مجله کنترل
جلد ۶، شماره ۱، بهار ۱۳۹۱، صفحه ۶۰-۵۱

طراحی یک کنترلگر بازخورد خروجی H_∞ غیر PDC برای سیستمهای فازی T-S با متغیرهای مقدم قواعد نامعلوم و دارای محدودیت کنترلی بر پایه LMI

محمدحسن آسمانی[۱]، وحید جوهری مجد[۲]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر ، گروه مهندسی کنترل.

[۲] مسئول مکاتبات، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه مهندسی کنترل، پیام‌نگار: majd@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۱۲/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۳/۱۵)

چکیده: در این مقاله، برای اولین بار طراحی یک کنترلگر H_∞ فازی غیر-PDC مبتنی بر رویتگر برای سیستمهای فازی T-S دارای اغتشاش با متغیرهای مقدم قواعد نامعلوم ارائه می گردد. بر خلاف روشهای غیر-PDC موجود، در روش ارائه شده از متغیرهای واقعی فرایند در معادلات کنترلگر استفاده نگردیده است. هم چنین با بهره‌گیری از رویکرد افزونگی توصیفگر، بهره‌های رویتگر و کنترلگر از طریق حل تعدادی از نابرابری‌های ماتریسی خطی اکید قابل محاسبه می باشد. برای بدست آوردن شرایط طراحی کنترلگر با محافظه کاری کمتر نسبت به روشهای قبل از تحلیل مبتنی بر تابع لیاپانوف فازی استفاده می‌شود. همچنین برای برقراری یک کران بالایی دلخواه بر اندازه سیگنال کنترل، شرایط اضافی وابسته به کران بالایی بر روی حالت اولیه بردار رویتگر بدست می‌آید. کارآیی روش ارائه شده توسط یک شبیه‌سازی عددی نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی: کنترل H_∞ بر پایه رویتگر، رویکرد افزونگی توصیفگر، سیستم فازی T-S، تابع لیاپانوف فازی، نابرابری ماتریسی خطی.

A Non-PDC H_∞ Output Feedback Controller Design for T-S Fuzzy Systems with Unknown Premise Variables and Control Constraints via LMI

Mohammad Hassan Asemani, Vahid Johari Majd

Abstract: In this paper, non-PDC H_∞ observer-based controller design for disturbed T-S fuzzy systems with unknown premise variables is addressed for the first time. Unlike the available non-PDC-based approaches, real state variables are not used in the controller equation. Moreover, using the descriptor redundancy approach, the observer and controller gains are calculated by solving some strict linear matrix inequalities (LMIs). A fuzzy Lyapunov function approach is utilized to obtain less conservative design conditions than previous methods. Furthermore, in order to satisfy an arbitrary upper bound on the absolute value of the control signal, additional design conditions are obtained which depend on the upper bounds of the initial states of the observer. The effectiveness of the proposed method is shown via a numerical simulation.

Keywords: H_∞ observer-based control, Descriptor redundancy approach, T-S fuzzy system, fuzzy Lyapunov function, linear matrix inequality (LMI).

۱- مقدمه

تحلیل و طراحی کنترلگر برای سامانه‌های دینامیکی غیر خطی بر اساس سامانه فازی تاکاگی-سوگنو ((Takagi-Sugeno (T-S) در دو دهه اخیر توجه بسیاری از محققان را به خود جلب نموده است [۱].

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

در یک مدل فازی T-S، از ترکیبی غیر خطی و نَرم از مدلهای خطی تغییرناپذیر با زمان برای تقریب یا بازنمایی دقیق سامانه غیر خطی استفاده می‌شود.

برای تحلیل و طراحی کنترلگر در یک مدل فازی T-S معمولاً از تابع لیاپانوف مربعی مشترک [۲-۴]، تابع لیاپانوف مربعی تکه‌ای چندگانه یا تابع لیاپانوف فازی [۵-۸] استفاده می‌شود. رویکردهای بر پایه تابع لیاپانوف فازی به دلیل استفاده از چندین ماتریس لیاپانوف منجر به شرایط پایداری و طراحی با محافظه‌کاری کمتری می‌شوند.

بسیاری از روش‌های طراحی کنترلگر برای یک سامانه فازی T-S بر پایه بازخورد حالت و بر اساس روند جبرانسازی توزیع یافته موازی (Parallel Distributed Compensation (PDC)) می‌باشند که در آن هر قاعده کنترلی بر اساس قاعده متناظرش در مدل فازی TS طراحی می‌گردد. اما در بسیاری از سامانه‌های فیزیکی، اندازه‌گیری تمامی حالتهای سامانه دشوار و پرهزینه است و تنها خروجی سامانه برای اهداف کنترلی قابل دسترسی می‌باشد. بنابراین، کنترلگرهای فازی T-S بر پایه بازخورد خروجی در کاربردهای واقعی ترجیح دارند. بازخورد خروجی ایستا (Static Output feedback) [۹-۱۲]، بازخورد خروجی پویا [۱۳-۱۴] و کنترلگرهای بر پایه رویتگر فازی [۱۵-۲۷] از روش‌های طراحی کنترلگر فازی T-S بر پایه بازخورد خروجی می‌باشند. با این وجود، بسیاری از روشهای مذکور با فرض در دسترس بودن متغیرهای مقدم قواعد فازی انجام شده‌اند [۱۵-۱۹]. این فرض به طراح اجازه می‌دهد که متغیرهای مقدم قواعد رویتگر فازی را برابر با متغیرهای مقدم قواعد سامانه اصلی در نظر بگیرد. بنابراین در این حالت، می‌توان از اصل جداسازی (Seperation principle) برای طراحی مستقل رویتگر فازی و بهره‌های کنترلگر استفاده نمود. لازم به ذکر است که رویکردهای مذکور نیز در بسیاری از حالات عملی نمی‌باشند زیرا معمولاً متغیرهای مقدم قواعد فازی تابعی از متغیرهای حالت می‌باشند، در حالی که در طراحی‌های بر پایه رویتگر فازی فرض بر نامعلوم بودن تمام یا تعدادی از متغیرهای حالت می‌باشد. برای داشتن یک کنترلگر خروجی فازی T-S عملی، یک روش معقول آن است که از متغیرهای حالت تخمین زده شده توسط رویتگر فازی برای تخمین مقدار متغیرهای مقدم قواعد رویتگر استفاده کنیم که مسئله طراحی را بسیار پیچیده‌تر می‌کند. در این حالت نمی‌توان از اصل جداسازی استفاده نمود.

طراحی کنترلگر بر پایه رویتگر برای سامانه‌های فازی T-S با متغیرهای مقدم قواعد نامعلوم در برخی از مقالات ارائه شده است: یک روش طراحی کنترلگر H_∞ بر پایه رویتگر فازی برای سامانه‌های فازی T-S با متغیرهای مقدم قواعد نامعلوم از طریق حل یک دسته از نابرابری‌های ماتریسی خطی (Linear Matrix Inequalities (LMIs)) دو مرحله‌ای در [۲۰] ارائه شده است. در [۲۱]، یک کنترلگر پایدارساز بر پایه رویتگر فازی بر اساس حل دسته‌ای از LMIها ارائه شده است. برای استفاده از این روش نیاز به تعیین دستی چهار پارامتر اسکالر می‌باشد که باعث ایجاد محافظه‌کاری زیادی می‌گردد. در [۲۲]، یک روش طراحی کنترلگر H_∞ مقاوم بر پایه رویتگر فازی برای سامانه‌های فازی T-S بر پایه یک روش LMI دو مرحله‌ای بهبود یافته بیان شده است. یک کنترلگر L_∞ فازی بر پایه رویتگر برای سامانه‌های فازی T-S با اغتشاش‌های ماندگار محدود در [۲۳] طراحی شده است. برای طراحی کنترلگر مذکور باید شش پارامتر اسکالر را بصورت دستی تعیین نمود و کنترلگر دارای شرایط LMI غیر-اکید می‌باشد. هم‌چنین، طراحی کنترلگر H_∞ فازی بر پایه رویتگر با محدودیت کنترلی بر اساس حل دسته‌ای از نابرابری‌های ماتریسی دوخطی (Bilinear Matrix Inequalities) در [۲۴] ارائه شده است. لازم به ذکر است که تمام روش‌های اشاره در این قسمت از رویکرد تابع لیاپانوف مربعی مشترک برای طراحی استفاده نموده‌اند. تا آنجا که کاوش گردید، روش طراحی کنترلگر H_∞ فازی بر پایه رویتگر برای سامانه‌های فازی T-S دارای اغتشاش به همراه محدودیت کنترلی و با استفاده از رویکرد تابع لیاپانوف فازی تاکنون گزارش نشده است.

در این مقاله، یک روش طراحی کنترلگر بر پایه رویتگر فازی برای مسئله H_∞ در سامانه‌های فازی T-S دارای اغتشاش با محدودیت کنترلی در هنگامی‌که متغیرهای مقدم قواعد فازی در دسترس نمی‌باشند ارائه می‌شود. برای بدست آوردن شرایط طراحی با محافظه‌کاری کمتر، از تحلیل بر پایه تابع لیاپانوف فازی استفاده می‌نماییم. هم‌چنین، با استفاده از رویکرد توصیف‌گر سامانه [۶] شرایط LMI اکید (Strict) را برای طراحی کنترلگر به دست می‌آوریم. به علاوه، برای تضمین قید بر روی سیگنال کنترلی، شرایط اضافی را بر اساس LMI ارائه می‌نماییم. شرایط LMI مذکور وابسته به حدود بالای شرایط اولیه رویتگر فازی می‌باشند. برخلاف برخی از روشهای قبل در طراحی کنترلگر بر پایه رویتگر فازی برای سامانه‌های فازی T-S با متغیرهای مقدم قواعد نامعلوم، شرایط طراحی در این مقاله LMIهای اکید می‌باشند و طراح برای حل LMIها نیاز به تعیین دستی تعدادی پارامتر اسکالر به صورت سعی و خطا ندارد.

ساختار این مقاله به صورت زیر است: مدل فازی T-S، کنترلگر فازی بر پایه رویتگر، و برخی از پیش‌نیازها در بخش ۲ بیان شده است. در بخش ۳، روش طراحی کنترلگر H_∞ فازی بر پایه رویتگر برای سامانه‌های فازی دارای اغتشاش و دارای محدودیت کنترلی ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی در بخش ۴ آورده شده است. در پایان، نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه شده است.

نمادها. نماد * مربوط به ترانهاده یک ماتریس است و عبارت $A+(*)$ برابر با $A+A^T$ است. همچنین همانند کارهای جدید،

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

برای سادگی روابط ریاضی، از نمادهای زیر در این مقاله استفاده گردیده است [۲۱]:

$$A_{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\hat{\mu}) A_i \quad (۱)$$

$$A_{\mu\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\mu) h_j(\hat{\mu}) A_{ij} \quad (۲)$$

$$A_{\mu} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\mu) A_i \quad (۳)$$

که در آن μ و $\hat{\mu}$ به ترتیب بردارهای متغیرهای مقدم قواعد سیستم فازی و رویتگر فازی و r تعداد قواعد فازی می‌باشند.

۲- تعریف مساله و پیش‌نیازها

۲-۱- مدل فازی T-S دارای اغتشاش

یک مدل فازی T-S برای یک سامانه غیر خطی زمان-پیوسته را می‌توان بوسیله اجتماع غیر خطی فازی از روابط خطی ورودی-خروجی سامانه غیر خطی اصلی بدست آورد. صورت کلّی i-اُمین قاعده یک مدل فازی دارای اغتشاش بصورت زیر است [۲]:

$$\text{IF } \mu_1 \text{ is } M_{i1} \text{ and } \ldots \text{and } \mu_p \text{ is } M_{ip},$$
$$\text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{2i} u(t) + \varphi(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad (۴)$$

که در آن $\mu_1 \sim \mu_p$ متغیرهای مقدم قواعد هستند که می‌توانند تابعی از متغیرهای حالت، اغتشاشات خروجی، و یا زمان باشند، M_{ij}ها ($j=1,2,\ldots,p$ ، $i=1,2,\ldots,r$) توابع تعلق مرتبط با i-اُمین قاعده و j-اُمین متغیر مقدم قاعده، r تعداد قواعد فازی، $x(t)\in\Re^n$ ، $u(t)\in\Re^m$ و $y(t)\in\Re^p$ به ترتیب بردار حالت، ورودی و خروجی می‌باشند. هم‌چنین $\varphi(t)\in\Re^s$ یک بردار اغتشاش خارجی است که عناصر آن به فضای $L_2[0,\infty)$ تعلق دارند و $A_i\in\Re^{n\times n}$ ، $B_{2i}\in\Re^{n\times m}$ ، و $C_i\in\Re^{p\times n}$ ماتریس‌های i-ام محلی می‌باشند.

با استفاده از نماد بیان شده در رابطه (۳)، دینامیک کلّی سامانه فازی T-S دارای اغتشاش بصورت زیر استنتاج خواهد شد:

$$\dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_{2\mu} u(t) + \varphi(t), \quad (۵)$$
$$y(t) = C_\mu x(t), \quad (۶)$$

که در آن $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \ldots \mu_p]$ و:

$$h_i(\mu) = w_i(\mu) \Big/ \sum_{i=1}^{r} w_i(\mu), \quad (۷)$$

$$w_i(\mu) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(\mu_j). \quad (۸)$$

۲-۲- رویتگر فازی و ساختار غیر-PDC

در این مقاله از رویتگر فازی زیر استفاده خواهد شد:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\mu}} \hat{x}(t) + B_{2\hat{\mu}} u(t) + L_{\hat{\mu}} P_{44\hat{\mu}}^{-1} (y(t) - \hat{y}(t)), \quad (۹)$$

$$\hat{y}(t) = C_{\hat{\mu}} \hat{x}(t), \quad (۱۰)$$

که در آن $\hat{\mu}$ مقدار تخمین زده شده متغیر مقدم μ ، $L_{\hat{\mu}}$ بهره رویتگر، $P_{44\hat{\mu}}$ یک ماتریس لیاپانوف غیر خطی معکوس‌پذیر می‌باشند و در این رابطه از نماد بیان شده در رابطه (۱) استفاده شده است.

با استفاده از مقادیر تخمین زده شده حالت، از قانون کنترلی غیر-PDC استفاده می شود [۳۰]:

$$u(t) = -F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1} \hat{x}(t), \quad (۱۱)$$

که در آن $F_{\hat{\mu}}$ بهره کنترلگر و $P_{11\hat{\mu}}$ یک ماتریس لیاپانوف غیر خطی معکوس‌پذیر می‌باشند.

در این مقاله، از معیار کارآیی H_∞ زیر استفاده می گردد:

$$\int_0^{t_f} x(t)^T Q x(t) dt \le \gamma^2 \int_0^{t_f} \varphi^T(t)\varphi(t) dt, \quad (۱۲)$$

که در آن t_f زمان نهایی، Q یک ماتریس مثبت-معین وزنی، γ ضریب میرایی می‌باشند و شرایط اولیه صفر در نظر گرفته شده‌اند. لازم به ذکر است که همیشه یک ماتریس T وجود دارد به طوریکه رابطه $Q = T^T T$ برقرار باشد.

۲-۳- دینامیک سامانه حلقه-بسته

با تعریف $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ به عنوان خطای تخمین حالت، $\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ به عنوان خطای تخمین خروجی و استفاده از رویکرد سامانه توصیفگر [۶]، روابط (۵)، (۶)، (۹)-(۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_\mu \hat{x}(t) + B_{2\mu} u(t) + L_{\hat{\mu}} P_{44\hat{\mu}}^{-1} \tilde{y}(t), \quad (۱۳)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= (A_\mu - A_{\hat{\mu}})\hat{x}(t) + A_\mu \tilde{x}(t) \\ &\quad + (B_{2\mu} - B_{2\hat{\mu}})u(t) - L_{\hat{\mu}} P_{44\hat{\mu}}^{-1} \tilde{y}(t) + \varphi(t), \end{aligned} \quad (۱۴)$$

$$0 \cdot \dot{u}(t) = -F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1} \hat{x}(t) - u(t), \quad (۱۵)$$

$$0 \cdot \dot{\tilde{y}}(t) = (C_\mu - C_{\hat{\mu}})\hat{x}(t) + C_\mu \tilde{x}(t) - \tilde{y}(t). \quad (۱۶)$$

با تعریف بردار الحاقی حلقه-بسته $\zeta(t)$ به صورت $\zeta^T(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}^T(t) & \tilde{x}^T(t) & u^T(t) & \tilde{y}^T(t) \end{bmatrix}$، روابط (۱۳)-(۱۶) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$E\dot{\zeta}(t) = \tilde{A}_{cl}\zeta(t) + \tilde{R}\varphi(t), \quad (۱۷)$$

که در آن:

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{cl} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} & 0 & B_{2\hat{\mu}} & L_{\hat{\mu}} P_{44\hat{\mu}}^{-1} \\ A_\mu - A_{\hat{\mu}} & A_\mu & B_{2\mu} - B_{2\hat{\mu}} & -L_{\hat{\mu}} P_{44\hat{\mu}}^{-1} \\ -F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1} & 0 & -I & 0 \\ C_\mu - C_{\hat{\mu}} & C_\mu & 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (۱۸)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

هم‌چنین، معیار کارآیی H_∞ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\int_0^{t_f} \zeta^T(t)\tilde{Q}\zeta(t)dt \le \gamma^2 \int_0^{t_f} \varphi^T(t)\varphi(t)dt, \qquad (۱۹)$$

که در آن $\tilde{Q}=diag[\overline{Q} \quad 0 \quad 0]$، $\overline{Q}=\begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & Q \end{bmatrix}$ و $Q=T^TT$ می‌باشند.

۲-۴- پیش‌نیازها

از لم زیر در اثبات نتیجه اصلی این مقاله استفاده خواهد شد:

لم ۱ [۲۸]- برای ماتریس‌های $\chi^i_{jk}, i,j,k=1,\ldots,r$، اگر روابط زیر برقرار باشند:

$$\chi^i_{jj} > 0, \quad i,j=1,\ldots,r, \qquad (۲۰)$$

$$\frac{2}{r-1}\chi^i_{jj}+\chi^i_{jk}+\chi^i_{kj} > 0, \quad i,j,k=1,\ldots,r, j\neq k, \qquad (۲۱)$$

آنگاه رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} h_i(\mu)h_j(\hat{\mu})h_k(\hat{\mu})\chi^i_{jk} > 0. \qquad (۲۲)$$

۳- طراحی کنترلگر H_∞ پایدارساز با محدودیت کنترلی

در این بخش، در قضیه ۱ روندی جدید برای طراحی کنترلگر بر پایه رویتگر فازی (۱۱) برای سامانه فازی دارای اغتشاش (۵)-(۶) ارائه می‌گردد بنحویکه سامانه حلقه-بسته (۱۷) پایدار مجانبی گردد و معیار H_∞ (رابطه (۱۹)) با استفاده از رویکرد بر پایه تابع لیاپانوف فازی تضمین گردد. به علاوه، در قضیه ۲ علاوه بر موارد اشاره شده در قضیه ۱، با فرض محدود بودن حالت اولیه سامانه و برقراری شرط $\|\hat{x}(0)\| \le M_{\hat{x}(0)}$، که در آن $\hat{x}_0 > 0$ کران بالایی مفروض بر روی حالت اولیه رویتگر می‌باشد، روش پیشنهادی رابطه $\|u(t)\| \le \lambda$ را تضمین خواهد کرد که در آن $\lambda > 0$ یک اسکالر است.

قضیه ۱- فرض کنید توابع $\dot{h}_i(\hat{\mu}(t))$ در رابطه (۷)، شرط $\dot{h}_\rho(\hat{\mu}(t)) \ge \phi_\rho$ را برای $t>0$ و $\rho=1,\ldots,r-1$، که در آن ϕ_ρ ها تعدادی اسکالر معلوم می‌باشد، تضمین کنند. آنگاه، سامانه حلقه-بسته بر پایه رویتگر (۱۷) در عدم حضور اغتشاش $\varphi(t)$ پایدار مجانبی است و معیار H_∞ ارائه شده در (۱۹) را با ضریب میرایی $\gamma > 0$ در هنگام حضور اغتشاش $\varphi(t)$ تضمین می‌کند، اگر تعدادی ماتریس مثبت-معین P_{11k} و P_{22k}، ماتریس‌های P_{3ik} و P_{4ik}، $i=1,2,3,4$، که در آن P_{4ik}ها برابر با P_{44k} یا صفر یا هر ترکیب ممکن از P_{44k} و صفر برای $i=1,2,3$ هستند، و بهره‌های رویتگر و کنترلگر L_j و F_j ($j=1,\ldots,r$) وجود داشته باشند بنحویکه LMIهای زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} P_{11\rho}-P_{11r} \ge 0, \quad \rho=1,\ldots,r-1, \\ P_{22\rho}-P_{22r} \ge 0, \quad \rho=1,\ldots,r-1, \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\Omega^i_{jj} < 0, \quad i,j=1,\ldots,r, \qquad (۲۴)$$

$$\frac{2}{r-1}\Omega^i_{jj}+\Omega^i_{jk}+\Omega^i_{kj} < 0, i,j,k=1,\ldots,r, j\neq k, \qquad (۲۵)$$

که در آن:

$$\Omega^i_{jk}=\begin{bmatrix} \Theta^i_{jk} & * & * \\ \tilde{R}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ TW_k & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad i,j=1,\ldots,r, \qquad (۲۶)$$

و:

$$\Theta^i_{jk}=\begin{bmatrix} \theta^{11}_{ijk} & * & * & * \\ \theta^{21}_{ijk} & \theta^{22}_{ijk} & * & * \\ \theta^{31}_{jk} & \theta^{32}_{ijk} & -P_{33k}-P^T_{33k} & * \\ \theta^{41}_{ijk} & \theta^{42}_{ijk} & -P_{43k}-P^T_{34k} & -P_{44k}-P^T_{44k} \end{bmatrix}, \qquad (۲۷)$$

$$\begin{aligned} \theta^{11}_{ijk} &= A_jP_{11k}+B_{2j}P_{31k}+Y^1_j+(*)-\sum_{\rho=1}^{r-1}\phi_\rho(P_{11\rho}-P_{11r}), \\ \theta^{21}_{ijk} &= (A_i-A_j)P_{11k}+(B_{2i}-B_{2j})P_{31k} \\ &\quad -Y^1_j+P^T_{32k}B^T_{2j}+\left(Y^2_j\right)^T, \\ \theta^{22}_{ijk} &= A_iP_{22k}+(B_{2i}-B_{2j})P_{32k}-Y^2_j+(*) \\ &\quad -\sum_{\rho=1}^{r-1}\phi_\rho(P_{22\rho}-P_{22r}), \\ \theta^{31}_{jk} &= -F_j-P_{31k}+P^T_{33k}B^T_{2j}+\left(Y^3_j\right)^T, \\ \theta^{32}_{ijk} &= -P_{32k}+P^T_{33k}(B_{2i}-B_{2j})^T-\left(Y^3_j\right)^T, \\ \theta^{41}_{ijk} &= (C_i-C_j)P_{11k}-P_{41k}+P^T_{34k}B^T_{2j}+L^T_j, \\ \theta^{42}_{ijk} &= C_iP_{22k}-P_{42k}+P^T_{34k}(B_{2i}-B_{2j})^T-L^T_j, \\ W_k &= \begin{bmatrix} P_{11k} & P_{22k} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

و Y^i_j برابر با L_j یا صفر یا هر ترکیب ممکن از L_j و صفر می‌باشند بسته به اینکه $P_{44\hat{\mu}}$ برابر با $P_{4i\hat{\mu}}$ یا صفر یا هر ترکیب ممکن از $P_{44\hat{\mu}}$ و صفر ($i=1,2,3$ و $j=1,\ldots,r$) باشد.

اثبات- تابع پیشنهادی لیاپانوف فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$V(\zeta(t))=\zeta^T(t)E^TP^{-1}_{\hat{\mu}}\zeta(t), \qquad (۲۹)$$

که در آن:

$$E^TP^{-1}_{\hat{\mu}}=P^{-T}_{\hat{\mu}}E \ge 0. \qquad (۳۰)$$

ایده اصلی برای در نظر گرفتن این تابع لیاپانوف از [۶] گرفته شده است. فرض کنید ماتریس $P_{\hat{\mu}}$ به صورت زیر تقسیم‌بندی شده است:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

$$P_{\hat{\mu}}=\sum_{k=1}^{r}h_k(\hat{\mu}(t))\begin{bmatrix}P_{11k}&0&P_{13k}&P_{14k}\\0&P_{22k}&P_{23k}&P_{24k}\\P_{31k}&P_{32k}&P_{33k}&P_{34k}\\P_{41k}&P_{42k}&P_{43k}&P_{44k}\end{bmatrix}. \quad (۳۱)$$

برای برقراری رابطه (۳۰)، باید $P_{11k}=P_{11k}^T$ و $P_{22k}=P_{22k}^T$ برقرار باشند. هم‌چنین، ماتریس‌های P_{13k}، P_{14k}، P_{23k} و P_{24k} باید برابر با صفر باشند و $P_{11k}>0$ و $P_{22k}>0$ ($k=1,\ldots,r$) برقرار باشند.

مشتق زمانی تابع لیاپانوف فازی (۲۹) در مسیر دینامیک (۱۷) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta(t))&=\dot{\zeta}^T(t)E^TP_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(t)+\zeta^T(t)E^T\dot{P}_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(t)\\&\quad+\zeta^T(t)P_{\hat{\mu}}^{-T}\tilde{R}\varphi(t)+\varphi^T(t)\tilde{R}^TP_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(t)\\&=\zeta^T(t)\tilde{A}_{cl}^TP_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(t)+\zeta^T(t)P_{\hat{\mu}}^{-T}\tilde{A}_{cl}\zeta(t)\\&\quad-\zeta^T(t)E^TP_{\hat{\mu}}^{-1}\dot{P}_{\hat{\mu}}P_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(t)+\zeta^T(t)P_{\hat{\mu}}^{-T}\tilde{R}\varphi(t)\\&\quad+\varphi^T(t)\tilde{R}^TP_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(t).\end{aligned} \quad (۳۲)$$

سامانه حلقه-بسته (۱۷) پایدار مجانبی است و معیار کارآیی H_∞ ارائه شده در (۱۹) را با ضریب میرایی $\gamma>0$ برآورده می‌کند، اگر [۲۹]:

$$\dot{V}(\zeta(t))+\zeta^T(t)\tilde{Q}\zeta(t)-\gamma^2\varphi^T(t)\varphi(t)<0.$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}\zeta\\\varphi\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{cl}^TP_{\hat{\mu}}^{-1}+P_{\hat{\mu}}^{-T}\tilde{A}_{cl}+\tilde{Q}\\-P_{\hat{\mu}}^{-T}\left(\sum_{\rho=1}^{r}\dot{h}_\rho(\hat{\mu})EP_\rho\right)P_{\hat{\mu}}^{-1}\end{pmatrix}&P_{\hat{\mu}}^{-T}\tilde{R}\\\tilde{R}^TP_{\hat{\mu}}^{-1}&-\gamma^2I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta\\\varphi\end{bmatrix}<0. \quad (۳۳)$$

اگر رابطه زیر برقرار باشد، آنگاه رابطه (۳۳) نیز برقرار خواهد بود:

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{cl}^TP_{\hat{\mu}}^{-1}+P_{\hat{\mu}}^{-T}\tilde{A}_{cl}+\tilde{Q}\\-P_{\hat{\mu}}^{-T}\left(\sum_{\rho=1}^{r}\dot{h}_\rho(\hat{\mu})EP_\rho\right)P_{\hat{\mu}}^{-1}\end{pmatrix}&P_{\hat{\mu}}^{-T}\tilde{R}\\\tilde{R}^TP_{\hat{\mu}}^{-1}&-\gamma^2I\end{bmatrix}<0. \quad (۳۴)$$

با ضرب کردن عبارت $diag\{P_{\hat{\mu}}^T,I\}$ و ترانهاده آن در قبل و بعد رابطه (۳۴) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}P_{\hat{\mu}}^T\tilde{A}_{cl}^T+\tilde{A}_{cl}P_{\hat{\mu}}+P_{\hat{\mu}}^T\tilde{Q}P_{\hat{\mu}}\\-\left(\sum_{\rho=1}^{r}\dot{h}_\rho(\hat{\mu})EP_\rho\right)\end{pmatrix}&\tilde{R}\\\tilde{R}^T&-\gamma^2I\end{bmatrix}<0. \quad (۳۵)$$

هم چنین عبارت $P_{\hat{\mu}}^T\tilde{Q}P_{\hat{\mu}}$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$P_{\hat{\mu}}^T\tilde{Q}P_{\hat{\mu}}=\begin{bmatrix}P_{11\hat{\mu}}QP_{11\hat{\mu}}&*&0&0\\P_{22\hat{\mu}}QP_{11\hat{\mu}}&P_{22\hat{\mu}}QP_{22\hat{\mu}}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=W_{\hat{\mu}}^TT^TTW_{\hat{\mu}},$$

که در آن $Q=T^TT$ و W_i در رابطه (۲۸) تعریف شده است. از خواص تابع $h_\rho(\hat{\mu}(t))$ می‌توان عبارت $\sum_{\rho=1}^{r}\dot{h}_\rho(\hat{\mu}(t))=0$ را نوشت. بنابراین، با استفاده از فرض $\dot{h}_\rho(\hat{\mu}(t))\geq\phi_\rho$ و مکمل شور، رابطه (۳۵) برقرار است اگر رابطه (۲۳) و شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}P_{\hat{\mu}}^T\tilde{A}_{cl}^T+\tilde{A}_{cl}P_{\hat{\mu}}\\-\left(\sum_{\rho=1}^{r-1}\phi_\rho E(P_\rho-P_r)\right)\end{pmatrix}&*&*\\\tilde{R}^T&-\gamma^2I&0\\TW_{\hat{\mu}}&0&-I\end{bmatrix}<0. \quad (۳۶)$$

با استفاده از دینامیک حلقه-بسته (۱۸) و ساختار تابع لیاپانوف در (۳۱)، عبارت $\tilde{A}_{cl}P_{\hat{\mu}}+P_{\hat{\mu}}^T\tilde{A}_{cl}^T$ را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\tilde{A}_{cl}^TP_{\hat{\mu}}+P_{\hat{\mu}}^T\tilde{A}_{cl}^T=\begin{bmatrix}\psi^{11}&*&*&*\\\psi^{21}&\psi^{22}&*&*\\\psi^{31}&\psi^{32}&-P_{33\hat{\mu}}-P_{33\hat{\mu}}^T&*\\\psi^{41}&\psi^{42}&-P_{43\hat{\mu}}-P_{34\hat{\mu}}^T&-P_{44\hat{\mu}}-P_{44\hat{\mu}}^T\end{bmatrix}, \quad (۳۷)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\psi^{11}&=A_{\hat{\mu}}P_{11\hat{\mu}}+B_{2\hat{\mu}}P_{31\hat{\mu}}+L_{\hat{\mu}}P_{44\hat{\mu}}^{-1}P_{41\hat{\mu}}+(*),\\\psi^{21}&=(A_\mu-A_{\hat{\mu}})P_{11\hat{\mu}}+(B_{2\mu}-B_{2\hat{\mu}})P_{31\hat{\mu}}\\&\quad-L_{\hat{\mu}}P_{44\hat{\mu}}^{-1}P_{41\hat{\mu}}+P_{32\hat{\mu}}^TB_{2\hat{\mu}}^T+P_{42\hat{\mu}}^TP_{44\hat{\mu}}^{-T}L_{\hat{\mu}}^T,\\\psi^{22}&=A_\mu P_{22\hat{\mu}}+(B_{2\mu}-B_{2\hat{\mu}})P_{32\hat{\mu}}-L_{\hat{\mu}}P_{44\hat{\mu}}^{-1}P_{42\hat{\mu}}+(*),\\\psi^{31}&=-F_{\hat{\mu}}-P_{31\hat{\mu}}+P_{33\hat{\mu}}^TB_{2\hat{\mu}}^T+P_{43\hat{\mu}}^TP_{44\hat{\mu}}^{-T}L_{\hat{\mu}}^T,\\\psi^{32}&=-P_{32\hat{\mu}}+P_{33\hat{\mu}}^T(B_{2\mu}-B_{2\hat{\mu}})^T-P_{43\hat{\mu}}^TP_{44\hat{\mu}}^{-T}L_{\hat{\mu}}^T,\\\psi^{41}&=(C_\mu-C_{\hat{\mu}})P_{11\hat{\mu}}-P_{41\hat{\mu}}+P_{34\hat{\mu}}^TB_{2\hat{\mu}}^T+L_{\hat{\mu}}^T,\\\psi^{42}&=C_\mu P_{22\hat{\mu}}-P_{42\hat{\mu}}+P_{34\hat{\mu}}^T(B_{2\mu}-B_{2\hat{\mu}})^T-L_{\hat{\mu}}^T.\end{aligned}$$

توجه کنید که به علت انتخاب خاص تابع لیاپانوف (۳۱)، ردیف‌های سوم و چهارم ماتریس لیاپانوف $P_{\hat{\mu}}$، ماتریس‌هایی کمکی هستند و انتخاب آنها آزاد می‌باشد [۳۰]. بنابراین، می‌توان فرض نمود که P_{41k}، P_{42k} و P_{43k} برابر P_{44k} یا ماتریس صفر یا ترکیبی از این دو ماتریس باشند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

با جایگزینی (۳۷) در (۳۶) و سپس اعمال مکمل شور و لم ۱، روابط (۲۴) و (۲۵) به دست می‌آیند. بنابراین اثبات کامل می‌شود.□

در قضیه زیر، شرایط طراحی جدیدی را ارائه می‌کنیم که علاوه بر تضمین پایداری مجانبی حلقه-بسته و معیار H_∞ بیان شده در (۱۹)، محدودیت $\|u(t)\| \le \lambda$ بر روی سیگنال کنترلی نیز برقرار گردد.

قضیه ۲- فرض کنید حالت اولیه سامانه فازی T-S محدود باشد. هم‌چنین فرض کنید $\|\hat{x}(0)\| \le M_{\hat{x}(0)}$ و توابع $\dot{h}_i(\hat{\mu}(t))$ در رابطه (۷)، رابطه $\dot{h}_\rho(\hat{\mu}(t)) \ge \phi_\rho$ را برای $t>0$ و $\rho = 1,\ldots,r-1$، که در آن ϕ_ρها تعدادی اسکالر معلوم می‌باشد، تضمین کنند. اگر تعدادی ماتریس مثبت-معین P_{1ik}، P_{22k} و M_k، ماتریس‌های P_{3ik} و P_{4ik}، $i=1,2,3,4$، که در آن P_{4ik}ها برابر با P_{44k} یا صفر یا هر ترکیب ممکن از P_{44k} و صفر برای $i=1,2,3$ هستند، بهره‌های رویتگر و کنترلگر L_j و F_j ($j=1,\ldots,r$) و اسکالر مثبت α_0 وجود داشته باشند بنحویکه (۲۳)-(۲۵) و LMIهای زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} P_{11i} & F_i^T \\ F_i & \lambda^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad i=1,\ldots,r, \tag{۳۸}$$

$$P_{11i} \ge M_{\hat{x}(0)}^2 I, \quad i=1,\ldots,r, \tag{۳۹}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 I & I \\ I & P_{22i} \end{bmatrix} \ge 0, \quad i=1,\ldots,r, \tag{۴۰}$$

آنگاه، سامانه حلقه-بسته بر پایه رویتگر (۱۷) در عدم حضور اغتشاش $\varphi(t)$ پایدار مجانبی است و معیار H_∞ ارائه شده در (۱۹) را با ضریب میرایی $\gamma > 0$ در هنگام حضور اغتشاش $\varphi(t)$ تضمین می‌کند و رابطه $\|u(t)\| \le \lambda$ برقرار است.

اثبات- اثبات روابط (۲۳)-(۲۵) مانند روش ارائه شده در اثبات قضیه ۱ می‌باشد. برای تضمین رابطه $\|u(t)\| \le \lambda$، ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{\lambda^2}\|u\|_2^2 = \frac{1}{\lambda^2}\hat{x}(t)^T P_{11\hat{\mu}}^{-1} F_{\hat{\mu}}^T F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1}\hat{x}(t). \tag{۴۱}$$

حال فرض کنید که:

$$\hat{x}(t)^T\left(\frac{1}{\lambda^2}P_{11\hat{\mu}}^{-1}F_{\hat{\mu}}^T F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1}\right)\hat{x}(t) < \hat{x}(t)^T P_{11\hat{\mu}}^{-1}\hat{x}(t). \tag{۴۲}$$

با توجه به اینکه شرایط اولیه بردار حالت سامانه محدود فرض شده است و $\|\hat{x}(0)\| \le M_{\hat{x}(0)}$ می‌باشد، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\|\tilde{x}(0)\| = \|x(0)-\hat{x}(0)\| \le M_{\tilde{x}(0)} \tag{۴۳}$$

که در آن $M_{\tilde{x}(0)}$ متغیری است که نشاندهنده کران بالایی بر روی شرایط اولیه بردار خطای سامانه می‌باشد. با استفاده از خواص تابع لیاپانوف و روابط (۳۹) و (۴۰)، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}(t)^T\left(\frac{1}{\lambda^2}P_{11\hat{\mu}}^{-1}F_{\hat{\mu}}^T F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1}\right)\hat{x}(t) \le \zeta^T(t)E^T P_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(t) \\
&\le \zeta^T(0)E^T P_{\hat{\mu}}^{-1}\zeta(0) \\
&\le \hat{x}(0)^T P_{11\hat{\mu}}^{-1}\hat{x}(0) + \tilde{x}(0)^T P_{22\hat{\mu}}^{-1}\tilde{x}(0) \\
&\le \hat{x}(0)^T (M_{\hat{x}(0)}^{-2} I)\hat{x}(0) + \tilde{x}(0)^T P_{22\hat{\mu}}^{-1}\tilde{x}(0).
\end{aligned} \tag{۴۴}$$

هم‌چنین فرض کنید که:

$$P_{22\hat{\mu}}^{-1} \le M_{\tilde{x}(0)}^{-2} I. \tag{۴۵}$$

با تعریف $\alpha_0 = M_{\tilde{x}(0)}^{-2}$ به عنوان یک متغیر LMI و استفاده از مکمل شور، می‌توان گفت که اگر رابطه (۴۰) برقرار باشد آنگاه رابطه (۴۵) نیز برقرار خواهد بود. حال از نامساوی (۴۵) در رابطه (۴۴) استفاده می‌نماییم. بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}(t)^T\left(\frac{1}{\lambda^2}P_{11\hat{\mu}}^{-1}F_{\hat{\mu}}^T F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1}\right)\hat{x}(t) \\
&\le \hat{x}(0)^T (M_{\hat{x}(0)}^{-2} I)\hat{x}(0) + \tilde{x}(0)^T (M_{\tilde{x}(0)}^{-2} I)\tilde{x}(0) \le 1.
\end{aligned} \tag{۴۶}$$

بنابراین $\lambda^{-2}\|u(t)\|_2^2 \le 1$ و رابطه $\|u(t)\| \le \lambda$ برقرار خواهد شد. هم‌چنین، رابطه (۴۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\hat{x}(t)^T\left(\frac{1}{\lambda^2}P_{11\hat{\mu}}^{-1}F_{\hat{\mu}}^T F_{\hat{\mu}} P_{11\hat{\mu}}^{-1} - P_{11\hat{\mu}}^{-1}\right)\hat{x}(t) < 0. \tag{۴۷}$$

با استفاده از مکمل شور داریم:

$$\begin{bmatrix} P_{11\hat{\mu}} & F_{\hat{\mu}}^T \\ F_{\hat{\mu}} & \lambda^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{۴۸}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که اگر (۳۸) برقرار باشد آنگاه (۴۸) نیز برقرار خواهد بود. بنابراین اثبات کامل می‌شود.□

نکته ۱: در قضیه ۲ برای آنکه کران بالایی بالاتری برای $\|\tilde{x}(0)\|$ بدست آوریم، می توانیم قضیه را با مینیمم کردن پارامتر α_0 حل نماییم (مسئله مینیمم سازی بر اساس α_0). پس از حل LMIهای قضیه ۲ و بدست آوردن مقدار پارامتر α_0، رابطه $\|\tilde{x}(0)\| \le M_{\tilde{x}(0)}$ که در آن $M_{\tilde{x}(0)} = \alpha_0^{-0.5}$ است، بدیهی خواهد بود. بنابراین در حالت عملی، برای ارضای قید بر روی سیگنال کنترلی $\|u(t)\| \le \lambda$، لازم است که شرایط اولیه سامانه دو نامساوی زیر را ارضا نمایند:

$$\|\hat{x}(0)\| \le M_{\hat{x}(0)},$$

$$\|x(0)-\hat{x}(0)\| \le M_{\tilde{x}(0)}.$$

نکته ۲: درطراحی عملی، برای تضمین یک کران بالا بر روی سیگنال کنترلی، معلوم بودن شرایط اولیه حلقه-بسته منطقی به نظر می‌رسد. البته دانستن شرایط اولیه سیستم حلقه-بسته در هنگام طراحی عملی نمی‌باشد. برای غلبه بر این مشکل، شرایط LMI در قضیه ۲ مستقل از مقدار دقیق شرایط اولیه حلقه-بسته در نظر گرفته شد و فقط حد بالایِ $\|\hat{x}(0)\|$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

برای طراحی لازم است. هم‌چنین هنگام بکارگیری کنترلگر معرفی شده در قضیه ۲ باید به این نکته توجه کنیم که مقدار کران بالایی $\|x(0)-\hat{x}(0)\|$ از مقدار $M_{\tilde{x}(0)}$ کوچکتر یا با آن مساوی باشد.

نکته ۳: در مقایسه با روش‌های طراحی ارائه شده در [۲۰] و [۲۲] که بر پایه LMIهای دومرحله‌ای هستند، شرایط طراحی در قضیه ۱، LMIهای یک-مرحله‌ای هستند که با استفاده از نرم‌افزارهای حل‌کننده فعلی بسیار آسان‌تر حل می‌شوند. هم‌چنین، در مقایسه با الگوریتم‌های طراحی ارائه شده در [۲۱] و [۲۳] که به ترتیب نیازمند تعیین دستی چهار و شش پارامتر اسکالر برای حل LMIهایشان می‌باشند، شرایط طراحی در این مقاله LMIهای اکید می‌باشند که یافتن پاسخ را ساده‌تر می‌نماید. به علاوه، در این مقاله برای اولین بار از رویکرد بر پایه تابع لیاپانوف فازی استفاده نموده‌ایم و شرایط محدودیت بر روی کنترلگر را در مسئله طراحی کنترلگر H_∞ بر پایه رویتگر فازی برای سامانه‌های فازی T-S با متغیرهای مقدم قواعد نامعلوم نیز در نظر گرفته‌ایم.

۴- نتایج شبیه‌سازی

یک مدل فازی T-S دو-قانون را با ماتریس‌های محلی ناپایدار زیر در نظر بگیرید [21]:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}2.5 & 0\\ -2.3 & -1\end{bmatrix},$$
$$B_{21}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad B_{22}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix},\quad C_1=\begin{bmatrix}10 & 1\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}10 & 1\end{bmatrix}$$

توابع تعلق فازی نیز به صورت زیر می‌باشند:

$$h_1(x(t))=0.5+\frac{\arctan(x_2(t))}{\pi},$$
$$h_2(x(t))=1-h_1(x(t)),$$

که در آن $x^T(t)=\begin{bmatrix}x_1^T(t) & x_2^T(t)\end{bmatrix}$. با استفاده از روش ارائه شده در [5] با فرض $|x_i(t)|\le 1.1$ $(i=1,2)$، می‌توان نتیجه گرفت که $\dot{h}_1(x(t))\ge\phi_1$ که در آن $\phi_1=-1.156$. در این مقاله اثر اغتشاش مدل فازی T-S نسبت به بردار حالت تضعیف می‌شود. اما به هر حال، نمی‌توان نتیجه گرفت که این تضعیف اثر نسبت به $\dot{h}_1(x(t))$ نیز انجام گرفته شده باشد. بنابراین، بهتر است که یک مقدار بزرگتر (از لحاظ اندازه) برای پارامتر ϕ_1 در نظر بگیریم [۳۰]. در این مثال مقدار $\phi_1=-2.5$ را که بسیار بزرگتر از مقدار نامی آن است انتخاب می‌کنیم.

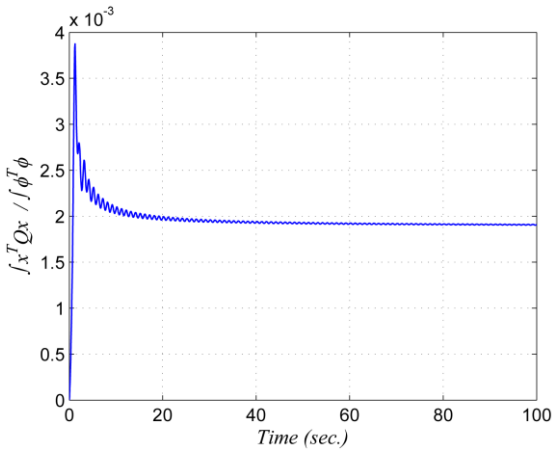
برای طراحی کنترلگر برای این سامانه فازی T-S، از SeDuMi [۳۱] به عنوان نرم‌افزار حل‌کننده و از YALMIP [۳۲] به عنوان نرم‌افزار تجزیه‌کننده (parser) در MATLAB استفاده می‌کنیم.

۴-۱- طراحی کنترلگر H_∞

در این بخش، برای امکان مقایسه با روش‌های قبلی فرض می‌کنیم که محدودیتی بر روی سیگنال کنترلی وجود ندارد. با فرض $P_{43\hat{\mu}}=0$، $P_{41\hat{\mu}}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$، $P_{42\hat{\mu}}=\begin{bmatrix}P_{44\hat{\mu}} & 0\end{bmatrix}$، $\gamma=0.45$ و $Q=diag\{0.05,0.05\}$، LMIهای قضیه ۱ حل می‌نماییم. یک پاسخ ممکن با ماتریسهای زیر بدست خواهد آمد:

$$F_1=\begin{bmatrix}11.8019 & -1.5579\end{bmatrix},\ F_2=\begin{bmatrix}11.9812 & -1.6123\end{bmatrix},$$
$$L_1=\begin{bmatrix}7.1052\\ -1.1596\end{bmatrix},\ L_2=\begin{bmatrix}9.4194\\ -0.2797\end{bmatrix},$$
$$P_{111}=\begin{bmatrix}2.1042 & 0.4683\\ 0.4683 & 4.2129\end{bmatrix},\ P_{112}=\begin{bmatrix}1.1981 & 0.1762\\ 0.1762 & 3.1871\end{bmatrix},$$
$$P_{441}=3.8254,\ P_{442}=3.0348.$$

لازم به ذکر است که روش‌های طراحی [۲۰] و [۲۲] در مرحله اول LMIهای خود برای این مدل فازی T-S به پاسخ‌های غیرممکن(Infeasible) منجر خواهند شد. به علاوه، روش ارائه شده در [۲۱] سامانه‌های فازیT-S دارای اغتشاش را پوشش نمی‌دهد و روش ارائه شده در [۲۳] برای مسائل با اغتشاش‌های متعلق به فضای $L_2[0,\infty)$ کاربرد ندارد. شکل ۱ نسبت $\int x^TQx/\int\varphi^T\varphi$ را برای اغتشاش $\varphi(t)=0.5\sin(\pi t)\times\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ نشان می‌دهد. در این حالت شرایط اولیه برابر با صفر در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به این شکل واضح است که مقدار $\int x^TQx/\int\varphi^T\varphi$ بسیار پایین‌تر از مقدار بهینه $\gamma=0.45$ برای تمام t است.



شکل ۱: نرخ $\int x^TQx$ به انرژی اغتشاش

۴-۲- طراحی کنترلگر H_∞ با محدودیت کنترلی

با فرض $\lambda=1.8$، $M_{\hat{x}(0)}=0.6$، $P_{43\hat{\mu}}=0$، $P_{41\hat{\mu}}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$، $P_{42\hat{\mu}}=\begin{bmatrix}P_{44\hat{\mu}} & 0\end{bmatrix}$، $\gamma=1.4$ و $Q=diag\{0.03,0.03\}$، LMIهای قضیه ۲ را حل می‌نماییم. یک پاسخ ممکن به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$F_1=\begin{bmatrix}1.2609 & -1.1723\end{bmatrix},\ F_2=\begin{bmatrix}1.2594 & -1.1668\end{bmatrix},$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

$$\alpha_0 = 2.795,\ L_1 = \begin{bmatrix} 1.7116 \\ -0.9106 \end{bmatrix},\ L_2 = \begin{bmatrix} 2.2202 \\ -0.2578 \end{bmatrix},$$

$$P_{111} = \begin{bmatrix} 0.4924 & -0.4262 \\ -0.4262 & 4.8305 \end{bmatrix},$$

$$P_{112} = \begin{bmatrix} 0.4909 & -0.4390 \\ -0.4390 & 3.6792 \end{bmatrix},$$

$$P_{441} = 3.4064,\ P_{442} = 3.3800$$

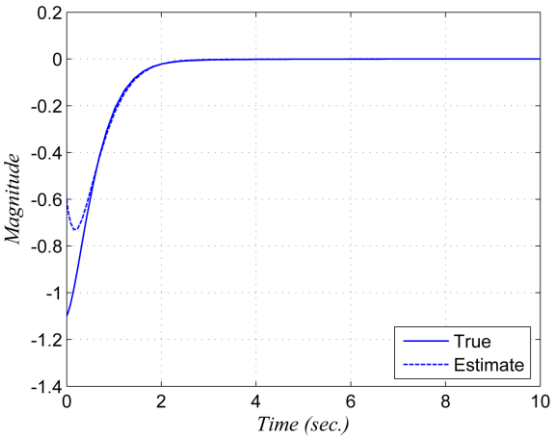
بنابراین، بهره‌های کنترلگر غیر-PDC در رابطه (۱۱) و رویتگر فازی (۹) به ترتیب به صورت:

$$-\left(\sum_{i=1}^{2} h_i(\hat{x}) F_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2} h_i(\hat{x}) P_{11i}\right)^{-1}$$

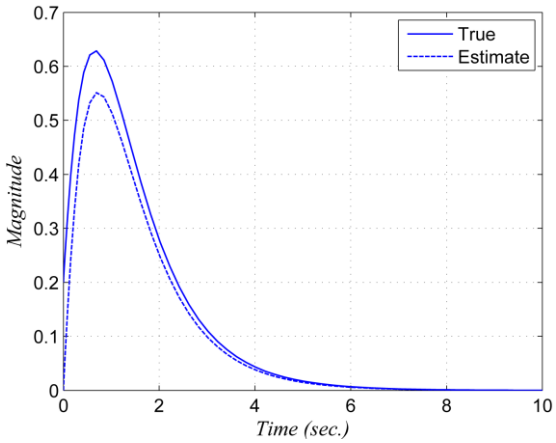
$$\left(\sum_{i=1}^{2} h_i(\hat{x}) L_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2} h_i(\hat{x}) P_{44i}\right)^{-1}$$

خواهند بود. شکل‌های ۲، ۳ و ۴ به ترتیب مسیرهای $x_1(t)$، $x_2(t)$ و خطاهای تخمین را برای حالت اولیه $x(0) = [-1.1 \quad 0.2]^T$، $\hat{x}(0) = [-0.6 \quad 0]^T$ و $\varphi(t) = 0$ نشان می‌دهند.

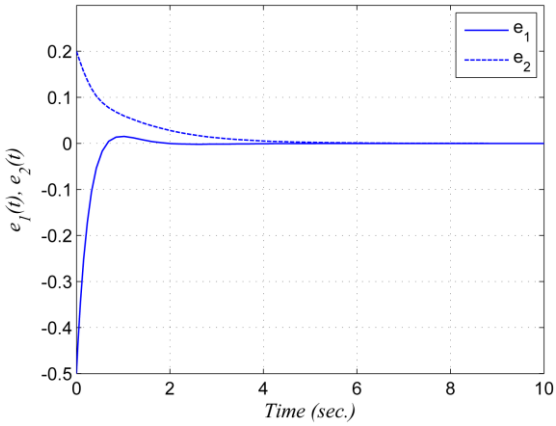
شکل ۵ سیگنال کنترلی $u(t)$ را برای سامانه حلقه-بسته نشان می‌دهد. به علاوه، سیگنال کنترلی را برای حالتی که طراحی کنترلگر بدون در نظر گرفتن محدودیت کنترلی (با همان مقدار سطح میرایی اغتشاش $\gamma = 1.4$) انجام شده است، توسط خطوط نقطه‌ای در شکل ۵ نشان داده شده است.



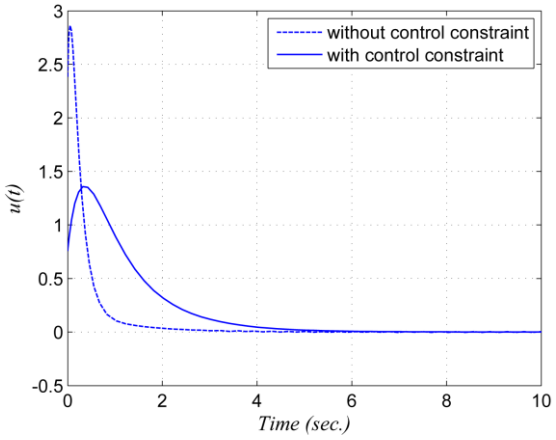
شکل ۲: منحنی‌های $x_1(t)$ و $\hat{x}_1(t)$ برای سامانه حلقه-بسته بدون اغتشاش



شکل ۳: منحنی‌های $x_2(t)$ و $\hat{x}_2(t)$ برای سامانه حلقه-بسته بدون اغتشاش



شکل ۴: خطاهای تخمین $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ و $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ برای سامانه حلقه-بسته بدون اغتشاش.



شکل ۵: سیگنال کنترلی $u(t)$ برای سامانه حلقه-بسته با محدودیت کنترلی (خطوط توپر) و بدون محدودیت کنترلی (خطوط نقطه‌ای).

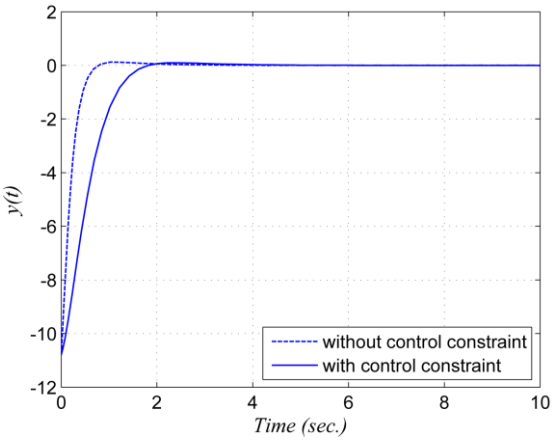
با توجه به شکل ۵، واضح است که سامانه حلقه-بسته محدودیت کنترلی $|u(t)| \le 1.8$ را بوسیله کنترلگر ارائه شده در این مقاله تضمین نموده است. در واقع، در حالتی که محدودیت کنترلی در طراحی اعمال می‌شود، $max|u(t)| = 1.36$ است در حالی‌که در طراحی بدون محدودیت کنترلی، $max|u(t)| = 2.86$ می‌باشد که بیش از دو

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

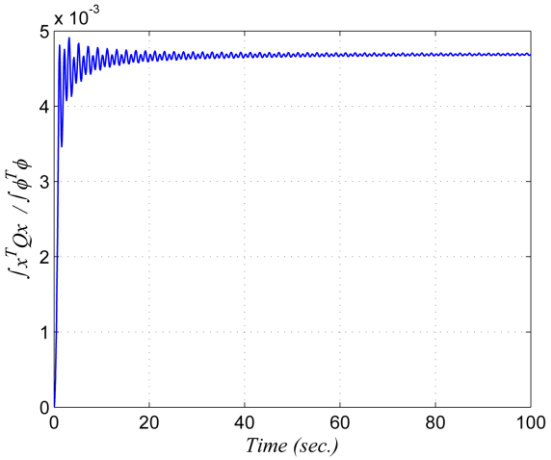
برابر بزرگتر از حداکثر مقدار حالت با محدودیت کنترلی است و نشاندهنده موثر بودن روش طراحی ارائه شده در این مقاله می‌باشد.

لازم به ذکر است که با توجه به مقدار $\alpha_0 = 2.795$، برقراری شرط $|u(t)| \le 1.8$ با توجه به شرایط اولیه $\|\hat{x}(0)\| \le 0.6$ و $\|x(0) - \hat{x}(0)\| \le M_{\tilde{x}(0)} = 0.5982$ می‌باشد. شکل ۶ خروجی سامانه حلقه-بسته را برای حالتهای طراحی بدون محدودیت کنترلی و دارای محدودیت کنترلی در نظر گرفته شده‌اند نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۶ ملاحظه می‌شود، استفاده از قید بر روی سیگنال کنترل باعث می‌شود که سرعت پاسخ کاهش یابد.

شکل ۷ ارضاء معیار کارآیی H_∞ ارائه شده در (۱۹) را با اغتشاش‌بزرگ $\varphi(t) = 10\sin(\pi t)$ نشان می‌دهد. واضح است که نرخ $\int x^T Qx / \int \varphi^T \varphi$ به مقدار اسکالری کمتر از 0.0071 همگرا می‌شود. بنابراین، مقدار $\sqrt{0.0071} \approx 0.084$ بسیار پایین‌تر از مقدار از پیش تعیین شده $\gamma = 1.4$ می‌باشد.



شکل ۶: سیگنال خروجی $y(t)$ برای سامانه حلقه-بسته بدون محدودیت کنترلی (خطوط توپر) و با محدودیت کنترلی (خطوط نقطه‌ای).



شکل ۷: برقراری کارآیی H_∞ برای اغتشاش بالای $\varphi(t) = 10\sin(\pi t)$.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش طراحی کنترلگر H_∞ بر پایه رویتگر فازی برای سامانه‌های فازی T-S دارای اغتشاش و دارای محدودیت کنترلی ارائه شد. برای پوشش دادن سامانه‌های فازی بیشتر، فرض بر این بود که متغیرهای مقدم قواعد رویتگر فازی و کنترلگر فازی نامعلوم هستند و از متغیرهای حالت تخمین‌زده شده برای تخمین این متغیرهای مقدم قواعد استفاده شد. با اعمال رویکرد سامانه توصیف‌گر، با هزینه بزرگتر شدن ابعاد مسئله روش طراحی کنترلگر H_∞ بر پایه رویتگر فازی به صورت تعدادی شرایط LMI فرمول‌بندی شد. از یک تابع لیاپانوف فازی برای به دست آوردن شرایط LMI با محافظه‌کاری کمتر به نسبت نتایج قبل استفاده شد. هم‌چنین، تعدادی شرایط طراحی بر اساس LMIها برای حالتی که محدودیتی بر روی سیگنال کنترلی وجود دارد ارائه شد. موثر بودن روش طراحی ارائه شده توسط یک مثال شبیه‌سازی ارائه شد.

مراجع

[1] T. Takagi and M. Sugeno, 1985, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man., Cybern.*, SMC-15, 116.132.

[2] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, 1998, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6, 250–265.

[3] J. Park, J. Kim and D. Park, 2001, "LMI-based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by Takagi–Sugeno fuzzy model," *Fuzzy Sets and Systems*, 122 (1), 73-82.

[4] C.H. Fang, Y.S. Liu, S.W. Kau, L. Hong, and C.H. Lee, 2006, "A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T–S fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 14 (3), 386-397.

[5] K. Tanaka, T. Hori, and Hua O. Wang, 2003, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 11 (4), 852-859.

[6] K. Tanaka, H. Ohtake, H.O. Wang, 2007, "A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 15 (3), 333-341.

[7] B.-J. Rhee, S. Won, 2006, "A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi–Sugeno fuzzy control system design," *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 1211 – 1228.

[8] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, G. S.C. Avellar, 2009, "A Systematic Approach to Improve Multiple Lyapunov Function Stability and Stabilization Conditions for Fuzzy Systems," *Information Sciences*, 179, 1149-1162.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]

Sugeno's form," *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 1248–1259.

[22] A.H. Besheer, H.M. Emara and M.M. Abdel Aziz, 2007, "Fuzzy-based output-feedback H_∞ control for uncertain nonlinear systems: an LMI approach," *IET Control Theory Appl.*, 1 (4), 1176–1185.

[23] Chung-Shi Tseng, Bor-Sen Chen and Yen-Fang Li, 2009, "Robust fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear systems with persistent bounded disturbances: A novel decoupled approach," *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 2824–2843.

[24] Huai-Ning Wu and Han-Xiong Li, 2008, "H_∞ Fuzzy Observer-Based Control for a Class of Nonlinear Distributed Parameter Systems With Control Constraints," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16 (2) , 502-516.

[25] J. Yoneyama, 2009, "H_∞ filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables: An uncertain system approach," *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 1738–1748.

[26] Xiao-Heng Chang and Guang-Hong Yang, 2011, "A descriptor representation approach to observer-based H_∞ control synthesis for discrete-time fuzzy systems," *Fuzzy Sets and Systems*, 185 (1), 38-51.

[27] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot and D. Maquin, 2010, "State estimation of Takagi–Sugeno systems with unmeasurable premise variables," *IET Control Theory Appl.*, 4(5), 897–908.

[28] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto, 2001, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9 (2), 324–332.

[29] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", *Philadelphia, PA: SIAM*, 1994.

[30] K. Guelton, T. Bouarar, N. Manamanni, 2009, "Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems-A descriptor redundancy approach," *Fuzzy sets and systems*, 160, 2796-2811.

[31] J. F. Sturm, 1999, "Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods and Software*, 11-12, 625–653.

[32] J. Löfberg, 2004, "YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB," in Proceedings of the CACSD Conference, 284-289.

[9] S.-W. Kau, H.-J.Lee, C.-M.Yang, C.-H. Lee, L. Hong and C.-H. Fang, 2007, "Robust *H*∞ fuzzy static output feedback control of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties," *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 135-146.

[10] Jiuxiang Dong and Guang-Hong Yang, 2009, "Static output feedback H_∞ control of a class of nonlinear discrete-time systems," *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 2844–2859.

[11] M. Nachidi, A. Benzaouia, F. Tadeo and M.A. Rami, 2008, "LMI-Based Approach for Output-Feedback Stabilization for Discrete-Time Takagi--Sugeno Systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 16 (5), 1188-1196.

[12] D. Huang and S. K. Nguang, 2007, "Static output feedback controller design for fuzzy systems: An ILMI approach," *Information Sciences*, 177, 3005- 3015.

[13] J. Yoneyama, 2009, "Output Feedback Control for Fuzzy Systems with Immeasurable Premise Variables," *IEEE Conference on fuzzy systems* (FUZZ-IEEE 2009), Korea, pp. 802-807.

[14] S. K. Nguang and P. Shi, 2006, "Robust H_∞ output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic *D*-stability constraints: an LMI approach", *Information Sciences*, 176, 2161-2191.

[15] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach,* New York: Wiley, 2001.

[16] JunYoneyama, 2006, "Robust H_∞ control analysis and synthesis for Takagi–Sugeno general uncertain fuzzy systems," *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 2205–2223.

[17] Liu Xiaodong and Zhang Qingling, 2003, "New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI," *Automatica*, 39, 1571-1582.

[18] J.C. Lo and M.L. Lin, 2007, "Existence of similarity transformation converting BMIs to LMIs," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 15 (5), 840–851.

[19] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski and T.M. Guerra, 2009, "Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T–S models," *Information Sciences*, 179, 446–457.

[20] S.K. Nguang and P. Shi, 2003, "H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear systems: an LMI approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 11 (3), 331–340.

[21] T.M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren and H. Tirmant, 2006, "Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi–

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.6.8]