مجله کنترل
جلد ۶، شماره ۱، بهار ۱۳۹۱، صفحه ۷-۱

رهیافتی نو برای حل عددی مسائل کنترل بهینه سیستم های پارامتر توزیعی

سید محمد مهدی عباسی[۱]، علی وحیدیان کامیاد[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه گنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، s.mmehdi.abasi@gmail.com
[۲] استاد ، گروه برق و ریاضی ، دانشگاه فردوسی مشهد، avkamyad@yahoo.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۹/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱/۲۱)

چکیده: روش‌های کلاسیک برای حل مسائل کنترل غیرخطی و مخصوصاً مسائل کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی غیرخطی در حالت کلی معمولاً کارآمد نیستند. در این مقاله رهیافتی جدید برای حل تقریبی این دسته از مسائل با استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی معرفی می‌کنیم. در ابتدا، مسئله اصلی را به یک مسئله معادل درحساب تغییرات تبدیل می‌کنیم و سپس مسئله جدید را گسسته‌سازی کرده و با استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی آن را حل می‌کنیم. علاوه براین می‌توان مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل نموده و این امکان را داشت که از نرم افزارهای برنامه‌ریزی خطی نیز استفاده کرد، در آخر کارآمدی روش با حل مثال عددی نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: کنترل بهینه، سیستم های پارامتر توزیعی، حساب تغییرات، برنامه ریزی غیرخطی.

New Approach for Numerical Solution of Distributed Parameter Systems Optimal Control Problems

Seyed Mehdi Abasi, Ali Vahidian Kamyad

Abstract: Classical methods are not usually efficient, to solving nonlinear control problems and especially Nonlinear distributed parameter systems Optimal Control Problems (NOCP). In this paper we introduce a new approach for solving this class of problems by using NonLinear Programming Problem (NLPP). First, we transfer the original problem to a new problem in form of calculus of variations. The next step we discrete the new problem and solve it by using NLPP packages. Moreover, a NLPP is transferred to a Linear Programming Problem (LPP) which empowers us to use powerful LP software. Finally, efficiency of our approach is confirmed by some numerical examples.

Keywords: optimal control, distributed parameter systems, calculus of variations, nonlinear programming

۱- مقدمه

در چند دهه گذشته محققان و مهندسان کنترل برای حل مسائل کنترل غیر خطی و به دست آوردن کنترلی برای این سیستم‌ها از تقریب زدن سیستم به صورت سیستم خطی در حول نقطه کار استفاده می‌کردند وبا این روش یک جواب اولیه برای سیستم به دست می‌آوردند که این روش در همه موارد کارآمد نبود و سیستم نمی‌توانست مشابه یک سیستم خطی عمل کند[۱۱]. روش‌های زیادی برای سیستم های کنترل غیرخطی ارائه شده است که از جمله می‌توان به روش‌های اویلر لاگرانژ، خطی-سازی فیدبک[۱۱]، کنترل مقاوم[۹] ، کنترل تطبیقی[۸] ، شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک[۶-۷]، برنامه ریزی پویای تکراری[۱۲] و روش تئوری اندازه[۲-۴] اشاره کرد. روش تئوری اندازه اولین بار در سال ۱۹۸۰ توسط روبیو[1] برای حل مسائل کنترل بهینه سیستم های فشرده مورد استفاده قرار گرفت و در واقع باب جدیدی در تئوری کنترل گشود. در سال ۱۹۸۸دکتر وحیدیان کامیاد مسئله حرارت را در حالت n بعدی با استفاده از این روش بررسی کرده است[۴]. در این روش مسئله کنترل بهینه به

[1] Rubio

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.1.3]

فضای جدید به نام فضای اندازه برده می‌شود و عناصر کنترل بهینه به صورت زوج های مسیر – کنترل در نظر گرفته می شود و آن‌ها را به فضای اندازه انتقال می دهند. از دیگر روش‌ها می توان به روش برنامه ریزی‌پویا تکراری اشاره کرد. روش برنامه‌ریزی پویا برای اولین بار در دهه ۵۰ میلادی برای حل مسائل بهینه سازی ارائه گردید که از آن برای حل مسائل کنترل بهینه با بعد پایین استفاده می‌شد. با افزایش بعد مسئله برنامه‌ریزی پویا در مدت طولانی به جواب نادقیق می‌انجامید، برای غلبه بر این مشکل، لوس[1] در سال ۱۹۸۹ اولین کسی بود که عقیده استفاده از برنامه‌ریزی پویا را به صورت تکراری بیان کرد، که بعدها روش برنامه ریزی پویای تکراری[2] (IDM) نام گرفت[۱۲]. در این الگوریتم فاصله زمانی مفروض به p مرحله زمانی با طول مساوی تقسیم می‌شود و در هر مرحله زمانی، کنترل ثابت فرض می‌شود. کنترل قطعه‌ای ثابت یک تقریب خوب با کنترل پیوسته را فراهم می‌کند و این تقریب با گرفتن گام زمانی کوچک‌تر اصلاح می‌شود.

بعضی ازروش‌ها که در بالا به آن‌ها اشاره شدتنها قادر به حل کلاسی خاص از سیستم‌های غیرخطی هستند. بنابراین طبیعی به نظر می‌رسد که به دنبال روش دیگری باشیم که قادر باشد مسائل کنترل بهینه اعم از خطی یا غیرخطی پارامتر توزیعی را حل کند، ما در ادامه یک روش جدید برای حل این دسته از مسائل با استفاده از برنامه ریزی غیر-خطی معرفی می‌کنیم. برای ساده شده نوشتار، رهیافت جدید PAVK[3] نام‌گذاری شده است. کلیات این روش در حالت سیستم‌های با معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش AVK[4] در چند مقاله منتشر شده است[۱،۱۰]. تفاوت روش‌های PAVK وAVK با دیگر روش‌های عددی ، اضافه شدن فرآیند بهینه‌سازی به مسئله گسسته سازی و تقریب می باشد. در ابتدا مسئله اصلی را با تعریف تابعی خطا به یک مسئله جدید در حساب تغییرات تبدیل می‌کنیم و سپس مسئله جدید را گسسته‌سازی کرده و با استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی آن را حل می‌کنیم. علاوه بر این می‌توان مسئله برنامه ریزی غیر خطی را به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل کرده و با استفاده از نرم افزارهای موجود جواب مسئله را بدست آورد.

۲- استفاده از رهیافت PAVK برای حل مسئله کنترل بهینه

برای یکسان شدن نوشتار، معادله دیفرانسیل پارامتر توزیعی[5] (NPDE) مرتبه دوم در حالت یک بعدی به صورت (۱) در نظر گرفته شده است.

$$Y_t = F\left(x, t, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \qquad (۱)$$

یک مسئله کنترل بهینه در حالت نسبتاً کلی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\text{minimize} \int_a^b \int_c^d f(x, t, u(x,t), Y(x,t))dtdx \qquad (۲)$$

با این شرط که:

$$Y_t = F\left(x, t, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \qquad (۳)$$

شرایط اولیه ومرزی:
$$Y(x, t_0) = G(x) \quad , x \in \Omega \in [a,b]$$
$$Y(x,t) = u(x,t) \quad , t \in [c,d] \ , \ x \in \partial\Omega$$

در اینجاF و G توابعی مفروض می باشند، تابع $Y: \Omega * T \to R^+$ تابعی وابسته به زمان است که دو بار نسبت به متغیر x ویک بار نسبت به متغیر t مشتق پذیر است و Ω یک ناحیه فشرده همبند ساده در فضای R، $\partial\Omega$ مرز ناحیهΩ و $u(x,t)$ یک تابع کنترلی می‌باشد. در مسائل کنترل بهینه f می تواند تابع انرژی و یا سوخت باشد که در زیر نشان داده شده است.

$$f(x,t,Y,u) = \frac{1}{2}\left(Y^2(x,t) + u^2(x,t)\right) \qquad (۴)$$
$$f(x,t,Y,u) = |Y(x,t)| + |u(x,t)|$$

می‌توان بدون از دست دادن حالت کلی مسئله طول بازه‌ها را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$t \in [0,1], \quad x \in [0,1] \qquad (۵)$$

زیرا می‌توان تابعی مانند K تعریف کرد که این تبدیل را انجام می‌دهد.

$$K: [a,b] \to [0,1]$$
$$x \to \frac{x-a}{b-a}$$

۲-۱ تبدیل مسئله کنترل بهینه غیر خطی به یک مسئله بهینه سازی غیر خطی تعینی[6] (NDOC)معادل

ابتدا تابعی خطای زیر بر اساس (۳) تعریف می‌گردد:

$$E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \left|Y_t - F\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\right| \qquad (۶)$$
$$\forall (x,t) \in \Omega \times [0,1]$$

بر این اساس مسئله زیررا در حساب تغیرات تعریف می کنیم:

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \qquad (۷)$$
$$\int_0^1 \int_0^1 E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dtdx =$$
$$\int_0^1 \int_0^1 \left|Y_t - F\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\right| dtdx$$

شرط لازم و کافی برای آن که $Y(x,t)$ یک جواب مسئله NPDE (۳) باشد این است که جواب بهینه مسئله حساب تغییرات (۷) صفر باشد.

قضیه۱- اگر$h(x,t)$ یک تابع حقیقی و غیر خطی در بازه $[a,b] \times [c,d]$ و غیر منفی باشد $(h(x,t) \geq 0)$، شرط لازم و کافی برای آنکه $\int_a^b \int_c^d h(x,t)dtdx = 0$ آن است که تابع $h(x,t)$ در بازه $[a,b] \times [c,d]$ مساوی صفر باشد.

اثبات- با فرض اینکه $\int_a^b \int_c^d h(x,t)dtdx = 0$ ولی در نقطه ایی مانند (x_0, t_0) در بازه$[a,b] \times [c,d]$، $h(x_0,t_0) \neq 0$، به دلیل پیوسته بودن تابع $h(x,t)$ همسایگی ε در اطرف نقطه (x_0,t_0) وجود

[1] Luus
[2] Iterative Dynamic Programming (IDP)
[3] Partial Ali Vahidian Kamyad (PAVK)
[4] Ali Vahidian Kamyad (AVK)
[5] Nonlinear Partial Differential Equation (NPDE)
[6] Nonlinear Deterministic Optimal Control (NDOC)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.1.3]

دارد به طوریکه در این همسایگی مقدار $h(x,t) > 0$ می باشد. بنابراین $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h(x,t)dtdx > 0$ که نتیجه می دهد، $\int_a^b\int_c^d h(x,t)dtdx \geq \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\int_{t_0+\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h(x,t)dtdx > 0$ که این برخلاف فرض می باشد، بنابراین $h(x,t)$ باید در بازه $[a,b]\times[c,d]$ مساوی صفر باشد. از طرفی $h(x,t)$ اگر در بازه $[a,b]\times[c,d]$ مساوی صفر باشد آنگاه مقدار $\int_a^b\int_c^d h(x,t)dtdx$ مساوی صفر می باشد. به این ترتیب مسئله کنترل بهینه را می توان به دو مسئله در حساب تغییرات تبدیل کرد.

$$\text{Minimize } J_1\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \int_0^1\int_0^1 E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)dtdx = \int_0^1\int_0^1\left|Y_t - F\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\right|dtdx \quad (۸)$$

و

$$\text{Minimize } J_2(Y,u,t,x) = \int_0^1\int_0^1 f(x,t,u(x,t),Y(x,t))dtdx$$

در ادامه دو رهیافت برای حل مسائل چند هدفه ارائه می شود یکی از رهیافت ها، با استفاده از وزن دهی به هدف‌ها، مسئله چند هدفه را به یک مسئله یک هدفه تبدیل می‌کنیم، که با توجه به اهمیت هدف‌ها وزن‌ها انتخاب می‌شوند. با توجه به اینکه در این مثال توابع هدف، تابعی خطا وتابع انرژی یا سوخت می باشد می توان با توجه به اینکه اهمیت مسئله کمتر شدن مقدار خطا و یا کمینه شدن مقدار انرژی یا سوخت باشد ضرایب را انتخاب کرد. در رهیافتی دیگر می توان مقدار خطا مسئله را کنترل کرد و مقدار خطا را از یک مقدار مشخص کمتر بدست آورد. در ادامه این دو رهیافت ارائه شده است.

۲-۲ رهیافت تبدیل مسئله چند هدفه به مسئله یک هدفه

$$\text{Minimize } J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},u\right) = \int_0^1\int_0^1 \lambda_1 f(x,t,u,Y)dtdx + \lambda_2 E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)dtdx = \int_0^1\int_0^1 \lambda_1 f(x,t,u,Y) + \int_0^1\int_0^1 \lambda_2\left|Y_t - F\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\right|dtdx \quad (۹)$$

در معادله (۹)، λ_1 و λ_2 وزن هایی می‌باشند که در روابط زیر صدق می کنند:

$$\lambda_1,\lambda_2 \geq 0\ , \qquad \lambda_1+\lambda_2 = 1 \quad (۱۰)$$

۲-۲-۱ تبدیل مسئله NDOC به یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی[1]

در ابتدا بازه های $x\in[0,1]$ ، $t\in[0,1]$ را به ترتیب به M و L زیر بازه افراز می کنیم. به این ترتیب مسئله NDOC (۹)، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$x_i = x_{i-1}+\Delta x\ ,\ t_j = t_{j-1}+\Delta t \qquad x_1 = \frac{1}{M},\quad \Delta x = \frac{1}{M},\quad t_1 = \frac{1}{L},\quad \Delta t = \frac{1}{L} \qquad i = 2,3,\dots M\ ,\ j = 2,3,\dots L \quad (۱۱)$$

$$\text{Minimize } J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{L}\int_{\frac{i}{M}}^{\frac{(i+1)}{M}}\int_{\frac{j}{L}}^{\frac{(j+1)}{L}}\{\lambda_1 f(Y,u) + \lambda_2 E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\}dtdx$$

توجه: در اینجا تقریب انتگرال $\int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t)dt$ به صورت $(t_{k+1}-t_k)K(\varphi)$ در نظر گرفته می شود که در آن $t_k \leq \varphi \leq t_{k+1}$ می باشد؛ لذا مسئله مینیمم سازی (۱۱)به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Minimize } J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \cong \left(\frac{1}{M}.\frac{1}{L}\right).\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L}\lambda_1 f(Y,u) + \lambda_2 E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \quad (۱۲)$$

در ادامه از تقریب های مشتق که به صورت زیر می باشند استفاده شده است.

$$\frac{\partial Y\left(\frac{i}{M},\frac{j}{L}\right)}{\partial t} \cong \frac{Y\left(\frac{i}{M},\frac{(j+1)}{L}\right)-Y\left(\frac{i}{M},\frac{j}{L}\right)}{1/L} = L*(Y_{i,j+1}-Y_{i,j}) \quad (۱۳)$$

$$\frac{\partial^2 Y\left(\frac{i}{M},\frac{j}{L}\right)}{\partial x^2} \cong \frac{Y\left(\frac{i+1}{M},\frac{j}{L}\right)-2Y\left(\frac{i}{M},\frac{j}{L}\right)+Y\left(\frac{i-1}{M},\frac{j}{L}\right)}{(1/M)^2} = M^2*(Y_{i+1,j}-2Y_{i,j}+Y_{i-1,j})$$

برای ساده سازی در نوشتن مسائل از نماد زیر استفاده می کنیم:

$$Y\left(\frac{i}{M},\frac{j}{L}\right) = Y_{i,j}$$

با استفاده از تقریبات بالا مسئله NDOC (۱۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Minimize } J(Y_{i,j}) \cong \left(\frac{1}{M}.\frac{1}{L}\right).\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L}\lambda_1 f(Y_{i,j},u_{i,j}) + \lambda_2 E_0(Y_{i,j}) \quad (۱۴)$$

در حالت کلی مسئله (۱۴) یک مسئله NLP است و می‌توان به وسیله نرم افزارهایی مانند Matlab یا Lingo و یا نرم افزارهای مشابه حل نمود. جواب بهینه مسئله کنترل بهینه غیر خطی عبارتست از $Y_{i,j}^* = Y^*(x_j^*,t_j^*)$.

ممکن است مسئله (۱۴) در زمان حل هیچ جوابی نداشته باشد، در این حالت می‌توان اعداد M و L را تغییر داد.

۲-۳ رهیافت کنترل خطا

در این رهیافت مقدار تابعی خطا مینیمم نمی شود بلکه از یک مقدار δ که عددی مشخص می باشد کمتر می شود. با این تغییر مسئله به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$Minimize\ J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},u\right) = \int_0^1\int_0^1 f(x,t,u,Y)dtdx \quad (۱۵)$$

با این شرط که

$$\int_0^1\int_0^1 E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)dtdx = \int_0^1\int_0^1\left|Y_t - F\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\right|dtdx \leq \delta$$

مانند حالت قبل بازه های $x\in[0,1]$ ، $t\in[0,1]$ را به ترتیب به M و L زیر بازه افراز می کنیم. به این ترتیب مسئله NDOC (۱۵)، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Minimize\ J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L}\int_{\frac{i}{M}}^{\frac{(i+1)}{M}}\int_{\frac{j}{L}}^{\frac{(j+1)}{L}} f(x,t,Y,u)dtdx \quad (۱۶)$$

با این شرط که

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L}\int_{\frac{i}{M}}^{\frac{(i+1)}{M}}\int_{\frac{j}{L}}^{\frac{(j+1)}{L}} E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)dtdx \leq \delta$$

توجه: در این قسمت تقریب انتگرال $\int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t)dt$ مانند مرحله قبل به صورت $(t_{k+1}-t_k)K(\varphi)$ در نظر گرفته می شود؛ لذا مسئله مینیمم سازی (۱۶) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$Minimize\ J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \cong \quad (۱۷)$$

[1] NonLinear Programming (NLP)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.1.3]

$\left(\frac{1}{M}.\frac{1}{L}\right).\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} f(Y,u)$

با این شرط که

$\left(\frac{1}{M}.\frac{1}{L}\right).\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \le \delta$

در ادامه برای ساده سازی در نوشتن مسئله از نماد زیر استفاده می کنیم.

$$Y\left(\frac{i}{M},\frac{j}{L}\right) = Y_{i,j} \qquad (۱۸)$$

با استفاده از تقریب‌های مشتق مسئله NDOC (۱۷)، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Minimize \;\; J(Y_{i,j}) \cong \left(\frac{1}{M}.\frac{1}{L}\right).\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} f(Y_{i,j},u_{i,j}) \qquad (۱۹)$$

با این شرط که

$\left(\frac{1}{M}.\frac{1}{L}\right).\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} E_0(Y_{i,j}) \le \delta$

در حالت کلی مسئله (۱۹) یک مسئله NLP است و می‌توان به وسیله نرم افزارهایی مانند Matlab یا Lingo و یا نرم افزارهای مشابه حل نمود.

۳- شبیه سازی

معادله حرارت[۱۳،۵]

مسئله رساندن دمای یک جسم به حالت مطلوب و در زمانی معین در بسیاری از موارد مطرح است. به عنوان مثال در صنایع شیشه سازی، رآکتورهای شیمیایی، پزشکی و... . در واقع مسئله به صورت رساندن دمای یک جسم با حداقل انرژی به یک مقدار مطلوب است. در ادامه مسئله کنترل بهینه حرارت با استفاده از رهیافت جدید حل شده است.

هدف در این مسئله رساندن دمای یک میله از مقدار اولیه صفر به یک مقدار مطلوب است که در عین حال مقدار مصرف انرژی نیز باید کمینه شود.

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad (۲۰)$$

شرایط اولیه و مرزی $x \in [0,1], t \in [0,1], u \in [-1,1]$

$$Y_x(t,0) = 0 \;\; , \;\; Y_x(t,1) = u(t)$$
$$Y(0,x) = 0 \;\; , \;\; Y(1,x) = 0.01\cos(\pi x)$$

$$J = min \int_0^1 \int_0^1 |u(x,t)|dtdx$$

رهیافت PAVK

$$\text{Minimize } J_1\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \int_0^1\int_0^1 E_0\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)dtdx = \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right| dtdx \qquad (۲۱)$$

و

$$\text{Minimize } J_2(u,x,t) = \int_0^1\int_0^1 |u(x,t)|dtdx$$

استفاده کردن از ضرایب λ برای تبدیل مسئله دو هدفه به مسئله یک هدفه.

$$\text{Minimize } J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},u\right) = \int_0^1\int_0^1 \lambda_1|u(x,t)| + \lambda_2\left|\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right| dtdx \qquad (۲۲)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5 \Rightarrow \text{Minimize } J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},u\right) = \int_0^1\int_0^1 \{0.5 * |u(x,t)| + 0.5 * \left|\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right|\}dtdx$$

در این مسئله طول بازه به بیست قسمت افراز شده است.

$$\Delta x = \left(\frac{1-0}{20}\right) \;\; , \;\; \Delta t = \left(\frac{1-0}{20}\right) \qquad (۲۳)$$

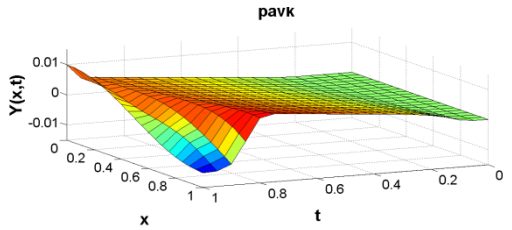
$$\text{Minimize } J\left(Y,\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial x},\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20}\int_{\frac{i}{20}}^{\frac{(i+1)}{20}}\int_{\frac{j}{20}}^{\frac{(j+1)}{20}} \{0.5 * |u(x,t)| + 0.5 * \left|\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right|\}dtdx$$

بعد از انجام تقریب انتگرال و تقریب مشتق مسئله به صورت زیرتبدیل می شود.

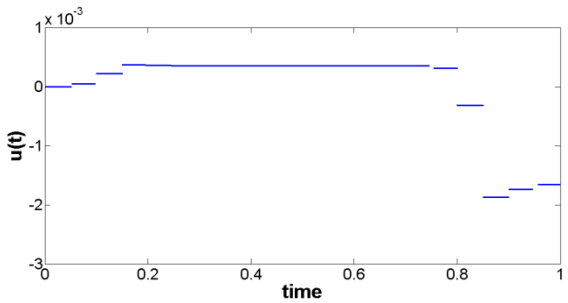
$$\text{Minimize } J(Y_{i,j}) \cong \left(\frac{1}{20}.\frac{1}{20}\right).\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20} 0.5 * |u_{i,j}| + 0.5 * E_0(Y_{i,j}) \qquad (۲۴)$$

مسئله بدست آمده با استفاده از نرم افزار LINGO حل شده است، که نتایج آن در شکل‌های (۱) و (۲) آورده شده است.

در این قسمت هدف تست کردن تابع کنترل بدست آمده در شکل(۲) می باشد، به این صورت که اگر تابع کنترل بدست آمده را به سیستم اعمال کنیم آیا مسئله به حالت نهایی مطلوب می رسد. مسئله حرارت با تابع کنترل و شرایط اولیه و این بار بدون در نظر گرفتن مقدار نهایی حل می شود که نتیجه آن در شکل های(۳) و (۴) آورده شده است. همان طور که از نمودارها مشخص است با اعمال تابع کنترل به سیستم، خواسته مسئله به طور مطلوب برآورده نشده است. در ادامه این مسئله مجدداً حل شده و این بار تعداد افرازها ۴۰ قسمت در نظر گرفته شده است، و بار دیگر تابع کنترل جدید به سیستم اعمال می‌شود که نتایج حاصل در شکل‌های (۵) و (۶) آورده شده است. همان طور که از نمودارها پیداست با افزایش تعداد افراز ها خواسته مسئله تا حدود زیادی برآورده شده است. این مسئله با روش تئوری اندازه و روش برنامه ریزی پویای تکراری نیز حل شده است که مقدار تابع هدف حاصل از این روش در جدول (۱) آورده شده است[۱۳،۵].

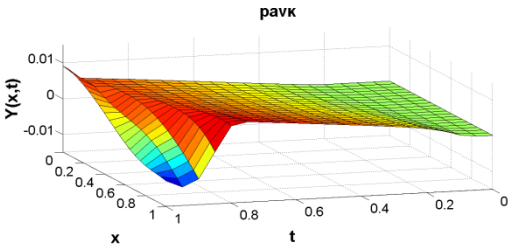


شکل(۱) نمودار تابع توزیع حرارتی

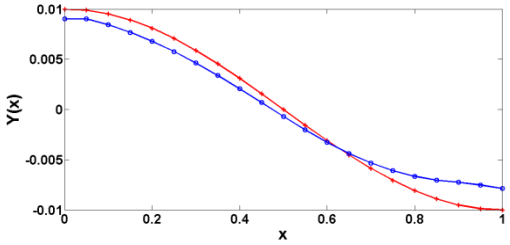


شکل(۲) نمودار تابع کنترل بهینه

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.1.3]



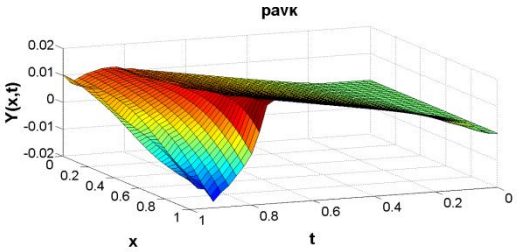
شکل(۳) نمودار تابع توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK



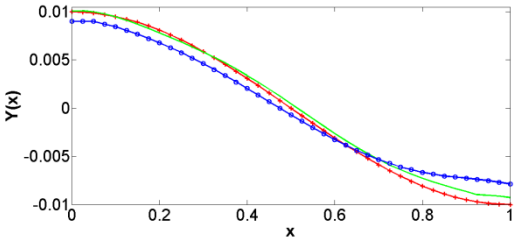
شکل(۴) نمودار اختلاف بین توزیع حرارتی مطلوب و بدست آمده از روش PAVK

+- نمودار توزیع حرارتی مطلوب

o - نمودار توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK



شکل(۵) نمودار تابع توزیع حرارتی بدست آمده با تقسیم بازه ها به ۴۰ افراز با روش *PAVK*



شکل(۶) نمودار اختلاف بین توزیع حرارتی مطلوب و بدست آمده

+- نمودار توزیع حرارتی مطلوب

o- نمودار توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK با ۲۰ افراز

-- نمودار توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK با ۴۰ افراز

جدول(۱) مقایسه مقادیر تابع هدف

روش برنامه ریزی پویای تکراری	$J = 3.75 * 10^{-2}$
روش تئوری اندازه	$J = 7.93 * 10^{-2}$
روش PAVK با ۲۰ افراز	$J = 0.537 * 10^{-2}$
روش PAVK با ۴۰ افراز	$J = 0.616 * 10^{-2}$

معادله موج[۱۳]

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad (۲۵)$$

$x \in [0,\pi]\,, t \in [0,\pi]\,, u \in [-1,1]$

شرایط اولیه و مرزی

$$Y_t(0,x) = 0 \quad , \quad Y_t(\pi,x) = 0$$
$$Y(t,0) = u(t) \quad , \quad Y(t,\pi) = u(t)$$
$$Y(0,x) = \sin(x) \quad , Y(\pi,x) = -\sin(x)$$

$$J = min \int_0^\pi \int_0^\pi u(x,t)^2 dt dx$$

رهیافت PAVK

$$Minimize\ J_1\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \qquad (۲۶)$$
$$\int_0^\pi \int_0^\pi E_0\left(Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dt dx = \int_0^\pi \int_0^\pi \left|\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right| dt dx$$

$$Minimize\ J_2(u,x,t) = \int_0^\pi \int_0^\pi u(x,t)^2 dt dx$$
$$Minimize\ J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u\right) = \qquad (۲۷)$$
$$\int_0^\pi \int_0^\pi \{\lambda_1 u(x,t)^2 + \lambda_2 \left|\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right|\} dt dx$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5 \Rightarrow Minimize\ J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u\right) =$$
$$\int_0^\pi \int_0^\pi \{0.5 * u(x,t)^2 + 0.5 * \left|\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right|\} dt dx$$

در این مسئله طول بازه به بیست قسمت افراز شده است.

$$\Delta x = \left(\frac{\pi - 0}{20}\right) \quad , \quad \Delta t = \left(\frac{\pi - 0}{20}\right) \qquad (۲۸)$$
$$x_i = x_{i-1} + \Delta x\,, \quad t_j = t_{j-1} + \Delta t$$
$$i = 2,3,\dots 20 \quad , \quad j = 2,3,\dots 20$$
$$x_1 = \frac{\pi}{20}\,, \quad t_1 = \frac{\pi}{20}$$
$$Minimize \quad J\left(Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} \int_{\frac{i}{20}}^{\frac{i+1}{20}} \int_{\frac{j}{20}}^{\frac{(j+1)}{20}} 0.5 * u(x,t)^2 + 0.5 * \left|\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right| dt dx$$

در این مرحله با استفاده از تقریب انتگرال مسئله مینیمم سازی (۲۸)، به صورت زیر تبدیل می شود:

$$Minimize \quad J\left(Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \cong \qquad (۲۹)$$
$$\left(\frac{\pi}{20} \cdot \frac{\pi}{20}\right) \cdot \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} 0.5 * {u_{i,j}}^2 + 0.5 * \left|\frac{\partial^2 Y_{i,j}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y_{i,j}}{\partial x^2}\right|$$

در ادامه از تقریب های مشتق که به صورت زیر می باشند استفاده شده است.

$$\frac{\partial^2 Y\left(\frac{i}{20}, \frac{j}{20}\right)}{\partial t^2} \cong \frac{Y\left(\frac{i}{20}, \frac{j+1}{20}\right) - 2Y\left(\frac{i}{20}, \frac{j}{20}\right) + Y\left(\frac{i}{20}, \frac{j-1}{20}\right)}{\left(1/20\right)^2} = \qquad (۳۰)$$
$$20^2 * (Y_{i,j+1} - 2Y_{i,j} + Y_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial^2 Y\left(\frac{i}{20}, \frac{j}{20}\right)}{\partial x^2} \cong \frac{Y\left(\frac{i+1}{20}, \frac{j}{20}\right) - 2Y\left(\frac{i}{20}, \frac{j}{20}\right) + Y\left(\frac{i-1}{20}, \frac{j}{20}\right)}{\left(1/20\right)^2} =$$
$$20^2 * (Y_{i+1,j} - 2Y_{i,j} + Y_{i-1,j})$$

برای ساده سازی در نوشتن مسائل از نماد زیر استفاده می کنیم:

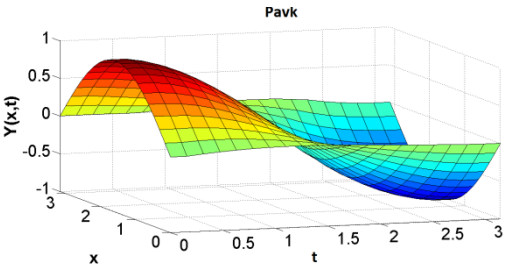
$$Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{L}\right) = Y_{i,j} \qquad (۳۱)$$

با استفاده از تقریبات بالا مسئله NDOC (۲۹) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

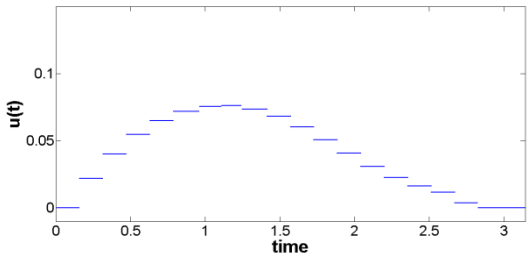
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.1.3]

$$Minimize \quad J(Y_{i,j}) \cong \left(\frac{\pi}{20}.\frac{\pi}{20}\right).\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20} 0.5 * {u_{i,j}}^2 + 0.5 * E_0(Y_{i,j}) \qquad (۳۲)$$

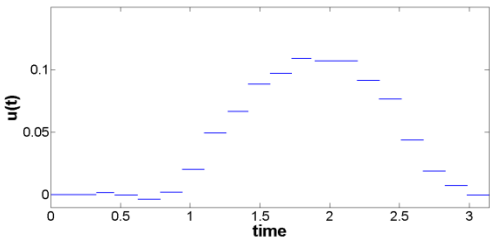
در ادامه نتایج حاصل از این روش آورده شده است.



شکل (۷): نمودار معادله موج



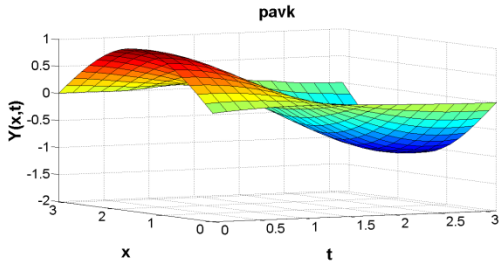
شکل (۸): نمودار تابع کنترل بهینه در ابتدای بازه



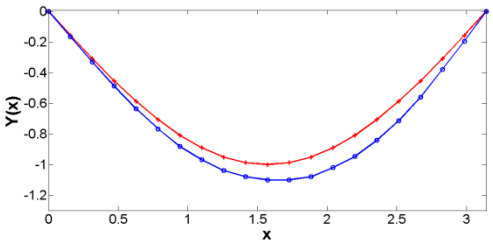
شکل (۹): نمودار تابع کنترل بهینه در انتهای بازه

در این بخش هدف تست کردن تابع کنترل بدست آمده در شکل‌های (۸) و (۹) می باشد، به این صورت که اگر تابع کنترل بدست آمده را به سیستم اعمال کنیم آیا مسئله به حالت نهایی مطلوب می رسد. نتیجه حاصل در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. همان طور که از نمودارها مشخص است با اعمال تابع کنترل به سیستم، خواسته مسئله برآورده نشده است که در ادامه این مسئله مجدداً با تعداد تقسیمات بیشتر حل شده و تابع کنترل به سیستم اعمال می‌شود که نتایج حاصل در شکل‌های (۱۴)و (۱۵) آورده شده است. همان طور که از نمودارها پیداست با افزایش تعداد افراز های بازه‌ها خواسته‌های مسئله تا حدود زیادی برآورده شده است.

این مسئله با روش برنامه ریزی پویای تکراری نیز حل شده است که مقدار تابع هدف حاصل از این روش در جدول (۲) آورده شده است[۱۳].



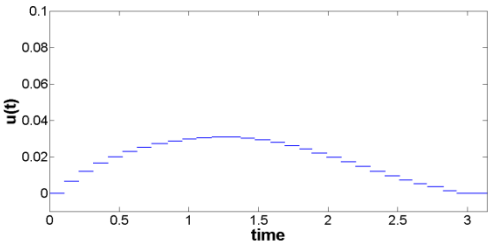
شکل (۱۰): نمودار معادله موج بدست آمده



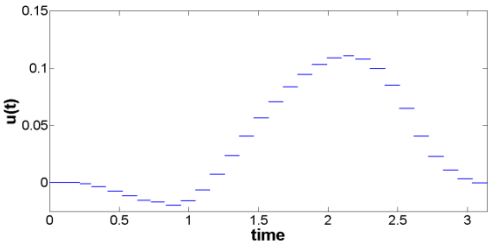
شکل (۱۱): نمودار اختلاف بین توزیع موج مطلوب و بدست آمده

+– نمودار معادله موج مطلوب

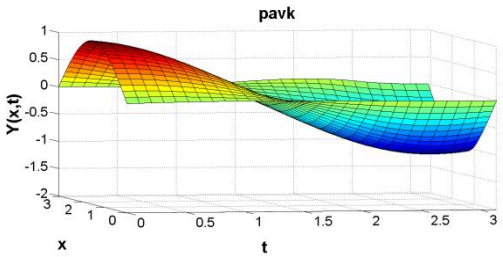
o– نمودار معادله موج به‌دست آمده از روش PAVK با ۲۰ افراز



شکل (۱۲) نمودار تابع کنترل بهینه با ۳۰ افراز در ابتدای بازه

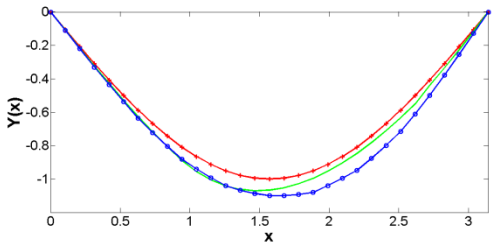


شکل (۱۳) نمودار تابع کنترل بهینه با ۳۰ افراز در انتهای بازه



شکل (۱۴) نمودار تابع توزیع موج بدست آمده با ۳۰ افراز

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.1.3]



شکل (۱۵) نمودار اختلاف بین توزیع موج مطلوب و بدست آمده

+- نمودار معادله موج مطلوب

o- نمودار معادله موج به‌دست آمده از روش PAVK با ۲۰ افراز

-- نمودار معادله موج به‌دست آمده از روش PAVK با ۳۰ افراز

جدول (۲) مقایسه مقادیر تابع هدف

روش برنامه ریزی پویای تکراری	$J = 0.915$
روش $PAVK$ با ۲۰ افراز	$J = 0.14$
روش $PAVK$ با ۳۰ افراز	$J = 0.258$

۴- نتیجه گیری

هدف اصلی در این مقاله تبدیل مسئله کنترل بهینه به یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی جهت بدست آوردن یک جواب تقریبی از مسئله می باشد. در ابتدا مسئله کنترل بهینه را به یک مسئله در حساب تغییرات تبدیل کردیم و سپس مسئله حاصل به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل شد و در نهایت با کمک نرم افزار های موجود مسئله را حل کردیم. بهینه سازی در این روش به هیچ وجه با خطی سازی درگیر نیست. یافتن کنترل های هموار در این روش از مزایای دیگر آن می باشد. همان طور که با ارائه مثال هایی نشان داده شد در این روش هر چه تعداد تقسیمات بازه ها (نقاط افراز) بیشتر شود، جواب به دست آمده بهتر می شود، ولی در عین حال پیچیدگی محاسباتی مسئله نیز افزایش می یابد.

مراجع

[1] Badakhshan KP, Kamyad AV, Azemi A. Using AVK method to solve nonlinear problems with uncertain parameters. Applied Mathematics and Computation. 2007. 189:27–34.

[2] Borzabadi AH, Kamyad AV, Farahi MH. Optimal control of the heat equation in an inhomogeneous body. Korean J Comput Appl Math. 2004. 15(1-2):127-146.

[3] Gachpazan M, Kamyad AV. Solving of second order nonlinear PDE problems by using artificial controls with controlled error. Korean J Comput Appl Math. 2004. 15(1-2):173-184.

[4] Kamyad AV. Boundary control problems for the multi-dimensional diffusion equation. Leeds Univ (United Kingdom). 1988.

[5] Kamyad AV, Mehne HH. A linear programming approach to the controllability of time-varying system. Int J Eng Sci. 2003. 14(3):143–151.

[6] Khalil HK. Nonlinear Systems: Prentice Hall. 1996.

[7] Kokotovi P, Arcak M. Constructive nonlinear control: A historical perspective (survey paper). Automatica. 2001. 37(5):637–662.

[8] Leith D, Leithead W. Survey of gain-scheduling analysis and design. Int J Control. 2000. 73(11):1001–1025.

[9] Loxton R, Teo KL, Rehbock V. Robust suboptimal control of nonlinear systems. Applied Mathematics and Computation. 2011. 217(14):6566-6576.

[10] Ramezani MR, Kamyad AV. Approximation of general nonlinear control systems with linear time varying systems. Electrical Engineering (ICEE), 2010 .18th Iranian Conference on ICEE. 680-685.

[11] Slotine J-JE. Applied nonlinear control. new jersey. 1991.

[12] Luus, R. Optimal Control by Dynamic Programrning Using Accessible Grid Points and Region Reduction. Hungarian Journal of Industrial Chemistry, 1989, 17,523-543.

[۱۳] صدیقه اصغری نیا، حل مسائل کنترل بهینه‌ای که با معادلات دیفرانسیل جزیی همراهی می‌شوند به روش برنامه‌ریزی پویای تکراری، پایان نامه کارشناسی ارشد ، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده ریاضی، ۱۳۸۲.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.1.3]