مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۹، صفحه ۶۱-۵۳

آنالیز هم‌گام‌سازی شبکه‌های دینامیکی پیچیده با کوپلینگ ترکیبی و کاربرد آن در مدار چوآ

علی کاظمی

استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تفرش، kazemy@tafreshu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲ ویرایش : ۱۳۹۷/۱۲/۱۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۱/۲۷

چکیده: شبکه‌های دینامیکی پیچیده بدلیل کاربردهای فراوان در مدل‌سازی و تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی، مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند. این شبکه‌ها از بهم پیوستن گره‌ها بوجود می‌آیند و رفتارهای پیچیده‌ای از خود نشان می‌دهند که حاصل از تعامل بین این گره‌هاست. هم‌گام‌سازی که به مفهوم رفتار هماهنگ بین گره‌ها است، یکی از رفتارهای مورد توجه در این شبکه‌ها است. این مقاله به مساله آنالیز هم‌گام‌سازی شبکه‌های دینامیکی پیچیده با تاخیر-زمانی متفاوت در حالت‌های گره‌ها و اتصالات کوپلینگ بین آنها می‌پردازد. بدین منظور، جهت بررسی هم‌گام‌سازی در کلاس وسیع‌تری از این شبکه‌ها، کوپلینگ بین گره‌های شبکه بصورت ترکیبی درنظر گرفته شده است. کوپلینگ ترکیبی شامل کوپلینگ ثابت، کوپلینگ تاخیری-گسسته، و کوپلینگ تاخیر-توزیع‌شده است. پس از تعریف مساله هم‌گام‌سازی و فرمول‌بندی آن، با معرفی یک تابع لیاپانوف مناسب و استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسووسکی، شرایط تضمین‌کننده هم‌گام‌شدن حالت‌های بین گره‌های شبکه، استخراج و بصورت قضایایی بیان شده‌اند. این شرایط در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارایه شده‌اند که بسادگی با استفاده از روش‌های استاندارد قابل حل می‌باشند. در انتها، به منظور بررسی کارآیی قضایای استخراج شده، یک شبکه دینامیکی پیچیده که از بهم پیوستن مدارهای چوآ تشکیل شده و در مخابرات امن کاربرد دارد مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: شبکه‌های دینامیکی پیچیده، هم‌گام‌سازی، قضیه لیاپانوف-کراسووسکی، سیستم‌های زمان-تاخیری، مدار چوآ.

Synchronization analysis of complex dynamical networks with hybrid coupling with application to Chua's circuit

Ali Kazemy

Abstract: Complex dynamic networks have been considered by researchers for their applications in modeling and analyzing many engineering issues. These networks are composed of interconnected nodes and exhibit complex behaviors that are resulted from interactions between these nodes. Synchronization, which is the concept of coordinated behavior between nodes, is the most interested behavior in these networks. This paper deals with the synchronization of complex dynamical networks with time-delays both in the states of the nodes and coupling connections between them. Moreover, constant coupling, discrete-delay coupling, and distributed-delay coupling are considered to form a hybrid coupling. Therefore, larger class and more complicated complex dynamical networks can be considered for the synchronization problem. After defining the synchronization definition, some criteria are obtained and presented in the form of linear matrix inequalities with help of the Lyapunov-Krasovskii theorem to ascertain the synchronization between each node of the network. Finally, the method is utilized for synchronization analysis of coupled Chua's circuits which has been simulated numerically.

Keywords: Synchronization, Complex dynamical network, Lyapunov–Krasovskii, Time-delayed systems, Chua's circuit.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

۱- مقدمه

شبکه‌های دینامیکی پیچیده بدلیل کاربردهای فراوانی که در شبکه‌های عصبی [۱, ۲]، شبکه‌های اجتماعی، شبکه توزیع نیرو [۳]، شبکه‌های فرودگاهی [۴]، و شبکه‌های ارتباطی دارند [۵]، مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته‌اند [۶]. این شبکه‌ها رفتارهای پیچیده‌ای از خود نشان می‌دهند که حاصل از تعامل بین مجموعه‌ای از گره‌ها، اتصالات، و توان کوپلینگ بین آنهاست [۷].

در میان تمامی رفتارها و پدیده‌های مهم در این شبکه‌ها، هم‌گام‌سازی بین گره‌های شبکه بسیار مورد توجه است [۸-۱۲]. در ابتدا مساله کنترل هم‌گامی بین دو سیستم آشوبناک توسط پکورا و کارول مطرح شد [۱۳] و پس از آن این مساله به شبکه‌های پیچیده مختلفی اعمال شد [۱۴-۱۹]. به عنوان نمونه مرجع [۱۴] به مساله هم‌گام‌سازی در شبکه‌های دینامیکی پیچیده‌ای می‌پردازد که معادلات دینامیکی گره‌های آن سیستم لور[1] هستند. همچنین مرجع [۱۵] به مساله هم‌گام‌سازی شبکه‌ای می‌پردازد که کوپلینگ بین گره‌ها دارای تاخیر بوده و رفتار گره‌های آن رفتار آشوبناک است. هم‌گام‌سازی، کاربردهای فراوانی در دنیای واقعی دارد که از آن جمله می‌توان به مخابرات امن، تولید نوسانات منظم در قلب انسان، و هم-گام‌سازی کارمندان یک شرکت بمنظور بهبود کارایی‌شان اشاره کرد [۲۰-۲۴].

در عمل بدلیل محدودیت در پهنای باند ارتباطی در کوپلینگ شبکه‌های پیچیده، تاخیر-زمانی در ارتباط بین گره‌ها بوجود خواهد آمد. حضور تاخیر-زمانی باعث کاهش کارآیی، کاهش حاشیه پایداری، و افزایش پیچیدگی تحلیل خواهد شد [۲۵]. بنابراین، بررسی هم‌گام بودن شبکه‌های پیچیده با تاخیر-زمانی در کوپلینگ، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱۲, ۳۱-۲۶]. به عنوان نمونه، مرجع [۱۱] به آنالیز هم‌گام‌سازی شبکه های دینامیکی پیچیده به همراه تاخیر در کانال ارتباطی و در دینامیک گره‌ها می‌پردازد. در این مرجع از کوپلینگ تاخیر-گسسته استفاده شده و مساله کوپلینگ تاخیر-توزیع‌شده در ساختار شبکه درنظر گرفته نشده است. در مرجع [۱۲] ساختار کوپلینگ گره‌ها بصورت تاخیر-گسسته درنظر گرفته شده و به مساله طراحی هم‌گام‌ساز با مکانیزم نمونه‌برداری گسسته از داده‌ها پرداخته شده است. با توجه به اطلاعات نویسنده، مساله آنالیز هم‌گام‌سازی شبکه‌های دینامیکی پیچیده با کوپلینگ ترکیبی و با تاخیر متفاوت در کوپلینگ و دینامیک گره‌ها هنوز مورد مطالعه قرار نگرفته است. با توجه به نکات ارایه شده، نوآوری این مقاله در موارد زیر خلاصه می‌گردد:

- ارایه شبکه دینامیکی پیچیده با کوپلینگ ترکیبی و آنالیز هم‌گام‌سازی آن با استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسووسکی،
- درنظر گرفتن تاخیر متفاوت در دینامیک گره‌های شبکه و کوپلینگ بین آنها.

ازاین‌رو، در این مقاله مساله آنالیز هم‌گام‌سازی شبکه‌های دینامیکی پیچیده بهمراه تاخیر-زمانی در دینامیک گره‌ها و در کانال ارتباطی بین آنها بررسی می‌شود که این دو تاخیر لزوماً برابر نیستند. علاوه بر این، جهت بررسی کلاس وسیع‌تری از این شبکه‌ها، ترکیبی از کوپلینگ‌های ثابت، تاخیر-گسسته۲، و تاخیر-توزیع‌شده۳ درنظر گرفته شده است. بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسووسکی، شرایطی بدست آمده و در قالب قضایایی جهت بررسی مساله هم‌گامی مذکور ارائه شده‌اند. این شرایط به فرم نامساوی‌های ماتریسی خطی نوشته شده‌اند که بسادگی قابل حل می‌باشند. در پایان، از روش بدست آمده برای آنالیز هم‌گامی مدارات چوآی متصل بهم استفاده شده است.

سازماندهی این مقاله بدین صورت است: فرمول‌بندی مساله هم‌گام بودن شبکه‌های دینامیکی پیچیده مورد نظر با تاخیر-زمانی در حالت‌های گره‌ها و کوپلینگ در بخش بعد آمده است. سپس بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسووسکی، شرایط بررسی هم‌گامی شبکه دینامیکی پیچیده در بخش نتایج اصلی ارائه شده‌اند. در بخش شبیه‌سازی، نتایج روش مذکور روی یک مساله نمونه بررسی شده است. بخش نتیجه‌گیری نیز در انتهای مقاله آمده است.

علائم و نشانه‌ها: در این مقاله، $\mathbb{R}^n$ نشان‌دهنده فضای اقلیدسی n بعدی و $\mathbb{R}^{n\times m}$ مجموعه ماتریس‌های حقیقی $n\times m$ است. $\mathbf{P}>0$ بیان‌کننده این است که $\mathbf{P}$ ماتریس حقیقی مثبت معین و متقارن است. $\mathbf{I}$ ماتریس همانی با ابعاد مناسب و $\mathrm{diag}\{\mathbf{W}_1,\ldots,\mathbf{W}_m\}$ ماتریس حقیقی قطری با المان‌های $\mathbf{W}_1,\ldots,\mathbf{W}_m$ است. $\mathbf{A}^T$ ترانهاده ماتریس حقیقی $\mathbf{A}$ است. عناصر متقارن در ماتریس‌های متقارن با علامت * نشان داده شده و $\otimes$ ضرب کرونکر است

۲- بیان مساله و مقدمات

شبکه دینامیکی پیچیده زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i(t) &= -\mathbf{C}\mathbf{x}_i(t)+\mathbf{A}\mathbf{x}_i(t-\tau)+\mathbf{B}_1\mathbf{f}\left(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)\right)\\ &+\mathbf{B}_2\mathbf{f}\left(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau)\right)+\sum_{j=1}^{N}G_{ij}^{(1)}\boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{x}_j(t)\\ &+\sum_{j=1}^{N}G_{ij}^{(2)}\boldsymbol{\Gamma}_2\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\\ &+\sum_{j=1}^{N}G_{ij}^{(3)}\boldsymbol{\Gamma}_3\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds,\ i=1,2,\ldots,N,\end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن $\mathbf{x}_i(t)=[x_{i1}(t),x_{i2}(t),\cdots,x_{in}(t)]^T\in\mathbb{R}^n$ بردار حالت گره iام، $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ تابع غیرخطی برداری، $\mathbf{C},\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$، $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2\in\mathbb{R}^{n\times k}$، و $\mathbf{M},\mathbf{D}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌های ثابت معلوم، $\tau>0$ تاخیر حالت و $\tau_c>0$ تاخیر کوپلینگ است. $\mathbf{G}^{(q)}=(G_{ij}^{(q)})_{N\times N},(q=1,2,3)$ نشان‌دهنده اتصالات کوپلینگ و $\boldsymbol{\Gamma}_1,\boldsymbol{\Gamma}_2,\boldsymbol{\Gamma}_3\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌های کوپلینگ داخلی هستند.

[1] Lur'e
[2] Discrete-delay
[3] Distributed-delay

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

توجه ۱: این مدل نسبت به مقالات قبلی منتشر شده در این زمینه کلی‌تر است. در مدل درنظر گرفته شده هر گره دارای تاخیر-زمانی (τ) در بردار حالت‌های خود می‌باشد که با تاخیر-زمانی موجود در کوپلینگ (τ_c) بین گره‌ها متفاوت است. در این‌صورت، کلاس وسیع‌تری از شبکه‌های دینامیکی پیچیده قابل بررسی هستند.

فرض ۱: ماتریس‌های اتصالات کوپلینگ باید شرایط زیر را برآورده سازند [۱۲]:

$$\begin{cases} G_{ij}^{(q)} = G_{ji}^{(q)} \geq 0, & i \neq j,\ q = 1,2,3, \\ G_{ii}^{(q)} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} G_{ij}^{(q)}, & i,j = 1,\ldots,N,\ q = 1,2,3. \end{cases}$$

فرض زیر روی تابع غیرخطی $\mathbf{f}(.)$ لحاظ می‌شود.

فرض ۲: برای هر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ، ثوابتی مانند σ_r^- و σ_r^+ وجود دارد که تابع غیرخطی، شرایط زیر را برآورده سازد:

$$\sigma_r^- \leq \frac{f_r(x_1) - f_r(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \sigma_r^+, \quad r = 1,2,\ldots,k.$$

توجه ۲: شرط درنظر گرفته شده برای تابع غیرخطی، کلی‌تر از شرط معمول لیپ‌شیتز (Lipschitz) است و آن را به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود. به بیان دیگر اگر $\sigma_r^+ = \sigma_r^-$ ، $r = 1,2,\ldots,k$ باشد آنگاه شرط بیان شده در فرض ۲ معادل با شرط لیپ‌شیتز است که بسیاری از سیستم‌های آشوبناک شناخته‌شده از جمله سیستم‌های لورنز (Lorenz)، راسلر (Rossler)، چن (Chen)، لو (Lu) و مدار چوآ این شرط را برآورده می‌سازند.

تعریف ۱: سیستم (۱) را هم‌گام شده کلی برای هر شرایط اولیه $\Pi_{i0}(s)$ ، $i = 1,2,\ldots,N$ ، گویند اگر

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \right\| = 0, \qquad \forall i,j = 1,2,\ldots,N$$

که $\|.\|$ نرم اقلیدسی است. برای سادگی در نمایش فرض کنید که

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{x}_1^T(t) \quad \mathbf{x}_2^T(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N^T(t) \right]^T,$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = \left[\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1(t)) \quad \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2(t)) \quad \cdots \quad \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_N(t)) \right]^T.$$

با استفاده از ضرب ماتریسی کرونکر می‌توان شبکه (۱) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & -(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x}(t-\tau) \\ & + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1)\mathbf{F}((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M})\mathbf{x}(t)) \\ & + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_2)\mathbf{F}((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D})\mathbf{x}(t-\tau)) \\ & + (\mathbf{G}^{(1)} \otimes \mathbf{\Gamma}_1)\mathbf{x}(t) + (\mathbf{G}^{(2)} \otimes \mathbf{\Gamma}_2)\mathbf{x}(t-\tau_c) \\ & + (\mathbf{G}^{(3)} \otimes \mathbf{\Gamma}_3)\int_{t-\tau_c}^{t} \mathbf{x}(s)ds. \end{aligned} \qquad (۲)$$

از لم‌های زیر در اثبات قضایای اصلی استفاده خواهد شد.

لم ۱ (نامساوی جنسن [۱۸]): فرض کنید که تابع برداری $\boldsymbol{\omega} : [0,r] \to \mathbb{R}^n$ برای انتگرال‌گیری‌های زیر خوش‌تعریف باشد. برای هر ماتریس متقارن $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و اسکالر $r > 0$ ، خواهیم داشت

$$r\int_0^r \boldsymbol{\omega}^T(s)\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}(s)ds \geq \left(\int_0^r \boldsymbol{\omega}(s)ds\right)^T \mathbf{R}\left(\int_0^r \boldsymbol{\omega}(s)ds\right).$$

لم ۲: مطابق با مرجع [۳۲] و فرض ۲، برای هر ماتریس قطری $\mathbf{J} > 0$ ، $\mathbf{L} > 0$ ، و ماتریس ثابت $\mathbf{M}$ با ابعاد مناسب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\theta}^T(t)\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{\Delta}_1\mathbf{M} & \mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{\Delta}_2 \\ * & -\mathbf{J} \end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}(t) \\ & + \boldsymbol{\theta}^T(t-\tau)\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T\mathbf{L}\mathbf{\Delta}_1\mathbf{M} & \mathbf{M}^T\mathbf{L}\mathbf{\Delta}_2 \\ * & -\mathbf{L} \end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}(t-\tau) \geq 0, \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \\ \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Delta}_1 = diag\left[\sigma_1^+\sigma_1^-, \ldots, \sigma_k^+\sigma_k^-\right],$$

$$\mathbf{\Delta}_2 = \mathrm{diag}\left[\frac{\sigma_1^+ + \sigma_1^-}{2}, \ldots, \frac{\sigma_k^+ + \sigma_k^-}{2}\right],$$

بوده و $\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^n$ ، $(l = 1,2,\ldots,\mathrm{N})$ ، و همچنین $\mathbf{f}(.)$ در رابطه (۱) و σ_r^- ، σ_r^+ ، $r = 1,2,\ldots,k$ ، در فرض ۲ تعریف شده‌اند.

لم ۳ ([۲۳]): فرض کنید $\mathbf{1} = [1,1,\ldots,1]^T$ ، $\mathbf{E}_N = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ ، و $\mathbf{U} = N\mathbf{I}_N - \mathbf{E}_N$ ، $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ، و $\mathbf{x} = \left[\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_N^T\right]^T$ ، و $\mathbf{y} = \left[\mathbf{y}_1^T, \ldots, \mathbf{y}_N^T\right]^T$ با $\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_l \in \mathbb{R}^n$ ، $l = 1,2,\ldots,\mathrm{N}$ ، و N عدد صحیح مثبت است، آنگاه

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{U}\otimes\mathbf{P})\mathbf{y} = \sum_{1\leq i<j\leq N} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{P}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j).$$

لم ۴ ([۲۳]): فرض کنید $\mathbf{H}$ ، $\mathbf{S}$ و $\mathbf{P}$ ماتریس حقیقی $n\times n$ ، $\mathbf{1} = [1,1,\ldots,1]^T$ ، $\mathbf{E}_N = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ ، $\mathbf{U} = N\mathbf{I}_N - \mathbf{E}_N$ ، $\mathbf{x} = \left[\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_N^T\right]^T$ و $\mathbf{y} = \left[\mathbf{y}_1^T, \ldots, \mathbf{y}_N^T\right]^T$ با $\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_l \in R^n$ ، $l = 1,2,\ldots,\mathrm{N}$ ، N عدد صحیح مثبت بوده و $\mathbf{f}(.)$ و $\mathbf{F}(.)$ توابعی تعریف شده در (۲) هستند. آنگاه برای بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ با ابعاد مناسب، نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T(\mathbf{U}\otimes\mathbf{P})\mathbf{F}((\mathrm{I}_N \otimes \mathbf{S})\mathbf{y}) \\ & = \sum_{1\leq i<j\leq N} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{H}(\mathbf{f}(\mathbf{S}\mathbf{y}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{S}\mathbf{y}_j)). \end{aligned}$$

لم ۵ ([۳۳]): با فرض اینکه $\alpha \in \mathbb{R}$ بوده و ماتریس‌های $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{C}$ ، و $\mathbf{D}$ معلوم و با ابعاد مناسب باشند، خواص زیر قابل اثبات است:

$$(\alpha\mathbf{A})\otimes\mathbf{B} = \mathbf{A}\otimes(\alpha\mathbf{B}),$$

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T,$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})=(\mathbf{AC})\otimes(\mathbf{BD}),$$

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})\otimes\mathbf{C}=\mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}).$$

خواننده محترم می‌تواند برای اطلاع بیشتر در مورد جزییات ضرب کرونکر به مرجع [۳۳] مراجعه کند.

۳- نتایج اصلی

در این بخش، شرایطی بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسووسکی جهت تضمین هم‌گام بودن گره‌های شبکه دینامیکی پیچیده (۲) ارائه می‌شود.

قضیه ۱: برای $\tau>0$ و $\tau_c>0$ داده شده، شبکه دینامیکی پیچیده (۱) بطور کلی هم‌گام خواهد بود اگر وجود داشته باشد ماتریس‌های مثبت معین $\mathbf{P}>0$، $\mathbf{Q}>0$، $\mathbf{R}>0$، $\mathbf{W}>0$، $\mathbf{Z}>0$، $\mathbf{O}>0$، و ماتریس‌های قطری مثبت $\mathbf{J}_1>0$، $\mathbf{J}_2>0$، $\mathbf{L}_1>0$، $\mathbf{L}_2>0$، بنحوی که نامســاوی‌های ماتریسی خطی زیر برای تمام $1\le i<j\le N$ برقرار باشند:

$$\mathbf{\Psi}_{ij}=\begin{bmatrix}\Pi_{11}&\Pi_{12}&\cdots&\Pi_{19}\\ *&\Pi_{22}&\cdots&\Pi_{29}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ *&*&\cdots&\Pi_{99}\end{bmatrix}<0, \qquad (۴)$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{11}&\mathbf{Q}_{12}&\mathbf{Q}_{13}\\ *&\mathbf{Q}_{22}&\mathbf{Q}_{23}\\ *&*&\mathbf{Q}_{33}\end{bmatrix}>0,\ \mathbf{W}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11}&\mathbf{W}_{12}&\mathbf{W}_{13}\\ *&\mathbf{W}_{22}&\mathbf{W}_{23}\\ *&*&\mathbf{W}_{33}\end{bmatrix}>0,$$

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{11}&\mathbf{O}_{12}\\ *&\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}>0,\ \mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_{11}&\mathbf{Z}_{12}\\ *&\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}>0,$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\Pi_{11}&=-\mathbf{PC}-\mathbf{C}^T\mathbf{P}-NG_{ij}^{(1)}\left(\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_1+\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{P}\right)+\mathbf{Q}_{11}+\mathbf{R}\\
&\quad-\mathbf{W}_{11}\mathbf{C}-\mathbf{C}^T\mathbf{W}_{11}-NG_{ij}^{(1)}\left(\mathbf{W}_{11}\mathbf{\Gamma}_1+\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{W}_{11}\right)\\
&\quad+\mathbf{W}_{12}+\mathbf{W}_{12}^T+\mathbf{W}_{13}+\mathbf{W}_{13}^T+\tau\mathbf{Z}_{11}+\tau_c\mathbf{O}_{11}\\
&\quad-\tau\mathbf{Z}_{12}\mathbf{C}-\tau\mathbf{C}^T\mathbf{Z}_{12}^T-\tau_c\mathbf{O}_{12}\mathbf{C}-\tau_c\mathbf{C}^T\mathbf{O}_{12}^T\\
&\quad-\tau NG_{ij}^{(1)}\left(\mathbf{Z}_{12}\mathbf{\Gamma}_1+\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{Z}_{12}^T\right)-\tau_c NG_{ij}^{(1)}\left(\mathbf{O}_{12}\mathbf{\Gamma}_1+\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{O}_{12}^T\right)\\
&\quad-\frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{22}-\frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{22}+\tau\mathbf{C}^T\mathbf{Z}_{22}\mathbf{C}+\tau_c\mathbf{C}^T\mathbf{O}_{22}\mathbf{C}\\
&\quad+NG_{ij}^{(1)}\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_1+NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{C}-NG_{ij}^{(11)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_1\\
&\quad-\mathbf{M}^T\mathbf{J}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{M}-\mathbf{D}^T\mathbf{J}_2\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{D},\\
\Pi_{12}&=\mathbf{PA}+\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}-\mathbf{W}_{12}+\tau\mathbf{Z}_{12}\mathbf{A}+\tau_c\mathbf{O}_{12}\mathbf{A}\\
&\quad+\frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{22}-\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{A}-NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{A},\\
\Pi_{13}&=-NG_{ij}^{(2)}\left(\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_2+\mathbf{W}_{11}\mathbf{\Gamma}_2\right)-\mathbf{W}_{13}+NG_{ij}^{(2)}\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2\\
&\quad-NG_{ij}^{(2)}\left(\tau\mathbf{Z}_{12}+\tau_c\mathbf{O}_{12}\right)\mathbf{\Gamma}_2+\frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{22}-NG_{ij}^{(12)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2,\\
\Pi_{14}&=\left(\mathbf{P}+\mathbf{W}_{11}+\tau\mathbf{Z}_{12}+\tau_c\mathbf{O}_{12}\right)\mathbf{B}_1+\mathbf{Q}_{12}\\
&\quad-\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1-NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1+\mathbf{M}^T\mathbf{J}_1\mathbf{\Lambda}_2,\\
\Pi_{16}&=\mathbf{Q}_{13}+\mathbf{D}^T\mathbf{J}_2\mathbf{\Lambda}_2,\\
\Pi_{18}&=-\mathbf{C}^T\mathbf{W}_{12}-NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{W}_{12}+\mathbf{W}_{22}+\mathbf{W}_{23}^T-\frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{12}^T\\
\Pi_{17}&=\mathbf{PB}_2+\mathbf{W}_{11}\mathbf{B}_2+\tau\mathbf{Z}_{12}\mathbf{B}_2+\tau_c\mathbf{O}_{12}\mathbf{B}_2\\
&\quad-\tau\mathbf{C}^T\mathbf{Z}_{22}\mathbf{B}_2-\tau_c\mathbf{C}^T\mathbf{O}_{22}\mathbf{B}_2-NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2,\\
\Pi_{19}&=-\mathbf{C}^T\mathbf{W}_{13}-NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{W}_{13}-NG_{ij}^{(3)}\left(\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_3+\mathbf{W}_{11}\mathbf{\Gamma}_3\right)\\
&\quad+\mathbf{W}_{23}+\mathbf{W}_{33}-\frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{12}^T-NG_{ij}^{(3)}\left(\tau\mathbf{Z}_{12}+\tau_c\mathbf{O}_{12}\right)\mathbf{\Gamma}_3\\
&\quad+NG_{ij}^{(3)}\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3-NG_{ij}^{(13)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3,\\
\Pi_{23}&=-NG_{ij}^{(2)}\mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2,\\
\Pi_{22}&=-\mathbf{Q}_{11}-\frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{22}+\tau\mathbf{A}^T\mathbf{Z}_{22}\mathbf{A}+\tau_c\mathbf{A}^T\mathbf{O}_{22}\mathbf{A}\\
&\quad-\mathbf{M}^T\mathbf{L}_1\mathbf{\Delta}_1\mathbf{M}-\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2\mathbf{\Delta}_1\mathbf{D},\\
\Pi_{25}&=-\mathbf{Q}_{12}+\mathbf{M}^T\mathbf{L}_1\mathbf{\Lambda}_2,\ \Pi_{24}=\mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1,\\
\Pi_{27}&=-\mathbf{Q}_{13}+\mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2+\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2\mathbf{\Delta}_2,\\
\Pi_{28}&=\mathbf{A}^T\mathbf{W}_{12}-\mathbf{W}_{22}+\frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{12}^T,\\
\Pi_{29}&=\mathbf{A}^T\mathbf{W}_{13}-\mathbf{W}_{23}-NG_{ij}^{(3)}\mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3,\\
\Pi_{33}&=-\mathbf{R}-\frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{22}-NG_{ij}^{(22)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2,\\
\Pi_{37}&=-NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2,\ \Pi_{34}=-NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1,\\
\Pi_{38}&=-NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{W}_{12}-\mathbf{W}_{23}^T,\\
\Pi_{39}&=-NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{W}_{13}-\mathbf{W}_{33}+\frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{12}^T-NG_{ij}^{(23)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3,\\
\Pi_{46}&=\mathbf{Q}_{23},\ \Pi_{44}=\mathbf{Q}_{22}+\mathbf{B}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1-\mathbf{J}_1,\\
\Pi_{48}&=\mathbf{B}_1^T\mathbf{W}_{12},\ \Pi_{47}=\mathbf{B}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2,\\
\Pi_{49}&=\mathbf{B}_1^T\mathbf{W}_{13}-NG_{ij}^{(3)}\mathbf{B}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3,\ \Pi_{55}=-\mathbf{Q}_{22}-\mathbf{L}_1,\\
\Pi_{66}&=\mathbf{Q}_{33}-\mathbf{J}_2,\ \Pi_{57}=-\mathbf{Q}_{23},\\
\Pi_{78}&=\mathbf{B}_2^T\mathbf{W}_{12},\ \Pi_{77}=-\mathbf{Q}_{33}+\mathbf{B}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2-\mathbf{L}_2,\\
\Pi_{88}&=-\frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{11},\ \Pi_{79}=\mathbf{B}_2^T\mathbf{W}_{13}-NG_{ij}^{(3)}\mathbf{B}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3,\\
\Pi_{89}&=-NG_{ij}^{(3)}\mathbf{W}_{12}^T\mathbf{\Gamma}_3,\\
\Pi_{99}&=-\frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{11}-NG_{ij}^{(3)}\left(\mathbf{W}_{13}^T\mathbf{\Gamma}_3+\mathbf{\Gamma}_3^T\mathbf{W}_{13}\right)-NG_{ij}^{(33)}\mathbf{\Gamma}_3^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3,
\end{aligned}$$

$\mathbf{\Omega}=\tau\mathbf{Z}_{22}+\tau_c\mathbf{O}_{22}$ ، $\mathbf{G}^{(pq)}=\mathbf{G}^{(P)}\mathbf{G}^{(q)}$ ، $p,q=1,2,3$ ، و دیگر پارامترها در Π_{ij} که در بــالا به آنها اشاره نشــده، ماتریس‌های صفر با ابعاد مناسبند.

اثبات: تابع لیاپانوف-کراسووسکی زیر را درنظر بگیرید:

$$V(t)=\sum_{i=1}^{5}V_i(t), \qquad (۵)$$

که در آن

$$V_1(t)=\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{U}\otimes\mathbf{P})\mathbf{x}(t),$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

$$V_2(t)=\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \mathbf{F}(\mathbf{M}\mathbf{x}(s))\\ \mathbf{F}(\mathbf{D}\mathbf{x}(s))\end{bmatrix}^T\times$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{12} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{13}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{22} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{23}\\ * & * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \mathbf{F}(\mathbf{M}\mathbf{x}(s))\\ \mathbf{F}(\mathbf{D}\mathbf{x}(s))\end{bmatrix}ds,$$

$$V_3(t)=\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}^T(s)(\mathbf{U}\otimes\mathbf{R})\mathbf{x}(s)ds,$$

$$V_4(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}(s)ds\\ \int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}(s)ds\end{bmatrix}^T\times$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{12} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{13}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{22} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{23}\\ * & * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}(s)ds\\ \int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}(s)ds\end{bmatrix},$$

$$V_5(t)=\int_{t-\tau}^{t}\int_{\theta}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}dsd\theta$$
$$+\int_{t-\tau_c}^{t}\int_{\theta}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}dsd\theta,$$

و $\mathbf{U}$ در لم ۳ تعریف شده است.

توجه ۳: اگر تابع لیاپانوف پیشنهادی بر اساس بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ نوشته شود، آنگاه همگرایی حالت‌های گره‌های شبکه به مقدار صفر تضمین می‌گردد که در این صورت تضمینی بر هم‌گام بودن رفتار گره‌های شبکه وجود ندارد. تابع لیاپانوف (۵) ظاهراً بر اساس $\mathbf{x}(t)$ نوشته شده است اما بر اساس ویژگی ماتریس $\mathbf{U}$ که در لم ۳ تعریف شده است می‌توان بسادگی نشان داد که تابع لیاپانوف پیشنهادی بر اساس اختلاف بین بردار حالت گره‌های شبکه (خطای بین بردار حالت‌ها) نوشته شده است.

با گرفتن مشتق از $V_1(t)$ نسبت به t خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t)&=2\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{U}\otimes\mathbf{P})\dot{\mathbf{x}}(t)\\ &=2\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{U}\otimes\mathbf{P})\big[-(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{C})\mathbf{x}(t)\\ &+(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{A})\mathbf{x}(t-\tau)+(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{B}_1)\mathbf{F}\big((\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{M})\mathbf{x}(t)\big)\\ &+(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{B}_2)\mathbf{F}\big((\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{D})\mathbf{x}(t-\tau)\big)+\big(\mathbf{G}^{(1)}\otimes\mathbf{\Gamma}_1\big)\mathbf{x}(t)\\ &+\big(\mathbf{G}^{(2)}\otimes\mathbf{\Gamma}_2\big)\mathbf{x}(t-\tau_c)+\big(\mathbf{G}^{(3)}\otimes\mathbf{\Gamma}_3\big)\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}(s)ds\big].\end{aligned}$$

(۶)

مطابق با لم ۳ و ۴، رابطه (۶) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t)=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\Big[&2\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)^T\big[-\mathbf{PC}\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)\\ &+\mathbf{PA}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\\ &+\mathbf{PB}_1\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)\\ &+\mathbf{PB}_2\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)\\ &-NG_{ij}^{(1)}\mathbf{P\Gamma}_1\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)\\ &-NG_{ij}^{(2)}\mathbf{P\Gamma}_2\big(\mathbf{x}_i(t-\tau_c)-\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\big)\\ &-NG_{ij}^{(3)}\mathbf{P\Gamma}_3\Big(\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_i(s)ds-\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds\Big)\big]\Big].\end{aligned}$$

(۷)

مشتق عبارت دوم رابطه (۵) برابر است با

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t)=&\vartheta^T(t)\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{12} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{13}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{22} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{23}\\ * & * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{33}\end{bmatrix}\vartheta(t)\\ &-\vartheta^T(t-\tau)\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{12} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{13}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{22} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{23}\\ * & * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Q}_{33}\end{bmatrix}\vartheta(t-\tau).\end{aligned}$$

(۸)

که در آن $\vartheta(t)=\big[\mathbf{x}^T(t),\mathbf{F}^T\big(\mathbf{M}\mathbf{x}(t)\big),\mathbf{F}^T\big(\mathbf{D}\mathbf{x}(t)\big)\big]^T$ است.

مطابق با لم ۳ و ۴ می‌توان رابطه (۸) را بصورت زیر نوشت:

(۹)

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t)=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\Big[&\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)^T\mathbf{Q}_{11}\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)\\ &+2\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)^T\mathbf{Q}_{12}\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)\\ &+2\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)^T\mathbf{Q}_{13}\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)\\ &+\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)^T\mathbf{Q}_{22}\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)\\ &+2\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)^T\mathbf{Q}_{23}\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)\\ &+\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)^T\mathbf{Q}_{33}\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t)\big)\big)\\ &-\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)^T\mathbf{Q}_{11}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\\ &-2\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)^T\mathbf{Q}_{12}\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)\\ &-2\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)^T\mathbf{Q}_{13}\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)\\ &-\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)^T\mathbf{Q}_{22}\times\\ &\qquad\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)\\ &-2\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)^T\mathbf{Q}_{23}\times\\ &\qquad\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)\\ &-\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)^T\mathbf{Q}_{33}\times\\ &\qquad\big(\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau)\big)-\mathbf{f}\big(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)\big)\Big].\end{aligned}$$

مشتق عبارت سوم رابطه (۵) برابر است با

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

$$\dot{V}_3(t)=\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{U}\otimes\mathbf{R})\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^T(t-\tau_c)(\mathbf{U}\otimes\mathbf{R})\mathbf{x}(t-\tau_c)$$
$$=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\Big[\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)^T\mathbf{R}\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)$$
$$-\big(\mathbf{x}_i(t-\tau_c)-\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\big)^T\mathbf{R}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau_c)-\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\big)\Big].$$

(۱۰)

با مشتق‌گیری از عبارت چهارم رابطه (۵) نسبت به t داریم:

$$\dot{V}_4(t)=2\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}(s)ds\\ \int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}(s)ds\end{bmatrix}^T\times$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{12} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{13}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{22} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{23}\\ * & * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{W}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t-\tau)\\ \mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t-\tau_c)\end{bmatrix}.$$

(۱۱)

مطابق با لم ۳، رابطه (۱۱) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

(۱۲)

$$\dot{V}_4(t)=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\Big[2\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)^T\Big(\mathbf{W}_{11}\big(\dot{\mathbf{x}}_i(t)-\dot{\mathbf{x}}_j(t)\big)$$
$$+\big(\mathbf{W}_{12}+\mathbf{W}_{13}\big)\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)\Big)$$
$$-2\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)^T\Big(\mathbf{W}_{12}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)$$
$$+\mathbf{W}_{13}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau_c)-\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\big)\Big)$$
$$+2\Big(\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}_i(s)ds-\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds\Big)^T\Big(\mathbf{W}_{12}^T\big(\dot{\mathbf{x}}_i(t)-\dot{\mathbf{x}}_j(t)\big)$$
$$+\big(\mathbf{W}_{22}+\mathbf{W}_{23}\big)\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)\Big)$$
$$-2\Big(\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}_i(s)ds-\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds\Big)^T\times$$
$$\mathbf{W}_{22}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)$$
$$-2\Big(\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}_i(s)ds-\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds\Big)^T\times$$
$$\mathbf{W}_{23}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau_c)-\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\big)$$
$$+2\Big(\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_i(s)ds-\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds\Big)^T\Big(\mathbf{W}_{13}^T\big(\dot{\mathbf{x}}_i(t)-\dot{\mathbf{x}}_j(t)\big)$$
$$+\big(\mathbf{W}_{23}^T+\mathbf{W}_{33}\big)\big(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\big)\Big)$$
$$-2\Big(\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_i(s)ds-\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds\Big)^T\times$$
$$\mathbf{W}_{23}^T\big(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\big)$$
$$-2\Big(\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_i(s)ds-\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}_j(s)ds\Big)^T\times$$
$$\mathbf{W}_{33}\big(\mathbf{x}_i(t-\tau_c)-\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\big).$$

با مشتق‌گیری از عبارت پنجم رابطه (۵) نسبت به t داریم:

$$\dot{V}_5(t)=\tau\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$
$$-\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}ds$$
$$+\tau_c\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$
$$-\int_{t-\tau_c}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}ds.$$

(۱۳)

مطابق با لم ۳ می‌توان رابطه (۱۳) را بصورت زیر نوشت:

$$\dot{V}_5(t)\le\tau\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$
$$-\frac{1}{\tau}\left(\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}ds\right)^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}\times$$
$$\left(\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}ds\right)$$
$$+\tau_c\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$
$$-\frac{1}{\tau_c}\left(\int_{t-\tau_c}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}ds\right)^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}\times$$
$$\left(\int_{t-\tau_c}^{t}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(s)\\ \dot{\mathbf{x}}(s)\end{bmatrix}ds\right),$$

(۱۴)

یا بطور مشابه

$$\dot{V}_5(t)\le\tau\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$
$$-\frac{1}{\tau}\mathbf{\Phi}_1^T(t)\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12} & -\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22} & -\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\\ * & * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}\mathbf{\Phi}_1(t)$$
$$+\tau_c\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$
$$-\frac{1}{\tau_c}\mathbf{\Phi}_2^T(t)\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{11} & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12} & -\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{12}\\ * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22} & -\mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\\ * & * & \mathbf{U}\otimes\mathbf{O}_{22}\end{bmatrix}\mathbf{\Phi}_2(t),$$

(۱۵)

که در آن $\mathbf{\Phi}_1(t)=\Big[\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(s)ds\quad\mathbf{x}^T(t)\quad\mathbf{x}^T(t-\tau)\Big]^T$ و $\mathbf{\Phi}_2(t)=\Big[\int_{t-\tau_c}^{t}\mathbf{x}^T(s)ds\quad\mathbf{x}^T(t)\quad\mathbf{x}^T(t-\tau_c)\Big]^T$ است. بر طبق لم ۲ و فرض ۲، برای هر ماتریس قطری مثبت $\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2,\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_2$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\theta}^T(t)\begin{bmatrix}-\mathbf{M}^T\mathbf{J}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{M} & \mathbf{M}^T\mathbf{J}_1\mathbf{\Lambda}_2\\ * & -\mathbf{J}_1\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}(t)$$
$$+\boldsymbol{\theta}^T(t-\tau)\begin{bmatrix}-\mathbf{M}^T\mathbf{L}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{M} & \mathbf{M}^T\mathbf{L}_1\mathbf{\Lambda}_2\\ * & -\mathbf{L}_1\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}(t-\tau)\ge 0,$$

(۱۶)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

$$\boldsymbol{\beta}^T(t)\begin{bmatrix}-\mathbf{D}^T\mathbf{J}_2\boldsymbol{\Lambda}_1\mathbf{D} & \mathbf{D}^T\mathbf{J}_2\boldsymbol{\Lambda}_2\\ * & -\mathbf{J}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}(t)$$
$$+\boldsymbol{\beta}^T(t-\tau)\begin{bmatrix}-\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2\boldsymbol{\Lambda}_1\mathbf{D} & \mathbf{D}^T\mathbf{L}_2\boldsymbol{\Lambda}_2\\ * & -\mathbf{L}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}(t-\tau)\geq 0, \quad (۱۷)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\theta}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\\ \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t))-\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t))\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\\ \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t))-\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t))\end{bmatrix}.$$

با درنظر گرفتن (۶) الی (۱۷) و جایگذاری $\dot{\mathbf{x}}(t)$ از (۲) در آنها بسادگی می‌توان نشان داد که

$$\dot{V}(t)\leq\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\xi_{ij}^T(t)\boldsymbol{\Psi}_{ij}\xi_{ij}(t)\right], \quad (۱۸)$$

که $\boldsymbol{\Psi}_{ij}$ در (۴) تعریف شده و

$$\xi_{ij}(t)=\Big[\left(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\right)^T,\left(\mathbf{x}_i(t-\tau)-\mathbf{x}_j(t-\tau)\right)^T,$$
$$\left(\mathbf{x}_i(t-\tau_c)-\mathbf{x}_j(t-\tau_c)\right)^T,,\left(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t))-\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t))\right)^T,$$
$$\left(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t-\tau))-\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t-\tau))\right)^T,$$
$$\left(\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t))-\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t))\right)^T,$$
$$\left(\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau))-\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t-\tau))\right)^T,$$
$$\int_{t-\tau}^{t}\left(\mathbf{x}_i(s)-\mathbf{x}_j(s)\right)^T ds,\int_{t-\tau_c}^{t}\left(\mathbf{x}_i(s)-\mathbf{x}_j(s)\right)^T ds\Big]^T.$$

اگر برای $\forall 1\leq i<j\leq N$ داشته باشیم $\boldsymbol{\Psi}_{ij}<0$، آنگاه $\dot{V}(t)<0$ خواهد بود. با توجه به تعریف ۱ نتیجه می‌گیریم که سیستم (۱) بطور کلی هم‌گام است. □

٤- شبیه‌سازی یک سیستم نمونه

مدار چوآی تاخیردار با پارامترهای زیر را درنظر بگیرید [۳۴, ۳۵]:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.1 & 0 & 0\\ -0.1 & 0 & 0\\ 0.2 & 0 & -0.1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}3.1429 & -11 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 14.2860 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}^T,\quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}^T,\quad \mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}4.7143\\0\\0\end{bmatrix},$$

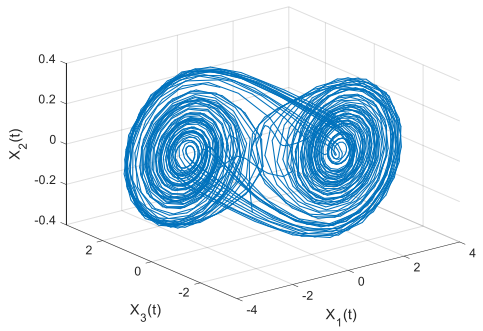
$$\boldsymbol{\Delta}_2=1,\ \boldsymbol{\Delta}_1=0,\ \boldsymbol{\Gamma}_2=\boldsymbol{\Gamma}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Gamma}_1=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^{(1)}=\mathbf{G}^{(2)}=\mathbf{G}^{(3)}=\begin{bmatrix}-5&1&1&1&1&1\\1&-5&1&1&1&1\\1&1&-5&1&1&1\\1&1&1&-5&1&1\\1&1&1&1&-5&1\\1&1&1&1&1&-5\end{bmatrix}.$$

با فرض $\tau=0.25$، قضیه ۱ را به این مثال اعمال کرده و بیشینه زمان‌-تاخیر کوپلینگ که هم‌گام بودن کلی را تضمین می‌کند برابر $\tau_c=0.1844$ بدست می‌آید. توجه شود که برای مقادیر تاخیر ذکر شده، نامساوی‌های ماتریسی خطی ارایه شده در قضیه ۱ دارای پاسخ هستند اما با توجه به محدودیت فضا از ذکر مقادیر آنها اجتناب شده است.

توجه ۴: با مشخص بودن مقدار یکی از تاخیرها (τ در این مثال) می‌توان بیشینه مقدار تاخیر دیگر را با استفاده از روش سعی و خطا یافت. بدین منظور مقدار کوچکی را برای تاخیر درنظر گرفته و شرایط قضیه ۱ را بررسی می‌کنیم. در صورتی که نامساوی‌های ماتریسی خطی ارایه شده در قضیه ۱ دارای پاسخ بودند، مقدار تاخیر را افزایش می‌دهیم تا زمانی که بیشینه مقدار تاخیری که شرایط قضیه ۱ برای آن برقرار شود را بیابیم.

با درنظر گرفتن $f(x)=0.5\left(|x+1|-|x-1|\right)$، $\tau=0.25$، $\tau_c=0.18$، و شرایط اولیه متفاوت برای گره‌ها، رفتار آشوبناک مدار چوآی اول (گره ۱) در شکل ۱ نشان داده شده است. مقدار حالت‌های تمام گره‌های شبکه مذکور در شکل ۲ رسم شده است. همانطور که از شکل ۲ مشخص است، حالت‌های تمامی گره‌های شبکه پس از حدود یک ثانیه به یکدیگر همگرا شده‌اند. شکل ۳ خطای هم‌گام‌سازی بین حالت‌های گره‌های شبکه را نشان می‌دهد که در آن بردار خطای هم‌گام‌سازی بصورت $\mathbf{e}_k(t)=[x_{2k}(t)-x_{1k}(t),\ldots,x_{6k}(t)-x_{1k}(t)]^T$، $k=1,2,3$ تعریف شده است. همانطور که مشخص است، حالت‌های تمامی گره‌ها با یکدیگر هم‌گام شده‌اند.

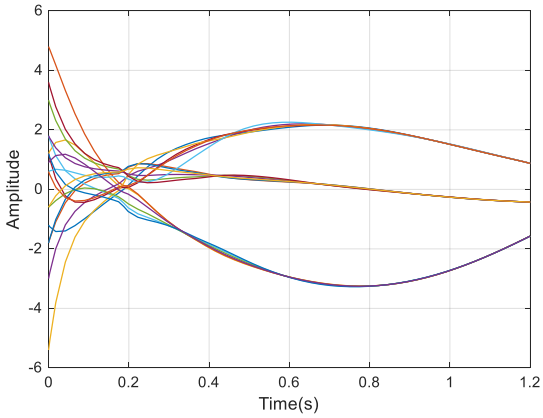


شکل ۱: رفتار آشوبناک مدار چوآ

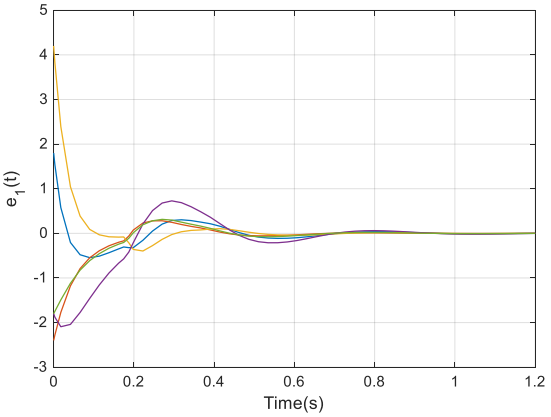
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

۸- نتیجه‌گیری

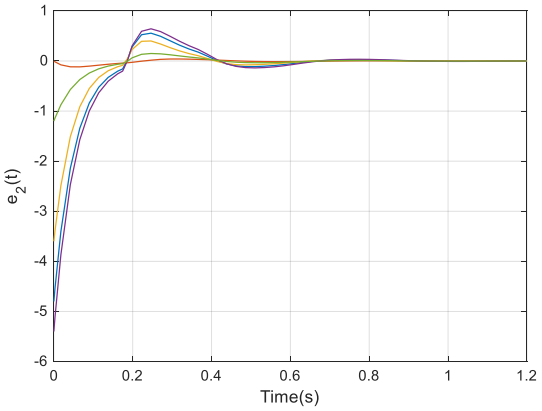
در این مقاله مساله تحلیل هم‌گام بودن شبکه‌های دینامیکی پیچیده به همراه تاخیر در حالت‌های گره‌ها و کوپلینگ ارتباطی انجام گرفت. علاوه بر این، جهت بررسی کلاس وسیعتری از این شبکه‌ها، ترکیبی از کوپلینگ ثابت، کوپلینگ با تاخیر گسسته، و کوپلینگ با تاخیر توزیع شده درنظر گرفته شد. سپس بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسووسکی، شرایطی در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی به منظور تضمین هم‌گام بودن رفتار گره‌های شبکه استخراج و ارائه شدند. در انتها نیز روش معرفی شده روی یک مثال از مدارات چوآی به هم کوپل شده اعمال و کارآیی آن بررسی شد.



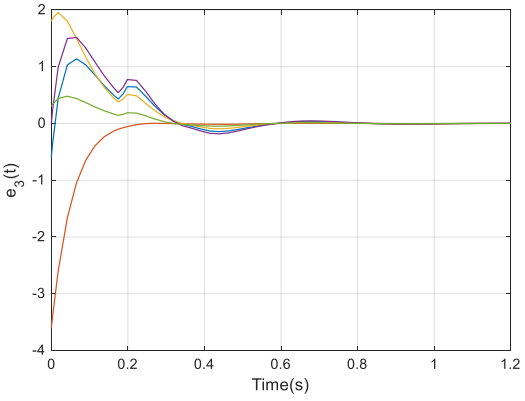
شکل ۲: رفتار حالت‌های مدارات چوآی به هم کوپل شده



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳: خطای هم‌گام بودن $\mathbf{e}_k(t)$, $k=1,2,3$.

مراجع

[1]F. Bellamine, A. Almansoori, and A. Elkamel, "Modeling of complex dynamic systems using differential neural networks with the incorporation of a priori knowledge," Applied Mathematics and Computation, vol. 266, pp. 515-526, 2015.
[2]A. Kazemy, "Global synchronization of neural networks with hybrid coupling: a delay interval segmentation approach," Neural Computing and Applications, vol. 30, no. 2, pp. 627-637, 2018.
[3]G. A. Pagani and M. Aiello, "The power grid as a complex network: a survey," Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 392, no. 11, pp. 2688-2700, 2013.
[4]H.-T. Zhang, T. Yu, J.-P. Sang, and X.-W. Zou, "Dynamic fluctuation model of complex networks with weight scaling behavior and its application to airport networks," Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 393, pp. 590-599, 2014.
[5]K. Liu and E. Fridman, "Networked-based stabilization via discontinuous Lyapunov functionals," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 22, no. 4, pp. 420-436, 2012.
[6]Y. Tang, F. Qian, H. Gao, and J. Kurths, "Synchronization in complex networks and its application–a survey of recent advances and challenges," Annual Reviews in Control, vol. 38, no. 2, pp. 184-198, 2014.
[7]S. H. Strogatz, "Exploring complex networks," Nature, vol. 410, no. 6825, pp. 268-276, 2001.
[8]Y. Zhang, D.-W. Gu, and S. Xu, "Global exponential adaptive synchronization of complex dynamical networks with neutral-type neural network nodes and stochastic disturbances," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 60, no. 10, pp. 2709-2718, 2013.
[9]L. Zhang, Y. Wang, Y. Huang, and X. Chen, "Delay-dependent synchronization for non-diffusively coupled time-varying complex dynamical networks," Applied Mathematics and Computation, vol. 259, pp. 510-522, 2015.
[10]L. Zhang, Y. Wang, Q. Wang, and S. Zhang, "Synchronization for Time-Delayed Coupling Complex Dynamic Networks with Different Dimensional Nodes Via Decentralized Dynamic Compensation Controllers," Asian Journal of Control, vol. 17, no. 2, pp. 664-674, 2015.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]

[25]K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov, Stability of time-delay systems. Springer Science & Business Media, 2003.
[26]W.-H. Chen, Z. Jiang, X. Lu, and S. Luo, "H∞ synchronization for complex dynamical networks with coupling delays using distributed impulsive control," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 17, pp. 111-127, 2015.
[27]Z. Tang, J. Feng, and Y. Zhao, "Global synchronization of nonlinear coupled complex dynamical networks with information exchanges at discrete-time," Neurocomputing, vol. 151, pp. 1486-1494, 2015.
[28]Y. Xu, W. Zhou, J. a. Fang, C. Xie, and D. Tong, "Finite-time synchronization of the complex dynamical network with non-derivative and derivative coupling," Neurocomputing, vol. 173, pp. 1356-1361, 2016.
[29]A. Kazemy and J. Cao, "Consecutive synchronization of a delayed complex dynamical network via distributed adaptive control approach," International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 16, no. 6, pp. 2656-2664, 2018.
[30]A. Kazemy and É. Gyurkovics, "Sliding mode synchronization of a delayed complex dynamical network in the presence of uncertainties and external disturbances," Transactions of the Institute of Measurement and Control, p. 0142331218805533, 2018.
[31]A. Kazemy and K. Shojaei, "Synchronization of Complex Dynamical Networks with Dynamical Behavior Links," Asian Journal of Control, 2020.
[32]Y. Liu, Z. Wang, J. Liang, and X. Liu, "Synchronization and state estimation for discrete-time complex networks with distributed delays," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, vol. 38, no. 5, pp. 1314-1325, 2008.
[33]R. A. Horn, R. A. Horn, and C. R. Johnson, Matrix analysis. Cambridge university press, 1990.
[34]W.-H. Chen, D. Wei, and X. Lu, "Global exponential synchronization of nonlinear time-delay Lur'e systems via delayed impulsive control," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, no. 9, pp. 3298-3312, 2014.
[35]A. Kazemy and M. Farrokhi, "Synchronization of chaotic Lur'e systems with state and transmission line time delay: a linear matrix inequality approach," Transactions of the Institute of Measurement and Control, vol. 39, no. 11, pp. 1703-1709, 2017.
[11]A. Kazemy, "Synchronization criteria for complex dynamical networks with state and coupling time-delays," Asian Journal of Control, vol. 19, no. 1, pp. 131-138, 2017.
[12]E. Gyurkovics, K. Kiss, and A. Kazemy, "Non-fragile exponential synchronization of delayed complex dynamical networks with transmission delay via sampled-data control," Journal of the Franklin Institute, vol. 355, no. 17, pp. 8934-8956, 2018.
[13]L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," Physical review letters, vol. 64, no. 8, p. 821, 1990.
[14]D. Ji, J. H. Park, W. Yoo, S. Won, and S. Lee, "Synchronization criterion for Lur'e type complex dynamical networks with time-varying delay," Physics Letters A, vol. 374, no. 10, pp. 1218-1227, 2010.
[15]B. Wang and Z.-H. Guan, "Chaos synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays," Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 11, no. 3, pp. 1925-1932, 2010.
[16]W. Yu, G. Chen, and M. Cao, "Consensus in directed networks of agents with nonlinear dynamics," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 56, no. 6, pp. 1436-1441, 2011.
[17]T. H. Lee, D. Ji, J. H. Park, and H. Y. Jung, "Decentralized guaranteed cost dynamic control for synchronization of a complex dynamical network with randomly switching topology," Applied Mathematics and Computation, vol. 219, no. 3, pp. 996-1010, 2012.
[18]M. Fang, "Synchronization for complex dynamical networks with time delay and discrete-time information," Applied Mathematics and Computation, vol. 258, pp. 1-11, 2015.
[19]L. Yi-ping and Z. Bi-feng, "Guaranteed Cost Synchronization of Complex Network Systems with Delay," Asian Journal of Control, vol. 17, no. 4, pp. 1274–1284, 2015.
[20]X. Yang, J. Cao, and J. Lu, "Synchronization of randomly coupled neural networks with Markovian jumping and time-delay," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 60, no. 2, pp. 363-376, 2013.
[21]H. Zhang, D. Gong, B. Chen, and Z. Liu, "Synchronization for coupled neural networks with interval delay: a novel augmented Lyapunov–Krasovskii functional method," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,, vol. 24, no. 1, pp. 58-70, 2013.
[22]C. Zheng and J. Cao, "Robust synchronization of coupled neural networks with mixed delays and uncertain parameters by intermittent pinning control," Neurocomputing, vol. 141, pp. 153-159, 2014.
[23]B. Huang, H. Zhang, D. Gong, and J. Wang, "Synchronization analysis for static neural networks with hybrid couplings and time delays," Neurocomputing, vol. 148, pp. 288-293, 2015.
[24]M. Kalpana, P. Balasubramaniam, and K. Ratnavelu, "Direct delay decomposition approach to synchronization of chaotic fuzzy cellular neural networks with discrete, unbounded distributed delays and Markovian jumping parameters," Applied Mathematics and Computation, vol. 254, pp. 291-304, 2015.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.3.7.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.3.53]