشین[3] (UGV) ، تیم‌های رباتیک، شبکه‌های حسگر و حامل‌های زیردریایی مشاهده نمود[۱]. مهمترین ویژگی در سیستم‌های چند عامله این است که هر عامل فقط بطور موضعی اطلاعات را با همسایگانش به اشتراک می‌گذارد. مسئله مهار سیستم های چند عامله ابتدا درسال ۲۰۰۶ مطرح شد[۲]. در سال ۲۰۰۸ نویسندگان، مسئله را با روش ایست- برو[4] برای سیستم هیبرید[5] بررسی کردند[۳]. در سالهای ۲۰۰۸ ، مسئله برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه دوم تحت توپولوژی جهت دار به دو صورت ثابت و متغیر بررسی شد[۴]. در سالهای ۲۰۰۹ و۲۰۱۲ مسئله برای سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول[6] با توپولوژی ثابت و متغیر مورد مطالعه قرار گرفت[۶-۵]. در سالهای ۲۰۰۸، ۲۰۰۹، ۲۰۱۲ نویسندگان مسئله مهار را برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اولر-لاگرانژ[7] مورد مطالعه قرار دادند[۹-۷]. در سال ۲۰۱۲ مسئله مهار سیستم های چند عامله با دینامیک های خطی مرتبه بالا و مستقل از زمان و گراف ارتباطی جهت دار مورد مطالعه قرار گرفت. دو پروتکل تاخیری به ترتیب جهت کنترل عامل های پیشرو و دنباله رو ارائه گردید[۱۰]. در سال ۲۰۱۳ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول و گراف ارتباطی غیر جهت دار در دو حالت زمان پیوسته و زمان گسسته مطالعه شده و برای هر کدام یک پروتکل تاخیری ارائه گردید. در حالت دینامیک زمان پیوسته ثابت شد که پروتکل ارائه شده نسبت به هر تاخیر ثابت مقاوم است. در حالت دینامیک گسسته ، یک شرط کافی برای بهره فیدبک بر مبنای تاخیر زمانی و اطلاعات گراف ارتباطی ارائه گردید[۱۱]. در سال ۲۰۱۴ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه دوم وگراف ارتباطی جهت دار در دو حالت عاملهای پیشرو ساکن و متحرک بررسی شد. در هر حالت یک پروتکل تاخیری با تاخیرهای متغیر با زمان و کراندار پیشنهاد شده و شرایط کافی روی گراف ارتباطی، بهره فیدبک و کران بالایی برای تاخیرها اعمال شد[۱۲]. در سال ۲۰۱۴ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول و با گراف ارتباطی جهت دار بررسی شد. یک پروتکل تاخیری با تاخیر های متغیر با زمان متفاوت و غیر کراندار جهت حل مسئله ارائه شده و حل مسئله تبدیل به تحلیل سرعت همگرایی سیستم خطای مسئله گردید. تحت بعضی فرضیات مناسب روی تاخیر های ارتباطی، یک شرط صریح جهت مشخص شدن سرعت همگرایی سیستم خطا پیشنهاد شد[۱۳]. در سال ۲۰۱۵ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های خطی، مستقل از زمان با گراف ارتباطی جهت دار مطالعه شد. یک پروتکل با تاخیر متغیر با زمان(غیر ثابت) پیشنهاد شده و با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف-کراسوفسکی[8]، شرط کافی جهت حل مسئله ارائه شد[۱۴]. در سال ۲۰۱۵ مساله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول وگراف ارتباطی جهت دار در مفهوم میانگین مربعی مطالعه شد. یک پروتکل تاخیری با تاخیر های متغیر با زمان و کراندار جهت حل مساله پیشنهاد گردید. ثابت شد اگر کران بالای تاخیرها در شرط مناسبی صدق کند آنگاه مساله مهار حل شدنی می باشد[۱۵]. در سال ۲۰۱۶ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول و گراف ارتباطی ثابت و جهت دار در دو حالت زمان پیوسته و زمان گسسته مورد بررسی قرار گرفت. در حالت سیستم زمان پیوسته، تحت یک پروتکل زمان تاخیری، یک شرط لازم و کافی برای حل مسئله مهار ارائه شد. در حالت سیستم زمان گسسته، تحت یک پروتکل زمان تاخیری، یک شرط کافی برای حل مسئله مهار ارائه شد[۱۶]. در سال ۲۰۱۶ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های یکسان، مرتبه بالا واغتشاشات ورودی متغیر با زمان و عامل های پیشرو متحرک مورد بررسی قرار گرفت و پروتکلی تاخیری با تاخیر متغیر و کراندار جهت حل مسئله پیشنهاد شد[۱۷]. در سال ۲۰۱۶ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول ،گراف ارتباطی غیر جهت دار، متغیر و همبند در بازه های زمانی مطالعه شد. یک پروتکل تاخیری با تاخیر های متغیر با زمان و کراندار جهت حل مساله ارائه شد و با استفاده از تابع لیاپانوف- کراسوفسکی مسئله حل گردید[۱۸]. در سال ۲۰۱۷ مسئله مهار یک سیستم چند عامله در دو حالت دینامیک های مرتبه اول و دوم و گراف های ارتباطی متغیر مورد بررسی قرار گرفت و در هر حالت یک پروتکل تاخیری با تاخیر متغیر با زمان بر اساس روش لیاپانوف-کراسوفسکی پیشنهاد شد. ثابت شد اگر گراف ارتباطی همبند باشد مساله مهار حل می شود[۱۹]. در سال ۲۰۱۷ نویسندگان مسئله مهار غیر همزمان برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه دوم گسسته زمانی را بررسی کردند و یک پروتکل با تاخیر زمانی ارائه شد[۲۰]. در سال ۲۰۱۷ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های از مرتبه بالا و زمان گسسته و با گراف ارتباطی جهت دار بررسی شد. یک پروتکل تاخیری با تاخیرهای متغیر با زمان جهت حل مسئله ارائه شد و ثابت گردید مساله حل شدنی است اگر و تنها اگر گراف ارتباطی دارای جنگل سراسری[9] باشد[۲۱]. در سال ۲۰۱۸ نویسندگان مسئله مهار را برای یک سیستم چند عامله در دو حالت دینامیک های مرتبه اول و دوم زمان گسسته با گراف ارتباطی متغیر و عامل های پیشرو ثابت بررسی کرده و برای هر حالت یک پروتکل تاخیری با تاخیر زمانی کراندار برای عامل های دنباله رو پیشنهاد کردند[۲۲]. در سال ۲۰۱۸ نویسندگان مسئله مهار را برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه بالا بررسی کردند. مسئله در دو حالت عامل های پیشرو ثابت و متحرک بررسی شد و در هر حالت پروتکل

[1] Multi-Agent System
[2] Unmanned Air Vehicles
[3] Unmanned Ground Vehicles
[4] Stop-Go
[5] Hybrid
[6] High-order
[7] Euler-Lagrange order
[8] Lyapunov-Krasovskii
[9] Spanning Forest

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]

زمان تاخیری با تاخیر های متغیر ارائه گردید[۲۳]. در سال ۲۰۱۸ مسئله مهار برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه دوم و با گراف ارتباطی ثابت بررسی شد. دو پروتکل در حالت های بدون تاخیر و تاخیری زمان متغیر ارائه شد[۲۴]. در سال ۲۰۱۸ نویسندگان مسئله مهار را برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول و زمان گسسته با عامل های پیشرو ثابت و گراف ارتباطی متغیر بررسی کرده و یک پروتکل زمان تاخیری با تاخیر کراندار جهت حل مساله پیشنهاد دادند[۲۵]. در سال ۲۰۱۹ مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه اول و زمان گسسته بررسی شد. نویسندگان ابتدا مسئله را برای حالت بدون تاخیر زمانی بررسی کرده و تحت یک شرط لازم و کافی، پروتکلی جهت حل مساله ارائه کردند سپس مسئله را برای حالت با تاخیر زمانی بررسی کرده و یک پروتکل زمان تاخیری ارائه کردند. در این حالت مسئله مهار با استفاده از تبدیلات Z و محک راوس حل گردید[۲۶]. در سال ۲۰۱۹ مسئله مهار برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های مرتبه بالا و زمان گسسته با عامل های پیشرو ثابت و گراف ارتباطی متغیر مطالعه شد. یک پروتکل زمان تاخیری با تاخیرهای غیر یکسان و ثابت جهت حل مساله ارائه شد[۲۷]. در این مقاله حل مسئله مهار برای یک سیستم چند عامله با دینامیک های غیر خطی مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف و نظریه گراف یک پروتکل زمان تاخیری با تاخیر های ثابت برای عامل های دنباله رو شامل بردارهای مکان وابسته به زمان و بردارهای مکان زمان تاخیری عامل ها پیشنهاد می شود. برای عامل های پیشرو، پروتکل صفر تعریف می شود.

۲- تعاریف اولیه

۲-۱- تعریف: گراف وزن‌دار $G=(V,E)$ با مجموعه رئوس $V=\{\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2,\ldots,\mathbf{V}_n\}$ و مجموعه یالهای $E\subset V\times V$ مفروض هستند. هر راس گراف G را گره یا عامل(در سیستم های چند عامله) نیز گویند[۱۱].

۲-۲- تعریف: ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ را ماتریس مجاورت گراف G گویند هرگاه[۱۱]:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \left(v_j,v_i\right)\epsilon E(G)\\ 0 & \left(v_j,v_i\right)\notin E(G)\ ,i=j\end{cases} \quad (۱)$$

a_{ij} نشانگر وزن یال جهت دار $e_{ji}=\left(v_j,v_i\right)\epsilon E(G)$ است.

۲-۱- یادآوری: در گراف بدون جهت، رابطه $a_{ij}=a_{ji}$ برقرار است.

۲-۳- تعریف: ماتریس لاپلاسین گراف G متناظر با ماتریس مجاورت A است هرگاه[۱۱]:

$$L_{ij}=\begin{cases}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}a_{ik} & i=j\\ -a_{ij} & i\neq j\end{cases} \quad (۱)$$

۲-۴- تعریف: راس jام می تواند اطلاعات راس i ام را دریافت کند، هرگاه یال‌های $e_{ij}=(v_i,v_j)$ متعلق به مجموعه E باشند. راس i را والد[۱۰] و راس j را بچه[۱۱] گویند[۲۳].

۲-۵- تعریف: مجموعه همسایگان(رئوس مجاور) راس i را بصورت زیر نشان تعریف می شود[۲۳]:

$$N_i=\left\{v_j\epsilon V:(v_j,v_i)\epsilon E\right\} \quad (۳)$$

به عبارت دیگر همسایگان راس i راس هایی هستند که اطلاعاتشان توسط راس i گرفته می شود.

۲-۶- تعریف: سیستم کنترلی با دینامیک زیر را انتگرال‌گیر مرتبه اول[۱۲] گویند[۲۸]:

$$\dot{x}(t)=u(t) \quad (۴)$$

که x بردار حالت و u بردار کنترل است.

۲-۷- تعریف: سیستم کنترلی با دینامیک زیر را انتگرال‌گیر مرتبه دوم[۱۳] گویند[۲۸]:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=v(t)\\ \dot{v}(t)=u(t)\end{cases} \quad (۵)$$

که x بردار حالت ، v بردار سرعت و u بردار کنترل است.

۲-۸- تعریف: پوش محدّب مجموعه متناهی $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subset R^n$ عبارت است از کوچکترین مجموعه محدب شامل X و با نماد $CO(X)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند [۲۹]:

$$CO(X)=CO\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}=$$

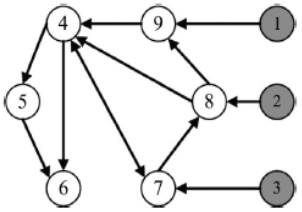
[10] Parent
[11] Child
[12] First- order Integrator
[13] Second- order Integrator

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_i \in R, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1\right\} \qquad (۶)$$

۲-۹- تعریف: در گراف G متناظر یک سیستم چند عامله، عواملی را که می توانند به سایر عامل ها اطلاعات بفرستند ولی نمی توانند اطلاعات از آنها بگیرند را پیشرو[۱۴] گویند. در نتیجه ، عوامل پیشرو هیچ همسایه ای ندارند. در شکل(۱) عوامل ۱،۲و۳ پیشرو هستند[۲۹].

۲-۱۰- تعریف: در گراف G متناظر یک سیستم چند عامله، عواملی راکه از عناصر پیشرو می توانند، اطلاعات دریافت کنند را دنباله رو[۱۵] گویند. در شکل (۱) عوامل ۴،۵،۶،۷،۸ و۹دنباله رو هستند[۲۹].



شکل (۱) نمودار گراف ارتباطی یک سیستم چند عامله شامل عناصر پیشرو و دنباله رو[۲۹]

۲-۱۱- تعریف: در سیستم‌های چند عامله، اگر تعداد عوامل پیشرو و دنباله رو چندگانه باشند، آنگاه مهار عاملها(از نظر مکانی) یعنی ورودی‌های $u_i(t)$ برای عامل‌های دنباله رو طوری موجود باشند، بطوریکه برای هر شرایط اولیه $x_i(0)$ داشته باشیم[۱۱]:

$$\lim_{t\to\infty} d(x_i, Co(X_L)) = 0 \qquad \forall i \in V_F \quad (۷)$$

یعنی عامل‌های دنباله رو طوری کنترل می‌شوند که از نظر مکانی به پوش محدب تولید شده توسط عوامل پیشرو همگرا شوند.

۲-۱۲- تعریف: ماتریس نامنفرد حقیقی $A \epsilon R^{n\times n}$ را M ماتریس گویند، هرگاه همه عناصر غیر قطری آن نامثبت بوده و همه مقادیر ویژه آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشند[۳۰].

۲-۱- لم: برای یک ماتریس نامنفرد $E = [e_{ij}] \in R^{n\times n}$ عبارات زیر معادلند:

۱. E یک M ماتریس است.

۲. ماتریس قطری و معین مثبت $\Theta = \mathrm{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ وجود دارد بطوریکه $\Theta E + E^T\Theta$ ماتریس معین مثبت است[۳۰].

۲-۱۳- تعریف: برای هر ماتریس حقیقی و متقارن A داریم[۱۲]:

۱. $A > 0$ یعنی ماتریس A معین مثبت می باشد.

۲. $A < 0$ یعنی ماتریس A معین منفی می باشد.

۲-۱٤- تعریف: اگر ماتریس های $A \epsilon R^{m\times n}$ و $B \epsilon R^{p\times q}$ مفروض باشند آنگاه ضرب کرونیکر ماتریس A درماتریس B بصورت زیر تعریف می شود[۳۱]:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{(mp\times nq)} \quad (۸)$$

۲-۲- لم: برای ماتریس‌های A, B, C, D با ابعاد مناسب و هر عدد حقیقی α ، ضرب کرونیکر دارای خواص زیر است [۳۱]:

۱. $(\alpha A)\otimes B = A \otimes (\alpha B)$

۲. $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$

۳. $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$

۴. $(A\otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

۵. حاصل ضرب کرونیکر ماتریس معین مثبت در ماتریس معین مثبت، ماتریس معین مثبت است.

۲-۳- لم: (مکمل شور): برای ماتریس بلوکی متقارن Φ با زیر ماتریس های مربعی Φ_{11}و Φ_{22} عبارات زیر معادلند[۲۴]:

۱. $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0$

۲. $\Phi_{11} < 0$ و$\Phi_{22} - \Phi_{12}^T\left(\Phi_{11}^{-1}\right)\Phi_{12} < 0$

۳. $\Phi_{22} < 0$ و$\Phi_{11} - \Phi_{12}\left(\Phi_{22}^{-1}\right)\Phi_{12}^T < 0$

۲-۲- یادآوری: لم مکمل شور دسته ای از نابرابری های غیر خطی ماتریسی را به نابرابری های خطی ماتریسی تبدیل می کند.

۲-٤- لم: فرض کنیم A یک ماتریس معین مثبت(متقارن) حقیقی بوده و $\lambda_{min}(A)$, $\lambda_{max}(A)$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A باشد. در این صورت داریم[۳۰]:

$$\forall x \epsilon R^n, x \neq 0$$

$$\lambda_{\min}(A)x^tx \leq x^tAx \leq \lambda_{\max}(A)x^tx \qquad (۹)$$

[14] Leader

[15] Follower

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]

۲-۱۵- تعریف: اگر عامل i ام اطلاعات بردار مکان خودش را با تاخیر زمانی $\tau_i \geq 0$ دریافت کند، آنگاه τ_i را زمان تاخیر عامل i ام گویند[۳۲].

۲-۱۶- تعریف: اگر عامل i ام اطلاعات بردار مکان همسایه j ام خودش را با تاخیر زمانی $T_{ij} \geq 0$ دریافت کند، آنگاه T_{ij} را زمان تاخیر ارتباطی عاملهای i ام و j ام گویند[۳۲].

۳- تحلیل مسئله مهار

اگر تعداد چندگانه از عامل‌های پیشرو و دنباله رو در سیستم چند عامله موجود باشند، مسئله مهار می‌تواند رخ دهد. در این مقاله مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های یکسان، غیر خطی، پیوسته زمانی ،گراف ثابت وجهت دار بررسی شده و الگوریتمی جهت طراحی کنترل گر در حالت تاخیر زمانی ثابت بیان می گردد.

یک سیستم چند عامله با دینامیک های یکسان، غیر خطی و پیوسته زمانی بصورت زیر مفروض هستند:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Df(t, x_i) + Bu_i \qquad (۱۰)$$

$$i=1, 2, ..., N \qquad (۱۰)$$

که $u_i \epsilon R^m, x_i \epsilon R^n$ به ترتیب بردارهای حالت و کنترل عامل i ام است. $f: R \times R^n \to R^n$ یک تابع برداری پیوسته غیر خطی بوده و A، D و B ماتریس هایی با ابعاد مناسب هستند. عامل ها با اندیس های 1،2،3،...و M را دنباله رو و با اندیس های $M+1$،...و N را پیشرو در نظر گرفته و مجموعه های

$v_L = \{M+1, \ldots, N\}, v_F = \{1, 2, \ldots, M\}$ را به ترتیب مجموعه عامل های دنباله رو و پیشرو در نظر می گیریم.

۳-۱-فرض: برای $M+1 \leq i \leq N$ $u_i = 0$ یعنی بردار کنترلی عامل‌های پیشرو صفر می باشد.

۳-۲- فرض: گراف سیستم چند عامله، جهت دار بوده و برای هر عامل دنباله رو حداقل یک عامل پیشرو وجود دارد، بطوریکه یک مسیر جهت دار از آن به عامل دنباله رو وجود داشته باشد و هیچ یال ارتباطی بین پیشروها وجود ندارد.

۳-۳-فرض: برای ثابت‌های نامنفی $\eta_i \ (i = 1, 2, \ldots, N-M)$ با $\sum_{i=1}^{N-M} \eta_i = 1$ عدد ثابت و مثبت l وجود دارد بطوریکه برای هر $x, y_i \in R^n$ داشته باشیم(نرم اقلیدسی یا نرم۲):

$$\left\| f(t,x) - \sum_{i=1}^{N-M} \eta_i f(t, y_i) \right\| \leq l \left\| x - \sum_{i=1}^{N-M} \eta_i y_i \right\| \qquad (۱۱)$$

۳-۱- یادآوری: با توجه به فرض(۳-۲)، ماتریس لاپلاسین L سیستم های چند عامله با M عامل دنباله رو و $N-M$ عامل پیشرو بصورت ماتریس بلوکی زیر نشان داده می شود:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ 0_{M\times(N-M)} & 0_{(N-M)\times(N-M)} \end{bmatrix}$$

$$L_2 \in R^{M\times(N-M)}, L_1 \in R^{M\times M} \qquad (۱۲)$$

۳-۱- لم: ماتریس نامنفرد L_1 یک M ماتریس است اگر و تنها اگر فرض (۳- ۲) برقرار باشد. با این فرض، هر درایه ماتریس $-L_1^{-1}L_2$ نامنفی است وجمع هر سطر این ماتریس برابر۱ است[۸].

۳-۱- قضیه: سیستم های چند عامله با دینامیک های (۹) و نامساویهای خطی و غیر خطی ماتریسی زیر را درنظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - cBB^T + l^2DD^T + \mu Q & Q \\ Q & -I_n \end{bmatrix} < 0 \qquad (۱۳)$$

$$(-\mu I_M \otimes Q) - \beta^2 (L_1^T \otimes BB^T)(I_M \otimes \Omega_{11}^{-1})(L_1 \otimes BB^T) < 0 \qquad (۱۴)$$

$$\Omega_{11} = AQ + QA^T + L^2DD^T + QQ^T - cBB^T + \mu Q \qquad (۱۵)$$

تحت فرضیات (۳-۲) و (۳-۳) اگر نامساویهای ماتریسی (۱۳) و (۱۴) حل پذیر باشند، آنگاه برای هر شرایط اولیه و هر زمان تاخیر $\tau > 0$ ، همه عوامل دنباله رو به پوش محدب متحرک تولید شده به وسیله عوامل پیشرو مجانبی همگرا می شوند.

اثبات:

با فرض $T_{ij} = \tau_i = \tau$ بردارهای کنترلی(پروتکل) را برای عامل های دنباله رو با دینامیک‌های (۱۰) بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$u_i = \alpha K \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_i - x_j) + \beta K \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_i(t-\tau) - x_j(t-\tau)) \quad i \epsilon V_F \qquad (۱۶)$$

α, β نیروهای اتصالی جفتی می‌باشند که پارامتر هایی مثبت هستند، K ماتریس بهره فیدبک و τ زمان تاخیر ارسال اطلاعات بردار مکانی بین عامل ها می باشند. پارامتر های α, β و ماتریس K طوری طراحی می کنیم تا عامل های دنباله رو در داخل پوش محدب تولید شده بوسیله عامل های پیشرو قرار گیرند. a_{ij} ها عناصر ماتریس مجاورت گراف جهت دار ارتباطی بین عامل ها هستند.

تحت پروتکل کنترلی (۱۶) سیستم (۱۰) بصورت زیر نوشته می شود:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]

$$\begin{cases} x_i^{\circ} = Ax_i + Df(t,x_i) & i\epsilon V_l \\ x_i^{\circ} = Ax_i + Df(t,x_i) + \alpha K\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_i - x_j) \\ \quad +\beta K\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_i(t-\tau) - x_j(t-\tau)) & i\epsilon V_F \end{cases} \quad (۱۷)$$

با در نظرگرفتن

$$x_L = \left[x^T{}_{M+1}, \ldots, x^T{}_N\right]^T \quad (۱۸)$$

$$x_F = \left[x^T{}_1, \ldots, x^T{}_M\right]^T \quad (۱۹)$$

$$F(t,x_F) = \left[f(t,x_1), \ldots, f(t,x_M)\right]^T \quad (۲۰)$$

$$F(t,x_L) = \left[f(t,x_{M+1}), \ldots, f(t,x_N)\right]^T \quad (۲۱)$$

$$F(t,x_L,x_F) = (L_1^{-1}L_2 \otimes D)\,F(t,x_L) + (I_M \otimes D)\,F(t,x_F) \quad (۲۲)$$

سیستم (۱۷) به شکل ماتریسی زیر نوشته می شود:

$$x_L^{\circ} = (I_{N-M} \otimes A)\,x_L + (I_{N-M} \otimes D)\,F(t,x_L) \quad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} x_F^{\circ}(t) = {} & (I_M \otimes A)x_F(t) + (I_M \otimes D)F(t,x_F) - \\ & \alpha(L_1 \otimes BK)x_F(t) - \alpha(L_2 \otimes BK)x_L(t) + \\ & -\beta(L_1 \otimes BK)x_F(t-\tau) - \\ & \beta(L_2 \otimes BK)x_L(t-\tau) \end{aligned} \quad (۲۴)$$

تابع برداری خطا را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$e(t) = x_F - \left(-\left(L_1^{-1}L_2 \otimes I_n\right)x_L\right) = x_F + \left(L_1^{-1}L_2 \otimes I_n\right)x_L \quad (۲۵)$$

با استفاده از رابطه خطای (۲۵) و مشتق گیری از آن نسبت به زمان و جایگذاری روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) داریم:

$$\begin{aligned} e^{\circ}(t) = {} & (I_M \otimes A)e(t) + (I_M \otimes D)F(t,x_L,x_F) - \\ & \alpha(L_1 \otimes BK)e(t) - \beta(L_1 \otimes BK)e(t-\tau) \end{aligned} \quad (۲۶)$$

بنابراین حل مسئله مهار معادل اثبات پایداری مجانبی سیستم خطای (۲۶) است.

برای اثبات پایداری مجانبی سیستم خطای (۲۶)، تحت فرضیات (۲-۳) و (۳-۳)، پارامترهای α, β و ماتریس K برای پروتکل کنترلی (۱۶) را بصورت الگوریتم زیر در چهار مرحله طراحی می کنیم:

الگوریتم

۱. محاسبه کنید ماتریس قطری و معین مثبت $\Theta = \mathrm{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ در لم (۲-۱) متناظر با $E = L_1$. بنا بر لم (۳-۱) ماتریس L_1 ، M ماتریس است.

۲. محاسبه کنید ماتریس $Q > 0$ و پارامتر های $\mu > 0, c > 0$ که جواب های نامساوی خطی ماتریسی (۱۳) می باشند.

۳. قرار دهید $K = B^T Q^{-1}$, $\alpha \geq \frac{c\theta_{max}}{\lambda_0}$ که $\theta_{max} = \max\{\theta_1, \ldots, \theta_M\}$ و λ_0 کوچکترین مقدار ویژه ماتریس معین مثبت $\Theta L_1 + L_1{}^T\Theta$ می باشد که عددی مثبت است،

۴. ثابت مثبت β را چنان محاسبه کنید که در نامساوی غیر خطی ماتریسی(۱۴) صدق کنند.

حال تابع لیاپانوف زیر را برای سیستم خطای (۲۶) در نظر می گیریم:

$$V(t) = e^T(t)(\Theta \otimes Q^{-1})e(t) + \mu\int_{t-\tau}^{t} e^T(\xi)(\Theta \otimes Q^{-1})e(\xi)\,d\xi \quad (۲۷)$$

با مشتق گیری از تابع لیاپانوف (۲۷) نسبت به زمان نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} V^{\circ}(t) = {} & 2e(t)^T(\Theta \otimes Q^{-1})[(I_M \otimes A)e(t) \\ & -\alpha(L_1 \otimes BK)e(t) - \beta(L_1 \otimes BK)e(t-\tau) \\ & +(I_M \otimes D)\,F(t,x_L,x_F)] + \mu e(t)^T(\Theta \otimes Q^{-1})e(t) \\ & -\mu e^T(t-\tau)(\Theta \otimes Q^{-1})e(t-\tau) \end{aligned} \quad (۲۸)$$

از فرض (۳-۳) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} & 2e^T(t)(\Theta \otimes Q^{-1}D)F(t,x_L,x_F) \\ & \leq e^T(t)[\Theta \otimes (l^2Q^{-1}DD^TQ^{-1} + I_n)]e(t) \end{aligned} \quad (۲۹)$$

و در نظر می گیریم :

$$F_1 = Q^{-1}A + A^TQ^{-1} + l^2Q^{-1}DD^TQ^{-1} + I_n \quad (۳۰)$$

$$F_2 = (\Theta L_1 + L_1{}^T\Theta) \otimes Q^{-1}BB^TQ^{-1} \quad (۳۱)$$

$$F_3 = AQ + QA^T + l^2DD^T + QQ^T + \mu Q \quad (۳۲)$$

با جایگذاری $K = B^TQ^{-1}$ در رابطه(۲۸) و استفاده از روابط (۲۹)، (۳۰) و(۳۱) نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} V^{\circ}(t) \leq {} & e^T(t)[\Theta \otimes F_1]e(t) - \alpha e^T(t)F_2e(t) - \\ & \beta e^T(t)F_2e(t-\tau) \end{aligned} \quad (۳۳)$$

با تغییر متغیر $\delta(t) = (I_M \otimes Q^{-1})e(t)$ نتیجه می شود $e(t) = (I_M \otimes Q)\delta(t)$ در نتیجه رابطه (۳۳) بصورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} V^{\circ}(t) \leq {} & \delta^T(t)[\Theta \otimes F_3]\delta(t) - \alpha\delta^T(t)[(\Theta L_1 + \\ & L_1{}^T\Theta) \otimes BB^T]\delta(t) \end{aligned}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]

$$-2\beta\delta^{T}(t)(\Theta L_1\otimes BB^{T})\delta(t-\tau)-$$
$$\mu\delta^{T}(t-\tau)(\Theta\otimes Q)\delta(t-\tau) \quad (۳۴)$$

با استفاده از مراحل ۱و۳ الگوریتم و لم (۲-۴) نتیجه می گیریم:

$$\alpha\delta^{T}(t)[(\Theta L_1+{L_1}^{T}\Theta)\otimes BB^{T}]\delta(t)\ \geq \frac{\alpha\lambda_0}{\theta_{max}}\delta^{T}(t)(\Theta\otimes BB^{T})\delta(t)\geq c\delta^{T}(t)(\Theta\otimes BB^{T})\delta(t) \quad (۳۵)$$

از روابط(۳۲) ، (۳۴) و(۳۵) نتیجه می گیریم:

$$V^{\circ}(t)\leq\delta^{T}(t)[\Theta\otimes(F_3-cBB^{T})]\delta(t)$$
$$-2\beta\delta^{T}(t)(\Theta L_1\otimes BB^{T})\delta(t-\tau)$$

$$-\mu\delta^{T}(t-\tau)(\Theta\otimes Q)\delta(t-\tau)=$$
$$\varphi^{T}(t)[I_2\otimes(\Theta\otimes I_n)]\Phi\varphi(t) \quad (۳۶)$$

که بردار $\varphi(t)$ و ماتریس Φ بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\varphi(t)=[\,\delta^{T}(t),\delta^{T}(t-\tau)\,]^{T} \quad (۳۷)$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} I_M\otimes\Omega_{11} & -\beta L_1\otimes BB^{T}\\ -\beta {L_1}^{T}\otimes BB^{T} & -\gamma I_M\otimes Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ {\Phi_{12}}^{T} & \Phi_{22}\end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

از قسمت سوم لم مکمل شور (۲-۳) و نامساوی خطی ماتریسی (۱۳) الگوریتم نتیجه می شود که $\Omega_{11}<0$

درنتیجه $\Phi_{11}=I_M\otimes\Omega_{11}<0$. همچنین از نامساوی غیر خطی ماتریسی (۱۴) الگوریتم نتیجه زیر حاصل می شود :

$$\Phi_{22}-{\Phi_{12}}^{T}(I_M\otimes{\Phi_{11}}^{-1})\Phi_{12}<0 \quad (۳۹)$$

و از قسمت دوم لم مکمل شور (۲-۳) نتیجه می گیریم ماتریس $\Phi<0$

لذا ماتریس $[I_2\otimes(\Theta\otimes I_n)]\Phi<0$

حال از رابطه (۳۶) نتیجه می گیریم که عبارت عددی $V^{\circ}(t)<0$

با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف نتیجه می گیریم که سیستم خطای (۲۶) در مبدا، پایدار مجانبی است، لذ $\lim_{t\to\infty}e(t)=0$

و در نتیجه داریم:

$$\lim_{t\to\infty}x_F=_(L_1^{-1}L_2\otimes I_n)x_L \quad (۴۰)$$

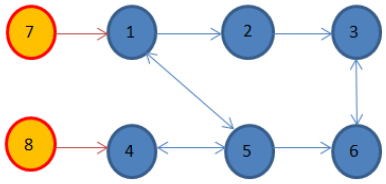
از لم(۳-۱) نتیجه می شود:

$$_(L_1^{-1}L_2\otimes I_n)x_L\in CO(x_L) \quad (۴۱)$$

در نتیجه قضیه اثبات شد و یک شرط کافی جهت حل مسئله مهار با تاخیر زمانی ارائه گردید.

٤- شبیه سازی و مثال عددی

مسئله مهار را برای سیستم چند عامله زیر با شش عامل دنباله رو(شماره های۶-۱) و دو عامل پیشرو (شماره های۷و۸) بصورت شکل(۲) در نظر می گیریم:



شکل(۲) نمودار گراف ارتباطی سیستم چند عامله شامل عناصر پیشرو و دنباله رو

پارامتر های سیستم در این مثال عبارتند از:

$$A=\begin{bmatrix}-0.22 & 0\\ 0 & -0.15\end{bmatrix}$$
$$,D=\begin{bmatrix}0.695 & -0.25\\ 0.680 & -0.32\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

و تابع غیر خطی و زمان تاخیر بصورت زیر ارائه شده:

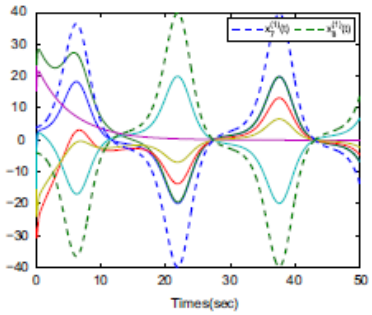
که $f(t,x_i)=[x_{i1}\sin(0.4t),x_{i2}\cos(0.4t)]^{T},\quad \tau=2$ $l=1$(ثابت لیپشیتس) حاصل می شود. با انجام مراحل ۱،۲،۳،۴ الگوریتم داریم:

$$\Theta=\mathrm{diag}\{4.0705,7.1800,3.6421,$$
$$4.0705,3.2136,3.6421\}$$
$$Q=\begin{bmatrix}0.3428 & 0.1046\\ 0.1046 & 0.2705\end{bmatrix}$$
$$K=[2.0282\quad 2.9123]$$
$$\Omega_{11}=\begin{bmatrix}-0.1557 & -0.1294\\ -0.1294 & -0.1198\end{bmatrix}$$
$$c=0.72,\quad ,\quad \mu=0.12$$
$$\theta_{max}=7.1800\ ,\quad \lambda_0=1.6127$$

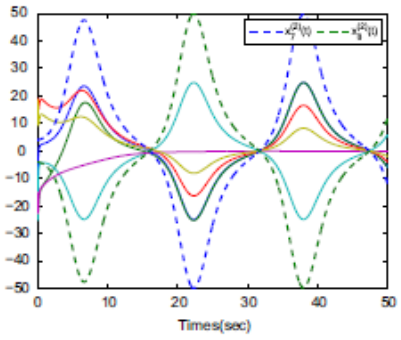
بنابراین نتیجه می گیریم اگر $\alpha>3.2055$, $\beta<0.014$ آنگاه مسئله مهار سیستم چندعامله با دینامیک های(۱۰) تحت پروتکل(۱۶) بصورت مجانبی حل می شود. نمودارهای منحنی‌های مولفه های اول و دوم بردار مکان عامل های دنباله رو و پیشرو و خطای همگرایی عوامل دنباله رو به پوش محدب تولید شده توسط عاملهای پیشرو برای مقادیر پارامترهای زیر به ترتیب بصورت شکلهای (۳)، (۴) و (۵) می باشند:

$$\alpha=3.214\,,\beta=0.012$$

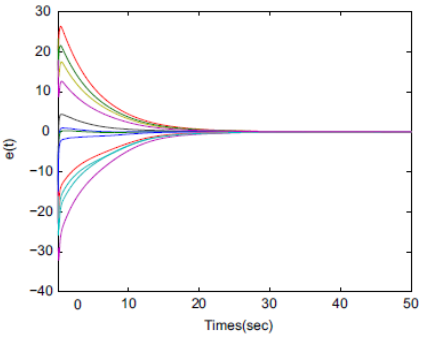
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]



شکل(۳) نمودار منحنی های موئلفه های اول بردار مکان عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو



شکل(۴) نمودار منحنی های موئلفه های دوم بردار مکان عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو



شکل(۵) نمودار منحنی های بردار خطای مسئله مهار سیستم های چند عامله

۵- نتیجه گیری

در این مقاله مسئله مهار یک سیستم چند عامله با دینامیک های غیر خطی یکسان و گراف جهت دار ثابت بررسی شده است. فرض می شود، که هر عامل دنباله رو می تواند اطلاعات حداقل یک عامل پیشرو را در طول یک مسیر جهتدار دریافت کند. برای حل این مسئله ، بردار های کنترلی(پروتکل) تاخیری با تاخیر ثابت برای عامل های دنباله رو شامل ضرایب اتصالی جفتی و ماتریس بهره پیشنهاد شده و الگوریتمی جهت طراحی آنها، ارائه گردید.

مراجع

[1] H.G. Tanner, D. Christodoulakis, "Decentralized cooperative control of heterogeneous vehicle groups", Robotics and Autonomous System, vol. 55, no. 11, pp. 811-823, 2007.

[2] G.Ferrari–Trecate, M.Egerstedt, A.Buffa, M.Ji, "Laplacian sheep: A hybrid, stop-go policy for leader-based containment control", hybrid systems: computation and control, Springer, pp.212-226, 2006.

[3] M.Ji, G.Ferrari-Trecate, M.Egerstedt, A.buffa, "Containment control in mobile networks", IEEE Transaction on Automatic Control, vol.53, no.8, pp.1972-1975, 2008.

[4] Y.Cao, D.Stuart, W.Ren, Z.Meng, "Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: algorithms and experiments", IEEE Transaction on Control Systems Technology, vol.19, no.4, pp.929-938, 2008.

[5] Y.Cao, W.Ren, "Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph", Proceeding of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference, Shanghai, China, pp.3014-3019, 2009.

[6] Y.Cao, W.Ren, M.Egerstedt, "Distributed containment control with multiple stationary or dynamic leaders in fixed and switching direct networks", Autmatica, vol.48, no.8, pp.1586-1597, 2012.

[7] Y.lou, Y.Hong, "Target Containment Control of Multi-Agent System with Random Switching Interconnection Topologies", Automatica, vol.48, no.5, pp.879-885, 2012.

[8] J.Mei, W.Ren, G.Ma, "Distributed Containment Control for Lagrangian Networks with Parametric Uncertainties under a Direct Graph", Automatica, vol.48, no.4, pp.653-659, 2012.

[9] D.Dimarogonas,P.Tsiotras, K.Kyriakopoulos, "Leader-Follower Cooperative Attitude Control of Multiple Rigid Bodies", Systems&Control Letters, vol.58, no.6, pp.429-435, 2009.

[10] X.Dong, J.Xi, Z. Shi, Y.Zhong, "Containment analysis and design for high-order linear time-invariant singular swarm systems with time delays", Proceeding of the 31st Chinese control conference, 25-27, July, 2012.

[11] Sh.Liu, L.Xie, H.Zhang, "Containment control of multi-agent systems by exploiting the control inputs of neighbors", International Journal of Robust and nonlinear Control, vol.24, issue 17, pp.2803-2818, 2013.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]

[12] K.Liu, G.Xie, L.Wang, "Containment Control for second-order multi-agent systems with time-varying delays", Systems&Control Letters, vol.47, issue.9, pp.2048-2057, 2014.

[13] J. Shen, J.Lam, " Containment Control of Multi-Agent Systems With unbounded communication Delays", International Journal of Systems Science, vol.87, pp.2048-2057, 2014.

[14] X.Dong, L. Han, Q.Li, J. Chen, Z.Ren, "Containment Analysis and Design for general linear Multi-Agent Systems With time-varying delays", Neurocomputing, vol.173, pp.2062-2068, 2015.

[15] Z.Feng, W.Zheng-Jie, F.Ning-Jn, "Containment consensus with measurement noises and time-varying communication delays", Chinese Physics B, vol.24, no.2, 2015.

[16] B.Li, Z.Q.Chen, Z.X.Liu, C.Y.Zhang, Q.Zhang, "Containment control of multi-agent systems with fixed time–delays in fixed directed networks", vol.173, pp.2069-2075, 2016.

[17] M.Parsa, M.Danesh, "Dynamic leaders containment control of high-order multi-agent systems with state time–delays: An LMI Approach", vol. 90, issue.8, pp.1612-1625, 2016.

[18] F.Y.Wang, H.Y.Yang, Sh.N.Zhang, F.J.Han, "Containment control for first-order multi-agent systems with time-varying delays and uncertain topologies", Communications in theoretical physics, vol.66, pp.249-255, 2016.

[19] F.Wang, H.Yang, Z.Liu, Z.Chen, "Containment control of leader-following multi-agent systems with jointly-connected topologies and time-varying delays", vol.260, pp.341-348, 2017.

[20] L.Shi, J.Shao, W.X.Zheng, T-Z.Huang, "Asynchronous containment control for discrete-time second-order multi-agent systems with time-varying delays", Journal of the Franklin Institute, vol.354, issue18, pp.8552–8569, 2017.

[21] J.Shao, L.Shi, J.Yu, "Stationary containment control of high-order multi-agent systems with time-varying delays, Chinese Automation Congress (CAC), 2017.

[22] Q.Xiong, P.Lin, Z.Chen, W.Ren, W.Gui, "Distributed containment control for first-order and second-order multiagent systems with arbitrarily bounded delays ", vol.29, issue.4, pp.1122-1131, 2018.

[23] X.Wang, L.Shi, J.Shao," Containment control for high-order multi-agent systems with heterogeneous time delays ", IET Control theory& Applications, vol.12, issue.9, 2018.

[24] F.Wang, Z.Liu, Z.Chen, "Distributed containment time delay and intermittent communication", International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol.28, issue 18, pp.5730-5746, 2018.

[25] Q.Xiong, P.Lin, W.Ren, Ch.Yang, W.Gui," Containment control for discrete-time multi-agent systems with communication delays and switching topologies", IEEE TRANSACTIONS ON CYBERNETICS, vol.49, issue.10, 2018.

[26] D.Wang, D.Wang, W.Wang, " Necessary and sufficient conditions for containment control of multi-agent systems with time delay", Automatica, vol.103, pp.418-423, 2019.

[27] P.Li, Q.Xiong, Ch.Yang, "Containment control for high-order multi-agent systems with nonuniform communication delays and switching topologies", IEEE Access, vol.7, pp.47577-47581, 2019.

[28] W. Ren, Y. Cao, "Distributed coordination multi-agent networks", Emergent Problems Models and Issues, Springer, 2011.

[29] Q.Ma. G.Miao." Distributed containment control of linear multi-agent systems". Neurocomputing. Vol.133, pp.399-403, 2014.

[30] R.A.Horn. C.R.Johnson, "Topic in Matrix Analysis", Cambridge University Press, Oxford, 1991.

[31] A.N.Langville, W.J.Stewart, "The Kronecker product and stochastic automata networks", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.167, issue.2, pp.429-447, 2004.

[32] L.Ma, H.Min, SH.Wang, Y.Liu, "Consensus of nonlinear multi-agent systems with self and communication time delays: A unified framework", Sciencedirect, vol.352, pp.745-7

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.133]