

## طراحی روش پریتی غیر خطی به منظور شناسایی و تشخیص عیب در سیستم‌های غیر خطی بر پایه رویکرد ورودی ناشناخته و مدل فازی TS

حامد طلوعی<sup>۱</sup>، مهدی علیاری شوره‌دلی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، [htolouei@mail.kntu.ac.ir](mailto:htolouei@mail.kntu.ac.ir)

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه مکترونیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، [aliyari@kntu.ac.ir](mailto:aliyari@kntu.ac.ir)

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۲۹

ویرایش: ۱۳۹۸/۰۵/۰۳

دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۲۷

**چکیده:** در این مقاله یک روش نوین تشخیص عیب برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی در حضور نویز اندازه‌گیری ارائه شده است. از آنجا که در کلاس معرفی شده ضرایب عیب و نویز اندازه‌گیری، غیرخطی بوده ابتدا مدل فازی غیرخطی TS برای ایجاد زیرسیستم بکار گرفته می‌شود. در گام بعد نداشتی جهت جداسازی نویز اندازه‌گیری و عیب در هر کدام از زیرسیستم‌های فازی ارائه می‌شود. سپس یک رویکرد ورودی ناشناخته به منظور تخمین متغیرهای حالت زیرسیستم‌های متأثر از نویز اندازه‌گیری طراحی می‌شود. به منظور تضمین پایداری مجانبی دینامیک خطای تخمین، روش پایداری لیاپانوف با به کارگیری نامعادلات ماتریسی غیرخطی ارائه می‌شود. همچنین با به کارگیری روش پریتی غیرخطی، تشخیص و شناسایی عیب انجام خواهد گرفت. در نهایت کارایی روش پیشنهادی در تشخیص و شناسایی عیب با شبیه‌سازی در سیستم قطار مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

**کلمات کلیدی:** شناسایی عیب، سیستم غیرخطی، نامعادلات ماتریسی غیرخطی، رویکرد ورودی ناشناخته، مدل فازی TS، نگاشت

### Design of nonlinear parity approach to fault detection and identification based on Takagi-Sugeno fuzzy model and unknown input observer in nonlinear systems

Hamed Tolouei, Mahdi Aliyari Shoorehdeli

**Abstract:** In this study, a novel fault detection scheme is developed for a class of nonlinear system in the presence of sensor noise. A nonlinear Takagi-Sugeno fuzzy model is implemented to create multiple models. While the T-S fuzzy model is used for only the nonlinear distribution matrix of the fault and measurement signals, a larger category of nonlinear systems is considered. Next, a mapping to decouple fault and measurement noise will be used in each fuzzy subsystems. Then, an unknown input observer is implemented to estimate the states of the subsystems subjected to measurement noise. To guarantee asymptotic stability of error dynamic, quadratic Lyapunov function using bilinear matrix inequality is introduced. Finally, the nonlinear parity approach will be used to generate residual to detect and estimate occurred fault(s) in the system. A simulation study on the train system is presented to demonstrate the efficiency of the proposed method.

**Keywords:** fault detection, nonlinear system, nonlinear matrix inequalities, unknown input observer, TS fuzzy model, mapping.

## ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر تشخیص و شناسایی عیب در صنایع هوایی، سیستم حمل‌ونقل، نیروگاه‌ها و فرآیندهای شیمیایی کاربرد بسیار وسیع و چشمگیری داشته است. بسیاری از سامانه‌های صنعتی می‌توانند تحت تأثیر تغییراتی همچون عیب فرآیند، تغییرات ناگهانی در نقاط کار سیستم، عیب حسگر سیستم و یا غیره قرار گیرند. برای غلبه بر چنین مشکلاتی و جلوگیری از بروز آسیب جدی در این سامانه‌ها بایستی این تغییرات حتی‌الامکان شناسایی شده و تصمیماتی در جهت توقفشان اتخاذ گردد. تشخیص به‌موقع عیب هنگامی که سیستم در محدوده مجاز کار می‌کند به جلوگیری از وقایع غیر نرمال و کاهش تلفات سیستم کمک شایانی می‌نماید. از این رو این مقوله برای پژوهشگران چه در حوزه دانشگاهی و چه در صنعت مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. عموماً سامانه‌های غیرخطی دارای پیچیدگی‌های ریاضیاتی بیشتری نسبت به سامانه‌های خطی می‌باشند. برای مثال خصوصیات چگونگی جمع آثار در سامانه‌های غیرخطی صادق نبوده و رفتارهایی از جمله زمان فرار محدود، داشتن چندین نقطه تعادل، داشتن چرخه حدی و آشوب در سامانه‌های غیرخطی محتمل است. به همین دلیل پیش‌بینی و کنترل این سامانه‌ها به مراتب سخت‌تر و پیچیده‌تر است که می‌تواند منجر به کاهش امنیت و قابلیت اطمینان این سامانه‌ها گردد. در دو دهه گذشته بسیاری از مطالعات صورت گرفته در زمینه تشخیص و شناسایی عیب چه در حوزه خطی و چه در حوزه غیرخطی شامل دودسته کلی روش‌های بر پایه مدل و روش‌های بر پایه داده می‌باشد. یکی از روش‌های مؤثر و پرکاربرد بر پایه مدل در حوزه تشخیص و شناسایی عیب، روش پرتی<sup>۱</sup> است که در [۱] معرفی گردید. در ابتدا این روش به‌طور گسترده در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان بکار گرفته شد. به تدریج این روش به سیستم‌های تغییرپذیر با زمان و در نهایت به سیستم‌های غیرخطی تعمیم داده شد. روش تشخیص عیب بر پایه روش پرتی به منظور تشخیص عیب در سیستم‌های خطی گسسته و تغییرپذیر با زمان در [۲]، [۳]، [۴] و [۵] مورد بررسی قرار گرفته است. هدف نویسندگان یافتن یک‌راه حل با حجم محاسبات بالا به‌صورت روی خط<sup>۲</sup> با به‌کارگیری تصویر فضای کرین<sup>۳</sup> و افزایش عمق پرتی جهت بالا بردن مقاومت بردار مانده تولیدی است. در [۶] روش پرتی به کمک روش مونت کارلو برای تشخیص عیب به فرم مربعی و شیب بکار گرفته شده است. روش تشخیص عیب بر پایه‌ی رویکرد ورودی ناشناخته مقاوم

برای سیستم حرارتی سیال سفینه در [۷] مطرح شده است. برای این منظور از مدل فضای حالت خطی‌سازی شده سیستم جهت تولید یک مجموعه از رویکردهای ورودی ناشناخته برای تولید بردار مانده مقاوم استفاده شده است. یکی از روش‌های پرکاربرد در حوزه پرتی، روش افزونگی تحلیلی<sup>۴</sup> است. این روش برای اولین بار در اوایل دهه ۱۹۸۰ در [۸] مورد بررسی قرار گرفت. با به‌کارگیری مدل خطی سیستم، روش افزونگی تحلیلی خطی فضای پوچی ماتریس رؤیت پذیری تعمیم‌یافته را برای تشکیل بردار مانده استخراج می‌نماید. روش یادشده در آن زمان تنها برای سامانه‌های خطی قابل استفاده بود. از آنجا که در عمل بسیاری از سامانه‌های صنعتی پرکاربرد غیرخطی بوده و این‌گونه سامانه‌ها پس از خطی‌سازی فاصله زیادی با سیستم اصلی پیدا می‌کنند، لذا این روش برای چنین سامانه‌هایی قابل استفاده نمی‌باشد. روش پرتی به‌منظور تشخیص عیب در سیستم‌های دوخطی<sup>۵</sup> در [۹] و [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. به‌نوعی روش پیشنهادی، تعمیمی از روش پرتی خطی برای سیستم‌های دوخطی است. روش پرتی جهت تولید مانده به‌منظور تشخیص عیب در سیستم‌های غیرخطی به کمک نامعادلات ماتریسی خطی در [۱۱] معرفی شده است. به کمک روش پیشنهادی در [۱۱] سیگنال مانده تخمینی از عیب اتفاق افتاده در سیستم یادشده خواهد بود. علاوه بر روش پرتی، روش‌های بر پایه رویکرد و یا ترکیب این روش‌ها با روش پرتی نیز سهم بسزایی در مطالعات صورت گرفته در چند دهه اخیر داشته‌اند. کاربرد تشخیص و شناسایی عیب در سیستم توربین گاز با به‌کارگیری خوشه‌بندی سلسله مراتبی و شبکه‌های عصبی خودتنظیم در [۱۲] مورد بررسی قرار گرفته است. پیشرفت قابل توجه در تثبیت عملکرد سیستم گذار از نوآوری روش یادشده می‌باشد. به‌طور کلی ردیابی و جداسازی عیب امری اجتناب‌ناپذیر در سیستم‌های صنعتی پرکاربرد می‌باشد. از آنجا که اکثر فرآیندهای صنعتی تحت تأثیر عوامل مختلفی از قبیل عیب، اغتشاش، نامعینی و نویزهای مختلف قرار می‌گیرند، جداسازی عیب از دیگر عوامل بسیار حائز اهمیت است. در [۱۳] یک فرآیند دینامیکی غیرخطی که در معرض عیب تصادفی قرار گرفته، تشریح شده است. هدف طراحی یک تخمین‌زننده عیب متغیر با زمان است که دارای قابلیت عدم حساسیت به اغتشاش و بیشترین حساسیت به عیب اتفاق افتاده در سیستم باشد. ضرایب تخمین‌زننده عیب به کمک حل نامعادلات ماتریسی خطی به‌دست آمده است. روش افزونگی تحلیلی غیرخطی برای کلاسی از سامانه‌های غیرخطی در [۱۴] بکار گرفته شده است. مانده طراحی شده به‌منظور تشخیص عیب در [۱۴] نسبت به تغییرات ورودی سیستم حساس بوده که

Analytical redundancy<sup>۴</sup>  
Bilinear systems<sup>۵</sup>

Parity approach<sup>۱</sup>  
Online<sup>۲</sup>  
Krein space<sup>۳</sup>

معلوم  $G(x, u)$  نیز یک تابع لیبشیتز [۲۲] و [۲۳] با ثابت لیبشیتز  $\gamma_0$  با شرط زیر فرض می‌شود:

$$\|G(x_1, u) - G(x_2, u)\| \leq \gamma_0 \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in R^n \quad (2)$$

همچنین توابع  $F(x, u), \lambda(x, u)$  ماتریس‌های توزیع غیرخطی عیب فرآیند و نویز اندازه‌گیری با رتبه ستونی کامل و نرم محدود با کران‌های ثابت مثبت به فرم زیر می‌باشند:

$$\|F(x, u)\| \leq \gamma_1, \quad \|\lambda(x, u)\| \leq \gamma_2 \quad (3)$$

مدل معرفی شده، بسیاری از سامانه‌های غیرخطی پرکاربرد در صنعت که در معرض عیوب فرآیند و نویز اندازه‌گیری قرار می‌گیرند را شامل می‌شود. در این زمینه می‌توان سامانه‌های مکانیکی، سامانه‌های حرارتی نیروگاهی، فرآیندهای شیمیایی را نام برد [۱۲]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]. تشخیص و شناسایی عیب در این گونه سامانه‌ها به دلیل کاربرد فراوان در صنعت از اهمیت زیادی برخوردار است.

## ۲-۱- معرفی مدل فازی TS جهت ایجاد مدل چندگانه

در این زیربخش، مدل فازی TS به عنوان یک مجموعه از مدل‌های محلی خطی برای تخمین سیستم غیرخطی یاد شده با معادلات داده شده در (۱) بکار گرفته می‌شود [۲۴]. معادلات فضای حالت سیستم برای قانون  $i$  ام به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Rule } i: \\ \text{IF } z_1(x, u) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(x, u) \text{ is } M_{ip} \\ \text{THEN } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + G(x, u) + F^i f_c(t) \\ y(t) = Cx(t) + \lambda^i n(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه (۴) تعداد قوانین استنتاج فازی و  $M_{ip}$  مجموعه فازی و  $z(x, u) = [z_1(x, u), \dots, z_p(x, u)]$  بردار مقدم فازی است. ماتریس‌های  $F^i, \lambda^i$  ماتریس‌های ثابت بوده که برای هر  $i$  نشان‌دهنده ماتریس وزنی عیب و نویز اندازه‌گیری است. بنابراین خروجی نهایی سیستم فازی TS به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) + \\ &G(x, u) + \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) F^i f_c(t) \\ y(t) &= Cx(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \lambda^i n(t) \end{aligned} \quad (5)$$

توابع وزنی در رابطه (۵) دارای خصوصیات زیر می‌باشند:

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) = 1 \quad (6)$$

این از معایب روش پیشنهادی است. در [۱۵] و [۱۶] از طریق نگاشت‌های بکار گرفته شده در معادله حالت و خروجی، سیستم اصلی به دو زیرسیستم شامل اغتشاش و عیب تفکیک شده و سپس به تشخیص عیب پرداخته می‌شود. در [۱۷]، [۱۸]، [۱۹] و [۲۰] به تخمین عیب در حضور تأخیر زمانی نامعین، غیرخطی‌گری لیبشیتز و تأخیر متغیر با زمان پرداخته شده است.

بدین ترتیب با بررسی مطالعات صورت گرفته توسط محققین تاکنون، به دلیل وجود نویز اندازه‌گیری در معادلات خروجی سیستم و مشتقات مرتبه بالا در روش پرتی غیرخطی، تحقق این روش و پیاده‌سازی آن امکان‌پذیر نبوده است. با بکارگیری روش پیشنهادی در این مقاله به دلیل جداسازی کامل زیرسیستم‌های شامل نویز و عیب از یکدیگر تحقق روش پرتی غیرخطی کاملاً میسر خواهد بود. همچنین بر خلاف روش پیشنهادی در [۱۴] سیگنال مانده طراحی شده تنها دارای حساسیت به وقوع عیب خواهد بود. این دو خصوصیت یاد شده، نوآوری این مقاله نسبت به مطالعات صورت گرفته در حوزه شناسایی و تشخیص عیب به کمک روش پرتی است.

مسئله تشخیص و شناسایی عیب بر پایه روش پرتی غیرخطی در سامانه‌های غیرخطی که در معرض عیب فرآیند/محرک و همچنین نویز اندازه‌گیری قرار گرفته‌اند، در این مقاله مطرح گردیده است. بدین ترتیب در بخش دوم به تعریف و فرمول‌بندی مسئله، ارائه مدل فازی TS جهت ایجاد مدل چندگانه، جداسازی دو زیرسیستم شامل عیب فرآیند/محرک و نویز اندازه‌گیری به کمک نگاشت پیشنهادی و طراحی رویکرد ورودی ناشناخته غیرخطی به منظور تخمین متغیرهای حالت پرداخته می‌شود. مسئله تشخیص و شناسایی عیب بر پایه روش پرتی غیرخطی در بخش سوم عنوان خواهد شد. در بخش چهارم به ارائه مثال شبیه‌سازی به منظور ارزیابی روش بکار گرفته شده پرداخته می‌شود. در نهایت در بخش پنجم جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مطرح خواهد گردید.

## ۲- تعریف و فرمول‌بندی مسئله

سیستم غیرخطی با تحقق فضای حالت زیر را در نظر بگیرد [۱۵]، [۱۶] و [۲۱]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \\ &G(x, u) + F(x, u) f_c(t) \\ y(t) &= Cx(t) + \lambda(x, u) n(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $x(t) \in R^n$  بردار متغیرهای حالت،  $u(t) \in R^m$  ورودی سیستم،  $y(t) \in R^n$  خروجی سیستم،  $f_c(t) \in R^{n_c}$  عیب محرک/فرآیند،  $n(t) \in R^{n_s}$  بردار نویز اندازه‌گیری و ماتریس‌های  $A, B, C$  ماتریس‌های ثابت و با ابعاد مناسب می‌باشند. تابع غیرخطی

$u_2 \in R^{n_y \times (n_y - n_s)}, \Sigma_2 \in R^{n_s \times n_s}$   
بنابراین رابطه (۴) برای هر زیرسیستم می‌تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$y(t) = Cx(t) + U \Sigma_{\lambda} V^T n(t) \quad (10)$$

چنانچه رابطه (۱۰) از سمت چپ در  $U^T$  ضرب شود خواهیم داشت:

$$U^T y(t) = \begin{bmatrix} u_1^T y(t) \\ u_2^T y(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} Cx(t) + \begin{bmatrix} \Sigma_2 \\ 0 \end{bmatrix} V^T n(t) \quad (11)$$

حال با به کارگیری روش SVD برای ماتریس  $F^i \in R^{n \times n_c}$  خواهیم داشت:

$$F^i = Q \Sigma_F R^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ & \Sigma_1 \end{bmatrix} R^T \quad (12)$$

$Q \in R^{n \times n}, \Sigma_F \in R^{n \times n_c}$   
 $R^T \in R^{n_c \times n_c}, q_1 \in R^{n \times (n-n_c)}$   
 $q_2 \in R^{n \times n_c}, \Sigma_1 \in R^{n_c \times n_c}$

حال با تعریف:

$$\bar{x} \triangleq Q^T x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = Q \bar{x} \quad (13)$$

رابطه (۴) برای هر زیرسیستم به فرم زیر در خواهد آمد:

$$\dot{\bar{x}} = Q^T A Q \bar{x}(t) + Q^T B u(t) + Q^T G(Q \bar{x}, u) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_1 \end{bmatrix} R^T f_c(t) \quad (14)$$

حال با جای گذاری رابطه (۱۳) در (۱۱) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{bmatrix} = U^T C Q \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} \Sigma_2 \\ 0 \end{bmatrix} V^T n(t) \quad (15)$$

در رابطه (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, Q^T B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$U^T C Q = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب اثبات تکمیل است. ■

پس از اعمال تبدیلات معرفی شده در لم ۱، هر زیرسیستم داده شده با معادلات (۴) به دو زیرسیستم با معادلات زیر تبدیل می‌شود.

**IF**  $z_1(x, u)$  is  $M_{i1}$  and ... and  $z_p(x, u)$  is  $M_{ip}$  (۱۷)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}^i \bar{x}_1(t) + A_{12}^i \bar{x}_2(t) + B_1^i u(t) \\ &\quad + G_1^i(Q \bar{x}, u) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= A_{21}^i \bar{x}_1(t) + A_{22}^i \bar{x}_2(t) + B_2^i u(t) + \\ &\quad G_2^i(Q \bar{x}, u) + \sum_1^i R^i f_c(t) \\ \bar{y}_1 &= C_{11}^i \bar{x}_1(t) + C_{12}^i \bar{x}_2(t) + \sum_2^i V^i n(t) \\ \bar{y}_2 &= C_{21}^i \bar{x}_1(t) + C_{22}^i \bar{x}_2(t) \end{aligned}$$

در رابطه (۱۷)  $\bar{x}_1 \in R^{n-n_c}, \bar{x}_2 \in R^{n_c}$  مربوط به متغیرهای حالت

زیرسیستم اول و دوم و همچنین  $y_1 \in R^{n_s}, y_2 \in R^{n_y - n_s}$  مربوط

به خروجی‌های زیرسیستم اول و دوم است. برای سادگی کافی است

ماتریس  $f^i \triangleq \sum_1^i R^i$  و  $l^i \triangleq \sum_2^i V^i$  فرض شود. همچنین

$n_y + n_c > n + n_s$  و  $n_y \geq n_s + n_c$  فرض می‌شود. با توجه به

$$0 \leq h_i(z(x, u)) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

اثبات می‌شود مدل معرفی شده در (۵) توانایی تخمین هر سیستم غیرخطی

با داشتن شرایط موجود را دارد. با به کارگیری این مدل ضرایب عیب

فرآیند و نویز اندازه‌گیری که ماتریس‌های غیرخطی بوده تبدیل به

ماتریس‌های ثابت خطی شده اما کماکان معادلات سیستم غیرخطی

خواهد بود. با توجه به مدل‌های محلی به دست آمده در هر قانون استنتاج

فازی، در بخش بعدی به معرفی نگاشت پیشنهادی در این مقاله برای

جداسازی عیب فرآیند و نویز اندازه‌گیری سیستم می‌پردازیم.

## ۲-۲- دکوپله سازی زیرسیستم متأثر از عیب و

### زیرسیستم در معرض نویز اندازه‌گیری از

#### یکدیگر

به منظور استفاده از روش پیشنهادی در این مقاله جهت تشخیص عیب در

سیستم با معادلات داده شده در (۵) لازم است با به کارگیری یک نگاشت

به جداسازی زیرسیستم‌های شامل عیب و نویز اندازه‌گیری پردازیم [۱۵]

و [۲۵]. در این صورت زیرسیستم‌های شامل نویز اندازه‌گیری و عیب

فرآیند/محرک به طور کامل از یکدیگر تفکیک می‌شوند. بدین ترتیب با

استفاده از روش رویکرد ورودی ناشناخته به تخمین متغیرهای حالت

سیستم پرداخته شده و در نهایت با به کارگیری روش پرتی غیرخطی به

شناسایی عیب موجود در سیستم پرداخته خواهد شد.

**لم ۱:** همواره یک تبدیل وجود دارد که سیستم با معادلات داده شده در

(۴) را به زیرسیستم‌های داده شده به فرم زیر دکوپله کند

به طوری که  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}^i, \bar{C}, \bar{l}^i$  دارای ساختار زیر باشند:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \\ & f^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} l^i \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (7)$$

در رابطه (۷) هر کدام از ماتریس‌های داده شده دارای ابعاد زیر می‌باشند.

(۸)

$$\begin{aligned} A_{11} &\in R^{(n-n_c) \times (n-n_c)}, A_{12} \in R^{(n-n_c) \times n_c} \\ A_{21} &\in R^{n_c \times (n-n_c)}, A_{22} \in R^{n_c \times n_c} \\ B_1 &\in R^{(n-n_c) \times m}, B_2 \in R^{n_c \times m} \\ f^i &\in R^{n_c \times n_c}, C_{11} \in R^{n_s \times (n-n_c)}, C_{12} \in R^{n_s \times n_c} \\ C_{21} &\in R^{(n_y - n_s) \times (n-n_c)} \\ C_{22} &\in R^{(n_y - n_s) \times n_c}, l^i \in R^{n_s \times n_s} \end{aligned}$$

**اثبات:** با به کارگیری روش SVD ماتریس  $\lambda^i \in R^{n_y \times n_s}$  می‌تواند به

فرم زیر نوشته شود:

$$\lambda^i = U \sum_{\lambda} V^T = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} \Sigma_2 \\ 0 & \end{bmatrix} V^T \quad (9)$$

$U \in R^{n_y \times n_y}, \sum_{\lambda} \in R^{n_y \times n_s},$   
 $V^T \in R^{n_s \times n_s}, u_1 \in R^{n_y \times n_s},$

$$\begin{bmatrix} C_{21}^i \\ M_1^i \end{bmatrix}^+ C_{22}^i \bar{x}_2(t)$$

از آنجا که  $C_{21}^i C_{21}^i + I_{n-n_c} = I_{n-n_c}$  رابطه (۲۳) منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$\bar{x}_1(t) = C_{21}^i + (\bar{y}_2 - C_{22}^i \bar{x}_2(t)) \quad (24)$$

$$M_1^i \bar{y}_2 = M_1^i C_{21}^i \bar{x}_1(t) + M_1^i C_{22}^i \bar{x}_2(t)$$

با جای گذاری رابطه (۲۴) در (۱۷)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\hat{x}}_2 = \tilde{A}_2^i \bar{x}_2(t) + \tilde{B}_2^i \tilde{u}(t) + G_2^i(Q\bar{x}, u) + f^i f_c(t) \quad (25)$$

در رابطه (۲۵)  $\tilde{A}_2^i = A_{22}^i - A_{21}^i C_{21}^i + C_{22}^i$  و  $\tilde{B}_2^i =$

$[B_2^i A_{21}^i C_{21}^i +]$  و  $\tilde{u} = [u^T \bar{y}_2^T]^T$  است. با توجه به رابطه (۲۴)

رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$M_1^i (I_{n_y-n_s} - C_{21}^i C_{21}^i +) \bar{y}_2 = \quad (26)$$

$$M_1^i (I_{n_y-n_s} - C_{21}^i C_{21}^i +) C_{22}^i \bar{x}_2$$

در نهایت با تعریف  $\tilde{y}_2 = M_1^i (I_{n_y-n_s} - C_{21}^i C_{21}^i +) \bar{y}_2$  و

$$\tilde{y}_2 = \tilde{C}_2^i \bar{x}_2 \quad \tilde{C}_2^i = M_1^i (I_{n_y-n_s} - C_{21}^i C_{21}^i +) C_{22}^i$$

حاصل می‌شود.

### ۲-۳- طراحی رویکرد ورودی ناشناخته غیر خطی

در این بخش به معرفی و طراحی رویکرد ورودی ناشناخته برای تخمین متغیرهای حالت زیرسیستم بدون عیب با معادلات داده شده در (۲۱) می‌پردازیم. بدین منظور  $\bar{x}_1(t)$  در حضور نویز اندازه گیری تخمین زده خواهد شد. با به کارگیری این روش پایداری مجانبی خطای سیستم تضمین خواهد شد. پس از تخمین  $\bar{x}_1(t)$  رابطه  $\hat{x}_2(t) = C_{22}^i + (\bar{y}_2(t) - C_{21}^i \hat{x}_1(t))$  نیز به طور هم‌زمان قابل محاسبه بوده و لذا متغیرهای حالت زیرسیستم‌های متأثر از عیب نیز تخمین زده خواهند شد. تحقق فضای حالت رویکرد ورودی ناشناخته به صورت زیر است:

$$IF z_1(x, u) \text{ is } M_{11} \text{ and ... and } z_p(x, u) \text{ is } M_{ip} \quad (27)$$

$$THEN: \begin{cases} \dot{z}(t) = F^i z(t) + J^i \tilde{u}(t) + g_1^i \tilde{y}_1(t) + W^i G_1^i(Q\hat{x}, u) \\ \hat{x}_1(t) = z(t) - g_2^i \tilde{y}_1(t) \end{cases}$$

در رابطه (۲۷) ماتریس‌های  $F^i, J^i, g_1^i, W^i, g_2^i$  ماتریس‌های ثابت و با ابعاد مناسب بوده که بایستی شرایط زیر را برآورده کنند.

$$g_2^i l^i = 0 \Rightarrow g_2^i \in nullspace(l^i), \quad (28)$$

$$F^i g_2^i l^i + g_1^i l^i = 0 \Rightarrow g_1^i \in nullspace(l^i)$$

$$W^i = I + g_2^i \tilde{C}_1^i, \quad J^i = g_2^i \tilde{C}_1^i \tilde{B}_1^i + \tilde{B}_1^i$$

$$F^i + F^i g_2^i \tilde{C}_1^i + g_1^i \tilde{C}_1^i - g_2^i \tilde{C}_1^i \tilde{A}_1^i - \tilde{A}_1^i = 0$$

متغیر حالت  $z(t) \in R^{n-n_c}$  رویکرد ورودی ناشناخته بوده که از روی آن  $\hat{x}_1(t)$  تخمین زده می‌شود. شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی خطای رویکرد ورودی ناشناخته با معادلات داده شده در (۲۷) در ادامه خواهد آمد.

آنکه بسیاری از سامانه‌های عملی پر کاربرد از فرض یاد شده تبعیت می‌کنند لذا این فرض، محدود کننده نیست.

از آنجا که  $C_{22}^i \in R^{(n_y-n_s) \times n_c}$  با انتخاب ماتریس  $M_2^i \in$

$R^{(n_y-n_s-n_c) \times (n_y-n_s)}$  ماتریس ناویژه  $N_2^i$  با ابعاد  $(n_y -$

$n_s) \times (n_y - n_s)$  به فرم زیر وجود خواهد داشت بطوری که

$C_{22}^i + \in R^{(n_c) \times (n_y-n_s)}$  معکوس مجازی ماتریس  $C_{22}^i$  بوده و

$$C_{22}^i + = (C_{22}^i T C_{22}^i)^{-1} C_{22}^i T \text{ بصورت } C_{22}^i + \text{ تعریف می‌شود.}$$

$$N_2^i = \begin{bmatrix} C_{22}^i + \\ M_2^i \end{bmatrix} \quad (18)$$

چنانچه ماتریس  $N_2^i$  از سمت چپ در معادله خروجی زیرسیستم ضرب شود خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} C_{22}^i + \\ M_2^i \end{bmatrix} \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} C_{22}^i + \\ M_2^i \end{bmatrix} C_{21}^i \bar{x}_1(t) + \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} C_{22}^i + \\ M_2^i \end{bmatrix} C_{22}^i \bar{x}_2(t)$$

از آنجا که  $C_{22}^i C_{22}^i + = I_{n_c}$  است، رابطه (۱۹) منجر به رابطه زیر

می‌گردد:

$$\bar{x}_2(t) = C_{22}^i + (\bar{y}_2 - C_{21}^i \bar{x}_1(t)) \quad (20)$$

$$M_2^i \bar{y}_2 = M_2^i C_{21}^i \bar{x}_1(t) + M_2^i C_{22}^i \bar{x}_2(t)$$

با جای گذاری رابطه (۲۰) در (۱۷)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \tilde{A}_1^i \bar{x}_1(t) + \tilde{B}_1^i \tilde{u}(t) + G_1^i(Q\bar{x}, u) \quad (21)$$

$$\tilde{y}_1(t) = \tilde{C}_1^i \bar{x}_1(t) + l^i n(t)$$

در رابطه (۲۱)  $\tilde{A}_1^i = A_{11}^i - A_{12}^i C_{22}^i + C_{21}^i$  و  $\tilde{B}_1^i =$

$[B_1^i A_{12}^i C_{22}^i +]$  و  $\tilde{u} = [u^T \bar{y}_2^T]^T$  و  $\tilde{y}_1 = \bar{y}_1 - C_{12}^i C_{22}^i + \bar{y}_2$

و  $\tilde{C}_1^i = C_{11}^i - C_{12}^i C_{22}^i + C_{21}^i$  است.

به طور مشابه از آنجا که  $C_{21}^i \in R^{(n_y-n_s) \times (n-n_c)}$  با انتخاب

ماتریس  $M_1^i \in R^{(n_y-n_s-n+n_c) \times (n_y-n_s)}$  ناویژه  $N_1^i$  با

ابعاد  $(n_y - n_s) \times (n_y - n_s)$  به فرم زیر وجود خواهد داشت

بطوری که  $C_{21}^i + \in R^{(n-n_c) \times (n_y-n_s)}$  معکوس مجازی ماتریس

$C_{21}^i$  بوده و بصورت  $C_{21}^i + = (C_{21}^i T C_{21}^i)^{-1} C_{21}^i T$  تعریف می

شود.

$$N_1^i = \begin{bmatrix} C_{21}^i + \\ M_1^i \end{bmatrix} \quad (22)$$

چنانچه ماتریس  $N_1^i$  از سمت چپ در معادله خروجی زیرسیستم دوم

ضرب شود خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} C_{21}^i + \\ M_1^i \end{bmatrix} \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} C_{21}^i + \\ M_1^i \end{bmatrix} C_{21}^i \bar{x}_1(t) + \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\dot{e}_1^T e_1 + \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \quad (35) \\ &= \left( 2\dot{e}_1^T (C_{22}^i + C_{21}^i)^T (C_{22}^i + C_{21}^i) e_1 \right) + \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( 2e_1^T F^{iT} e_1 + \tilde{G}_1^{iT} W^{iT} e_1 + \right. \\ &= \left. e_1^T W^i \tilde{G}_1^i + 2\dot{e}_1^T (C_{22}^i + C_{21}^i)^T (C_{22}^i + C_{21}^i) e_1 \right) \end{aligned}$$

با به کارگیری لم ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &< \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( 2e_1^T F^{iT} e_1 + \right. \quad (36) \\ &= \left. \epsilon^{-1} \tilde{G}_1^{iT} \tilde{G}_1^i + \epsilon e_1^T W^i W^{iT} e_1 + \right. \\ &= \left. 2\bar{\sigma} (C_{22}^i + C_{21}^i)^T (C_{22}^i + C_{21}^i) \dot{e}_1^T e_1 \right) \end{aligned}$$

در رابطه (۳۶)  $\bar{\sigma} (C_{22}^i + C_{21}^i)^T (C_{22}^i + C_{21}^i)$  بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس  $(C_{22}^i + C_{21}^i)^T (C_{22}^i + C_{21}^i)$  است. با به کارگیری رابطه (۲) و (۳۶) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &< \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( \left( 1 + \right. \quad (37) \\ &= \left. \bar{\sigma} (C_{22}^i + C_{21}^i)^T (C_{22}^i + C_{21}^i) \right) \left( 2e_1^T F^{iT} e_1 + \right. \\ &= \left. \epsilon^{-1} \gamma_0^2 e_1^T e_1 + \epsilon e_1^T W^i W^{iT} e_1 \right) \end{aligned}$$

شرط پایداری مجانبی برای دینامیک خطای رویکرد آن است که مشتق تابع لیپانوف منفی معین باشد لذا از آنجا که عبارت  $\left( 1 + \bar{\sigma} (C_{22}^i + C_{21}^i)^T (C_{22}^i + C_{21}^i) \right)$  یک مقدار مثبت بوده کافی است داشته باشیم:

$$2F^{iT} + \epsilon^{-1} \gamma_0^2 I_{n-n_c} + \epsilon W^i W^{iT} < 0 \quad (38)$$

با تعریف  $X_{12} = W^{iT}$  و  $X \triangleq 2F^{iT} + \epsilon^{-1} \gamma_0^2 I_{n-n_c}$  و با به کارگیری اصل مکمل شور، نامعادله ماتریسی خطی داده شده در (۳۰) حاصل می‌شود.

بدین ترتیب اثبات تکمیل است. ■

### ۳- طراحی روش تشخیص و شناسایی عیب با به کارگیری روش پرتی غیرخطی

در این بخش روش پرتی غیرخطی برای تولید مانده جهت تشخیص و شناسایی عیب در سیستم غیرخطی با کلاس داده شده در (۴) معرفی می‌گردد. برای این منظور زیرسیستم‌های متأثر از عیب را با معادلات داده شده زیر نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} IF \ z_1(x, u) \text{ is } M_{i1} \text{ and ... and } z_p(x, u) \text{ is } M_{ip} \quad (39) \\ \begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = \tilde{A}_2^i \hat{x}_2(t) + \tilde{B}_2^i \tilde{u}(t) + G_2^i(Q\hat{x}, u) + f^i f_c(t) \\ \hat{y}_2 = \tilde{C}_2^i \hat{x}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

لم ۲: برای هر ماتریس  $X, Y$  با ابعاد دلخواه، خاصیت زیر برای هر ثابت اسکالر  $\epsilon > 0$  برقرار است [۲۶]:

$$X^T Y + Y^T X < \epsilon X^T X + \epsilon^{-1} Y^T Y \quad (29)$$

قضیه ۱: سیستم غیرخطی با معادلات داده شده در (۲۱) و ثابت لیشیتز  $\gamma_0$  و ساختار رویکرد ورودی ناشناخته در (۲۷) و (۲۸) در نظر گرفته می‌شود. دینامیک خطای رویکرد برای هر  $\epsilon > 0$  پایداری مجانبی است به طوری که نامعادله ماتریسی خطی زیر شرط لازم را داشته باشد.

$$\begin{bmatrix} -\epsilon^{-1} I & X_{12} \\ X_{12}^T & X \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

در معادله (۳۰)  $X = 2F^{iT} + \epsilon^{-1} \gamma_0^2 I$  و  $X_{12} = W^{iT}$  می‌باشند.

اثبات: بر اساس دکوپله‌سازی سیستم اصلی به دو زیرسیستم و بر اساس خطاهای  $e_2 = \hat{x}_2(t) - \bar{x}_2(t)$  و  $e_1 = \hat{x}_1(t) - \bar{x}_1(t)$  لیپانوف مثبت معین  $V = e_1^T e_1 + e_2^T e_2$  معرفی می‌گردد. بنابراین با توجه به معادلات (۲۱) و (۲۷) خواهیم داشت:

$$\dot{e}_1(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) K(t), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} K(t) &= F^i e_1(t) + (J^i - g_2^i \tilde{C}_1^i \tilde{B}_1^i - \tilde{B}_1^i) \tilde{u}(t) + \\ &= (F^i g_2^i l^i + g_1^i l^i) n(t) - g_2^i l^i n(t) + \\ &= W^i G_1^i(Q\hat{x}, u) - g_2^i \tilde{C}_1^i G_1^i(Q\bar{x}, u) - \\ &= G_1^i(Q\bar{x}, u) + (F^i + F^i g_2^i \tilde{C}_1^i + g_1^i \tilde{C}_1^i - \\ &= g_2^i \tilde{C}_1^i \tilde{A}_1^i - \tilde{A}_1^i) x_1(t) \end{aligned}$$

با به کارگیری معادله (۲۸) داریم:

$$\dot{e}_1(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( F^i e_1(t) + \right. \quad (32)$$

$$\begin{aligned} &= \left. W^i (G_1^i(Q\hat{x}, u) - G_1^i(Q\bar{x}, u)) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) (F^i e_1(t) + W^i \tilde{G}_1^i) \end{aligned}$$

با گرفتن مشتق زمانی از تابع لیپانوف خواهیم داشت:

$$\dot{V} = 2\dot{e}_1^T e_1 + 2\dot{e}_2^T e_2 \quad (33)$$

دینامیک خطای زیرسیستم‌های متأثر از عیب عبارت است از:

$$e_2(t) = \hat{x}_2(t) - \bar{x}_2(t) \Rightarrow \quad (34)$$

$$\begin{aligned} e_2(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( C_{22}^i + (\bar{y}_2(t) - \right. \\ &= \left. C_{21}^i \hat{x}_1(t)) - C_{22}^i + (\bar{y}_2(t) - C_{21}^i \bar{x}_1(t)) \right) \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$e_2(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( -C_{22}^i + C_{21}^i (\hat{x}_1(t) - \bar{x}_1(t)) \right) \Rightarrow$$

$$e_2(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( -C_{22}^i + C_{21}^i e_1(t) \right) \Rightarrow$$

$$\dot{e}_2(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) \left( -C_{22}^i + C_{21}^i \dot{e}_1(t) \right)$$

با جای گذاری معادله (۳۴) در (۳۳) خواهیم داشت:

$$y_s = \begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \\ \ddot{\hat{y}}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$H_{us}^i u_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_2^i \tilde{B}_2^i \tilde{u} + \tilde{C}_2^i \tilde{G}_2^i \\ \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i \tilde{B}_2^i \tilde{u} + \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i \tilde{G}_2^i + \tilde{C}_2^i \tilde{B}_2^i \tilde{u} + \tilde{C}_2^i \tilde{G}_2^i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

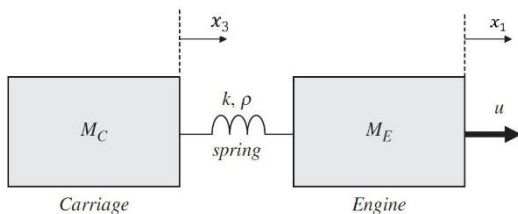
در رابطه (43)،  $\hat{G}_2^i \triangleq G_2^i(Q\hat{x}, u)$  است.

**نکته ۱:** ماتریس  $H_{fs}^i f_s$  برای سیستم با معادلات داده شده در (39) به صورت زیر است.

$$H_{fs}^i f_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_2^i f^i f_c(t) \\ \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i f^i f_c(t) + \tilde{C}_2^i f^i f_c(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (44)$$

#### ۴- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی به بررسی وقوع عیب در سیستم غیرخطی قطار پرداخته می‌شود. شماتیک این سیستم در شکل ۱ نمایش داده شده است. این سیستم شامل موتور  $E$  و بار  $C$  است که توسط یک فنر با ضریب سختی  $k, \rho$  برای حالت خطی و غیرخطی به یکدیگر متصل شده‌اند. جرم موتور و جرم بار به ترتیب با  $M_C$  و  $M_E$  نشان داده شده است. قطار توسط نیروی  $u$  که بنا به دلایل عملی می‌تواند متأثر از عیب‌های مختلف باشد حرکت داده می‌شود. در سیستم یادشده، اختلالات در کشش فنر به‌عنوان عیب رخ داده شده در سیستم مدل شده است. تحقق فضای حالت سیستم که در معرض عیب‌های ممکن قرار گرفته است به صورت زیر خواهد بود [۱۵].



شکل ۱: شماتیک کلی سیستم قطار معرفی شده در [۱۵]

از آنجا که ماتریس  $f^i$  دارای رتبه ستونی کامل بوده می‌توان به کمک رابطه زیر به تخمین عیب اتفاق افتاده در سیستم پرداخت.

$$\hat{x}_2 = \tilde{A}_2^i \hat{x}_2(t) + \tilde{B}_2^i \tilde{u}(t) + G_2^i(Q\hat{x}, u) + f^i f_c(t) \Rightarrow$$

$$\hat{f}_c(t) = (f^{iT} f_i)^{-1} f^{iT} (\hat{x}_2 - \tilde{A}_2^i \hat{x}_2(t) - \tilde{B}_2^i \tilde{u}(t) - G_2^i(Q\hat{x}, u))$$

همچنین می‌توان به کمک روش پرتی به تشخیص عیب احتمالی در سیستم پرداخت. از آنجا که با به کارگیری نگاشت یادشده زیرسیستم‌های متأثر از نویز اندازه‌گیری و عیب کاملاً از یکدیگر تفکیک شده‌اند، لذا قادر به استفاده از روش پرتی جهت تشکیل مانده خواهیم بود، در غیر این صورت به دلیل تقویت نویز فرکانس بالا در مشتقات مرتبه بالا امکان استفاده از این روش جهت تشکیل مانده وجود نداشت.

$$IF z_1(x, u) \text{ is } M_{i1} \text{ and ... and } z_p(x, u) \text{ is } M_{ip} \quad (41)$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{C}_2^i \tilde{x}_2$$

$$\dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i \tilde{x}_2 + \tilde{C}_2^i \tilde{B}_2^i \tilde{u} + \tilde{C}_2^i G_2^i + \tilde{C}_2^i f^i f_c(t)$$

$$\ddot{\tilde{y}}_2 = \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i{}^2 \tilde{x}_2 + \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i \tilde{B}_2^i \tilde{u} + \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i G_2^i + \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i f^i f_c(t) + \tilde{C}_2^i \tilde{B}_2^i \tilde{u} + \tilde{C}_2^i G_2^i + \tilde{C}_2^i f^i f_c(t)$$

در رابطه (41)،  $\hat{G}_2^i$  مشتق نسبت به زمان بوده که طبق رابطه  $\hat{G}_2^i = \frac{\partial G_2^i}{\partial \tilde{x}} \tilde{x} + \frac{\partial G_2^i}{\partial u} \tilde{u}$  مرتبه تعداد مشتقات خروجی برای یافتن بردار مانده مینیمال برابر با تعداد متغیرهای حالت و یا همان  $n_c$  است. با مشتق‌گیری از خروجی سیستم با معادلات داده شده در (39)، رابطه  $y_s = H_{os}^i \hat{x}_2 + H_{us}^i u_s + H_{fs}^i f_s$  حاصل می‌شود. برای محاسبه بردار پرتی کافی است فضای پوچی ماتریس  $H_{os}^i \hat{x}_2$  که به صورت زیر تعریف می‌شود محاسبه شده و در نهایت بردار مانده محاسبه شود.

$$H_{os}^i \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2^i \\ \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i \\ \tilde{C}_2^i \tilde{A}_2^i{}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \hat{x}_2 \Rightarrow$$

$$R = \sum_{i=1}^r h_i(z(x, u)) (v_s^i (y_s - H_{us}^i u_s))$$

در حالت وقوع عیب، بردار مانده طراحی شده مخالف صفر و در صورتی که عیبی رخ نداده باشد این بردار تقریباً برابر با صفر خواهد بود. می‌توان با در نظر گرفتن حد آستانه وقوع عیب در سیستم را تشخیص داد. در رابطه (42)،  $y_s$  و  $H_{us}^i$  طبق رابطه زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} M_1(z_1(t)) &= \frac{z_1(t) - \underline{z}_1(t)}{\bar{z}_1(t) - \underline{z}_1(t)} \\ M_2(z_1(t)) &= \frac{\bar{z}_1(t) - z_1(t)}{\bar{z}_1(t) - \underline{z}_1(t)} \\ N_1(z_2(t)) &= \frac{z_2(t) - \underline{z}_2(t)}{\bar{z}_2(t) - \underline{z}_2(t)} \\ N_2(z_2(t)) &= \frac{\bar{z}_2(t) - z_2(t)}{\bar{z}_2(t) - \underline{z}_2(t)} \end{aligned} \quad (۴۸)$$

با توجه به کران‌های در نظر گرفته شده برای توابع  $Z_1, Z_2$  سیستم فازی دارای ۴ زیرسیستم خواهد بود. بنابراین با به کارگیری مدل فازی TS ماتریس‌های معرفی شده در (۹) و (۱۲) جهت نگاشت پیشنهادی به منظور دکوپله‌سازی زیرسیستم‌های متأثر از نویز و عیب برای زیرسیستم اول فازی به صورت زیر محاسبه می‌شوند (جهت جلوگیری از تکرار، روابط تنها برای زیرسیستم اول فازی در مقاله نوشته می‌شوند).

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.097 & 0.75 & -0.66 \\ 0 & 0.97 & -0.2 & -0.09 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۴۹)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.52 & -0.26 & 0.26 & 0.77 \\ 0.26 & 0.96 & 0.04 & 0.13 \\ -0.26 & 0.04 & 0.96 & -0.13 \\ -0.77 & 0.13 & -0.13 & 0.6 \end{bmatrix}$$

با اعمال نگاشت پیشنهادی، سیستم با معادله (۴۵) به دو زیرسیستم با معادلات داده شده زیر تبدیل می‌شود. معادلات زیرسیستم متأثر از نویز اندازه‌گیری عبارت است از:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} -4.9 & -0.1 \\ 0.2 & -4.5 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.097 \end{bmatrix} u(t) + \\ & \begin{bmatrix} 0.2(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \\ 0.097(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \end{bmatrix} \\ \bar{y}_1(t) &= \begin{bmatrix} -0.77 & 0.25 \\ 0.17 & -0.56 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + 3.9n(t) \end{aligned} \quad (۵۰)$$

همچنین معادلات زیرسیستم متأثر از عیب عبارت است از:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0.6 & 1.7 \\ 0.7 & -0.2 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.01 \end{bmatrix} u(t) + \\ & \begin{bmatrix} -0.02(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \\ -0.009(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix} f_c(t) \\ \bar{y}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0.13 & 0.9 \\ -0.13 & 0.26 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 0.6 & 0.18 \\ -0.36 & 0.11 \end{bmatrix} \bar{x}_2(t) \end{aligned} \quad (۵۱)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M_E} & -\alpha g & \frac{k}{M_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M_C} & 0 & -\frac{k}{M_C} & -\alpha g \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} x_1 x_2^2 + 1 & \frac{1}{M_E} \\ -\frac{1}{M_E} & 0.2 \\ 0 & -x_1 x_2^2 - 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{M_E}(x_2 + x_4)^2 \\ 0 \\ \frac{\rho}{M_C}(x_2 + x_4)^2 \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} x_1 x_2^2 + 2 \\ 1 \\ 3x_1^2 + x_2 x_1^2 \\ -3 \end{bmatrix} n(t) \end{aligned} \quad (۴۵)$$

در رابطه (۴۵)،  $\alpha$  بیانگر اصطکاک غلطشی و  $f_1(t), f_2(t), n(t)$  نیز بیانگر عیب‌های محرک/فرآیند و نویز اندازه‌گیری می‌باشند. بردار متغیرهای حالت شامل  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  که  $x_1, x_2$  شامل موقعیت و سرعت موتور و همچنین  $x_3, x_4$  بیانگر موقعیت و سرعت بار می‌باشند. به منظور شبیه‌سازی مقادیر پارامترهای فضای حالت برابر  $M_E = 10^{kg}, M_C = 5^{kg}, k = 4.87 \frac{N}{s}, \alpha = 0.5 \frac{s}{m}, \rho = 1 \frac{N}{s}, g = 9.8 \frac{m}{s^2}$  فرض می‌شوند.

برای این منظور در ابتدا با استفاده از مدل فازی TS به ایجاد مدل چندگانه پرداخته می‌شود. چنانچه  $Z_1 = x_1 x_2^2, Z_2 = 3x_1^2 + x_2 x_1^2$  شوند، با تعریف  $\bar{Z}$  به عنوان بیشینه و  $\underline{Z}$  به عنوان کمینه این متغیرها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_1(t)x_2^2(t) = M_1(z_1) \cdot \bar{z}_1(t) + M_2(z_1) \cdot \underline{z}_1(t) \\ z_2(t) &= 3x_1^2(t) + x_2(t)x_1^2(t) = N_1(z_2) \cdot \bar{z}_2(t) + N_2(z_2) \cdot \underline{z}_2(t) \end{aligned} \quad (۴۶)$$

از آنجاکه  $0 < x_1 < 5, 0 < x_2 < 3$  بوده لذا مقادیر  $\bar{z}_1(t) = 45$  و  $\underline{z}_1(t) = 0$ ، همچنین  $\bar{z}_2(t) = 150$  و  $\underline{z}_2(t) = 0$  خواهد بود. بعلاوه همواره داریم:

$$\begin{aligned} M_1(z_1) + M_2(z_1) &= 1 \\ N_1(z_2) + N_2(z_2) &= 1 \end{aligned} \quad (۴۷)$$

بنابراین توابع تعلق در نظر گرفته شده به صورت زیر خواهند بود [۲۴]:

با به کارگیری معادلات (۲۱)، (۲۵) و (۲۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} -5.8 & 0.2 \\ 0.7 & -4.7 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.8 & 1.4 \\ 0.1 & -0.1 & 1.4 & -0.5 \end{bmatrix} \tilde{u}(t) + \\ & \begin{bmatrix} 0.2(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \\ 0.097(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \end{bmatrix} \\ \tilde{y}_1(t) &= [-1.2 \quad 0.4] \bar{x}_1(t) + 3.9n(t) \end{aligned} \quad (52)$$

که در معادله (۵۲)  $\bar{x}_1 = C_{22}^i (\bar{y}_2 - C_{21}^i \bar{x}_1)$ ، همچنین داریم:  $\bar{x}_2 = [\bar{x}_{21}^T, \bar{x}_{22}^T]^T$

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} -0.39 & -0.2 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_2(t) + \begin{bmatrix} -0.02 & 1.6 & 0.3 & 0.8 \\ -0.01 & -0.3 & -0.5 & 1.2 \end{bmatrix} \tilde{u}(t) + \\ & \begin{bmatrix} -0.02(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \\ -0.009(0.97\bar{x}_{12} - 0.2\bar{x}_{21} - 0.09\bar{x}_{22} + \bar{x}_{11})^2 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix} f_c(t) \\ \tilde{y}_2(t) &= [-0.9 \quad -0.3] \bar{x}_2(t) \end{aligned} \quad (53)$$

که در معادله (۵۳)  $\bar{x}_1 = C_{21}^i (\bar{y}_2 - C_{22}^i \bar{x}_2)$ ، است.

برای طراحی رویکرد ورودی ناشناخته کافی است ثابت لیشیتز را طبق رابطه زیر به منظور تضمین رابطه (۲) محاسبه نماییم.

$$\gamma_0 = \left\| \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right\|_{\infty} \text{ at } x = x^{(0)} \quad (54)$$

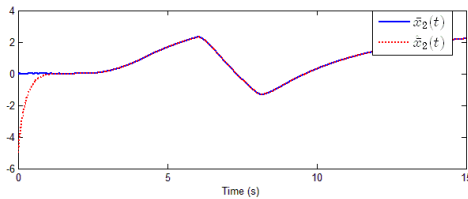
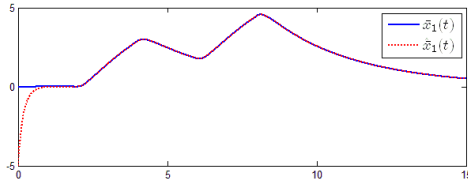
که در رابطه (۵۴)،  $x^{(0)}$  نقطه تعادل سیستم قطار می‌باشد. پس از محاسبه، ثابت لیشیتز برابر  $\gamma_0 = 0.088$  خواهد بود. ماتریس‌های بهره رویکرد ورودی ناشناخته نیز طبق روابط (۲۷) و (۲۸) پس از حل نامعادلات ماتریسی غیرخطی قابل محاسبه خواهند بود. این ماتریس‌ها عبارتند از:

$$g_1 = g_2 = 0_{2 \times 1}, W = I_2, J = \bar{B}_1, F = \bar{A}_1 \quad (55)$$

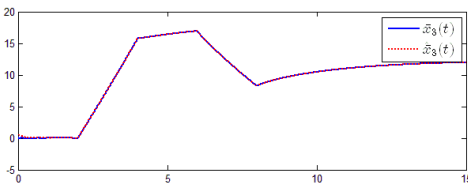
از آنجا که  $2F^T + (1 + \gamma_0^2)I_2$  همواره معین منفی با مقادیر ویژه  $-10.8, -8.1$  بوده لذا رابطه (۳۰) برآورده خواهد شد. در این مرحله با به کارگیری روش پرتی غیرخطی به تشخیص عیب اتفاق افتاده در سیستم پرداخته می‌شود. به این ترتیب فرض می‌شود دو عیب پالسی شکل، یکی در بازه زمانی دو تا چهار ثانیه و دیگری شش تا هشت ثانیه و هر دو با دامنه ۱۰ در سیستم یادشده اتفاق بیافتند. با توجه به رابطه (۴۲) بردار پرتی مطابق رابطه زیر خواهد بود.

$$v_s = [-0.35 \quad -0.49 \quad 0.8] \quad (56)$$

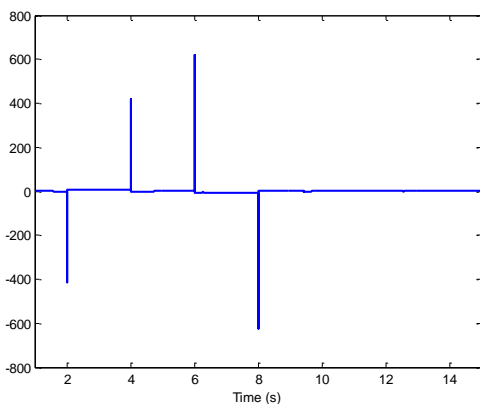
پس از شبیه‌سازی متغیرهای واقعی و تخمین زده شده به صورت شکل ۲ و شکل ۳ می‌باشند. همچنین شکل مانده طراحی شده به کمک روش پرتی غیرخطی نیز به صورت شکل ۴ می‌باشد.



شکل ۲: متغیرهای حالت اول و دوم واقعی و تخمین زده شده با رویکرد ورودی ناشناخته



شکل ۳: متغیرهای حالت سوم و چهارم واقعی و تخمین زده شده با رویکرد ورودی ناشناخته



شکل ۴: مانده طراحی شده به کمک روش پرتی غیرخطی

مانده طراحی شده در حضور نویز قادر به تشخیص عیب نبوده، بعلاوه تخمین سیگنال عیب نیز امکان‌پذیر نخواهد بود.

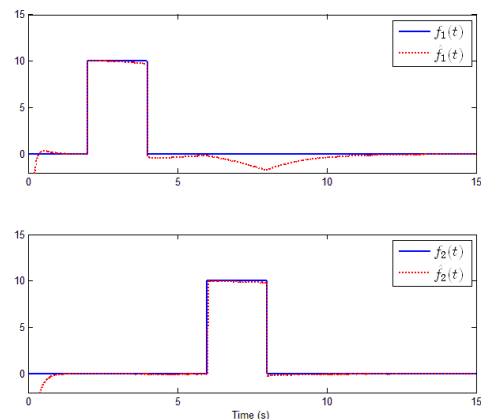
## ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله تشخیص و شناسایی عیب برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی که در معرض عیب فرآیند/ محرک و نویز اندازه‌گیری قرار گرفته‌اند، مورد پژوهش قرار گرفته است. برخلاف روش‌های عیب‌یابی موجود، روش پیشنهادی در این مقاله قابل اعمال به دسته وسیعی از سیستم‌های صنعتی پر کاربرد می‌باشد. برای این منظور در ابتدا از مدل فازی TS جهت خطی سازی ماتریس ضرایب عیب و نویز اندازه‌گیری در هر زیرسیستم فازی استفاده شده است. سپس از یک نگاهت جهت تفکیک هر زیرسیستم فازی به دو زیرسیستم، یکی شامل نویز اندازه‌گیری و دیگری شامل عیب فرآیند/ محرک استفاده شده است. در ادامه یک رویکرد ورودی ناشناخته به منظور تخمین متغیرهای حالت سیستم، بکار گرفته می‌شود. شرایط کافی برای پایداری مجانبی خطای رویکرد به کمک روش پایداری لیاپانوف و حل نامعادلات ماتریسی غیرخطی به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت روش پرتی غیرخطی به منظور ایجاد مانده جهت تشخیص عیب اتفاق افتاده در سیستم تشریح گردیده است. به کارگیری نگاهت معرفی شده جهت دکوپله سازی سیستم، تحقق روش پرتی را میسر نموده است. همچنین علاوه بر روش پرتی غیرخطی، روشی جهت تخمین عیب رخ داده شده در سیستم ارائه شده است. در نهایت نتایج شبیه‌سازی گویای عملکرد مناسب روش پیشنهادی در این مقاله است.

## تشکر و قدردانی

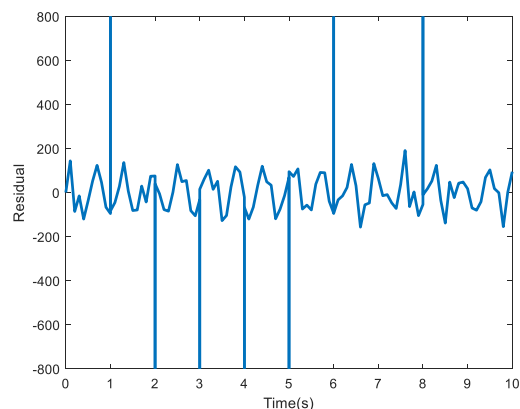
در این قسمت از تولباکس ارائه شده توسط TOMLAB به منظور ایجاد یک پلتفرم بهینه‌سازی مناسب برای حل نامعادلات ماتریسی غیرخطی تقدیر و تشکر به عمل می‌آید.

همان‌گونه که در شکل ۴ مشخص است روش پرتی به درستی عیب اتفاق افتاده در سیستم یاد شده را تشخیص داده است. همچنین می‌توان به کمک رابطه (۴۰) به تخمین عیب اتفاق افتاده در سیستم پرداخت. شکل عیب تخمین زده شده در سیستم با معادلات داده شده در (۴۵) به صورت شکل ۵ می‌باشد.



شکل ۵: تخمین عیب اتفاق افتاده در سیستم به کمک روش پیشنهادی

در [۱۴] از روش افزونگی تحلیلی غیرخطی به منظور تشخیص عیب استفاده شده است. مانده‌ی طراحی شده در مقاله یاد شده دارای حساسیت به تغییرات ورودی سیستم می‌باشد. همچنین چنانچه نویز اندازه‌گیری در سیستم وجود داشته باشد، تأثیر آن در بردار مانده محسوس خواهد بود. برای روشن شدن این مطلب پس از شبیه‌سازی، نمودار مانده طراحی شده در [۱۴] بصورت زیر می‌باشد:



شکل ۶: تأثیر نویز و تغییرات ورودی بر بردار مانده طراحی شده در [۱۴]

روش پرتی پیشنهادی در [۵] تنها قابل اعمال به سیستم‌های خطی بوده و برای سیستم‌های غیرخطی با کلاس داده شده در این مقاله کارایی ندارد. سیگنال مانده پیشنهادی در [۱۵] برای جداسازی عیب محرک و حسگر طراحی شده است. علیرغم نوآوری بکار گرفته در روش یاد شده، بردار

- channels, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(2), 479-484, 2016.
- [14] Leuschen, M. L., Walker, I. D., Cavallaro, J. R., Fault residual generation via nonlinear analytical redundancy, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(3), 452-458, 2005.
- [15] Aldeen, M., Sharma, R., Estimation of states, faults and unknown disturbances in non-linear systems, *International Journal of Control*, 81(8), 1195-1201, 2008.
- [16] Sedigh Ziyabari, H., Aliyari Shoorehdeli, M., Fuzzy robust fault estimation scheme for a class of nonlinear systems based on an unknown input sliding mode observer, *Journal of Vibration and Control*, 24(10), 1861-1873, 2018.
- [17] Yan, W., Xu, D., & Shen, Q., Robust Fault Detection and Estimation in Nonlinear Systems with Unknown Constant Time-Delays. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017.
- [18] Wang, G., & Yi, C., Fault estimation for nonlinear systems by an intermediate estimator with stochastic failure. *Nonlinear Dynamics*, 89(2), 1195-1204, 2017.
- [19] Zhu, J. W., Yang, G. H., Wang, H., & Wang, F., Fault estimation for a class of nonlinear systems based on intermediate estimator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(9), 2518-2524, 2015.
- [20] Kazerooni, M., Khayatian, A., & Safavi, A., Fault estimation for a class of interconnected non-linear systems with time-varying delay using robust adaptive unknown input observers. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 35(1), 231-247, 2016.
- [21] Rajamani, Rajesh. "Observers for Lipschitz nonlinear systems." *IEEE transactions on Automatic Control* 43, no. 3, 397-401, 1998.
- [22] Isidori, Alberto. *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] Khalil, Hassan K., and J. W. Grizzle. *Nonlinear systems*. Vol. 3. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 2002.
- [24] Tanaka, Kazuo, and Hua O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2004.
- [25] Seliger, Ralf, and Paul M. Frank. "Fault-diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers." In *Decision and Control, Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pp. 2248-2253. IEEE, 1991.
- [26] Alessandri, A. "Observer design for nonlinear systems by using input-to-state stability." In *Decision and control, 2004. CDC. 43rd IEEE conference on*, vol. 4, pp. 3892-3897. IEEE, 2004.
- [1] Chen, J., Patton, R. J., *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, Vol.3, Springer Science and Business Media, 2012.
- [2] Zhong, M., Song, Y. and Ding, S. X., Parity space-based fault detection for linear discrete time-varying systems with unknown input, *Automatica*, 59, 120-126, 2015.
- [3] Zhong, M., Ding, S. X., Han, Q. L. and Ding, Q., Parity space-based fault estimation for linear discrete time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(7), 1726-1731, 2010.
- [4] Ding, X., Limin Guo, and Torsten Jeansch. "A characterization of parity space and its application to robust fault detection." *IEEE Transactions on Automatic Control* 44, no. 2, 337-343, 1999.
- [5] Zhong, Maiying, Yang Song, Ting Xue, Rui Yang, and Wenbo Li. "Parity Space-Based Fault Detection by Minimum Error Minimax Probability Machine." *IFAC-PapersOnLine* 51(24), 1292-1297, 2018.
- [6] Zhang, Tong, Fenfen Wang, and Wenxing Fu. "Fault Detection and Isolation for Redundant Inertial Measurement Unit under Quantization." *Applied Sciences* 8(6), 865, 2018.
- [7] Tannous, Pamela J., and Andrew G. Alleyne. "Fault Detection and Isolation for Complex Thermal Management Systems." *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 141.6, 061008, 2019.
- [8] Chow, E. Y. E. Y., Willsky, A. S., Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems, *IEEE Transactions on automatic control*, 29(7), 603-614, 1984.
- [9] Yu, D., Williams, D., Shields, D. N. and Gomm, J. B., A parity space method of fault detection for bilinear systems, *American Control Conference*, Vol. 2, 1132-1133, 1995.
- [10] Yu, D. L., Shields, D. N., Extension of the parity-space method to fault diagnosis of bilinear systems, *International Journal of Systems Science*, 32(8), 953-962, 2001.
- [11] Nguang, S. K., Zhang, P. and Ding, S. X., Parity relation based fault estimation for nonlinear systems: An LMI approach, *International Journal of Automation and Computing*, 4(2), 164-168, 2007.
- [12] Zhang, Y., Bingham, C., Garlick, M. and Gallimore, M., Applied fault detection and diagnosis for industrial gas turbine systems, *International Journal of Automation and Computing*, 14(4), 463-473, 2017.
- [13] Dong, H., Wang, Z., Ding, S. X. and Gao, H., On H-infinity estimation of randomly occurring faults for a class of nonlinear time-varying systems with fading