مجله کنترل
جلد ۶، شماره ۱، بهار ۱۳۹۱، صفحه ۷۲-۶۱

ارائه روش جدید درونیابی پایدار در طراحی خودخلبان مقاوم زمان‌بندی بهره

سید محمدجواد معافی مدنی[۱]، ایمان محمدزمان[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، javadmadany@yahoo.com
[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، mohammadzaman@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۱/۱۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۳/۲۴)

چکیده: در این مقاله یک روش جدید درونیابی پایدار برای طراحی خودخلبان مقاوم یک رهگیر ارائه شده است. روش ارائه شده برمبنای درونیابی بین نواحی مشترک پایدار کنترل‌کننده‌های محلی بوده و تضمین پایداری سیستم حلقه بسته را در کل فضا می‌نماید. برای پیدا کردن نواحی پایدار هر کنترل‌کننده محلی از ابزار v-gap metric استفاده شده و از روش کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ برای طراحی کنترل‌کننده‌های محلی استفاده شده است. همچنین پیچیدگی روش ارائه شده نسبت به سایر روش‌های درونیابی حفظ‌کننده پایداری کمتر می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی سه درجه آزادی نشان‌دهنده تضمین کارآیی و پایداری سیستم حلقه بسته در طول مسیر پرواز می‌باشد.

کلمات کلیدی: خودخلبان مقاوم، درونیابی حفظ‌کننده پایداری، کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره، v-gap metric.

A New Stability Preserving Interpolation Method in Robust Gain Scheduling Autopilot Design

Mohammad Javad Moafi Madani, Iman Mohammadzaman

Abstract: This paper presents a new stability preserving interpolation technique for robust gain scheduling autopilot design. The interpolation method is based on interpolation in the common stability region of local controllers and generates a gain-scheduled controller that is stabilizing at every operating point of a closed loop system. For selection of stability region of local controllers, the notion of the v-gap metric and its connection to robust loop-shaping theory is used. The proposed method facilitates the design of gain-scheduled controllers that preserves stability of the closed loop system. The simulation results given show the generality and effectivneness of the proposed control strategy in terms of the stability, performance and robustness, of the system.

Keywords: Robust autopilot, stable interpolation, gain scheduling controller, v-gap metric.

فهرست علایم

$\Re H_\infty$: فضای توابع کسری حقیقی محدود و آنالیتیک در نیمه راست صفحه مختلط

$\overline{\sigma}(.)$: بزرگترین مقدار تکین ماتریس

$\underline{\sigma}(.)$: کوچکترین مقدار تکین ماتریس

$\|\ \|_\infty$: نرم بی‌نهایت ماتریس

$\varepsilon[Gs, k_\infty]$: حاشیه‌پایداری مقاوم سیستم $\begin{bmatrix} G_s & k_\infty \end{bmatrix}$

γ: معکوس حاشیه پایداری مقاوم

Q: فشار دینامیکی

S: سطح مرجع

D: قطر

V_M: سرعت رهگیر

X: نیروی وارد بر رهگیر در راستای x بدنی

Y: نیروی وارد بر رهگیر در راستای y بدنی

Z: نیروی وارد بر رهگیر در راستای z بدنی

L: گشتاور حول محور رول

نویسنده عهده دار مکاتبات: ایمان محمدزمان

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

M :گشتاور حول محور پیچ
N :گشتاور حول محور یاو
P : سرعت زاویه‌ای حول محور x بدنی
Q : سرعت زاویه‌ای حول محور y بدنی
R : سرعت زاویه‌ای حول محور z بدنی
m : جرم رهگیر
I_y : ممان‌اینرسی طولی
I_z : ممان‌اینرسی عرضی
δ : زاویه بالک عملگر
$C_{z_{\delta_e}}$: تغییرات Z ناشی از تغییرات زاویه بالک
C_{z_α} : تغییرات Z ناشی از تغییرات زاویه حمله
$C_{m_{\delta_e}}$: تغییرات M ناشی از تغییرات زاویه بالک
C_{m_α} : تغییرات M ناشی از تغییرات زاویه حمله

۱- مقدمه

طراحی خودخلبان برای رهگیرها و تحلیل پایداری و کارآیی آن در طول مسیر پروازی یکی از مسائل مورد توجه مهندسین کنترل بوده و تلاش‌های تحقیقاتی زیادی را به خود جلب نموده است[۱]-[۳]. پیچیدگی‌های حاکم بر دینامیک رهگیر مثل رفتار غیرخطی، وجود نامعینی و دینامیک وابسته به پارامتر منجر به گسترش تحقیقات پیرامون طراحی کنترل‌کننده برای این سیستم و تحلیل پایداری و کارآیی آن شده است. از این میان، روش زمان‌بندی بهره یکی از رایج‌ترین روش‌ها در تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های غیرخطی وابسته به پارامتر و همچنین طراحی خودخلبان رهگیرها می‌باشد[۴]. در حالت کلی می‌توان روش های زمان بندی بهره را با توجه به نحوه خطی‌سازی مدل غیرخطی به دو دسته زمان‌بندی بهره بر مبنای مدل خطی متغیر با پارامتر و زمان‌بندی بهره بر مبنای مدل خطی غیرمتغیر با زمان تقسیم کرد [۵]. در روش‌های مبتنی بر مدل خطی متغیر با پارامتر، دینامیک سیستم غیرخطی به‌صورت یک سیستم خطی با ماتریس‌های فضای حالت تغییر پذیر با زمان مدل می‌شود و تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده در این روش‌ها با استفاده از تحلیل تابع لیاپانوف و یا قضیه بهره کوچک انجام می‌شود[۶]. تحلیل پایداری با استفاده از تابع لیاپانوف و یا قضیه بهره کوچک محافظه‌کارانه بوده و در نهایت ساختار کنترل کننده از نظر شبیه‌سازی و پیاده‌سازی پیچیده خواهد بود. علاوه‌برآن ممکن است شرایط امکان‌پذیری توابع لیاپانوف برقرار نباشد و وجود کنترل‌کننده فراگیر تضمین شده نیست (منظور از کنترل‌کننده فراگیر کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره است که از ترکیب کنترل‌کننده‌های محلی و احتمالا دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به‌دست آمده است.).

در روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان عموما چند سیستم خطی از روی سیستم غیرخطی اولیه در نقاط کار مختلف به‌دست آمده و برای هر کدام از آن‌ها کنترل‌کننده محلی طراحی می‌گردد که لزوما دارای ساختار مشابه نیستند و در نهایت به‌منظور دست‌یافتن به کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره نهایی بین این کنترل‌کننده‌ها، درونیابی انجام می‌شود[۷]-[۸]. روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، روش‌های بدون محافظه‌کاری بوده و وجود کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره همواره در این روش‌ها تضمین شده است ولی تحلیل پایداری در این روش‌ها با پیچیدگی همراه است. در سال‌های گذشته از سوئیچینگ سخت، درونیابی بین صفر و قطب و بهره تابع تبدیل، درونیابی بین ضرایب تابع تبدیل کنترل‌کننده‌های محلی در هنگام انتقال از یک ناحیه به ناحیه دیگر و ترکیب خروجی کنترل‌کننده‌های محلی استفاده شده است [۸]-[۹]. تمام این روش‌ها جزء روش‌های قدیمی مبتنی بر مدل خطی بوده و به‌طور خلاصه می‌توان گفت مزیت این روش‌ها در سادگی طراحی و پیاده‌سازی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره نهایی می‌باشد و مهمترین عیب آن‌ها نیز عدم تضمین پایداری کنترل‌کننده فراگیر است.

اما از میان روش های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، می‌توان به روش‌هایی اشاره کرد که در آن‌ها در مورد پایداری سیستم زمان‌بندی بهره نهایی نیز تضمین‌هایی داده شده است. یکی از روش‌های درونیابی که در آن در مورد پایداری سیستم زمان‌بندی بهره نهایی بحث شده است روش درونیابی فیدبک حالت و مشاهده‌گر می‌باشد. این روش به علت درونیابی بین چندین ماتریس فضای حالت دارای پیچیدگی فراوانی است ولی در مقالاتی برای اثبات پایداری این روش ایده‌هایی مطرح شده است[۱۰]. یکی دیگر از روش‌هایی که توانایی تضمین پایداری سیستم زمان‌بندی بهره نهایی را دارد روش‌های درونیابی بین ماتریس‌های نمایش پارامتر یولا[1] است و در نتیجه ساختار کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره نهایی به‌صورت ترکیب کسری خطی از سیستم وابسته به پارامتر با کنترل‌کننده‌های محلی می‌باشد [۱۱]-[۱۳]. در [۱۲] و [۱۳] یک روش درونیابی حفظ‌کننده پایداری برمبنای درونیابی روی پارامترهای یولا ارائه شده و از آن برای طراحی خودخلبان رهگیر استفاده شده است. مهمترین شرط درونیابی در این روش شرط پوشش پایداری است. این شرط بیان می‌کند که هر کنترل‌کننده محلی باید توانایی تضمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را به‌ازای پارامترهای فریز شده سیستم داشته باشد و درونیابی نیز درون نواحی مشترک پایداری امکان‌پذیر است. اما در این روش درجه کنترل‌کننده فراگیر بسیار بالاتر از درجه کنترل‌کننده‌های محلی بوده و پیاده‌سازی آن دارای پیچیدگی فراوانی می‌باشد. همچنین پایداری سیستم وابسته به پارامتر در مرحله طراحی مدنظر قرار نگرفته و تنها پایداری سیستم به‌ازای پارامترهای فریزشده مورد بررسی قرار می‌گیرد و بعد از مرحله طراحی با بررسی یک قید روی بیشینه نرخ تغییرات متغیر زمان‌بندی بهره، پایداری سیستم وابسته به پارامتر نهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

به‌منظور بهبود مشکلات و پیچیدگی‌های بیان شده در بالا، در این مقاله یک روش جدید برای درونیابی پایدار بین کنترل‌کننده‌های محلی ارائه شده است. مهمترین شرط درونیابی در این روش، شرط پوشش

[1] Youla parameter

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

پایداری وابسته به پارامتر است بطوریکه با برقراری شرط مذکور، پایداری کلی سیستم تضمین شده و ساختار ساده‌ای برای کنترل‌کننده فراگیر بدست می‌آید. تفاوت بین این شرط با شرط پوشش پایداری بیان شده در مراجع [۱۲] و [۱۳] این است که در مراجع مذکور تنها به بررسی پایداری سیستم برای مقادیر فریز شده می‌پردازد. این پایداری بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر به‌ازای مقادیر ثابت متغیر زمان‌بندی بهره به‌صورت یک سیستم LTI تبدیل شده و سپس پایداری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. ولیکن در شرط پایداری وابسته به پارامتر ارائه‌شده در این مقاله، یک همسایگی باز حول نقطه نامی مشخص می‌شود که سیستم وابسته به پارامتر به‌ازای تغییرات پارامترهایش درون ناحیه مورد نظر به‌صورت کلی پایدار باشد. پایداری کلی در این‌جا بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر به‌ازای تغییرات متغیر زمان‌بندی بهره (بدون فریز شدن)، پایدار بماند. در حقیقت در شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر، بررسی مقادیر ویژه سیستم به تنهایی کافی نمی‌باشد و لذا برای پیدا کردن همسایگی باز حول هر نقطه نامی به‌گونه‌ای که شرط مورد نظر را ارضا کند، ابزار v-gap metric پیشنهاد شده است. با استفاده از این ایده برای هر کنترل‌کننده محلی نواحی محلی پایدار مشخص شده و روشی برای درونیابی بین دو کنترل‌کننده‌ی محلی مجاور درون ناحیه اشتراک پایداری دو کنترل‌کننده ارائه می‌شود. همچنین کنترل‌کننده فراگیر ارائه شده در این مقاله تنها با ترکیب کنترل‌کننده‌های محلی به‌دست می‌آید ولی در سایر روش‌ها با ترکیب کنترل‌کننده‌های محلی و سیستم وابسته به پارامتر به‌دست می‌آید. در حقیقت با ورود دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به دینامیک کنترل‌کننده فراگیر، دشواری و پیچیدگی فراوانی در پیاده‌سازی کنترل‌کننده فراگیر حاصل می‌شود که با این ایده این مشکل برطرف می‌گردد.

از آن‌جایی که قضایای پایداری که توسط ابزار v-gap metric معرفی می‌شود با روش شکل‌دهی حلقه H_∞ مرتبط است، بنابراین در این مقاله برای طراحی کنترل‌کننده محلی از روش کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ استفاده شده است که در آن درجه کنترل‌کننده مقاوم صفر بوده و درجه کنترل‌کننده فراگیر تنها برابر درجه وزن‌های شکل‌دهی حلقه می‌باشد و لذا منجر به یک کنترل کننده با درجه نسبی پایین می گردد که مشکلات پیاده سازی عملی را بر خلاف روش کلاسیک شکل‌دهی حلقه H_∞ نخواهد داشت. این ویژگی باعث سادگی فراوان در پیاده‌سازی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره نهایی خواهد شد [۱۴].

۲- کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞

برای طراحی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره با استفاده از درونیابی پایدار بین کنترل‌کننده‌های محلی، لازم است کنترل‌کننده‌های محلی توانایی تضمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را داشته باشند. از آن‌جایی که در این مقاله از ابزار v-gap metric برای پیدا کردن همسایگی باز حول نقطه نامی استفاده می‌شود و این ابزار در حقیقت بیان‌کننده مقدار مقاومت سیستم در برابر نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی می‌باشد، در این مقاله از روش شکل‌دهی حلقه H_∞ برای طراحی کنترل‌کننده محلی استفاده می‌شود. زیرا در این روش نیز کنترل‌کننده مقاوم به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که حاشیه پایداری مقاوم سیستم در برابر نامعینی‌های روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی بیشینه گردد. البته به‌منظور رفع مشکل درجه بالای کنترل‌کننده روش شکل‌دهی حلقه H_∞ از یک نوع روش طراحی استفاده شده است تا کنترل‌کننده مقاوم طراحی‌شده دارای درجه پایینی باشد. این روش به‌نام روش کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ شناخته می‌شود. تحقق فضای حالت G_s را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G_s=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} \qquad (۱)$$

که در آن $A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times n_u}, C\in R^{n_y\times n}, D\in R^{n_y\times n_u}$ و G_s سیستم شکل‌دهی شده در روش شکل‌دهی حلقه H_∞ می‌باشد[۱۶]. تحقق مینیمال فضای حالت ضرایب نسبت هم اول G_s به‌صورت زیر می‌باشد[۱۶]:

$$\begin{aligned}\tilde{N}&=\begin{bmatrix}A+LC & L\\ E^{-1/2}C & E^{-1/2}\end{bmatrix}\\ \tilde{M}&=\begin{bmatrix}B+LD & L\\ E^{-1/2}D & E^{-1/2}\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن $L=-(BD^T+ZC^T)E^{-1}$ و $E=I+DD^T$ بوده و ماتریس z جواب معادله جبری ریکاتی زیر است:

$$\begin{aligned}&(A-BF^{-1}D^TC)Z+Z(A-BF^{-1}D^TC)^T\\ &-ZC^TE^{-1}CZ+BF^{-1}B^T=0\end{aligned} \qquad (۳)$$

که در رابطه فوق $F=I+D^TD$ می‌باشد. علاوه بر آن تحقق فضای حالت سیستم کلی‌شده[1] متناظر با روش شکل‌دهی حلقه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید[۱۶]:

$$P=\begin{bmatrix}A_s & -LE^{1/2} & B\\ \begin{bmatrix}0\\ C\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ E^{1/2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}I_{n_u}\\ D\end{bmatrix}\\ C & E^{1/2} & D\end{bmatrix} \qquad (۴)$$

لم زیر شرایط وجود کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ که با K_∞ نمایش داده می‌شود را بیان می‌نماید:

لم ۱: تحقق فضای حالت سیستم شکل‌دهی‌شده G_s مطابق رابطه (۱) و نرم بی‌نهایت تابع تبدیل حلقه‌بسته از اغتشاش به خروجی مطابق رابطه زیر می باشد:

$$\left\|\begin{bmatrix}K_\infty\\ I\end{bmatrix}\left(I-G_sK_\infty\right)^{-1}\tilde{M}^{-1}\right\|\le\gamma=\varepsilon^{-1} \qquad (۵)$$

[1] Generalized plant

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ (k_∞) به‌گونه‌ای که رابطه (۵) کمینه گردد؛ وجود دارد اگر $\gamma>1$ و ماتریس معین مثبت R وجود داشته باشند بطوریکه دو نامساوی زیر را ارضا نمایند:

$$R(A+LC)^T+(A+LC)R<0 \qquad (۶)$$

$$\begin{pmatrix} AR+RA^T-\gamma BB^T & RC^T-\gamma BD^T & -LE^{1/2} \\ CR-\gamma BD^T & -\gamma I & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & E^{1/2} & -\gamma I_{n_y} \end{pmatrix}<0 \qquad (۷)$$

□

بعد از بررسی شرایط امکان‌پذیری مساله در نامساوی‌های فوق، کنترل‌کننده K_∞ با استفاده از لم کران حقیقی به‌صورت زیر ساخته می‌گردد[۱۴]:

$$K_\infty=\tilde{k}\left(I+D\tilde{k}\right)^{-1} \qquad (۸)$$

که در آن $\tilde{k}$ با حل نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{k}\tilde{C}+\tilde{C}^T\tilde{k}^T\tilde{B}^T<0 \qquad (۹)$$

که در رابطه فوق ماتریس‌های $\tilde{C},\tilde{B},\tilde{A}$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} AR+RA^T & 0 & RC^T & -LE^{1/2} \\ 0 & -\gamma I_{n_u} & 0 & 0 \\ CR & 0 & -\gamma I_{n_y} & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & 0 & E^{1/2} & -\gamma I_{n_y} \end{pmatrix} \qquad (۱۰)$$

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} B \\ I_{n_u} \\ D \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix} CR & 0 & 0 & E^{1/2} \end{pmatrix} \qquad (۱۲)$$

که در آن ماتریس لیاپانوف R با استفاده از لم ۱ بدست می‌آید.

در حالت کلی طراحی وزن‌های شکل‌دهی حلقه به دید مهندسی و تجربه طراح بستگی دارد. این وزن‌ها می‌بایست به‌گونه‌ای طراحی شوند که تمامی معیارهای کارآیی در حوزه فرکانس به‌خوبی ارضا شوند. یعنی بهره تابع در فرکانس‌های پایین و بالا به‌ترتیب به‌اندازه کافی بزرگ و کوچک شود. همچنین در حوالی فرکانس عبور پاسخ فرکانسی دارای شیب تند نباشد. برای اجتناب از طراحی وزن‌ها به‌صورت کلاسیک اخیرا روش‌های سیستماتیکی ارائه شده است[۱۷]، [۱۸]. در این مقاله از روش سیستماتیک ارائه شده در [۱۸] برای طراحی وزن‌های شکل‌دهی حلقه و کنترل‌کننده استاتیکی مقاوم استفاده شده است.

۳- تعاریف و فرضیات

در این قسمت به ارائه برخی تعاریف و فرضیات مورد استفاده در مقاله پرداخته شده است. برای سادگی فرض می‌شود سیستم وابسته به پارامتر تنها به یک پارامتر وابستگی دارد و تعمیم این روش برای حالت بیشتر از یک پارامتر به‌سادگی قابل انجام است.

تعریف ۱: سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر $G(\rho)$ به‌همراه مجموعه بسته $\Gamma\subset R$ که بیان‌گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان‌بندی بهره است ($\rho\in\Gamma$)، داده شده است. همچنین فرض کنید به‌ازای مقادیر ثابت $\rho_1,\ldots,\rho_q\in\Gamma$ کنترل‌کننده‌های خطی تغییرناپذیر با زمان $K_1,\ldots,K_\rho$ طراحی شده است به‌گونه‌ای که هر کنترل‌کننده قادر به حفظ پایداری سیستم خطی غیرمتغیر با زمان $G(\rho_i)$ متناظر با خود باشد. کنترل‌کننده تغییرپذیر با پارامتر $K(\rho)$ را که از روی $K_1,\ldots,K_\rho$ ساخته شده است، کنترل‌کننده حفظ‌کننده پایداری می‌گویند اگر شرایط زیر برقرار باشد[۱۳]:

۱. ضرایب $K(\rho)$ به‌صورت توابع پیوسته‌ای از ρ باشند.

۲. $K(\rho_i)=K_i \quad for\ i=1,\ldots,q$

۳. $K(\rho)$ سیستم $G(\rho)$ را به‌ازای تمام $\rho\in\Gamma$ پایدار کند.

با استفاده از تعریف ۱، در این مقاله یک روش درونیابی حفظ‌کننده پایداری ارائه شده است که در آن مهمترین شرطی که روی کنترل‌کننده‌های خطی تغییرناپذیر با زمان که بین آن‌ها درونیابی پایدار صورت می‌گیرد؛ شرط پوشش پایداری سیستم وابسته به پارامتر می‌باشد. این شرط بدین معنی است که هر کنترل‌کننده محلی در این حالت بایستی توانایی تضمین پایداری سیستم حلقه بسته به ازای یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به ازای تغییرات پارامترهای سیستم را نیز داشته باشد. ولیکن در روش‌های قبلی درونیابی حفظ‌کننده پایداری، هر کنترل‌کننده محلی بایستی سیستم را در یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به‌صورت فریز شده پایدار کند.

تعریف ۲ (*شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر*): سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر $G(\rho)$ به‌همراه مجموعه بسته $\Gamma\subset R$ که بیان‌گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان‌بندی بهره است را در نظر بگیرید که کنترل‌کننده‌های محلی $K_1,K_2,\ldots,K_q$ در نقاط کار $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_q$ به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که K_i سیستم نامی $G(\rho_i)$ را پایدار کند. حال اگر به ازای هر کنترل‌کننده محلی K_i یک همسایگی باز U_i که شامل ρ_i است وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که K_i سیستم $G(\rho)$ را به‌ازای محدوده تغییرات $\rho\in U_i$, $i=1,\ldots,q$. پایدار کند و شرط $\Gamma\subset\bigcup_{i=1}^{q}U_i$, برقرار باشد، آن‌گاه گفته می‌شود که شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر ارضا شده است.

از آن‌جایی که در این مقاله هدف آن است سیستم وابسته به پارامتر به‌ازای یک محدوده تغییرات پارامتر به‌صورت کلی پایدار بماند، آزمون موقعیت مقادیر ویژه کافی نمی‌باشد. لذا برای این کار ابزار v-gap

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

metric پیشنهاد شده است. انگیزه گسترش ایده‌های gap یا v-gap metric در اندازه‌گیری تفاوت رفتار حلقه‌بسته دو سیستم از روی رفتار حلقه‌باز آن‌ها می‌باشد**.Error! Reference source not found.** فرض کنید ضرایب نسبت به هم اول سیستم G به‌صورت $G=NM^{-1}$ باشد. آن‌گاه فاصله v-gap بین سیستم‌های G,G_Δ ($\delta_v(G,G_\Delta)$) را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد[۱۵]:

$$\delta_v(G,G_\Delta)=\inf_{\substack{\begin{bmatrix}\Delta_N\\ \Delta_M\end{bmatrix}\in RL_\infty \\ wno\det(M+\Delta_M)=\eta(G)}}\left\{\left\|\begin{bmatrix}\Delta_N\\ \Delta_M\end{bmatrix}\right\|_\infty : G_\Delta=(N+\Delta_N)(M+\Delta_M)^{-1}\right\} \quad (۱)$$

که در آن $wno\,g(s)$ برابر تعداد چرخش منحنی نایکوئیست تابع $g(s)$ حول مبدا در جهت چرخش عقربه‌های ساعت بوده و $\eta(G)$ برابر تعداد قطب‌های سمت راست سیستم G می‌باشد. این رابطه بیان‌گر آن است که می‌توان با پیدا کردن مقدار کمینه نامعینی لازم روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی به‌گونه‌ای که به سیستم اغتشاش‌یافته تبدیل شود، به مقدار مشابهت رفتار دینامیکی حلقه‌بسته دو سیستم با یک فیدبک پی برد. لم زیر ارتباط بین مفهوم v-gap و پایداری را به خوبی بیان می‌کند[۱۵]:

لم ۲: سیستم نامی G که در آن $\beta\le\alpha<\varepsilon_{opt}(G)$ است را درنظر بگیرید. برای کنترل‌کننده داده شده K و برای تمام سیستم‌های غیر نامی که دارای ویژگی $\delta_v(G,G_\Delta)\le\beta$ هستند، رابطه زیر برقرار است:

$$\arcsin\varepsilon[G,K]>\arcsin\alpha-\arcsin\beta \quad (۲)$$

اگر و فقط اگر: $\varepsilon[G,K]>\alpha$. □

با قرار دادن $\beta=\alpha$ در لم ۲ می‌توان گفت $[G_\Delta \quad K]$ پایدار است اگر و فقط اگر $\varepsilon[G,K]>\alpha$.

لم ۳: فرض کنید سیستم فیدبک $[G \quad K]$ پایدار باشد. مجموعه‌های π و κ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید **Error! Reference source not found.**:

$$\begin{aligned}\pi&:=\{G_\Delta:\delta_v(G_\Delta,G)<r_1\},\\ \kappa&:=\{K_\Delta:\delta_v(K_\Delta,K)<r_2\},\end{aligned} \quad (۳)$$

آن‌گاه سیستم فیدبک $[G_\Delta \quad K_\Delta]$ برای تمام $G_\Delta\in\pi,\ K\in\kappa$ پایدار است اگر و فقط اگر:

$$\arcsin\varepsilon[G,K]\ge\arcsin r_1+\arcsin r_2 \quad (۴)$$

۴- روش درونیابی پایدار پیشنهادی

در این بخش روش درونیابی حفظ‌کننده پایداری ارائه می‌شود. ابتدا روشی برای تحلیل پایداری یک سیستم وابسته به پارامتر با ابزار v-gap metric ارائه می‌گردد. همچنین از این روش برای پیدا کردن ناحیه محلی پایدار برای یک سیستم وابسته به پارامتر استفاده خواهد شد. در مرجع [۵] از ایده‌ای مشابه این روش برای پیدا کردن نقاط کار بهینه برای طراحی کنترل‌کننده محلی استفاده شده است. اساس این ایده تبدیل یک سیستم وابسته به پارامتر به یک سیستم LTI بوده که در آن وابستگی به پارامتر به‌صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم LTI مدل می‌گردد و با استفاده از لم ۲ تحلیل پایداری سیستم وابسته به پارامتر انجام می‌گیرد.

سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ را به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho\in U_i$ در نظر بگیرید. این سیستم را می‌توان به‌صورت یک سیستم LTI ($G(\rho_i)$) در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی‌های سیستم به پارامتر ρ به‌صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می‌گردد. برای این منظور باید توجه کرد که همواره می‌توان سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ را به‌ازای تغییرات پارامتر $\rho\in U_i$ در تمام نقاط فریز کرد و با G_Δ نمایش داد که در آن G_Δ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$G_\Delta=G(\rho)\big|_{\rho=\rho_k,\ \rho_k\in U_i} \quad (۱)$$

فرض کنید درون هر ناحیه U_i نقطه ρ_i به‌عنوان نقطه نامی انتخاب گردد. می‌توان به‌ازای هر سیستم فریزشده G_Δ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی $G(\rho_i)$ را مطابق رابطه (۱) به‌گونه‌ای یافت که سیستم نامی به سیستم G_Δ تبدیل شود و آن را با $\delta_v(G(\rho_i),G_\Delta)$ نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی به‌ازای تمام تغییرات پارامتر ρ درون ناحیه $\rho\in U_i$، برای آن‌که سیستم نامی به سیستم G_Δ تبدیل شود با β_i نمایش داده می‌شود یعنی:

$$\sup_{G_\Delta\subset G(\rho)\ for\rho\in U_i}\delta_v(G(\rho_i),G_\Delta)=\beta_i \quad (۲)$$

آن‌گاه می‌توان سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho\in U_i$ را به‌صورت یک سیستم نامی $G(\rho_i)$ در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به‌اندازه β_i می‌باشد. در نتیجه مطابق لم ۲ می‌توان گفت چنان‌چه کنترل‌کننده‌ای بتواند سیستم نامی $G(\rho_i)$ را پایدار کند و $\varepsilon[G(\rho_i),K_i]>\beta_i$ باشد معادل این است که بتواند سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ را به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho\in U_i$ پایدار نماید.

با توجه به روش بیان‌شده، می‌توان محدوده تغییرات متغیرهای زمان‌بندی بهره ($\rho\in\Gamma$) را به‌گونه‌ای به چند زیرناحیه U_i, $(i=1,\dots q)$ تقسیم کرد که اولا اجتماع این زیرناحیه‌ها تمام فضای تغییرات متغیرهای زمان‌بندی بهره را پوشش دهد (یعنی $\Gamma\subset\bigcup_{i=1}^{q}U_i$,) و همچنین هر کنترل‌کننده نامی طراحی شده برای هر زیرناحیه توانایی تضمین پایداری برای سیستم وابسته به پارامتر درون زیرناحیه مربوط به خود را داشته باشد. با فرض این که زیرناحیه‌های U_i, $(i=1,\dots q)$ با توجه به روش بیان‌شده انتخاب شده‌اند قضیه زیر یک روش درونیابی پایدار بین دو کنترل‌کننده محلی مجاور هم و درون ناحیه مشترک پایداری این دو کنترل‌کننده ارائه می‌کند. این ناحیه

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

مشترک از اشتراک دو زیرناحیه پایدار دو کنترل‌کننده مجاور به دست آمده است. چنان‌چه اثبات پایداری برای درونیابی بین دو کنترل‌کننده مجاور K_i و K_{i+1} و برای ناحیه مشترک پایداری $[a_i \quad b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$ انجام گیرد، به راحتی می‌توان همین اثبات را برای نواحی مشترک پایداری بعدی انجام داد و کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره کلی را یافت.

قضیه ۱: کنترل‌کننده‌های محلی K_i و K_{i+1} در نقاط ρ_i و ρ_{i+1} را درنظر بگیرید بطوری‌که سیستم $G(\rho)$ را در زیرنواحی U_i و U_{i+1} پایدار می‌کنند و ناحیه مشترک پایداری آن‌ها به‌صورت $[a_i \quad b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$ می‌باشد. کنترل‌کننده درونیابی شده $\hat{K}_i(\rho)$ بصورت:

$$\hat{K}_i(\rho) = \left(\frac{b_i - \rho}{b_i - a_i}\right) K_i + \left(\frac{\rho - a_i}{b_i - a_i}\right) K_{i+1} \qquad (۳)$$

سیستم $G(\rho)$ را به‌ازای ناحیه $[a_i \quad b_i]$ پایدار می‌نماید اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\arcsin\varepsilon_{G(a_i),K_i} \geq \arcsin r_1 + \arcsin r_2 \qquad (۴)$$

که در آن r_1 و r_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sup_{G_\Delta \subset G(\rho)\ for \rho \in [a_i \quad b_i]} \delta_v(G(\rho_i), G_\Delta) = r_1 \qquad (۵)$$

$$\sup_{K_\Delta \subset K(\rho)\ for \rho \in [a_i \quad b_i]} \delta_v(K_i, K_\Delta) = r_2 \qquad (۶)$$

و G_Δ و K_Δ برابر با $G(\rho)$ و $\hat{K}_i(\rho)$ به ازای مقادیر فریز شده $\rho \in [a_i \quad b_i]$ می‌باشند.

اثبات: فرض کنید کنترل‌کننده محلی K_i و K_{i+1} سیستم $G(\rho)$ را به‌ازای $[\rho_i \quad b_i]$ و $[a_i \quad \rho_{i+1}]$ (در نتیجه ناحیه مشترک پایداری $\rho \in [a_i \quad b_i]$ باشد). با استفاده از لم ۳ می‌توان نشان داد کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ سیستم $G(\rho)$ را پایدار می‌کند. روش کار به‌صورت زیر می‌باشد:

کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ را به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho \in [a_i \quad b_i]$ در نظر بگیرید. فرض کنید سیستم $G(\rho)$ به‌ازای $\rho = a_i$ به‌عنوان سیستم نامی و کنترل‌کننده محلی K_i مربوط به ناحیه پایداری $[\rho_i \quad b_i]$ نیز به‌عنوان کنترل‌کننده نامی در نظر گرفته شود، آن‌گاه کنترل‌کننده وابسته به پارامتر $\hat{K}_i(\rho)$ را می‌توان به‌صورت یک کنترل‌کننده نامی LTI در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی‌های کنترل‌کننده به پارامتر ρ به‌صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می‌گردد. برای این منظور باید توجه کرد که همواره می‌توان کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ را به‌ازای تغییرات پارامتر $\rho \in [a_i \quad b_i]$ در نقاط مختلف فریز کرد و با K_Δ نمایش داد. همچنین می‌توان به‌ازای هر سیستم فریزشده K_Δ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول کنترل‌کننده نامی K_i را مطابق رابطه (۱) به‌گونه‌ای یافت که کنترل‌کننده نامی به کنترل‌کننده K_Δ تبدیل شود و آن را با $\delta_v(K_i, K_\Delta)$ نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی به‌ازای تمام تغییرات پارامتر ρ درون ناحیه $[a_i \quad b_i]$ $\rho \in [a_i \quad b_i]$، برای آن‌که کنترل‌کننده نامی به کنترل‌کننده K_Δ تبدیل شود مطابق رابطه (۶) با r_2 نمایش داده می‌شود. آن‌گاه می‌توان کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho \in [a_i \quad b_i]$ را به‌صورت یک کنترل‌کننده نامی K_i در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به‌اندازه r_2 می‌باشد. همچنین اگر بیشینه مقدار نرم نامعینی به‌ازای تمام تغییرات پارامتر ρ درون ناحیه $\rho \in [a_i \quad b_i]$، برای آن‌که سیستم نامی $G(a_i)$ به سیستم G_Δ تبدیل شود مطابق رابطه (۵) با r_1 نمایش داده شود، آن‌گاه مطابق لم ۳ می‌توان نتیجه گرفت اگر رابطه (۴) برقرار باشد آن‌گاه کنترل‌کننده $\hat{K}_i(\rho)$ سیستم $G(\rho)$ را درون ناحیه مشترک پایداری $\rho \in [a_i \quad b_i]$ پایدار می‌کند. □

باید توجه کرد اگر شرط رابطه (۴) برقرار نباشد می‌بایست ناحیه مشترک پایداری را کوچکتر انتخاب کرد و این کار می‌بایست آن‌قدر ادامه یابد تا شرط مذکور صادق باشد. در نهایت با استفاده از قضیه ۱، به‌منظور برقراری پایداری سیستم در کل بازه $\rho \in [\rho_i \quad \rho_{i+1}]$ کنترل‌کننده فراگیر بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_i(\rho) = \begin{cases} K_i & \rho \in [\rho_i \quad a_i) \\ \hat{K}_i(\rho) & \rho \in [a_i \quad b_i] \\ K_{i+1} & \rho \in (b_i \quad \rho_{i+1}] \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن ضرایب کنترل‌کننده تابع پیوسته‌ای از پارامتر ρ خواهند بود. حال می‌توان روش ارائه شده برای درونیابی پایدار در محدوده تغییرات $[\rho_i \quad \rho_{i+1}]$ را به راحتی تعمیم داد به‌گونه‌ای که تمام فضای تغییرات پارامتر ρ را پوشش دهد. برای این کار فرض کنید به‌ازای هر ناحیه مشترک پایداری $[a_i \quad b_i]$ کنترل‌کننده‌های حفظ‌کننده پایداری $K_i(\rho)$ مطابق رابطه (۷) طراحی شده است. کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره حفظ‌کننده پایداری نهایی برای تمام ناحیه Γ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$K(\rho) = \begin{cases} K_i, & \rho \in U_i, \rho \notin \bigcup_{i=1}^{q-1} [a_j \quad b_j],\ i = 1,\ldots,q \\ \hat{K}_j(\rho), & \rho \in [a_j \quad b_j],\ j = 1,\ldots,q-1 \end{cases} \qquad (۸)$$

به‌منظور شفاف‌تر شدن مراحل طراحی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره، تمام مراحل طراحی در قالب نمودار گردشی در شکل ۱ آمده است.

۵- طراحی خودخلبان مقاوم زمان بندی بهره

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

مدل دینامیکی رهگیر یک مدل غیرخطی وابسته به پارامتر می‌باشد. معادلات شش‌درجه آزادی رهگیر در دستگاه بدنی به‌صورت زیر می‌باشد[۱۹]:

$$
\begin{aligned}
Y &= QS\left(C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta r}}\delta_r + C_{y_r}\cdot\frac{D}{2U}R\right)\\
Z &= QS\left(C_{z_\alpha}\alpha + C_{z_{\delta e}}\delta_e + C_{z_q}\cdot\frac{D}{2U}Q\right)\\
L &= QSD\left(C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_p}\cdot\frac{D}{2V}P\right)\\
M &= QSD\left(C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\delta e}}\delta_e + C_{m_q}\cdot\frac{D}{2U}Q\right)\\
N &= QSD\left(C_{n_\beta}\alpha + C_{n_{\delta r}}\delta_e + C_{n_r}\cdot\frac{D}{2U}R\right)
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

معادلات فوق در کانال پیچش، بعد از خطی‌سازی توسط یک سیستم خطی وابسته به پارامتر $G(\rho)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$
G(\rho)\equiv\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_\alpha & 1\\ M_\alpha & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Z_\delta\\ M_\delta\end{bmatrix}\delta\\ a_z=\begin{bmatrix}V_mZ_\alpha & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ q\end{bmatrix}+V_mZ_\delta\delta\end{cases}
\qquad (۳)
$$

که در رابطه فوق ضرایب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha &= \frac{SQC_{z_\alpha}}{m} \quad M_\alpha = \frac{SQDC_{m_\alpha}}{I_y}\\
Z_\delta &= \frac{SQC_{z_{\delta e}}}{m} \quad M_\delta = \frac{SQDC_{m_{\delta e}}}{I_y}
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

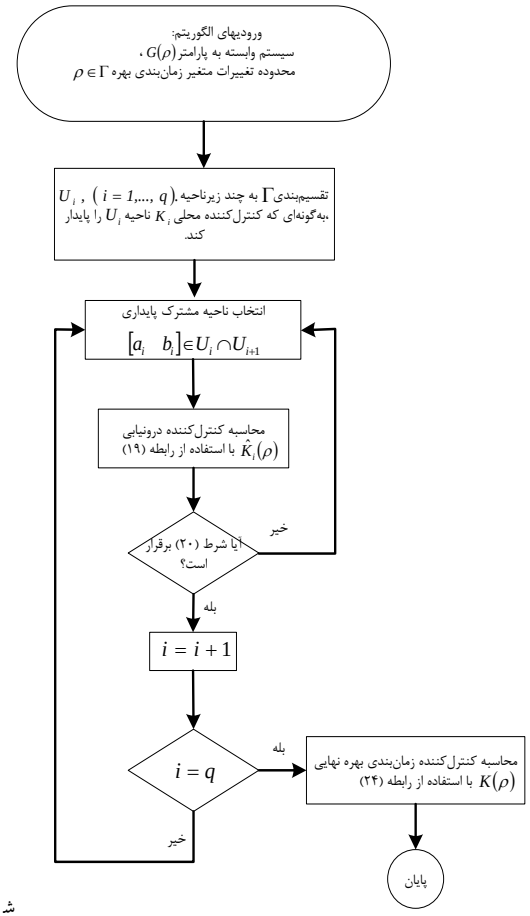
مدل فوق وابسته به پارامترهای فشار دینامیکی (Q)، و عدد ماخ (M) می‌باشد. اما به‌منظور سهولت پیاده‌سازی و طراحی تنها از متغیر فشار دینامیکی ($\rho = Q$) که بیشترین تاثیر را در رفتار دینامیکی سیستم حلقه‌بسته دارد، برای زمان‌بندی بهره استفاده شده و اثر متغیر دیگر روی پایداری با ابزار v-gap مورد بررسی قرار گرفته است. محدوده تغییرات پارامتر زمان‌بندی بهره ρ به‌صورت زیر می‌باشد که با Γ مشخص شده است:

$$
\Gamma : 30000 < \rho < 200000 \qquad (۵)
$$

خروجی سیستم، شتاب رهگیر (a_z) بوده و ورودی نیز تغییر زاویه بالک (δ_e) می‌باشد. تابع تبدیل عملگر بالک نیز با یک تابع تبدیل درجه ۲ با فرکانس طبیعی ۲۰۰ rad/sec و ضریب میرایی ۰/۷ به‌صورت زیر تقریب زده شده است:

$$
\frac{\delta(s)}{\delta_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (۶)
$$

با استفاده از مدل بیان شده در رابطه (۳) به‌سادگی می‌توان توابع تبدیل شتاب خروجی (a_z) نسبت به تغییر زاویه بالک (δ) و سرعت زاویه‌ای (q) نسبت به δ را یافت. معمولا به منظور داشتن پاسخ گذرای مناسب در حلقه خودخلبان، از حلقه داخلی سرعت زاویه‌ای مطابق شکل ۲ استفاده می‌شود. با استفاده از ژیروسکوپ نرخی و با فیدبک گرفتن از



شد

کل ۱. نمودار گردشی مراحل طراحی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره.

$$
\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix} = m\begin{bmatrix}(\dot U + QW - RV)\\ (\dot V + RU)\\ (\dot W - QU)\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}L\\ M\\ N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_x\dot P\\ I_y\dot Q\\ I_z\dot R\end{bmatrix}
\qquad (۱)
$$

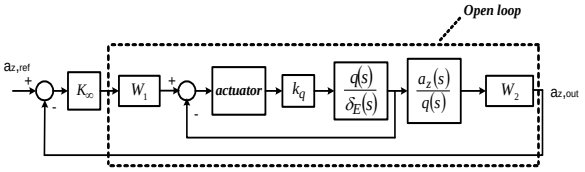
که نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی در روابط بالا به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

سرعت زاویه‌ای کانال پیچ می‌توان به‌سادگی کنترل‌کننده تناسبی k_q را طراحی کرد.

به‌منظور طراحی خودخلبان مقاوم برای رهگیر ارائه شده، می‌بایست ابتدا زیر نواحی پایدار U_i , $(\mathrm{i}=1,\ldots \mathrm{q})$ درون محدوده تغییرات پارامتر Γ به‌گونه‌ای یافت شود که در هر زیرناحیه شرط پایداری بیان‌شده صادق باشد ($\varepsilon[G(\rho_i),k_i]>\beta_i$). برای این منظور نقطه ابتدای محدوده‌ی تغییرات پارامتر زمان‌بندی بهره $\rho_1=30000$ به‌عنوان نقطه نامی اول برای طراحی کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H∞ انتخاب می‌شود. وزن شکل‌دهی حلقه W_1 برابر یک و W_2 نیز با استفاده از مساله بهینه‌سازی(۱۵) و الگوریتم به‌دست آمده در [۱۸] طراحی می‌شود. حال با توجه به شکل ۲ تابع شکل‌دهی‌شده $G_s(\rho_1)=W_2G(\rho_1)W_1$ به‌عنوان تابع حلقه‌باز نامی (تابع نشان داده شده در شکل ۲ درون نقطه‌چین) انتخاب شده و کنترل‌کننده استاتیکی مقاوم مطابق روابط (۸)-(۱۲) برای آن طراحی می‌گردد. حاشیه‌پایداری مقاوم برای سیستم شکل‌دهی شده $G_s(\rho_1)$ نیز با استفاده از الگوریتم به‌دست آمده در **Error! Reference source not found.** محاسبه می‌گردد. بعد از به دست آمدن حاشیه پایداری مقاوم برای سیستم شکل‌دهی شده $G_s(\rho_1)$، می‌توان ناحیه‌ی U_1 که در آن شرط پوشش پایداری ارضا می‌شود را به دست آورد. برای این منظور پارامتر ρ آن‌قدر افزایش می‌یابد تا بیشینه v-gap ایجاد شده بین سیستم‌های شکل‌دهی شده و سیستم نامی (مطابق رابطه (۲)) از حاشیه پایداری مقاوم سیستم شکل‌دهی شده نامی کمتر باشد. به همین ترتیب انتهای بازه U_1 به عنوان نقطه ابتدای بازه U_2 انتخاب شده و تمام مراحل بیان شده در این‌جا برای پیدا کردن بازه U_1 دوباره تکرار می‌گردد. این کار آن‌قدر انجام می‌شود تا اجتماع زیرناحیه‌های محلی U_i تمام محدوده تغییرات پارامتر Γ را پوشش دهد (یعنی $\Gamma\subset\bigcup_{i=1}^{q}U_i$).

درمشخصات هر زیرناحیه U_i به همراه بیشینه v-gap و حاشیه پایداری مقاوم آن آمده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود ملاحظات پایداری بیان شده در رابطه (۴) در هر زیر ناحیه رعایت می‌گردد. در جدول ۲ مشخصات سیستم حلقه‌باز نامی به همراه وزن‌های شکل‌دهی حلقه و کنترل‌کننده استاتیکی مقاوم طراحی شده برای مدل رهگیر آمده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌گردد کنترل‌کننده مقاوم بدون درجه می‌باشد. در جدول ۱ زیرناحیه‌های محلی U_i به‌گونه‌ای پیدا شد که اجتماع آن‌ها تمام محدوده تغییرات پارامتر Γ را پوشش دهد. در ادامه می‌بایست نواحی مشترک پایداری $[a_i \quad b_i]$ درون اشتراک دو زیرناحیه محلی مجاور را به‌گونه‌ای یافت که شرط پایداری بیان‌شده در رابطه (۴)) ارضا شود. برای این منظور ابتدا نواحی مشترک پایدار به‌صورت $[a_i \quad b_i]=(U_i\cap U_{i+1})$, انتخاب می‌شوند. برای این نواحی می‌بایست شرط پایداری (۴)) مورد بررسی قرار گیرد. اگر این شرط برقرار نبود بازه‌ی $[a_i \quad b_i]$ باید به‌صورت محدودتر و به‌صورت زیرمجموعه ناحیه اشتراک پایداری بصورت $[a_i \quad b_i]\subset(U_i\cap U_{i+1})$, انتخاب گردد. بازه‌ی $[a_i \quad b_i]$ می‌بایست آن‌قدر کوچک شود که رابطه (۴) برقرار گردد. در جدول ۳ مشخصات نواحی $(U_i\cap U_{i+1})$, و بازه‌های $[a_i \quad b_i]$ بیان شده است.



شکل ۲. تابع حلقه‌باز شکل‌دهی شده برای تحلیل پایداری با ابزار v-gap

جدول ۱.مقایسه حاشیه‌پایداری مقاوم با بیشینه v-gap به‌دست آمده درون هر زیرناحیه

	زیرناحیه ۱	زیرناحیه ۲	زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۴
حاشیه‌پایداری مقاوم	۰/۳۱	۰/۴۵	۰/۵۲	۰/۵۵
بیشترین v-gap	۰/۲۷	۰/۴۲	۰/۴۹	۰/۴
محدوده بازه‌های U_i	$30000<U_1<55000$	$35000<U_2<90000$	$70000<U_1<140000$	$100000<U_1<200000$

جدول ۲.مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل‌کننده محلی و وزن‌های شکل‌دهی حلقه در هر نقطه

	سیستم نامی	وزن شکل‌دهی حلقه	کنترل‌کننده استاتیکی مقاوم
زیرناحیه ۱	$P_1=\frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2+116s+4604)}$ $Q_1=30000$	$W_{2,1}=\frac{0.001(s+3)(s^2+91s+20000)}{(s+117)(s+16)(s+0.0001)}$	$K_{\infty,1}=0.78$ $k_{q,1}=-1.25$
زیرناحیه ۲	$P_1=\frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2+98s+2939)}$ $Q_2=60000$	$W_{2,2}=\frac{0.001(s+60000)(s^2+26s+0.95)}{(s+7420)(s+6.4)(s+0.0001)}$	$K_{\infty,2}=0.52$ $k_{q,2}=-0.95$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

زیرناحیه ۳	$P_1 = \frac{36441(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2+5.5s+33)(s^2+116s+4625)}$ $Q_3 = 100000$	$W_{2,3} = \frac{0.005(s+20000)(s^2+4.6s+35)}{(s+3183)(s+8.15)(s+0.0001)}$	$K_{\infty,3} = 0.63$ $k_{q,3} = -0.75$
زیرناحیه ۴	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2+6.6s+24)(s^2+114s+4504)}$ $Q_4 = 150000$	$W_{2,4} = \frac{0.003(s+2600)(s^2+5.5s+29)}{(s+3401)(s+14)(s+0.0001)}$	$K_{\infty,4} = 0.86$ $k_{q,4} = -0.45$

جدول ۳.مشخصات اشتراک نواحی محلی پایدار به‌همراه نواحی تضمین‌کننده پایداری $[a_i \quad b_i]$

	زیرناحیه ۱ و زیرناحیه ۲	زیرناحیه ۲ و زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۳ و زیرناحیه ۴
محدوده اشتراک دو زیرناحیه محلی	$U_1 \cap U_2 =$ $[35000 \quad 55000]$	$U_2 \cap U_3 =$ $[70000 \quad 90000]$	$U_3 \cap U_4 =$ $[100000 \quad 140000]$
محدوده مشترک پایداری $[a_i \quad b_i]$	$[a_1 \quad b_1] =$ $[40000 \quad 50000]$	$[a_2 \quad b_2] =$ $[75000 \quad 85000]$	$[a_3 \quad b_3] =$ $[110000 \quad 130000]$

۸- نتایج شبیه سازی

به‌منظور بررسی روش مذکور در پایداری و کارآیی کنترل‌کننده فراگیر نهایی شبیه‌سازی سه‌درجه آزادی انجام می‌گردد. شبیه‌سازی سه‌درجه آزادی برمبنای معادلات غیرخطی (۱) و (۲) انجام شده است. نتایج ارائه شده در این‌جا برای یک رهگیر از نوع کنترل با دم بوده و به‌منظور سادگی، فرمان شتاب تنها به کانال پیچ اعمال می‌گردد. همان‌گونه که بیان شد برای بهبود عملکرد سیستم در تعقیب دستور ورودی، ابتدا می‌بایست حلقه داخلی سرعت زاویه‌ای (حلقه داخلی نشان داده شده در شکل ۲) با ضریب مناسب k_q بسته شود. در جدول ۲ ضریب k_q در نقاط کار مختلف آمده است. بعد از طراحی ضریب k_q، وزن‌های شکل‌دهی حلقه و کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه $H\infty$ با استفاده از الگوریتم بیان شده در مرجع [۱۸] در هر نقطه کار طراحی شده که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. در نهایت درونیابی بین کنترل‌کننده‌های محلی با استفاده از روش بیان شده در بخش قبل انجام می‌گیرد. سناریوی پروازی رهگیر به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که تمام ناحیه تغییرات پارامتر زمان‌بندی بهره (فشار دینامیکی) را پوشش دهد. بررسی نتایج شبیه‌سازی در دو مرحله صورت می‌گیرد. در مرحله اول پایداری و کارآیی کنترل‌کننده‌های محلی در نقاط کار نامی مورد بررسی قرار گرفته و در مرحله دوم عملکرد کنترل‌کننده فراگیر در سیستم غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای مشاهده کارایی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره در سیستم خطی، پاسخ پله سیستم حلقه‌بسته در حالت نامی و در نقاط کار اول تا چهارم به همراه حد بهره و حدفاز آن‌ها در شکل ۳ و شکل ۴ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که تمامی معیارهای کارآیی و پایداری در حالت خطی به‌خوبی ارضا شده است.

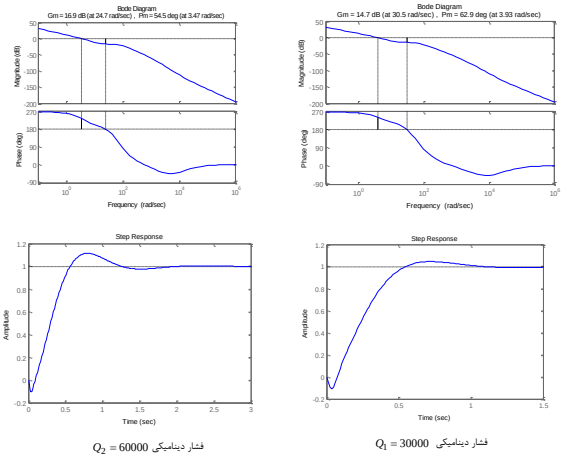
در ادامه برای نشان دادن کارآیی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره نهایی در سیستم غیرخطی، شبیه‌سازی سه درجه آزادی انجام می‌گیرد. به‌منظور مقایسه روش ارائه‌شده در این مقاله با سایر روش‌های کلاسیک زمان‌بندی بهره، درونیابی بین صفر-قطب-بهره۱ (zpk) کنترل‌کننده‌های محلی که یکی از روش‌های کلاسیک درونیابی است نیز مورد بررسی و شبیه‌سازی قرار می‌گیرد[۲۰]- [۲۱]. در روش درونیابی بین صفر-قطب-بهره کنترل‌کننده‌های محلی، ابتدا در نقاط کار مختلف کنترل‌کننده‌های محلی طراحی شده و سپس با درونیابی خطی بین این کنترل‌کننده‌ها، کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره به‌دست می‌آید. انتخاب نقاط کار در این روش کلاسیک بستگی به تجربه طراح داشته و فاقد روش سیستماتیک است. همچنین روش مورد نظر دارای اثبات پایداری نمی‌باشد. به‌منظور مقایسه بین دو روش بیان‌شده از همان نقاط کار به‌دست آمده در جدول ۲ برای طراحی کنترل‌کننده‌های محلی استفاده شده است. همچنین برای طراحی کنترل‌کننده‌های محلی از کنترل‌کننده PID استفاده می‌شود. در جدول ۴ مشخصات کنترل‌کننده‌های محلی برای نقاط کار مختلف برای روش PID آمده است.

دستور ورودی مطابق شکل ۵ به سیستم غیرخطی اعمال شده و نتایج تعقیب دستور ورودی برای هر دو روش نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که روش درونیابی ارائه‌شده دارای عملکرد بهتری می‌باشد. علاوه بر آن روش درونیابی ارائه‌شده دارای اثبات پایداری می‌باشد در حالی‌که در روش کلاسیک درونیابی، تضمینی برای پایداری سیستم وابسته به پارامتر وجود ندارد. در شکل ۶ نشان داده شده است که تمام ناحیه پروازی رهگیر با سناریوی طراحی‌شده تحریک می‌گردد.

[1] Zero-pole-gain interpolation

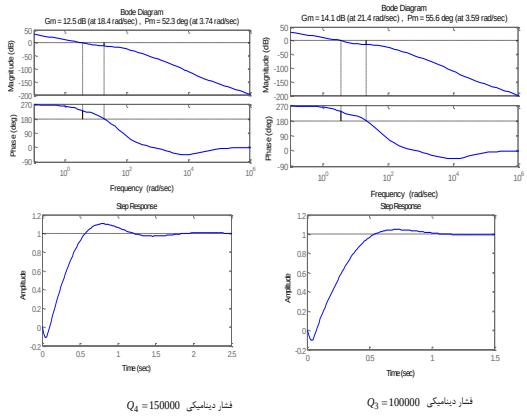
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

مشاهده می‌شود که عملکرد کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره خوب بوده و مطابق شکل ۷ سیگنال‌های کنترلی تولید شده نیز مناسب می‌باشد. زاویه حمله رهگیر و سرعت زاویه‌ای کانال پیچ نیز در شکل ۸ و شکل ۹ آمده است که نشان‌دهنده عملکرد مطلوب سیستم می‌باشد.



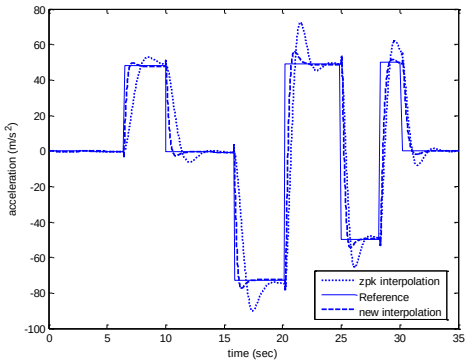
فشار دینامیکی $Q_2 = 60000$ فشار دینامیکی $Q_1 = 30000$

شکل ۳. پاسخ پله و حدبهره و حدفاز برای نقاط کار اول و دوم

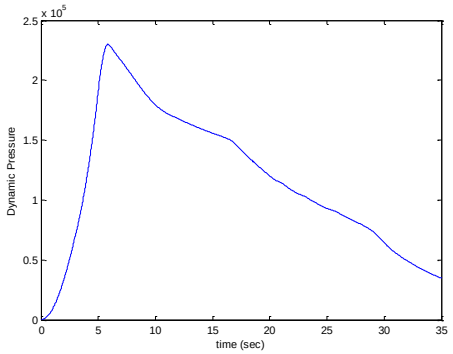


فشار دینامیکی $Q_4 = 150000$ فشار دینامیکی $Q_3 = 100000$

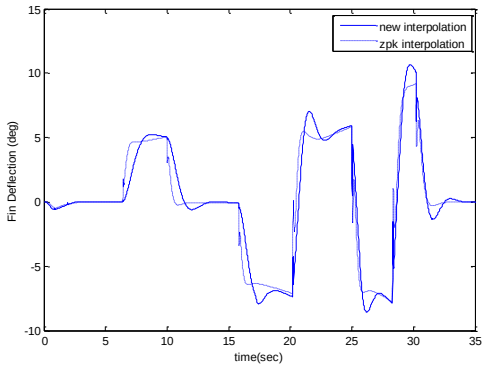
شکل ۴. پاسخ پله و حدبهره و حدفاز برای نقاط کار سوم و چهارم



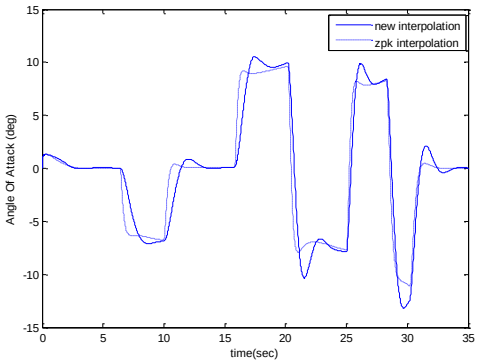
شکل ۵. سیگنال شتاب مرجع و خروجی



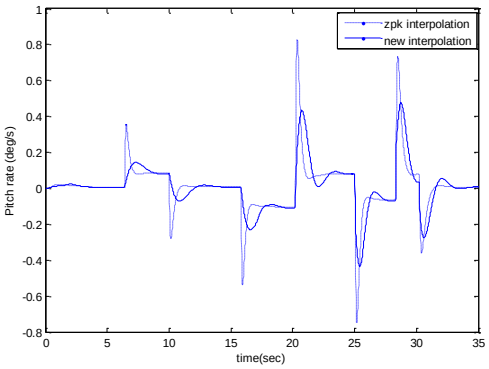
شکل ۶. فشار دینامیکی



شکل ۷. سیگنال کنترلی ورودی به عملگر



شکل ۸. زاویه حمله



شکل ۹. سرعت زاویه‌ای کانال پیچ

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

جدول ۴.مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل‌کننده محلی PID

نقاط کار	سیستم نامی	کنترل‌کننده محلی PID
۱	$P_1 = \frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2+116s+4604)}$ $Q_1 = 30000$	$K_1 = -0.18\frac{1+0.96s}{s}$
۲	$P_1 = \frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2+98s+2939)}$ $Q_2 = 60000$	$K_2 = -3.69\frac{1+0.5s}{s}$
۳	$P_1 = \frac{36441(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2+5.5s+33)(s^2+116s+4625)}$ $Q_3 = 100000$	$K_1 = -0.047\frac{1}{s}$
۴	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2+6.6s+24)(s^2+114s+4504)}$ $Q_4 = 150000$	$K_1 = -0.02\frac{1+0.14s}{s}$

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش درونیابی پایدار برای طراحی خودخلبان رهگیر ارائه شده است. روش پیشنهادی دارای پیچیدگی کمتری نسبت به سایر روش‌های درونیابی بوده و علاوه بر آن تضمین‌کننده پایداری سیستم متغیر با پارامتر نیز می‌باشد. علاوه بر آن نشان داده شد که با استفاده از ابزار v-gap metric می‌توان نقاط کار مناسب برای طراحی کنترل‌کننده محلی انتخاب کرد. علاوه‌برآن با کمک این ابزار می‌توان نواحی محلی پایداری را برای هر کنترل‌کننده محلی مشخص نمود. نتایج شبیه‌سازی سه درجه آزادی نشان‌دهنده عملکرد مطلوب کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره نهایی می‌باشد.

مراجع

[1] H. Buschek, "Full Envelope Missile Autopilot Design Using Gain Scheduled Robust Control", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, No. 1, pp.115 122, 1999.

[2] S. Kang, H.J. Kim, J.I. Lee, B.E. Jun, and M.J. Tahk, "Roll-pitch-yaw integrated robust autopilot design for a high angle-of attack missile", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, pp. 1622 1628, 2009.

[3] D. Saussie, L. Saydy, and O. Akhrif, "Gain scheduling control design for a pitch-axis missile autopilot", *AIAA Guidance, Navigation, and Control conference*, Honolulu, Hawaii, 2008.

[4] D. J. Leith, W. E. Leithead, "Survey of gain scheduling analysis and design", *International journal of control*, Vol. 73, No.11, pp. 1001-1025, 2000.

[5] S. Theodoulis and G. Duc, "Missile autopilot design: gain scheduling and the gap metric", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 32, No.3, pp. 986-996, 2009.

[6] M. Sato . "Gain Scheduled Output-feedback depending solely on scheduling parameters via parameter-dependent lyapunov functions". *Automatica*, Vol.47, pp.2786 2790, 2011.

[7] F. Blanchini, S. Miani, F. Mesquine. "A separation principle for linear switching systems and parameterization of all stabilizing controllers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54, 279–292, 2009.

[8] F.D. Bianchi, R.S. Sanchez-Pena, M. Guadayol, " Gain scheduled control based on high fidelity local wind turbine models". *Renewable energy*, Vol.37, pp.233-240, 2012.

[9] B. Hencey, A. Alleyne. "Robust controller interpolation design technique". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18, pp. 1–10, 2010.

[10] F.D. Bianchi., R.S. Sanchez Pena, "Interpolation for gain-scheduled control with guarantees"; *Automatica*, Vol. 47, pp.239 243, 2011.

[11] B.P. Rasmussen, and A. Alleyne, "Gain scheduled control of an air conditioning system using the youla parameterization", *IEEE Transactions on Control system technology*, Vol.18, No.5, pp.1216 1225, 2010.

[12] D.J. Stilwell, "state space interpolation for a gain scheduled autopilot", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, pp. 460 465, 2001.

[13] D.J. Stilwell., and W.J. Rugh. "Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]

scheduled controllers", *Automatica*, Vol. 36, pp.665 671, 2000.

[14] E. Prempain, I, Postlethwaite, "Static H_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter" *Automatica*, Vol. 41, pp. 1517 1528, sept. 2005.

[15] G. Vinnicombe . *Uncertainty and feedback: h-infinity loop shaping and the v-gap metric*, Imperial college press, 1999.

[16] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, "Essential of robust control", Prentice Hall, 1998.

[17] A. , Lanzon, "Weight optimization in H_∞ loop shaping" *Automatica*, Vol. 41, No. 7, pp. 1201 1208, 2005.

[18] معافی مدنی، محمد جواد ، محمدزمان، ایمان، "طراحی خودخلبان با استفاده از روش کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ "، نشریه علمی-پژوهشی مهندسی هوانوردی، سال سیزدهم، شماره دوم، صفحه ۷۹-۹۴، پاییز ۱۳۹۰.

[19] G.M. Siouris, "Missile guidance and control systems", New York, Springer-verlag, Inc., 2004.

[20] R.A. Nichols, R.A. Reichert, W.J Rugh, "Gain scheduling for H-infinity controllers: A flight control example", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol(1), N(2), 69–79, 1993.

[21] B. Paijmans, W. Sysmens, H.V. Brussel, J. Swevers, "A gain scheduling control technique for mechatronic systems with position-dependent dynamics", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2933-2938, 2006.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.1.7.9]