مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۹، صفحه ۱۱۸-۱۰۷

کنترل مقاوم H_∞ فیدبک خروجی سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی: روش لیاپونوف غیریکنوا

علیرضا نصیری[۱]، احمد باران‌زاده[۲]؛ فرزان رشیدی[۳]

[۱] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه هرمزگان، nasiri@hormozgan.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه هرمزگان، baranzadeh@hormozgan.ac.ir

[۳] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه هرمزگان، rashidi@hormozgan.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۰۷ ویرایش : ۱۳۹۸/۰۳/۲۸ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۲۵

چکیده: در این مقاله با استفاده از نامساوی ماتریسی خطی[۱] (LMI)، روشی برای پایدارسازی کنترل مقاوم H_∞ فیدبک خروجی سیستم‌های فازی تاکاگی- سوگنو دارای عدم قطعیت، ارائه شده است. به منظور کاهش ماهیت محافظه کارانه[۲] سیستم‌های تاکاگی-سوگنو، فرم جدیدی از توابع لیاپانوف غیر یکنوا مورد استفاده قرار گرفته است. در روشهای غیر یکنوا، علیرغم اینکه تابع لیاپانوف می‌تواند بصورت محلی افزایش یابد، اما در نهایت مقدار آن به صفر می‌رسد. با استفاده از تابع لیاپانوف غیر یکنوا شرایط کافی برای وجود پایداری کنترل مقاوم H_∞ فیدبک خروجی محاسبه، و نشان داده شده است که روش پیشنهادی در مقایسه با سایر روشهای غیر یکنوا، معروف به روش تغییرات k نمونه‌ای محافظه‌کاری کمتری خواهد داشت. کارایی عملکرد کنترل کننده پیشنهادی از طریق نتایج شبیه‌سازی عددی نشان شده است..

کلمات کلیدی: سیستم‌های غیرخطی، مدل فازی تاکاگی-سوگنو، فیدبک خروجی، تابع لیاپانوف غیر یکنوا، کنترل مقاوم H_∞.

Robust H_∞ Output Feedback Control for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems Using Linear Matrix Inequalities: A Non-monotonic Lyapunov Approach

Alireza Nasiri, Ahmad Baranzadeh, Farzan Rashidi

Abstract: This paper proposes robust H_∞ output feedback control stabilization for uncertain Takagi–Sugeno (T-S) fuzzy systems via linear matrix inequalities (LMIs). In order to reduce the conservatism associated with T-S fuzzy system, a new form of non-monotonic Lyapunov functions is used. In the non-monotonic approach, the monotonic decrease of the Lyapunov function is relaxed which enables it to increase locally but vanish eventually. Based on the non-monotonic Lyapunov function approach, sufficient conditions for the existence of robust H_∞ output feedback control stabilization are derived. The proposed design technique is shown to be less conservative than the existing non-monotonic approach, namely, k-samples variations of Lyapunov function. The effectiveness of the proposed approach is further illustrated via numerical example.

Keywords: nonlinear system, T-S fuzzy model, output feedback, non-monotonic Lyapunov function, Robust H_∞ control.

[1] Linear matrix inequalities
[2] Conservatism

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

۱- مقدمه

یکی از مهمترین مسائل در تئوری کنترل، مساله پایداری و کنترل سیستم‌های غیرخطی است. این در حالیست که بسیاری از تئوریهای کنترل تنها برای سیستم‌های خطی طراحی شده‌اند. یک راهکار متداول برای کنترل سیستم‌های غیرخطی، خطی‌سازی آنها حول نقطه کار سیستم است. این روش باعث ایجاد محدودیت‌های متعددی برای سیستم خواهد شد. برای غلبه بر این محدودیت‌ها، در دهه‌های اخیر مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی بر پایه سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در این روش برای مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی از مجموعه‌ای از قوانین فازی استفاده می‌شود. در قسمت استنتاج این قوانین مجموعه‌ای از مدل‌های خطی در نظر گرفته می‌شود که این مدلها به کمک توابع عضویت فازی به یکدیگر متصل شده و مدل غیرخطی ساخته می‌شود. این نوع از مدل‌سازی، یک روش جایگزین برای معرفی سیستم‌های غیرخطی پیچیده است. روش کلی برای بررسی پایداری و کنترل سیستم غیرخطی به کمک مدل تاکاگی-سوگنو را می‌توان به دو مرحله تقسیم نمود. مرحله اول تعیین مدل تقریبی سیستم غیرخطی با استفاده از سیستم تاکاگی-سوگنو و مرحله دوم نیز طراحی کنترل کننده برای مدل بدست آمده از مرحله قبل است. در مرحله اول سیستم غیر خطی اولیه به صورت ترکیبی از زیر سیستم‌های خطی تقریب زده می‌شود. هر زیر سیستم خطی با یک بیان قاعده *اگر- آنگاه* فازی توصیف می‌شود. در مرحله دوم که مرحله طراحی کنترل کننده است، با در نظر گرفتن کلیه زیرسیستم‌ها، برای هر زیر سیستم یک کنترل کننده طراحی می‌شود. گام نهایی، ترکیب فازی مناسب همه کنترل کننده‌های خطی طراحی شده برای ساخت کنترل کننده نهایی خواهد بود. به این روش طراحی کنترل‌کننده جبرانساز توزیع شده موازی[1] (PDC) گفته می‌شود [۱]. در [۲] مرور جامعی بر انواع کنترل کننده‌هایی که قابل طراحی برای سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو هستند انجام شده است.

در بسیاری از سیستم‌های واقعی، سیگنال‌های اندازه‌گیری تحت تاثیر نویز و اغتشاش قرار دارند. بنابراین مطلوب است که به کمک یکی از روشهای کنترل مقاوم اثر آنها کاهش یابد. کنترل مقاوم H_∞ یکی از متداول‌ترین روشهایی است که برای حل چنین مسائلی به کار گرفته می‌شوند. در این میان اگر سیستمی هم تحت تاثیر اغتشاش خارجی بوده و هم امکان اندازه‌گیری تمامی حالتهای آن وجود نداشته باشد، باید از روش‌های مبتنی بر کنترل مقاوم فیدبک خروجی به منظور کمینه کردن نسبت انرژی خروجی کنترل شده به انرژی اغتشاش استفاده نمود [۲]. طراحی فیدبک حالت مقاوم H_∞ در [۳] و کنترل کننده‌های فیدبک خروجی در [۴-۶] مورد بررسی قرار گرفته است.

بطور کلی، تحلیل پایداری سیستم‌های تاکاگی-سوگنو و در نتیجه طراحی کنترل کننده‌ها عمدتا بر مبنای روش استاندارد لیاپانوف انجام می‌شود. استفاده از روش استاندارد لیاپانوف منجر به برخی نامساوی‌هایی خواهد شد که در نهایت توابع عضویت غیرخطی از شرایط نهایی حذف می‌شوند. در نتیجه، شرایط نهایی که اغلب به فرم نامساوی‌های ماتریس خطی (LMIs) هستند تبدیل به شرط کافی شده که این نیز به نوبه خود باعث افزایش حالت محافظه‌کارانه در سیستم خواهد شد [۷]. در اکثر پژوهش‌ها دو روش عملی برای کاهش محدودیت‌های این محافظه‌کاری پیشنهاد شده است. روش اول بر انتخاب یک فرم مناسب از تابع لیاپانوف استوار است. از جمله این روش ها می‌توان به روش تکه‌ای [۸]، فازی [۹]، توابع لیاپانوف غیر مربعی[2] [۱۰] و یا ترکیبی از آنها اشاره کرد. در روش دوم که روش غیر یکنوا نیز نامیده می‌شود، کاهش محافظه کاری با استفاده از عدم نیاز به کاهش یکنواخت تابع لیاپانوف سیستم زمان گسسته در هر نمونه متوالی صورت می‌گیرد [۱۱-۱۶]. به عبارت دیگر، در این روش لزومی به کاهش تابع لیاپانوف در هر گام متوالی (یعنی $V_{t+1} < V_t$) نیست. در عوض، به تابع لیاپانوف اجازه داده می‌شود که افزایش محلی کوچکی یافته ولی در نهایت به سمت صفر میل کند [۱۱]. در سالهای اخیر، پژوهش‌هایی در خصوص روش‌های غیر یکنوا انجام گرفته است. بطور نمونه، در [۱۷] کاهش غیر یکنوای تابع لیاپانوف بر اساس تغییرات فقط دو نمونه (یعنی $V_{t+2} < V_t$) بررسی و نشان داده شده که این روش نسبت به روش متداول تابع لیاپانوف مربعی [۱۸] و حتی تابع لیاپانوف تکه‌ای [۱۹] دارای محافظه کاری کمتری است. حالت کلی‌تر تابع لیاپانوف غیر یکنوا با تغییرات k نمونه‌ای (یعنی $V_{t+k} < V_t$) در [۱۴-۱۲] ارائه شده است. در [۱۲،۱۳] یک کنترل کننده فیدبک حالت برای سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو زمان گسسته دارای عدم قطعیت پیشنهاد شده است. بعلاوه مرجع [۱۴] روش مشابهی برای کنترل هزینه تضمینی ارائه داده است. در [۲۰] با بهره گیری از مدل فازی تاکاگی-سوگنو، تابع لیاپانوف غیرمربعی و کنترل کننده های فازی PDC و ، non-PDCروش جدیدی جهت کاهش محافظه کاری در طراحی و تحلیل پایداری کنترل کننده‌های مقاوم پیشنهاد داده شده است. در این روش کنترل کننده های فازی مبتنی بر مدل به نحوی طراحی شده‌اند که علاوه بر تضمین پایداری سیستم غیرخطی، اثر اغتشاش در خروجی نیز کاهش یافته و سیگنال ورودی کنترلی با انرژی محدود بدست آید. مرجع [۲۱] با رویکرد نامساوی‌های ماتریسی خطی، چارچوبی جهت طراحی کنترل‌کننده فازی مقاوم با استفاده از تابع لیاپانوف غیر مربعی پیشنهاد داده است. نتایج شبیه‌سازی ها نشان می‌دهدکه استفاده از تابع لیاپانوف فازی باعث برقراری راحت تر شرایط پایداری و در نتیجه کاهش محافظه کاری می شود. در [۲۲] با استفاده از روش تابع لیاپانوف غیرمربعی، یک رویتگر مقاوم برای سیستم‌های غیر خطی طراحی شده است. در روند تحلیل پایداری سیستم و طراحی ضرایب رویتگر، ماتریس‌های انتقال از حل نامساوی های ماتریسی خطی به دست می آید. اعمال روش پیشنهادی بر گستره وسیعی از سیستم‌های غیر خطی نشان می‌دهد تابع لیاپانوف غیرمربعی باعث می‌شود شرایط نامساوی های ماتریس خطی با محافظه

[1] Parallel Distributed

[2] Compensator

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

کاری کمتر، به دست آیند. همچنین علاوه بر کاهش تاثیر اغتشاش خارجی، تاثیر عدم قطعیت و ورودی های نامعلوم نیز کمتر خواهد بود.

مرجع [۲۳] مساله طراحی رویتگر حالت، جهت پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای خطی زمان گسسته را مورد بررسی قرار داده است. برای طراحی رویتگر حالت از روش نامساوی های ماتریسی خطی، توابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای و لم فینسلر استفاده شده است. علاوه بر این، از روش کنترل H_∞ نیز جهت طراحی رویتگر حالت برای سیستم‌های همراه با اغتشاش خارجی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش کنترل H_∞سیگنال اغتشاش را تضعیف کرده و تخمین تقریبا مناسبی از حالت های سیستم ارائه می دهد. مرجع [۲۴]، طراحی کنترل‌مقاوم H_∞ فیدبک حالت برای سیستم‌های فازی دارای عدم قطعیت را مورد مطالعه قرار داده است که در آن برای دستیابی به اهداف طراحی، از روش لیاپانوف-کراسوفسکی استفاده شده است. در بدست آوردن شرایط پایداری نیز مصالحه‌ای بین کاهش محافظه‌کاری و پیچیدگی محاسبات در نظر گرفته شده است. آنالیز پایداری نشان می‌دهدکه استفاده از روش لیاپانوف موجب اعمال محافظه‌کاری های اجتناب ناپذیری می گردد که در محاسبه بیشترین کران تاخیر خود را نشان می‌دهد.

در حالت کلی، کنترل مقاوم H_∞ فیدبک خروجی نسبت به سایر روش هایی که از تابع لیاپانوف غیر یکنوا استفاده می کنند دارای پیچیدگی و چالش های بیشتری است. این مقاله روش تغییرات k نمونه‌ای [۱۶-۱۲] را برای طراحی کنترل مقاوم H_∞ فیدبک خروجی توسعه می‌دهد. در روش پیشنهادی، برای کاهش محافظه‌کاری، متغیرهای تصمیم‌گیری و نامساوی‌های بیشتری استفاده شده است. بنابراین طراحی کنترل کننده H_∞ فیدبک خروجی که هدف اصلی این مقاله است با استفاده از روش لیاپانوف غیر یکنوا صورت می گیرد. در نهایت، شرایط کافی برای وجود کنترل کننده مقاوم H_∞ بر حسب نامساوی‌های ماتریس خطی استخراج می شود. در این مقاله برای تقریب سیستم‌های غیرخطی از مدل تاکاگی-سوگنو استفاده شده است.

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم، فرمول‌بندی مساله به اختصار توضیح داده می‌شود. نتایج اصلی روش پیشنهادی در بخش سوم ذکر شده است. بخش چهارم نیز به بررسی کارایی کنترل کننده طراحی شده اختصاص دارد. نتیجه گیری مقاله نیز در بخش پنجم آورده شده است.

۲- فرمول‌بندی مساله

در این مقاله $(.)^T$ و $\bullet$ به ترتیب بیانگر ترانهاده و بلوک متقارن در یک ماتریس متقارن است. I_n نیز بیانگر ماتریس واحد با بعد n و O_{nm} نشان دهنده ماتریس صفر با ابعاد $n \times m$ می‌باشد. همچنین $x_t \triangleq x(t)$ و $K_{r_1,r_L} \triangleq \{r_1 \cdots r_L\}$ که $r_1 \cdots r_L \in N$ ، $X(v_t) \triangleq$, $\sum_{i=1}^{r}\mu_i(v_t)=1$ و $\mu_i(v_t)\geq 0$ با $\sum_{i=1}^{r}\mu_i\,(v_t)X_i$.

فرض کنیم فرمول‌بندی ریاضی سیستم فازی تاکاگی-سوگنو زمان گسسته که دارای عدم قطعیت است، به فرم زیر باشد:

Rule $\boldsymbol{i}$: IF $v_{1,t}$ is M_1^i AND $\cdots$ AND $v_{\sigma,t}$ is M_σ^i, THEN

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (A_i+\Delta A_i)x_t+\big(B_{x,i}+\Delta B_{x,i}\big)u_t+D_{x,i}w_t \\ y_t &= C_{y,i}x_t+D_{y,i}w_t \\ z_t &= C_{z,i}x_t+B_{z,i}u_t \end{aligned} \qquad (۱)$$

در رابطه فوق، $w_t \in R^d, y_t \in R^{py}, z_t \in R^p, u_t \in R^m, x_t \in R^n$ به ترتیب متغیرهای حالت، ورودی، خروجی کنترل شونده، خروجی اندازه گیری و اغتشاش هستند. اندیس $i \in K_{1,r}$ بیانگر i امین قاعده فازی، r تعداد قوانین، $v_{r,t}$ متغیرهای شرطی $\big(v_t=[v_{1,t}\cdots v_{\sigma,t}]\big)$، σ تعداد متغیرهای شرطی و M_1^i تا M_σ^i توابع عضویت می‌باشند.

ماتریس‌های $A_i, \Delta A_i, B_{x,i}, \Delta B_{x,i}, D_{x,i}, D_{y,i}, C_{y,i}, C_{z,i}$ ... نیز دارای ابعاد مناسب هستند. با استفاده از غیرفازی ساز میانگین مراکز، عملگر ضرب و فازی ساز منفرد، رابطه (۱) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \big(A_i(v_t)+\Delta A_i(v_t)\big)x_t+\big(B_x(v_t)+\Delta B_x(v_t)\big)u_t \\ &\quad +D_x(v_t)w_t \\ y_t &= C_y(v_t)x_t+D_y(v_t)w_t \\ z_t &= C_z(v_t)x_t+B_z(v_t)u_t \end{aligned} \qquad (۲)$$

در رابطه فوق داریم: $\mu_i(v_t)=\frac{\prod_{\tau=1}^{\sigma}M_\tau^i(v_{\tau,t})}{\sum_{i=1}^{r}\prod_{\tau=1}^{\sigma}M_\tau^i(v_{\tau,t})}$ که درآن $\mu_i(v_t)\geq 0$ و $\sum_{i=1}^{r}\mu_i(v_t)=1$.

عدم قطعیت سیستم نیز به صورت $[\Delta A(v_t)\ \Delta B(v_t)]=HF(x_t,t)[E^a(v_t)\ E^b(v_t)]$ در نظر گرفته شده است. توابع ماتریسی $E^a(v_t)$ و $E^b(v_t)$ معلوم بوده و ساختار عدم قطعیت را تعیین می‌کنند. $F(x_{t1},t)$ یک تابع ماتریسی متغیر با زمان است که شرط $F(x_t,t)^TF(x_t,t)\leq I$ را برآورده می‌سازد.

قبل از پرداختن به بیان مساله، ابتدا لم‌های مورد نیاز زیر ارائه می‌شوند.

لم ۱ [۲۵]: اگر P و G دو ماتریس متقارن باشند بگونه‌ای که $P>0$ در این صورت داریم:

$$G^T+G-P\leq G^TP^{-1}G$$

لم ۲ [۲۶]: فرض کنیم متغیر اسکالر p_1 مثبت، و $\tilde{F}_t$ تابع ماتریسی غیرخطی متغیر با زمان بوده بگونه‌ای که $\tilde{F}_t^T\tilde{F}_t\leq I$، همچنین فرض کنیم ماتریس‌های $\tilde{E}_t$ ، $\tilde{H}$ و Υ_0 دارای ابعاد مناسب باشند، در اینصورت داریم:

$$\Upsilon_0+\tilde{H}\tilde{F}_t\tilde{E}_t+\big(\tilde{H}\tilde{F}_t\tilde{E}_t\big)^T\leq\Upsilon_0+\rho_1\tilde{H}\tilde{H}^T+\rho_1^{-1}\tilde{E}_t^T\tilde{E}_t \qquad (۳)$$

لم ۳ [۲۷]: اگر شرایط زیر برای تمام ترکیبات $l\in K_{1,k}$ و $c_l\in K_{1,r}$ برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Lambda_{ii}^{c_1\cdots c_k}<0 & \forall i\in K_{1,r} \\ \frac{1}{r-1}\Lambda_{ii}^{c_1\cdots c_k}+\frac{1}{2}\Big(\Lambda_{ii}^{c_1\cdots c_k}+\Lambda_{ij}^{c_1\cdots c_k}\Big)<0 & \forall 1<i\neq j<r \end{cases} \qquad (۴)$$

آنگاه LMI زیر نیز برقرار خواهد بود.

$$\sum_{c_k=1}^{r}\cdots\sum_{c_1=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_i(v_t)\mu_j(v_t)\mu_{c_1}(v_{t+1})\times$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

$$\dots \mu_{c_k}(v_{t+k})\Lambda_{ij}^{c_1\dots c_k} < 0 \qquad (۵)$$

لم ٤ [۱۱]: سیستم دینامیکی غیرخطی زمان گسسته $x_{t+1} = f(x_t)$ را در نظر بگیرید. اگر توابع $v_1(x_t)\cdots v_k(x_t): R^n \to R$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\sum_{i=1}^{k} iV_i(0) = 0 \qquad (۶.۱)$$

$$\sum_{i=j}^{k} V_i(x_t) \ \ is\ radially\ unbounded\ \ \forall\, j \in K_{1,N} \qquad (۶.۲)$$

$$\sum_{i=j}^{k} V_i(x_t) > 0 \ \ \forall x_t \neq 0\ , j \in K_{1,N} \qquad (۶.۳)$$

$$\Delta_k V(x_t) = \sum_{i=j}^{k}\big(V_i(x_{t+i}) - V_i(x_t)\big) < 0 \qquad (۶.۴)$$

آنگاه مبدا یک نقطه تعادل پایدار مجانبی فراگیرخواهد بود.

نکته ۱: لم ۴ بیان می‌کند تا زمانی که حاصل‌جمع تفاضل k نمونه از تابع لیاپونوف گسسته در زمان در هر نقطه از زمان منفی باشد، پایداری تضمین شده است و تمام V_i ها در نهایت به سمت صفر میل می‌کنند.

فرض کنیم $V_i = 0$ به ازای تمام $i = 1, \cdots, k-1$ ، آنگاه شروط ذکر شده در روابط (۶.۱) تا (۶.۴) به $V_k(0) = 0$ کاهش می‌یابد. همچنین $V_k(x_t)$ نامحدود شعاعی خواهد بود. علاوه بر آن، روابط $V_k(x_t) >$ 0و $V_k(x_{t+k}) > V_k(x_t)$ که به عنوان تغییرات k نمونه‌ای شناخته می‌شوند همواره برقرار است [۱۶-۱۲].

هدف نویسندگان مقاله حاضر حل پیچیدگی طراحی کنترل کننده مقاوم H_∞ فیدبک خروجی برای سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو زمان گسسته دارای عدم قطعیت است. برای دستیابی به این هدف از لم ۴ استفاده می شود. لازم به ذکر است کنترل مقاوم H_∞ فیدبک خروجی نه با شروط لم ۴ و نه با تغییرات k نمونه‌ای در دیگر مقالات مورد بررسی قرار نگرفته است و برای اولین بار در این مقاله به آن پرداخته می‌شود.

۳- نتایج اصلی

در این بخش به حل مساله کنترل کننده توزیع شده موازی (PDC) با عملکرد H_∞ پرداخته شده است. برای طراحی کنترل کننده از تئوری لیاپانوف غیر یکنوا استفاده می شود.

فرمول‌بندی مساله کنترل فیدبک خروجی مقاوم H_∞ را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+1} &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_i(v_t)\,\mu_j(v_t)\{\hat{A}_{ij}\hat{x}_t + \hat{B}_j y_t\} \\ &= \hat{A}(v_t, v_t)\hat{x}_t + \hat{B}(v_t)y_t \\ u_t &= \textstyle\sum_{i=1}^{r}\mu_i(v_t)\{\hat{C}_j\hat{x}_t + \hat{D}_j y_t\} = \hat{C}(v_t)\hat{x}_t + \hat{D}(v_t)y_t\end{aligned} \qquad (۷)$$

در رابطه فوق، $\hat{x}_t \in R^n$ حالت‌های کنترل کننده و $\hat{A}_{ij}, \hat{B}_j, \hat{C}_j, \hat{D}_j$ دارای ابعاد مناسب اند بطوریکه سیستم توصیف شده با معادلات (۲) و (۷) و اغتشاش صفر، پایدار مجانبی فراگیر باشد و نامساوی زیر همراه با شرایط اولیه صفر را برآورده می‌کند:

$$\sum_{t=0}^{\infty} z_t^T z_t < \gamma \sum_{t=0}^{\infty}(w_t{}^T w_t) \qquad (۸)$$

سیستم حلقه بسته فازی تاکاگی-سوگنو رابطه (۲) با کنترل کننده توصیف شده با معادله (۷) بصورت رابطه ریاضی زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}\breve{x}_{t+1} &= \breve{A}(v_t)\breve{x}_t + \breve{B}(v_t)w_t \\ z_t &= \breve{C}(v_t)\breve{x}_t + \breve{D}(v_t)w_t\end{aligned} \qquad (۹)$$

در رابطه فوق داریم: $\breve{x}_t^T = [x_t^T \quad \hat{x}_t^T]$ همچنین:

$$\breve{A}(v_t) = \begin{bmatrix} A(v_t) + B_x(v_t)\hat{D}(v_t)C_y(v_t) + \Delta A(v_t) + \Delta B_x(v_t)\hat{D}(v_t)C_y(v_t) & B_x(v_t)\hat{C}(v_t) + \Delta B_x(v_t)\hat{C}(v_t) \\ \hat{B}(v_t)C_y(v_t) & \hat{A}(v_t, v_t)\end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

$$\breve{C}(v_t) = \begin{bmatrix} C_z(v_t) + B_z(v_t)\hat{D}(v_t)C_y(v_t) & B_z(v_t)\hat{C}(v_t)\end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

$$\breve{B}(v_t) = \begin{bmatrix} B_x(v_t)\hat{D}(v_t)D_y(v_t) + \Delta B_x(v_t)\hat{D}(v_t)D_y(v_t) + D_x(v_t) \\ \hat{B}(v_t)D_y(v_t)\end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

$$\breve{D}(v_t) = B_z(v_t)\hat{D}(v_t)D_y(v_t) \qquad (۱۳)$$

قضیه زیر شرایط کافی برحسب LMI برای وجود و طراحی کنترل کننده رابطه (۷) به کمک تابع لیاپانوف غیر یکنوا را تضمین می‌کند.

قضیه ۱: با فرض ثابت مشخص $\gamma > 0$ ، سیستم کنترل حلقه بسته (۹) پایدار مجانبی فراگیر است، اگر پارامتر اسکالر مثبت ρ_g ، مجموعه ماتریس های متقارن $\overline{\boldsymbol{P}}_{g,22}^{i_k}$ ، $\overline{\Pi}_{L,11}^{i_0 j_0 \dots i_L j_L}$ ، $\overline{\Pi}_{L,22}^{i_0 j_0 \dots i_L j_L}\overline{\boldsymbol{P}}_{g,11}^{i_k}$ و ماتریس های X ، Y ، Z ، $\overline{\Pi}_{L,21}^{i_0 j_0 \dots i_L j_L}$ ، $\overline{\boldsymbol{P}}_{g,21}^{i_k}$ که در آن $h \in K_{0,k-1}, i_0 \cdots i_k j_o \cdots j_{k-1} \in K_{1,r}, L \in K_{1,k-1}, g \in K_{1,k}$ وجود داشته باشند بطوریکه روابط زیر برقرار گردد:

$$\sum_{g=j}^{k} \overline{\boldsymbol{P}}_{g,i_h} > 0 \qquad \forall i_h \in K_{1,r}\ and\ j \in K_{1,k} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{cases} \Lambda_{g,ik-g^{ik-g}} < 0 \\ \frac{1}{r-1}\Lambda_{g,ik-g^{ik-g}} + \frac{1}{2}\big(\Lambda_{g,ik-g^{ik-g}} + \Lambda_{g,ik-g^{ik-g}}\big) < 0 \qquad \forall i_{k-g} \neq j_{k-g} \end{cases} \qquad (۱۵)$$

$$\overline{\mathbf{P}}_{g,i_h} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{P}}_{g,11}^{i_k} & \bullet \\ \overline{\mathbf{P}}_{g,21}^{i_k} & \overline{\mathbf{P}}_{g,22}^{i_k}\end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

$$\Lambda_{g,i_{k-g}j_{k-g}}=\begin{bmatrix}\Lambda_g^{11} & \bullet\\ \Lambda_g^{21} & \Lambda_g^{22}\\ 0_{dn} & 0_{dn}\\ C_{z,i_{k-g}}X+B_{z,i_{k-g}}\mathcal{C}_{j_{k-g}} & C_{z,i_{k-g}}+B_{z,i_{k-g}}\mathcal{D}_{j_{k-g}}C_{y,i_{k-g}}\\ A_{i_{k-g}}X+B_{x,i_{k-g}}\mathcal{C}_{j_{k-g}} & A_{i_{k-g}}+B_{x,i_{k-g}}\mathcal{D}_{j_{k-g}}C_{y,i_{k-g}}\\ \mathcal{A}_{i_{k-g},j_{k-g}} & YA_{i_{k-g}}+\mathcal{B}_{j_{k-g}}C_{y,i_{k-g}}\\ E_{i_{k-g}}^aX+E_{i_{k-g}}^b\mathcal{C}_{j_{k-g}} & E_{i_{k-g}}^a+E_{i_{k-g}}^b\mathcal{D}_{j_{k-g}}C_{y,i_{k-g}}\\ 0_{nn} & 0_{nn}\\ 0_{nn} & 0_{nn}\\ 0_{nn} & 0_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ -\gamma I_d & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ B_{z,i_{k-g}}\mathcal{D}_{j_{k-g}}D_{y,i_{k-g}} & -\gamma I_p & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ D_{x,i_{k-g}}+B_{x,i_{k-g}}\mathcal{D}_{j_{k-g}}D_{y,i_{k-g}} & 0_{np} & \Lambda_g^{55} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ YD_{x,i_{k-g}}+\mathcal{B}_{j_{k-g}}D_{y,i_{k-g}} & 0_{np} & \Lambda_g^{65} & \Lambda_g^{66} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ E_{i_{k-g}}^b\mathcal{D}_{j_{k-g}}D_{y,i_{k-g}} & 0_{np} & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_g I_n & \bullet & \bullet & \bullet\\ 0_{nd} & 0_{np} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_g I_n & \bullet & \bullet\\ 0_{nd} & 0_{np} & H^T & H^TY^T & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_g^{-1}I_n & \bullet\\ 0_{nd} & 0_{np} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_g^{-1}I_n\end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

$\Lambda_1^{11}=\overline{\Pi}_{k-1,11}^{i_0j_0\dots i_{k-1}j_{k-1}}-\overline{\mathbf{P}}_{k-1,11}^{i_{k-1}}$, $\Lambda_1^{21}=\overline{\Pi}_{k-1,21}^{i_0j_0\dots i_{k-1}j_{k-1}}-\overline{\mathbf{P}}_{k-1,21}^{i_{k-1}}$, $\Lambda_1^{22}=\overline{\Pi}_{k-1,22}^{i_0j_0\dots i_{k-1}j_{k-1}}-\overline{\mathbf{P}}_{k-1,22}^{i_{k-1}}$

$\Lambda_1^{55}=-X-X^T+\overline{\mathbf{P}}_{k,11}^{i_k}$, $\Lambda_1^{65}=-I_n-Z+\overline{\mathbf{P}}_{k,21}^{i_k}$, $\Lambda_1^{66}=-Y-Y^T+\overline{\mathbf{P}}_{k,22}^{i_k}$

$\Lambda_s^{11}=\overline{\Pi}_{k-s,11}^{i_0j_0\dots i_{k-s}j_{k-s}}-\overline{\mathbf{P}}_{k-s,11}^{i_{k-s}}$, $\Lambda_s^{21}=\overline{\Pi}_{k-s,21}^{i_0j_0\dots i_{k-s}j_{k-s}}-\overline{\mathbf{P}}_{k-s,21}^{i_{k-s}}$, $\Lambda_s^{22}=\overline{\Pi}_{k-s,22}^{i_0j_0\dots i_{k-s}j_{k-s}}-\overline{\mathbf{P}}_{k-s,22}^{i_{k-s}}$

$\Lambda_s^{55}=-X-X^T+\overline{\Pi}_{k-s+1,11}^{i_0j_0\dots i_{k-s+1}j_{k-s+1}}$, $\Lambda_s^{65}=-I_n-Z+\overline{\Pi}_{k-s+1,21}^{i_0j_0\dots i_{k-s+1}j_{k-s+1}}$,

$\Lambda_s^{66}=-Y-Y^T+\overline{\Pi}_{k-s+1,22}^{i_0j_0\dots i_{k-s+1}j_{k-s+1}}$, $s\in K_{2,k-1}$

$\Lambda_k^{11}=-\sum_{i=1}^k\overline{\mathbf{P}}_{i,11}^{i_0}$, $\Lambda_k^{21}=-\sum_{i=1}^k\overline{\mathbf{P}}_{i,21}^{i_0}$, $\Lambda_k^{22}=-\sum_{i=1}^k\overline{\mathbf{P}}_{i,22}^{i_0}$

$\Lambda_k^{55}=-X-X^T+\overline{\Pi}_{1,11}^{i_0j_0i_1j_1}$, $\Lambda_k^{65}=-I_n-Z+\overline{\Pi}_{1,21}^{i_0j_0i_1j_1}$, $\Lambda_k^{66}=-Y-Y^T+\overline{\Pi}_{1,22}^{i_0j_0i_1j_1}$

پارامترهای کنترل کننده $\hat{A}_{i_hj_h}\in R^{n\times n},\hat{B}_{i_h}\in R^{n\times P_y},\hat{C}_{i_h}\in R^{m\times n},\hat{D}_{i_h}\in R^{m\times P_y}$ رابطه (۷)، از روابط زیر بدست می آیند:

$$\begin{bmatrix}\hat{A}_{i_hj_h} & \hat{B}_{i_h}\\ \hat{C}_{i_h} & \hat{D}_{i_h}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M^{-1} & -M^{-1}YB_{i_h}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{i_hj_h}-YA_{i_h}X & B_{i_h}\\ C_{i_h} & D_{i_h}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N^{-1} & 0\\ -C_{y,i_h}XN^{-1} & I\end{bmatrix}$$

توجه شود که دو ماتریس ثابت ناویژه $N\in R^{n\times n},M\in R^{n\times n}$ را همیشه می‌توان یافت بگونه‌ای که $MN=Z-YX$ باشد.

اثبات: توابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\check{V}_g(\check{x}_t)\triangleq\check{x}_t^T\check{P}_g(v_t)\check{x}_t\qquad\forall g\in K_{1,k}\qquad(۱۸)$$

که:

$$\check{P}_g(v_t)=G^{-T}P_g(v_t)G^{-1}\qquad(۱۹)$$

از رابطه (۶.۴) داریم:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)=\sum_{g=1}^k\left(\check{x}_{t+g}^T\check{P}_g(v_{t+g})\check{x}_{t+g}-\check{x}_t^T\check{P}_g(v_t)\check{x}_t\right)\qquad(۲۰)$$

متغیر Π_L را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi_L\triangleq\sum_{i_L=1}^r\sum_{j_L=1}^r\dots\sum_{i_0=1}^r\sum_{j_0=1}^r\mu_{i_0}(v_t)\times\mu_{j_0}(v_t)\dots\mu_{i_L}(v_{t+L})\mu_{j_L}(v_{t+L})\Phi_{L,i_0j_0\dots i_Lj_L}\qquad(۲۱)$$

$$\check{\Pi}_L\triangleq G^{-T}\Pi_LG^{-1}\qquad(۲۲)$$

با استفاده از گام‌های زیر می‌توان نشان داد شرایط (۱۴) و (۱۵)، عملکرد H_∞ و پایداری سیستم حلقه بسته توصیف شده در رابطه (۹) را برآورده می‌سازند:

گام اول: با جمع و تفریق رابطه زیر،

$$\check{x}_{t+k-1}^T\check{\Pi}_{k-1}\check{x}_{t+k-1}+\frac{1}{\gamma}z_{t+k-1}^Tz_{t+k-1}-\gamma w_{t+k-1}^Tw_{t+k-1}$$

از $\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)$ که در رابطه (۲۰) تعریف شده و مرتب کردن جملات آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)&=\check{x}_{t+k}^T\check{P}_k(v_{t+k})\check{x}_{t+k}+\check{x}_{t+k-1}^T\check{P}_{k-1}(v_{t+k-1})\check{x}_{t+k-1}\\&-\check{x}_{t+k-1}^T\check{\Pi}_{k-1}\check{x}_{t+k-1}+\frac{1}{\gamma}z_{t+k-1}^Tz_{t+k-1}-\gamma w_{t+k-1}^Tw_{t+k-1}\\&+\check{x}_{t+k-1}^T\check{\Pi}_{k-1}\check{x}_{t+k-1}+\Delta_{k-2}\check{V}(\check{x}_t)-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=k-1}^k\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t\\&-\frac{1}{\gamma}z_{t+k-1}^Tz_{t+k-1}+\gamma w_{t+k-1}^Tw_{t+k-1}\end{aligned}\qquad(۲۳)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)=\zeta_{t+k-1}^T\check{\chi}_1\zeta_{t+k-1}+\check{x}_{t+k-1}^T\check{\Pi}_{k-1}\check{x}_{t+k-1}+\Delta_{k-2}\check{V}(\check{x}_t)$$
$$-\frac{1}{\gamma}z_{t+k-1}^Tz_{t+k-1}+\gamma w_{t+k-1}^Tw_{t+k-1}-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=k-1}^{k}\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t,$$
(۲۴)

لازم به ذکر است با استفاده از روابط (۱۸) و (۲۰) خواهیم داشت:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)=\Delta_{k-2}\check{V}(\check{x}_t)+\check{x}_{t+k}^T\check{P}_k(v_{t+k})\check{x}_{t+k}+$$
$$\check{x}_{t+k-1}^T\check{P}_{k-1}(v_{t+k-1})\check{x}_{t+k-1}-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=k-1}^{k}\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t.$$

با تعریف $\xi_t^T\triangleq[\check{x}_t^T\quad w_t^T]$ و جایگذاری جواب های $\check{x}_{t+k}$ و Z_{t+k-1} از رابطه (۹) در رابطه (۲۳) داریم:

در رابطه فوق داریم:

$$\check{\chi}_1=\begin{bmatrix}\check{\chi}_1^{11} & \check{\chi}_1^{12}\\ \bullet & \check{\chi}_1^{22}\end{bmatrix}$$
(۲۵)

$$\begin{aligned}\check{\chi}_1^{11}&=\check{A}^T(v_{t+k-1})\check{P}_k(v_{t+k})\check{A}(v_{t+k-1})-\check{\Pi}_{k-1}+\check{P}_{k-1}(v_{t+k-1})+\frac{1}{\gamma}\check{C}^T(v_{t+k-1})\check{C}(v_{t+k-1})\\ \check{\chi}_1^{12}&=\check{A}^T(v_{t+k-1})\check{P}_k(v_{t+k})\check{B}(v_{t+k-1})+\frac{1}{\gamma}\check{C}^T(v_{t+k-1})\check{D}(v_{t+k-1})\\ \check{\chi}_1^{22}&=\check{B}^T(v_{t+k-1})\check{P}_k(v_{t+k})\check{B}(v_{t+k-1})-\gamma I_d+\frac{1}{\gamma}\check{D}^T(v_{t+k-1})\check{D}(v_{t+k-1}).\end{aligned}$$
(۲۶)

در پیوست نشان داده شده است که اگر (۱۵) برای $g=1$ برقرار باشد آنگاه $\check{x}_1$ کوچکتر از صفر است. این به معنای آن است که $\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)$ در (۲۴) نامساوی زیر را برآورده می‌کند:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)<\check{x}_{t+k-1}^T\check{\Pi}_{k-1}\check{x}_{t+k-1}+\Delta_{k-2}\check{V}(\check{x}_t)$$
$$-\frac{1}{\gamma}z_{t+k-1}^Tz_{t+k-1}+\gamma w_{t+k-1}^Tw_{t+k-1}-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=k-1}^{k}\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t.$$
(۲۷)

گام دوم: با جمع و تفریق کردن عبارت $\check{x}_{t+k-2}^T\check{\Pi}_{k-2}\check{x}_{t+k-2}+\frac{1}{\gamma}z_{t+k-2}^Tz_{t+k-2}-\gamma w_{t+k-2}^Tw_{t+k-2}$ از رابطه (۲۷) داریم:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)<\check{x}_{t+k-1}^T\check{\Pi}_{k-1}\check{x}_{t+k-1}+\check{x}_{t+k-2}^T\check{P}_{k-2}(v_{t+k-2})\check{x}_{t+k-2}$$
$$-\check{x}_{t+k-2}^T\check{\Pi}_{k-2}\check{x}_{t+k-2}+\frac{1}{\gamma}z_{t+k-2}^Tz_{t+k-2}-\gamma w_{t+k-2}^Tw_{t+k-2}$$
$$+\check{x}_{t+k-2}^T\check{\Pi}_{k-2}\check{x}_{t+k-2}+\Delta_{k-3}\check{V}(\check{x}_t)$$
$$-\sum_{g=k-2}^{k-1}\left(\frac{1}{\gamma}z_{t+g}^Tz_{t+g}-\gamma w_{t+g}^Tw_{t+g}\right)-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=k-2}^{k}\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t.$$
(۲۸)

با جایگذاری $\check{x}_{t+k-1}$ و Z_{t+k-2} از رابطه (۹) در رابطه (۲۸) داریم:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)<\zeta_{t+k-2}^T\check{\chi}_2\zeta_{t+k-2}+\check{x}_{t+k-2}^T\check{\Pi}_{k-2}\check{x}_{t+k-2}+\Delta_{k-3}\check{V}(\check{x}_t)$$
$$-\sum_{g=k-2}^{k-1}\left(\frac{1}{\gamma}z_{t+g}^Tz_{t+g}-\gamma w_{t+g}^Tw_{t+g}\right)-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=k-2}^{k}\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t$$
(۲۹)

متغیرهای رابطه (۲۹) به صورت روابط (۳۰) و (۳۱) تعریف می‌شوند.

$$\check{\chi}_2=\begin{bmatrix}\check{\chi}_2^{11} & \check{\chi}_2^{12}\\ \bullet & \check{\chi}_2^{22}\end{bmatrix}$$
(۳۰)

$$\begin{aligned}\check{\chi}_2^{11}&=\check{A}^T(v_{t+k-2})\check{\Pi}_{k-1}\check{A}(v_{t+k-2})-\check{\Pi}_{k-2}+\check{P}_{k-2}(v_{t+k-2})+\frac{1}{\gamma}\check{C}^T(v_{t+k-2})\check{C}(v_{t+k-2})\\ \check{\chi}_2^{12}&=\check{A}^T(v_{t+k-2})\check{\Pi}_{k-1}\check{B}(v_{t+k-2})+\frac{1}{\gamma}\check{C}^T(v_{t+k-2})\check{D}(v_{t+k-2})\\ \check{\chi}_2^{22}&=\check{B}(v_{t+k-2})\check{\Pi}_{k-1}\check{B}(v_{t+k-2})-\gamma I_d+\frac{1}{\gamma}\check{D}^T(v_{t+k-2})\check{D}(v_{t+k-2}).\end{aligned}$$
(۳۱)

با دنبال کردن مراحل مشابه گام ۱ در پیوست، اگر رابطه (۱۵) برای $g=2$ برقرار باشد آنگاه $\check{\chi}_2<0$ خواهد بود. همچنین از رابطه (۲۹) خواهیم داشت:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)<\check{x}_{t+k-2}^T\check{\Pi}_{k-2}\check{x}_{t+k-2}+\Delta_{k-3}\check{V}(\check{x}_t)$$
$$-\sum_{g=k-2}^{k-1}\left(\frac{1}{\gamma}z_{t+g}^Tz_{t+g}-\gamma w_{t+g}^Tw_{t+g}\right)-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=k-2}^{k}\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t.$$
(۳۲)

با تکرار این گام‌ها تا $k-1$ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)<\check{x}_{t+1}^T\check{\Pi}_1\check{x}_{t+1}-\check{x}_t^T\left(\sum_{g=1}^{k}\check{P}_g(v_t)\right)\check{x}_t$$
$$-\sum_{g=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\gamma}z_{t+g}^Tz_{t+g}-\gamma w_{t+g}^Tw_{t+g}\right).$$
(۳۳)

گام kام: با جمع و تفریق عبارت $\frac{1}{\gamma}z_t^Tz_t-\gamma w_t^Tw_t$ از رابطه (۳۳) و جایگذاری جواب $\check{x}_{t+1}$ و z_t از رابطه (۹) در رابطه (۳۳) داریم:

$$\Delta_k\check{V}(\check{x}_t)<\zeta_t^T\check{\chi}_k\zeta_t-\sum_{g=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\gamma}z_{t+g}^Tz_{t+g}-\gamma w_{t+g}^Tw_{t+g}\right)$$
(۳۴)

که در آن

$$\check{\chi}_k=\begin{bmatrix}\check{\chi}_k^{11} & \check{\chi}_k^{12}\\ \bullet & \check{\chi}_k^{22}\end{bmatrix}$$
(۳۵)

$$\begin{aligned}\check{\chi}_k^{11}&=\check{A}^T(v_t)\check{\Pi}_1\check{A}(v_t)-\sum_{g=1}^{k}\check{P}_g(v_t)+\frac{1}{\gamma}\check{C}^T(v_t)\check{C}(v_t)\\ \check{\chi}_k^{12}&=\check{A}^T(v_t)\check{\Pi}_1\check{B}(v_t)+\frac{1}{\gamma}\check{C}^T(v_t)\check{D}(v_t)\\ \check{\chi}_k^{22}&=\check{B}(v_t)\check{\Pi}_1\check{B}(v_t)-\gamma I_d+\frac{1}{\gamma}\check{D}^T(v_t)\check{D}(v_t)\end{aligned}$$
(۳۶)

بطور مشابه می‌توان نشان داد که اگر رابطه (۱۴) برای $g=k$ برقرار باشد آنگاه $\check{x}_k<0$ خواهد بود. بنابراین از رابطه (۳۴) خواهیم داشت:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

$$\Delta_k \check{V}(\check{x}_t) + \sum_{g=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\gamma} z_{t+g}^T z_{t+g} - \gamma w_{t+g}^T w_{t+g} \right) < 0 \quad (۳۷)$$

با اعمال جمع از $t = -k$ تا $t = \infty$ از دو طرف رابطه (۳۷)، همچنین استفاده از رابطه (۲۰) داریم:

$$\sum_{t=-k}^{\infty} \sum_{g=0}^{k-1} \left(\check{V}_{g+1}(\check{x}_{t+g+1}) - \check{V}_{g+1}(\check{x}_t) + \frac{1}{\gamma} z_{t+g}^T z_{t+g} - \gamma w_{t+g}^T w_{t+g} \right) < 0 \quad (۳۸)$$

با بسط رابطه (۳۸) و بازنویسی جملات آن به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{g=j}^{k-1} \check{V}_{g+1}(\check{x}_\infty) - \check{V}_{g+1}(\check{x}_{g-k}) \right) + \sum_{g=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{t=-k}^{\infty} z_{t+g}^T z_{t+g} - \gamma \sum_{t=-k}^{\infty} w_{t+g}^T w_{t+g} \right) < 0 \quad (۳۹)$$

اگر شرایط اولیه صفر $(\check{x}_0 = \check{x}_{-1} = \ldots = \check{x}_{-k} = 0)$ و $w_t \in L_2[0, \infty]$ غیر صفر باشد خواهیم داشت $\check{V}_{g+1}(\check{x}_{g-k}) = 0$ بنابراین:

$$\left(\sum_{g=j}^{k-1} \check{V}_{g+1}(\check{x}_\infty) \right) + k \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{t=0}^{\infty} z_t^T z_t - \gamma \sum_{t=0}^{\infty} w_t^T w_t \right) < 0 \quad (۴۰)$$

از طرف دیگر، می‌دانیم به ازای تمام $g \in K_{1,r}$ داریم: $\mu_g(v_t) \geq 0$ و $\sum_{g=1}^{r} \mu_g(v_t) = 1$. بنابراین اگر رابطه (۱۴) برقرار باشد آنگاه به ازای $j \in K_{1,k}$ رابطه $\sum_{g=i}^{k} \overline{\boldsymbol{P}}_g(v_t) > 0$ نیز برقرار خواهد بود. از روابط (۱۹) و (۶۸) در پیوست می‌توان نشان داد به ازای $j \in K_{1,k}$ داریم: $\sum_{g=i}^{k} \check{\boldsymbol{P}}_g(v_t) > 0$. پس از رابطه (۱۸) می‌توان رابطه زیر را نتیجه گرفت:

$$\sum_{g=j}^{k} \check{V}_g(\check{x}_t) > 0 \ , \forall j \in K_{1,k} \quad (۴۱)$$

با توجه به رابطه (۴۱)، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که رابطه $\sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{g=j}^{k-1} \check{V}_{g+1}(\check{x}_\infty) \right) > 0$ همواره برقرار خواهد بود. درنتیجه رابطه (۴۰) بصورت $\frac{1}{\gamma} \sum_{t=0}^{\infty} z_t^T z_t - \gamma \sum_{t=0}^{\infty} w_t^T w_t < 0$ ساده خواهد شد. این خود دلالت بر آن است که عملکرد H_∞ ذکر شده در رابطه (۸) برآورده شده است.

در ادامه نشان می‌دهیم سیستم حلقه بسته (۹) پایدار مجانبی فراگیراست وقتی اغتشاش $w_t = 0$ باشد. در رابطه (۳۷) اگر $w_t = 0$ آنگاه $\Delta_k \check{V}(\check{x}_t) + \frac{1}{\gamma} \sum_{g=0}^{k} z_{t+g}^T z_{t+g} < 0$ خواهد بود. این یعنی $\Delta_k \check{V}(\check{x}_t) < 0$. بنابراین بر اساس لم ۴ سیستم حلقه بسته ۹ پایدار مجانبی فراگیر است. لازم است وجود N^{-1} و M^{-1} نیز بررسی شود. اگر رابطه (۱۴) برای $g = k$ برقرار باشد آنگاه:

$$\begin{bmatrix} -X - X^T + \overline{\mathbf{P}}_{k,11}^{i_k} & \bullet \\ -I_n - Z + \overline{\mathbf{P}}_{k,21}^{i_k} & -Y - Y^T + \overline{\mathbf{P}}_{k,22}^{i_k} \end{bmatrix} < 0 \quad (۴۲)$$

و این خود بیانگر آن است که:

$$\begin{bmatrix} -X - X^T + \overline{\mathbf{P}}_{k,11}(v_t) & \bullet \\ -I_n - Z + \overline{\mathbf{P}}_{k,21}(v_t) & -Y - Y^T + \overline{\mathbf{P}}_{k,22}(v_t) \end{bmatrix} < 0 \quad (۴۳)$$

می‌دانیم عبارت $\sum_{g=j}^{k} \overline{\mathbf{P}}_g(v_t) > 0$ برای همه $j \in K_{1,k}$ برقرار است. فرض کنیم $j = k$، بنابراین داریم:

$$\overline{\mathbf{P}}_k(v_t) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{P}}_{k,11}(v_t) & \bullet \\ \overline{\mathbf{P}}_{k,21}(v_t) & \overline{\mathbf{P}}_{k,22}(v_t) \end{bmatrix} > 0 \quad (۴۴)$$

از روابط (۴۳) و (۴۴) داریم:

$$\begin{bmatrix} X + X^T & \bullet \\ I_n + Z & Y + Y^T \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{P}}_{k,11}(v_t) & \bullet \\ \overline{\mathbf{P}}_{k,21}(v_t) & \overline{\mathbf{P}}_{k,22}(v_t) \end{bmatrix} > 0 \quad (۴۵)$$

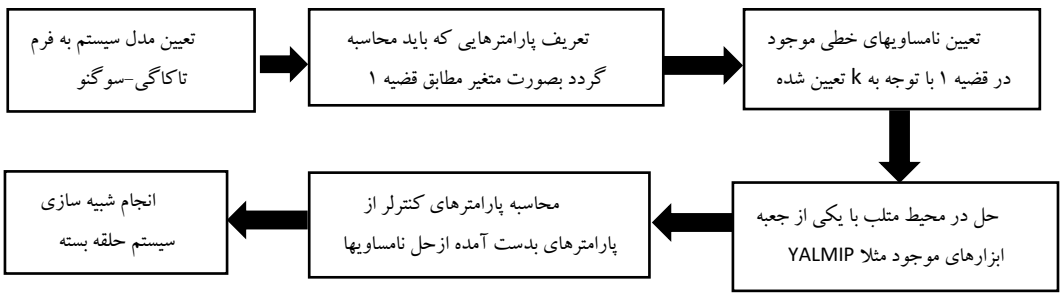
در نتیجه X و Y ناویژه اند. با ضرب رابطه (۴۵) به ترتیب از چپ و راست در $[X^{-T} \quad I_n]$ و ترانهاده آن خواهیم داشت:
$(Z - YX)X^{-1} + X^{-T}(Z - YX)^T < 0$. این رابطه بیانگر آن است که $Z - YX$ تکین است. درنتیجه ماتریس‌های تکین M و N وجود خواهند داشت به طوریکه $MN = Z - YX$. به این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.

نکته ۲: قضیه ۱ شامل kr تا LMI، با اندازه $2n$ تا n_L تا LMI با ابعاد $8n+d+p$ و $n_p + n_c + n_{II} + 3n^2 + 1$ متغیر اسکالر است که در آن $n_p = rkn(2n+1)$ و $n_c = r\left(rn^2 + nm + np_y + mp_y\right)$، همچنین:

$$n_L = \begin{cases} r^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-2} \left(r^{4+2i} \right) & k > 1 \\ r^4 & k = 1 \end{cases} \quad (۴۶)$$

$$n_\Pi = \begin{cases} n(2n+1) \sum_{i=0}^{k-2} \left(r^{4+2i} \right) & k > 1 \\ 0 & k = 1 \end{cases} \quad (۴۷)$$

نکته ۳: در قضیه ۱ اگر $\overline{\boldsymbol{P}}_{g,11}^{i_h}$ ، $\overline{\boldsymbol{P}}_{g,22}^{i_h}$ و $\overline{\boldsymbol{P}}_{g,21}^{i_h}$ برای تمام $g = 1, \cdots, k-1$ صفر قرار داده شود آنگاه این روش به روش تغییر k نمونه ای مقاله های [۱۶-۱۲] تقلیل می‌یابد. این به معنای آن است که روش ارائه شده در این مقاله متغیرهای تصمیم‌گیری بیشتری دارد. اما به تبع آن حجم محاسبات نیز افزایش خواهد یافت. در ادامه در بخش شبیه‌سازی به این مساله پرداخته شده است. بلوک دیاگرام روش پیشنهادی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: دیاگرام روش پیشنهادی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

٤- نتایج شبیه سازی

در این قسمت با یک مثال نشان می‌دهیم روش لیاپانوف غیر یکنوای ارائه شده در این مقاله، کنترل طراحی شده فیدبک خروجی عملکرد H_∞ را بهبود و محافظه‌کاری را کاهش خواهد داد.

مثال: سیستم فازی تاکاگی-سوگنو ناپایدار به فرم (۱) را در نظر می‌گیریم:

$A_1 = \begin{bmatrix} -1.9 & -3.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.8 \\ 0.58 & 0.69 \end{bmatrix}, B_{x,1} = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.92 \end{bmatrix},$
$B_{x,2} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.21 \end{bmatrix}, \quad D_{x,1} = D_{x,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C_{y,1} = C_{y,2} =$
$[1 \quad 0], D_{y,1} = D_{y,2} = 0,$
$C_{z,1} = C_{z,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{z,1} = B_{z,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H = 0.1I_2,$
$F(x_t, t) = rand(1)I_2, E_1^a = E_2^a = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad E_1^b =$
$\begin{bmatrix} 0.06 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2^b = \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0 \end{bmatrix}.$

برای شبیه‌سازی فرض می‌کنیم: $v_1(t) = x_1(t)$، همچنین فرض می‌کنیم $\mu_1(v_1(t)) = 0.5 + \cos(v_1(t))$. $\mu_2(v_1(t)) = 1 - \mu_1(v_1(t))$ سیگنال اغتشاش w_t نیز یک موج مربعی با دامنه ۰.۹ و فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. هدف، طراحی کنترل فیدبک خروجی مقاوم H_∞ به ازای دو حالت زیر است:

حالت اول: روش ارائه شده در قضیه ۱

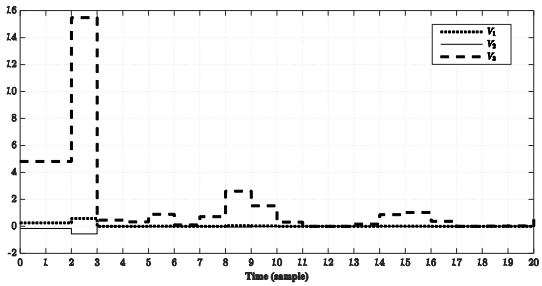
حالت دوم: روش تغییرات k نمونه‌ای [۱۶-۱۲]

برای هر دو حالت فوق، عملکرد H_∞ بهینه، γ_{min}، به ازای $K = 1,2,3$محاسبه شده است. در این محاسبات مقادیر پارامترهای ρ_1، ρ_2 و ρ_3 برابر ۰.۱ در نظر گرفته شده‌اند. در جدول (۱) مقادیر بهینه γ_{min} به ازای K های مختلف نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود γ_{min} بدست آمده با استفاده از روش پیشنهادی، کوچکتر از روش تغییرات k نمونه‌ای ارائه شده در مراجع [۱۶-۱۲] است. با توجه به اینکه مقادیر γ_{min} کوچکتر به منزله محافظه کاری کمتر است، بنابراین نتایج تئوری روش ارائه شده در این مقاله تایید می شود. در این جدول، تعداد LMIها و متغیرهای اسکالر در هر دو حالت برای مقادیر مختلف K نیز نشان داده شده است. تعداد LMI ها و متغیرهای اسکالر، رابطه ریاضی ذکر شده در نکته ۲ را به ازای $r = 2, n = 2, d = p_y = 1$و $1, m = 1, p = 2$ تایید می‌کند.

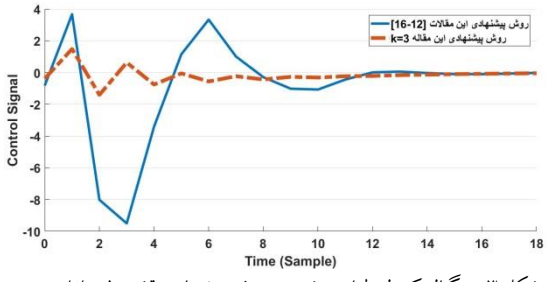
برای شبیه‌سازی سیستم حلقه بسته، شرایط اولیه را برابر $x_0 = (1, -1)$ و $\hat{x}_0 = (1, -1)$ در نظر گرفته‌ایم. با کنترل کننده ارائه شده در قضیه ۱، منحنی تغییرات $\check{V}_3(\check{x}_t), \check{V}_2(\check{x}_t), \check{V}_1(\check{x}_t)$, برای $k = 3$ در شکل ۲ رسم شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که $\check{V}_3(\check{x}_t) >$ 0اما $\check{V}_1(\check{x}_t)$ و $\check{V}_2(\check{x}_t)$ مثبت معین نیستند. بعلاوه برای تعدادی از نمونه‌ها متغیر $\check{V}_3(\check{x}_t)$ افزایش می‌یابد اما در نهایت همه آنها به سمت صفر میل می‌کنند. همانطور که مشاهده می‌شود کنترل کننده پیشنهادی می‌تواند بطور موثری پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین نماید.

جدول ۱: مقدار γ_{min}، تعداد متغیرهای اسکالر و LMIها برای حالت‌های مختلف

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
روش پیشنهادی این مقاله مطابق قضیه ۱	$\gamma_{min} = 5.8664$ 2 *LMIs of* 4×4 8 *LMIs of* 19×19 59 *variables*	$\gamma_{min} = 5.2244$ 4 *LMIs of* 4×4 48 *LMIs of* 19×19 239 *variables*	$\gamma_{min} = 4.8902$ 6 *LMIs of* 4×4 208 *LMIs of* 19×19 899 *variables*
روش تغییرات k نمونه‌ای ارائه شده در مراجع [۱۶-۱۲]		$\gamma_{min} = 5.3725$ 2 *LMIs of* 4×4 48 *LMIs of* 19×19 219 *variables*	$\gamma_{min} = 5.0034$ 2 *LMIs of* 4×4 208 *LMIs of* 19×19 859 *variables*



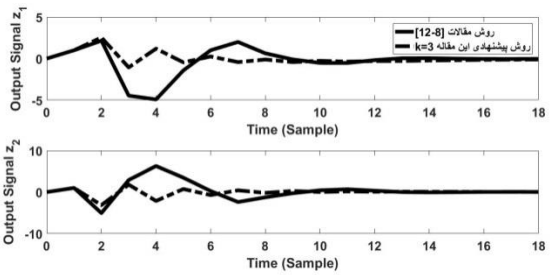
شکل ۲: مقادیر متغیرهای $\hat{V}_3(\check{x}_t)$و $\hat{V}_1(\check{x}_t)$ $\hat{V}_2(\check{x}_t)$ به ازای $k = 3$



شکل ۳: سیگنال کنترل طراحی شده به روش پیشنهادی قضیه ۱ به ازای $k = 3$ و روش پیشنهادی مراجع[۱۶-۱۲]

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

هچنین در شکل (۳) و (۴) به ترتیب سیگنال کنترل و سیگنالهای خروجی کنترل شونده به روش پیشنهادی قضیه ۱ به ازای $k=3$ و روش پیشنهادی مراجع [۱۶-۱۲] به منظور مقایسه ترسیم شده اند.



شکل ۴: سیگنالهای خروجی کنترل شونده به روش پیشنهادی قضیه ۱ به ازای $k=3$ و روش پیشنهادی مراجع[۱۶-۱۲]

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله تابع لیاپانوف غیر یکنوای در فرم کلی تر تعمیم داده شده جهت طراحی کنترل فیدبک خروجی مقاوم H_∞ برای سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو دارای عدم قطعیت در حضور اغتشاش ناشناخته استفاده شد. شرایط کافی بر حسب LMI برای وجود کنترل کننده مقاوم H_∞ ارائه گشت. در پایان نیز با یک مثال عددی نشان دادیم کنترل کننده پیشنهادی می‌تواند علاوه بر کاهش سطح محافظه‌کاری، عملکرد H_∞ را بهبود بخشد.

پیوست

با در نظر گرفتن $g=1$، خواهیم داشت: $\breve{\chi}_1<0$. با ضرب رابطه (۲۸) از سمت راست و چپ در عبارت $diag(G^T,I)$ و ترانهاده آن، داریم:

$$\Xi_1=\begin{bmatrix}\Xi_1^{11} & \Xi_1^{12}\\ \bullet & \breve{\chi}_1^{22}\end{bmatrix} \qquad (۴۸)$$

در رابطه (۴۸) داریم:

$$\begin{aligned}\Xi_1^{11}&=G^T\breve{A}^T(v_{t+k-1})\breve{P}_k(v_{t+k})\breve{A}(v_{t+k-1})G-\Pi_{k-1}+P_{k-1}(v_{t+k-1})+\frac{1}{\gamma}G^T\breve{C}^T(v_{t+k-1})\breve{C}(v_{t+k-1})G\\ \Xi_1^{12}&=G^T\breve{A}^T(v_{t+k-1})\breve{P}_k(v_{t+k})\breve{B}(v_{t+k-1})+\frac{1}{\gamma}G^T\breve{C}^T(v_{t+k-1})\breve{D}(v_{t+k-1})\end{aligned} \qquad (۴۹)$$

بنابراین اگر $\Xi_1<0$، آنگاه $\breve{\chi}_1<0$ خواهد شد. با استفاده از مکمل Schur، عبارت $\Xi_1<0$ زمانی برقرار خواهد شد که رابطه (۵۰) برقرار گردد.

$$\begin{bmatrix}-\Pi_{k-1}+P_{k-1}(v_{t+k-1}) & \bullet & \bullet & \bullet\\ 0 & -\gamma I & \bullet & \bullet\\ \breve{C}(v_{t+k-1})G & \breve{D}(v_{t+k-1}) & -\gamma I & \bullet\\ \breve{A}(v_{t+k-1})G & \breve{B}(v_{t+k-1}) & 0 & -\breve{P}_{t+k}^{-1}\end{bmatrix}<0 \qquad (۵۰)$$

طبق لم ۱، در رابطه (۵۰) داریم: $-\breve{P}_{t+k}^{-1}\le -G^T-G+P_k(v_{t+k})$. بنابراین شرط برقراری رابطه (۵۰) آن است که رابطه (۵۱) برقرار گردد.

$$\Upsilon_1=\begin{bmatrix}-\Pi_{k-1}+P_{k-1}(v_{t+k-1}) & \bullet & \bullet & \bullet\\ 0 & -\gamma I & \bullet & \bullet\\ \breve{C}(v_{t+k-1})G & \breve{D}(v_{t+k-1}) & -\gamma I & \bullet\\ \breve{A}(v_{t+k-1})G & \breve{B}(v_{t+k-1}) & 0 & -G^T-G+P_k(v_{t+k})\end{bmatrix}<0. \qquad (۵۱)$$

تعریف $\breve{A}(v_t)\triangleq\bar{A}(v_t)+\bar{H}\bar{F}_t\bar{E}_t^a$ و $\breve{B}(v_t)\triangleq\bar{B}(v_t)+\bar{H}\bar{F}_t\bar{E}_t^b$ داریم:

$$\tilde{H}\triangleq\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\bar{H}&0&0&0\end{bmatrix} \qquad (۵۲)$$

$$\tilde{F}_t\triangleq\begin{bmatrix}\bar{F}_t&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad (۵۳)$$

$$\tilde{E}_t\triangleq\begin{bmatrix}\bar{E}_t^aG & \bar{E}^b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۵۴)$$

که

$$\bar{A}(v_t)=\begin{bmatrix}A(v_t)+B_x(v_t)\hat{D}(v_t)C_y(v_t) & B_x(v_t)\hat{C}(v_t)\\ \hat{B}(v_t)C_y(v_t) & \hat{A}(v_t,v_t)\end{bmatrix} \qquad (۵۵)$$

$$\bar{B}(v_t)=\begin{bmatrix}B_x(v_t)\hat{D}(v_t)D_y(v_t)+D_x(v_t)\\ \hat{B}(v_t)D_y(v_t)\end{bmatrix} \qquad (۵۶)$$

$$\bar{H}=\begin{bmatrix}H&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad (۵۷)$$

$$\bar{F}_t=\begin{bmatrix}F_t&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad (۵۸)$$

$$\bar{E}_t^a=\begin{bmatrix}E^a(v_t)+E^b(v_t)\hat{D}(v_t)C_y(v_t) & E^b(v_t)\hat{C}(v_t)\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۵۹)$$

$$\bar{E}_t^b=\begin{bmatrix}E^b(v_t)\hat{D}(v_t)D_y(v_t)\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۶۰)$$

با توجه به روابط فوق، Υ_1 را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$\Upsilon_1=\Upsilon_0+\tilde{H}\tilde{F}_{t+k-1}\tilde{E}_{t+k-1}+\left(\tilde{H}\tilde{F}_{t+k-1}\tilde{E}_{t+k-1}\right)^T \qquad (۶۱)$$

در رابطه فوق:

$$\Upsilon_0\triangleq\begin{bmatrix}-\Pi_{k-1}+P_{k-1}(v_{t+k-1}) & \bullet & \bullet & \bullet\\ 0 & -\gamma I & \bullet & \bullet\\ \breve{C}(v_{t+k-1})G & \breve{D}(v_{t+k-1}) & -\gamma I & \bullet\\ \bar{A}(v_{t+k-1})G & \breve{B}(v_{t+k-1}) & 0 & \begin{pmatrix}-G^T-G\\+P_k(v_{t+k})\end{pmatrix}\end{bmatrix}. \qquad (۶۲)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

با استفاده از لم ۲، در صورت برقرار بودن رابطه (۶۳)، رابطه (۵۴) نیز برقرار خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -\Pi_{k-1}+P_{k-1}(v_{t+k-1}) \\ +\rho_1^{-1}G^T\bar{E}^{aT}_{t+k-1}\bar{E}^{a}_{t+k-1}G \end{pmatrix} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \rho_1^{-1}\bar{E}^{bT}_{t+k-1}\bar{E}^{a}_{t+k-1}G & \rho_1^{-1}\bar{E}^{bT}_{t+k-1}\bar{E}^{b}_{t+k-1}-\gamma I & \bullet & \bullet \\ \check{C}(v_{t+k-1})G & \check{D}(v_{t+k-1}) & -\gamma I & \bullet \\ \bar{A}(v_{t+k-1})G & \bar{B}(v_{t+k-1}) & 0 & -G^T-G+P_k(v_{t+k})+\rho_1\bar{H}\bar{H}^T \end{bmatrix} < 0. \qquad (۶۳)$$

با اعمال مکمل Schur بر روی رابطه (۶۳)، این رابطه معادل رابطه (۶۴) خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} -\Pi_{k-1}+P_{k-1}(v_{t+k-1}) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & -\gamma I & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \check{C}(v_{t+k-1})G & \check{D}(v_{t+k-1}) & -\gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bar{A}(v_{t+k-1})G & \bar{B}(v_{t+k-1}) & 0 & -G^T-G+P_k(v_{t+k}) & \bullet & \bullet \\ \bar{E}^a(v_{t+k-1})G & \bar{E}^b(v_{t+k-1}) & 0 & 0 & -\rho_1 I & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bar{H}^T & 0 & -\rho_1^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۶۴)$$

تا اینجا نشان داده شد در صورت برقرار بودن رابطه (۶۴)، $\check{\chi}_1$ کمتر از صفر خواهد شد. فرض کنیم ماتریس‌های $G, S, P_g(v_{t+g})G, G^{-1}$ و Π_L به فرم زیر تعریف شوند.

$$G \triangleq \begin{bmatrix} X & T_1 \\ N & T_2 \end{bmatrix}, G^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} Y^T & T_3 \\ M^T & T_4 \end{bmatrix}, S \triangleq \begin{bmatrix} I & Y^T \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \quad (۶۵)$$

$$P_g(v_{t+g}) \triangleq \begin{bmatrix} P_{g,11}(v_{t+g}) & \bullet \\ P_{g,21}(v_{t+g}) & P_{g,22}(v_{t+g}) \end{bmatrix} (۶۶)$$

$$\Pi_L \triangleq \begin{bmatrix} \Pi_{L,11} & \bullet \\ \Pi_{L,21} & \Pi_{L,22} \end{bmatrix} (۶۷)$$

در روابط فوق، T_1 تا T_4، تاثیری بر نتیجه نهایی نخواهند داشت [۱۷].

برای خطی سازی رابطه غیرخطی (۶۴)، تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم.

$$S^T P_g(v_{t+g})S \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{g,11}(v_{t+g}) & \bullet \\ \bar{\mathbf{P}}_{g,21}(v_{t+g}) & \bar{\mathbf{P}}_{g,22}(v_{t+g}) \end{bmatrix}, \qquad (۶۸)$$

$$S^T\Pi_L S \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Pi}}_{L,11} & \bullet \\ \bar{\mathbf{\Pi}}_{L,21} & \bar{\mathbf{\Pi}}_{L,22} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i_L=1}^{r}\sum_{j_L=1}^{r}\cdots\sum_{i_0=1}^{r}\sum_{j_0=1}^{r}\mu_{i_0}(v_t)\mu_{j_0}(v_t)\ldots\mu_{i_L}(v_{t+L})\mu_{j_L}(v_{t+L})\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{L,11}^{i_0j_0\ldots i_Lj_L} & \bullet \\ \bar{\Pi}_{L,21}^{i_0j_0\ldots i_Lj_L} & \bar{\Pi}_{L,22}^{i_0j_0\ldots i_Lj_L} \end{bmatrix} \qquad (۶۹)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(v_t,v_t) & \mathcal{B}(v_t) \\ \mathcal{C}(v_t) & \mathcal{D}(v_t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} M & YB_x(v_t) \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{A}(v_t,v_t) & \hat{B}(v_t) \\ \hat{C}(v_t) & \hat{D}(v_t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N & 0 \\ C_y(v_t)X & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} YA(v_t)X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۰)$$

به سادگی می‌توان نشان داد:

$$GS = \begin{bmatrix} X & I \\ N & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۱)$$

$$S^T\{G+G^T\}S = \begin{bmatrix} X+X^T & I+Z^T \\ I+Z & Y+Y^T \end{bmatrix}. \qquad (۷۲)$$

$$\check{C}(v_t)GS = [C_z(v_t)X + B_z(v_t)\mathcal{C}(v_t) \quad C_z(v_t)+B_z(v_t)\mathcal{D}(v_t)C_y(v_t)] \qquad (۷۳)$$

$$\bar{E}^a(v_t)GS = \begin{bmatrix} E^a(v_t)X + E^b(v_t)\mathcal{C}(v_t) & E^a(v_t)+E^b(v_t)\mathcal{D}(v_t)C_y(v_t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۴)$$

$$\bar{E}^b(v_t) = \begin{bmatrix} E^b(v_t)\mathcal{D}(v_t)D_y(v_t) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۵)$$

$$\bar{H}^T S = \begin{bmatrix} H^T & H^TY^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۶)$$

$$S^T\bar{B}(v_t) = \begin{bmatrix} B_x(v_t)\mathcal{D}(v_t)D_y(v_t)+D_x(v_t) \\ YD_x(v_t)+\mathcal{B}(v_t)D_y(v_t) \end{bmatrix} \qquad (۷۷)$$

$$S^T\bar{A}(v_t)GS = \begin{bmatrix} A(v_t)X & A(v_t) \\ \mathcal{A}(v_t,v_t) & YA(v_t)+\mathcal{B}(v_t)C_y(v_t) \end{bmatrix} \qquad (۷۸)$$

$$\check{D}(v_t) = B_z(v_t)\mathcal{D}(v_t)D_y(v_t) \qquad (۷۹)$$

با ضرب رابطه (۶۴) از راست و چپ در $diag(S^T, I, I, S^T, I, I)$ و ترانهاده آن، رابطه (۶۴) در صورتی برقرار خواهد شد اگر و تنها اگر رابطه (۸۰) برقرار باشد:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

$$\begin{bmatrix}
\bar{\mathbf{\Pi}}_{k-1,11}-\bar{\mathbf{P}}_{k-1,11}(v_{t+k-1}) & \bullet & \bullet \\
\bar{\mathbf{\Pi}}_{k-1,21}-\bar{\mathbf{P}}_{k-1,21}(v_{t+k-1}) & \bar{\mathbf{\Pi}}_{k-1,22}-\bar{\mathbf{P}}_{k-1,22}(v_{t+k-1}) & \bullet \\
0_{dn} & 0_{dn} & -\gamma I_d \\
C_z(v_{t+k-1})X+B_z(v_{t+k-1})\mathcal{C}(v_{t+k-1}) & C_z(v_{t+k-1})+B_z(v_{t+k-1})\mathcal{D}(v_{t+k-1})C_y(v_{t+k-1}) & B_z(v_{t+k-1})\mathcal{D}(v_{t+k-1})D_y(v_{t+k-1}) \\
A(v_{t+k-1})X+B_x(v_{t+k-1})\mathcal{C}(v_{t+k-1}) & A(v_{t+k-1})+B_x(v_{t+k-1})\mathcal{D}(v_{t+k-1})C_y(v_{t+k-1}) & D_x(v_{t+k-1})+B_x(v_{t+k-1})\mathcal{D}(v_{t+k-1})D_y(v_{t+k-1}) \\
\mathcal{A}(v_{t+k-1},v_{t+k-1}) & YA(v_{t+k-1})+\mathcal{B}(v_{t+k-1})C_y(v_{t+k-1}) & YD_x(v_{t+k-1})+\mathcal{B}(v_{t+k-1})D_y(v_{t+k-1}) \\
E^a(v_{t+k-1})X+E^b(v_{t+k-1})\mathcal{C}(v_{t+k-1}) & E^a(v_{t+k-1})+E^b(v_{t+k-1})\mathcal{D}(v_{t+k-1})C_y(v_{t+k-1}) & E^b(v_{t+k-1})\mathcal{D}(v_{t+k-1})D_y(v_{t+k-1}) \\
0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nd} \\
0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nd} \\
0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nd}
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
-\gamma I_p & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
0_{np} & -X-X^T+\bar{\mathbf{P}}_{k,11}(v_{t+k}) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
0_{np} & -I_n-Z+\bar{\mathbf{P}}_{k,21}(v_{t+k}) & -Y-Y^T+\bar{\mathbf{P}}_{k,22}(v_{t+k}) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
0_{np} & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_1 I_n & \bullet & \bullet & \bullet \\
0_{np} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_1 I_n & \bullet & \bullet \\
0_{np} & H^T & H^T Y^T & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_1^{-1} I_n & \bullet \\
0_{np} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & 0_{nn} & -\rho_1^{-1} I_n
\end{bmatrix} < 0 \qquad (۸۰)$$

بر اساس لم ۳، اگر رابطه (۱۵) به ازای $g=1$ برقرار گردد، رابطه (۸۰) نیز برقرار خواهد بود. برقرار بودن رابطه (۸۰) نیز به معنی آن است که $\chi_1 < 0$.

مراجع

[1] A. A. Ahmadi and P. A. Parrilo, "Non-monotonic Lyapunov functions for stability of discrete time nonlinear and switched systems," in 2008 47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008, pp. 614-621.

[2] M. H. Asemani and V. J. Majd, "A robust H∞ observer-based controller design for uncertain T–S fuzzy systems with unknown premise variables via LMI," Fuzzy Sets and Systems, vol. 212, pp. 21-40, 2013.

[3] W. Assawinchaichote, S. K. Nguang, P. Shi, and E.-K. Boukas, "H∞ fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with D-stability constraints: An LMI approach," Mathematics and Computers in Simulation, vol. 78, pp. 514-531, 2008.

[4] Y.-J. Chen, M. Tanaka, K. Inoue, H. Ohtake, K. Tanaka, T. M. Guerra, et al., "A nonmonotonically decreasing relaxation approach of Lyapunov functions to guaranteed cost control for discrete fuzzy systems," IET Control Theory & Applications, vol. 8, pp. 1716-1722, 2014.

[5] S. F. Derakhshan and A. Fatehi, "Non-monotonic Lyapunov functions for stability analysis and stabilization of discrete time Takagi-Sugeno fuzzy systems," Int. J. Innov. Comput. Inf. Control, vol. 10, pp. 1567-1586, 2014.

[6] S. F. Derakhshan and A. Fatehi, "Non-monotonic robust H2 fuzzy observer-based control for discrete time nonlinear systems with parametric uncertainties," International Journal of Systems Science, vol. 46, pp. 2134-2149, 2015.

[7] S. F. Derakhshan, A. Fatehi, and M. G. Sharabiany, "Nonmonotonic observer-based fuzzy controller designs for discrete time TS fuzzy systems via LMI," IEEE transactions on cybernetics, vol. 44, pp. 2557-2567, 2014.

[8] G. Feng, "Stability analysis of discrete-time fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 12, pp. 22-28, 2004.

[9] G. Feng, "A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems," IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol. 14, pp. 676-697, 2006.

[10] T. M. Guerra, A. Kruszewski, and M. Bernal, "Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi–Sugeno models," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 17, pp. 724-731, 2008.

[11] S. H. Kim, "Improved Approach to Robust ${\cal H} _\infty $ Stabilization of Discrete-Time T–S Fuzzy Systems With Time-Varying Delays," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 18, pp. 1008-1015, 2010.

[12] E. Kim and H. Lee, "New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems," IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol. 8, pp. 523-534, 2000.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]

[13] A. Kruszewski, R. Wang, and T.-M. Guerra, "Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time TS fuzzy models: A new approach," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, pp. 606-611, 2008.

[14] J. Lam and S. Zhou, "Dynamic output feedback H∞ control of discrete-time fuzzy systems: a fuzzy-basis-dependent Lyapunov function approach," International Journal of Systems Science, vol. 38, pp. 25-37, 2007.

[15] P. S. Sing Kiong Nguang, "HO∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear systems: an MI approach," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 11, pp. 331-340, 2003.

[16] M. C. De Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," Systems & control letters, vol. 37, pp. 261-265, 1999.

[17] M. C. De Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou, "Extended H 2 and H norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems," International Journal of Control, vol. 75, pp. 666-679, 2002.

[18] V. A. Yakubovich, "Linear matrix inequalities in system and control theory (S. Boyd, LE Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan)," SIAM Review, vol. 37, pp. 479-481, 1995.

[19] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, pp. 116-132, 1985.

[20] D. Saifia, M. Chadli, S. Labiod, and T. M. Guerra, "Robust H∞ static output-feedback control for discrete-time fuzzy systems with actuator saturation via fuzzy Lyapunov functions," Asian Journal of Control, 2019.

[21] A. Nasiri, S. K. Nguang, A. Swain, and D. J. Almakhles, "Reducing Conservatism in an $ H_ {\infty} $ Robust State-Feedback Control Design of T–S Fuzzy Systems: A Nonmonotonic Approach," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 26, pp. 386-390, 2017.

[22] M. H. Asemani and R. Vatankhah, "NON-PDC observer-based T-S fuzzy tracking controller design and its application in CHAOS control," Asian Journal of Control, vol. 19, pp. 969-982, 2017.

[23] B. El Haiek, A. Hmamed, A. El Hajjaji, and E. H. Tissir, "Improved results on observer-based control for discrete-time fuzzy systems," International Journal of Systems Science, vol. 48, pp. 2544-2553, 2017.

[24] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," IEEE Transactions on fuzzy systems, vol. 9, pp. 324-332, 2001.

[25] W.-J. Wang, Y.-J. Chen, and C.-H. Sun, "Relaxed stabilization criteria for discrete-time T–S fuzzy control systems based on a switching fuzzy model and piecewise Lyapunov function," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol. 37, pp. 551-559, 2007.

[26] I. R. Petersen and C. V. Hollot, "A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems," Automatica, vol. 22, pp. 397-411, 1986.

[27] L. Xie, "Output feedback H∞ control of systems with parameter uncertainty," International Journal of control, vol. 63, pp. 741-750, 1996.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.7.1]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.107]