مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱، صفحه ۱۰-۱

تعیین حد بهره و حد فاز در سیستم‌های غیرخطی لور با استفاده از معیار دایره توسعه‌یافته

ابوالفضل دلاور[۱] و محمد حائری[۲]

[۱]دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف،تهران، ایران، abolfazl.delavar@ee.sharif.edu

[۲] آزمایشگاه سیستم‌های کنترل‌پیشرفته، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف،تهران، ایران، haeri@sharif.ir

دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۰۵ ویرایش: ۱۴۰۰/۰۸/۰۲ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۰۲

چکیده: غیرخطی‌گری از رفتارهای اصلی سیستم‌ها در دنیای واقعی است. از این رو معرفی روشی برای تعیین حاشیه پایداری این سیستم‌ها امری ضروری به نظر می‌رسد. با اینکه حد بهره و حد فاز به عنوان معیارهای جا افتاده‌ای در این راستا برای تحلیل سیستم‌های خطی است، پیدا کردن یک راه مشخص برای تعیین مقدار واقعی این حدها در سیستم‌های غیرخطی در حالت کلی از مسائل موجود ادبیات می‌باشد. هدف اصلی این مقاله ارائه روش جدیدی برای تعیین دقیق‌تر این حدها برای نوع خاصی از غیرخطی‌گری‌ها است. با استفاده از قضیه لیاپانوف، شرایط پایداری به دست آمده و با اعمال معیار دایره توسعه‌یافته حاشیه پایداری سیستم‌های لور تعیین شده است. با ارائه مثال‌های عددی، صحت نتایج بدست آمده بررسی شده و با مقایسه آنها با سایر روش‌ها، دقت نتایج به دست آمده مورد ارزیابی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: حاشیه‌های پایداری، پایداری سیستم غیرخطی لور، حد بهره و حد فاز کاربردی، معیار پایداری دایره تعمیم‌یافته، نامساوی ماتریسی دوخطی.

Determination of Gain and Phase Margins in Lur’e Nonlinear Systems using Extended Circle Criterion

Abolfazl Delavar and Mohammad Haeri

Abstract: Nonlinearity is one of the main behaviors of systems in the real world. Therefore, it seems necessary to introduce a method to determine the stability margin of these systems. Although the gain and phase margins are established criteria for the analysis of linear systems, finding a specific way to determine the true value of these margins in nonlinear systems in general is an ongoing research in the literature. The main goal of this paper is to introduce a new method to determine these margins more precisely for particular type of nonlinearities. Based on Lyapunov theorem, stability conditions are obtained and the stability margins of Lur'e systems are determined by applying the extended circle criterion. By providing numerical examples, the correctness of the obtained results is checked and by comparing them with other methods, the accuracy of the obtained results is evaluated.

Keywords: Stability margins, stability of Lur’e type systems, practical gain and phase margins, extended circle criterion, bilinear matrix inequality.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

۱- مقدمه

پایداری سیستم‌های دینامیکی از دیرباز مورد توجه قرار گرفته است و محققان بسیاری در این زمینه مشغول به پژوهش هستند. تحلیل پایداری در سیستم‌های خطی ساده‌تر از سیستم‌های غیرخطی می‌باشد و این در حالی است که سیستم‌های دنیای واقعی، رفتار غیرخطی دارند و تحلیل خطی، چندان با واقعیت آنها در تطابق نیست. در [1] تحلیل سیستم‌های خطی ارائه شده است و حد بهره[۱] و حد فاز[۲] به ترتیب به عنوان حداکثر تغییرات مجاز در بهره و فاز حلقه کنترلی سیستم‌های تک‌ورودی-تک‌خروجی شناخته می‌شوند که سیستم حلقه‌بسته در آن ناحیه پایدار است. به عبارت دیگر، GM و PM به عنوان پارامترهای ضمانت سیستم در مقابل عدم قطعیت شناخته می‌شوند و یک رویکرد مناسب جهت طراحی کنترل‌کننده به شمار می‌روند. معیار نایکوئیست[۳] [۱]، یکی از ابزارهای تحلیل GM و PM در سیستم‌های خطی می‌باشد. تعریف GM و PM ابتدا برای سیستم‌های یک ورودی- یک خروجی مطرح بوده اما در سال‌های اخیر، برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی نیز مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان مثال در [۲] یک رویکرد جدید برای سیستم‌های دو ورودی-دو خروجی بیان شده است.

حاشیه پایداری در سیستم‌های غیرخطی مدت‌ها است که به مساله‌ای مهم در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل تبدیل شده است و یک رویکرد واحد برای دستیابی به مقدار واقعی GM و PM وجود ندارد. در سیستم‌های خطی به راحتی و با استفاده از معیار نایکوئیست می‌توان حاشیه پایداری را بدست آورد؛ بنابراین یکی از روش‌های دستیابی به GM و PM سیستم‌های غیرخطی، خطی‌سازی آنها در نقطه کار و استفاده از تحلیل‌های خطی بر روی آن می‌باشد. اما در این روش، خصوصیت غیرخطی سیستم نادیده گرفته می‌شود و نتایج بدست آمده تقریبی بوده و در نزدیکی نقطه کار معتبر می‌باشند. فقدان روشی موثر جهت دستیابی به GM و PM در سیستم‌های غیرخطی باعث می‌شود تا اینگونه سیستم‌ها از داشتن ضمانت محروم شوند. روش‌های خطی‌سازی تکه‌ای[۴] [۳]، قضیه بهره کوچک[۵] [۴] و نمای لیاپانوف[۶] [۵] بر روی سیستم‌های غیرخطی اعمال شده‌اند اما نتایج آنها بحث برانگیز است. بنابراین، با ارائه تعاریف جدید از حاشیه پایداری در سیستم‌های غیرخطی، ممکن است پتانسیل عملکرد چنین سیستم‌هایی به طور کامل مورد بهره‌برداری قرار گیرد و همچنین ایمنی سیستم کنترل به طور قابل توجهی بهبود یابد.

در [۶] و [۷]، روش SPM[7] به ترتیب برای سیستم‌های LTI[8] و NTI[9] بررسی شده است. همچنین، توسعه یک کنترل‌کننده مود لغزشی فازی بر اساس حاشیه پایداری در [۸] ارائه شده است. از طرفی، رویکرد حد بهره عمومی[۱۰] با بهره‌گیری از تئوری دوم لیاپانوف[۱۱]، برای سیستم‌های NTI در [۹] توسعه یافته است. GM و PM کاربردی[۱۲] برای کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه بالا در [۱۰] و [۱۱] پیشنهاد شده است. مقاله [۱۲] یک تفسیر دامنه فرکانس جدید از معیارهای پوپوف برای پایداری مطلق در سیستم‌های لور ارائه می‌دهد. در [۱۳]، GM و PM برای سیستم‌های لور با روش‌های معیار دایره[۱۳] و تابع توصیفی[۱۴] پیشنهاد شده است که سیستم ذکر شده شامل یک حلقه کنترلی دارای یک بلوک بدون حافظه و غیرخطی و یک سیستم LTI پایدار می‌باشد. GM برای سیستم‌های لور با استفاده از LSM و نامساوی ماتریسی خطی[۱۵] در [۱۴] بررسی شده است. همچنین، پایداری داخلی با رویکرد CC در [۱۵، ۱۶] بررسی شده است.

هدف اصلی این مقاله، سیستم‌های یک ورودی-یک خروجی NTI نوع لور می‌باشد که با استفاده از رویکرد معیار دایره توسعه‌یافته (ECC)، حاشیه پایداری سیستم حلقه‌بسته مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله با استفاده از قضیه لیاپانوف و مفهوم SPR[16] در توابع تبدیل و لم KYP[17]، مساله پایداری سیستم حلقه‌بسته در MS[18] مطرح می‌شود و سپس با طراحی یک مساله بهینه‌سازی و ارائه یک الگوریتم حل، PGM و PPM برای سیستم حلقه‌بسته بدست می‌آیند.

در ادامه معرفی سیستم‌های لور و توابع غیرخطی بدون حافظه در بخش ۲، تعاریف و قضایای کاربردی و توصیف روش CC در بخش ۳، توسعه روش CC به روش ECC و استفاده از آن جهت یافتن PGM و PPM در بخش ۴ و شبیه‌سازی عددی و ارزیابی روش پیشنهادی با ارائه چندین مثال در بخش ۵ آورده شده است.

علائم ریاضی. در نگارش مقاله اعداد مختلط با نماد $\mathbb{C}$، اعداد حقیقی با $\mathbb{R}$، اعداد طبیعی با $\mathbb{N}$، اعداد حقیقی مثبت با $\mathbb{R}^+$، بردار حقیقی با n عنصر با $\mathbb{R}^n$ و ماتریس حقیقی با n سطر و m ستون با $\mathbb{R}^{n\times m}$ نمایش داده می‌شوند. همچنین $\mathbb{R}(a,b)$ جهت اشاره به مقادیر عددی حقیقی مابین $a,b\in\mathbb{R}$ استفاده شده است. $\lambda_i(A)$ مقدار ویژه iام و $\lambda_{\max}(A)$ و $\lambda_{\min}(A)$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار آن برای ماتریس A می‌باشند. $\mathbb{O}(k_1,k_2)$ با $k_2>k_1\in\mathbb{R}^+$، مجموعه نقاطی از فضای مختلط را نشان می‌دهد که در داخل دایره‌ای با مرکز $0.5(k_2-k_1)/k_1k_2-$ و شعاع $0.5(k_2+k_1)/k_1k_2$ قرار دارند. نماد $\mathbb{S}(\eta)$ جهت اشاره به مساحت مجموعه بسته η به کار برده شده است. از طرفی، ماتریس متقارن $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ مثبت‌معین می‌باشد اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژه آن مثبت باشند. به عبارت دیگر $A>0$ اگر و فقط اگر $\lambda_i(A)>0$. همچنین جهت نمایش کران لیپشیتز[۱۹] تابع

[1] Gain Margin (GM)
[2] Phase Margin (PM)
[3] Nyquist criterion
[4] Piecewise linearization
[5] Small gain theorem
[6] Lyapunov exponents
[7] Singular Perturbation Margin (SPM)
[8] Linear Time Invariant (LTI)
[9] Nonlinear Time Invariant (NTI)

[10] Generalized gain margin
[11] Lyapunov Second Method (LSM)
[12] Practical Gain/Phase Margin (PGM-PPM)
[13] Circle Criterion (CC)
[14] Describing Function
[15] Linear Matrix Inequality (LMI)
[16] Strictly Positive Real (SPR)
[17] Kalman, Yakubovich, Popov (KYP)
[18] Multi Section (MS)
[19] Lipschitz

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

$\psi(t,u)$، از نماد $\ell_\psi(\alpha,\beta)$ استفاده می‌شود.

۲- توصیف مدل و فرضیات

سیستم‌های لور متشکل از یک بخش LTI و یک بخش غیرخطی و بدون حافظه می‌باشند. فرض کنید سیستم LTI با معادلات

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv \\ y = Cx + Dv \end{cases} \quad (۱)$$

داده شده است که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $v \in \mathbb{R}^p$ بردار ورودی و $y \in \mathbb{R}^q$ بردار خروجی سیستم و $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$، $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$ ماتریس‌های فضای حالت سیستم باشند. این سیستم توسط کنترل‌کننده بهره ثابت $K \in \mathbb{R}^{p\times q}$ کنترل می‌شود. از طرفی عملگر موجود در سیستم غیرخطی می‌باشد. نمودار بلوکی سیستم در شکل ۱ داده شده است. با فرض $p = q = 1$، سیستم یک ورودی-یک خروجی خواهد بود. از طرفی، تابع غیرخطی $\psi(t,u): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته تکه‌ای[1] بدون حافظه و در حالت کلی متغیر با زمان می‌باشد که در شکل ۱، به عنوان عملگر سیستم نشان داده شده است. بنابراین معادلات سیستم حلقه‌بسته به صورت زیر بدست می‌آیند.

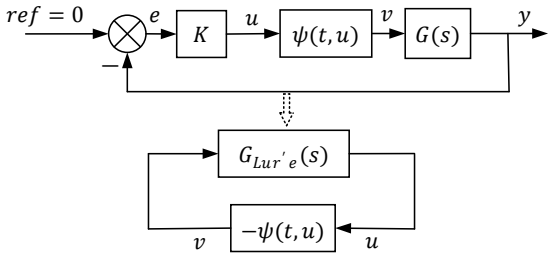
$$\left(\Sigma, \ell_\psi(\alpha,\beta)\right) := \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv \\ y = Cx + Dv, \ v = \psi(t,-Ky) \end{cases} \quad (۲)$$

در [۱۷] کران لیبشیتز برای تابع استاتیک $\psi(t,u)$ به صورت

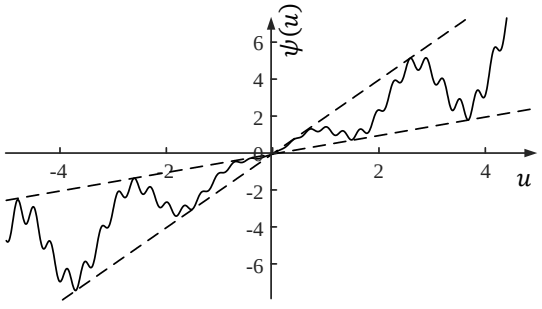
$$\alpha u^2 \le u\psi(t,u) \le \beta u^2 \quad (۳)$$

تعریف می‌شود که در آن $\alpha, \beta \in \{0, \mathbb{R}^+\}$ و $\alpha < \beta$ به عنوان کران لیبشیتز هستند و با تابع $\ell_\psi(\alpha,\beta)$ نمایش داده می‌شوند. نمونه‌ای از توابع لیبشیتز در شکل ۲ نشان داده شده که می‌تواند متغیر با زمان باشد، اما می‌بایست بین خطوط با شیب‌های α و β قرار گیرد. تابع تبدیل بخش LTI به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$G_{Lur'e}(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = KC(sI - A)^{-1}B + KD \quad (۴)$$



شکل ۱. نمودار بلوکی سیستم حلقه‌بسته $Lur'e$.



شکل ۲. نمونه‌ای از تابع غیرخطی و لیبشیتز $\ell_\psi(0.5,2)$ به همراه کران‌های آن.

[1] Piecewise continuous

تذکر ۱. هر سیستمی را که بتوان به صورت یک بخش LTI با تابع تبدیل $G_{Lur'e}(s)$ و یک بخش غیرخطی $\psi(t,u)$ مانند شکل ۱ نمایش داد، در دسته سیستم‌های لور قرار می‌گیرد.

در این بخش چند فرض اساسی مطرح می‌شود که جهت ادامه کار ضروری می‌باشند.

فرض ۱. سیستم یک ورودی-یک خروجی (۱) اکیداً سره و سه‌تایی (A,B,C) کنترل‌پذیر و روئیت‌پذیر می‌باشد. به عبارتی، Σ تحقق کمینه[2] می‌باشد و $D = 0$.

فرض ۲. نقطه‌ی $x = 0$ یک نقطه کار برای سیستم بوده و سیستم نامی در این نقطه کار با هر تابع لیبشیتز $\ell_\psi(\alpha,\beta)$ که در آن α و β مقادیر ثابتی می‌باشند پایدار مجانبی سراسری[3] است.

۳- قضایای کاربردی و توصیف روش CC و پایداری MS

در این بخش، برخی تعاریف و قضایای کاربردی در زمینه تحلیل سیستم‌های لور مطرح شده که در ادامه از آنها استفاده خواهد شد.

تعریف ۱. فرض کنید $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس مثبت‌معین و $H \in \mathbb{R}$ یک اسکالر مثبت باشند، آنگاه مجموعه

$$\varepsilon_P(H) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0.5x^T Px \le H\} \quad (۵)$$

نمایانگر یک بیضی‌گون در فضای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

لم ۱ (KYP) [۱۷]. فرض کنید $G(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$ تابع تبدیل سیستم مربعی با p ورودی و خروجی باشد به طوری که، زوج $(\tilde{A},\tilde{B})$ کنترل‌پذیر و زوج $(\tilde{A},\tilde{C})$ روئیت‌پذیر حالت هستند. آنگاه تابع $G(s)$ SPR است اگر و تنها اگر، ماتریس متقارن و مثبت‌معین $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$، و همچنین $L \in \mathbb{R}^{k\times n}$، $W \in \mathbb{R}^{k\times p}$، $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ و $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند به طوری که

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P = -L^T L - \epsilon P, \ P\tilde{B} = \tilde{C}^T - L^T W, \\ W^T W = \tilde{D} + \tilde{D}^T. \quad (۶)$$

بر اساس قضیه پسیویتی یک سیستم حلقه‌بسته $(\Sigma, \ell_\psi(\alpha,\beta))$ پایدار است اگر و تنها اگر تابع $\ell_\psi(\alpha,\beta)$ پسیو بوده و $G_{Lur'e}(s)$ SPR باشد. سیستم لور چند ورودی-چند خروجی با تابع غیرخطی $\bar{\psi}(t,u) \in \mathbb{R}^{n_{io}}$ را در نظر بگیرید. همچنین شرط لیبشیتز به صورت $(\psi - S_2u)^T(\psi - S_1u) \le 0$ برقرار می‌باشد که S_1 و S_2 ماتریس‌های قطری می‌باشند که شرط $S_2 - S_2 > 0$ برقرار است. قضیه زیر شرط کافی جهت پایداری مطلق سیستم حلقه‌بسته ذکر شده را بیان می‌کند.

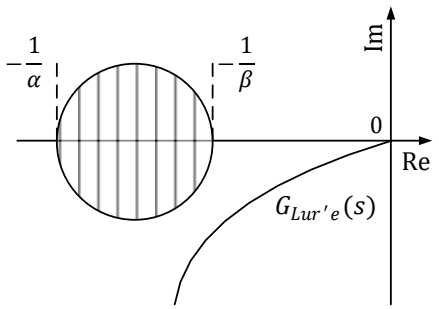
قضیه ۱ (پایداری CC) [۱۷]. سیستم حلقه‌بسته $(\Sigma, \ell_{\bar{\psi}}(S_1,S_2))$ پایدار مطلق می‌باشد اگر $S_2 > S_1$ و تابع تبدیل $\big(I + S_2G(s)\big)\big(I + G(s)\big(I + S_1G(s)\big)^{-1}$ SPR باشد. در صورتی که $S_2 = +\infty$ باشد، $G(s)\big(I + S_1G(s)\big)^{-1}$ SPR باشد.

توصیف نمایشی از رویکرد CC برای یک سیستم حلقه‌بسته یک

[2] Minimum realization
[3] Globally asymptotically stable

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

ورودی-یک خروجی پایدار در شکل ۳ مشاهده می‌شود. در این توصیف، اگر دیاگرام نایکوئیست تابع $G_{Lur'e}(s)$ دایره $\mathbb{O}(\alpha,\beta)$ در صفحه مختلط را قطع نکند و آن را فقط r مرتبه که $r \in \{0,\mathbb{N}\}$ تعداد قطب‌های ناپایدار $G_{Lur'e}(s)$ است در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور بزند، سیستم حلقه‌بسته پایدار می‌باشد. در ادامه، با معرفی ساختار MS از توابع غیرخطی $\psi(t,u)$، و همچنین ارائه مساله پایداری در سیستم حلقه‌بسته، مساله PGM و PPM بازتعریف می‌شوند. در بخش ۴، پس از تعریف GM و PM، آنها را برای تحلیل سیستم در حوزه MS توسعه می‌دهیم.

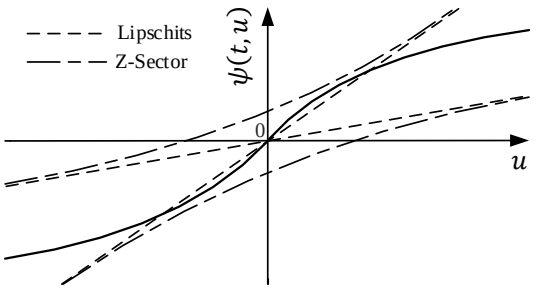


شکل ۳. توصیف نمایشی قضیه CC برای سیستم حلقه‌بسته $((\Sigma,\ell_\psi(\alpha,\beta))$.

پایداری سیستم نامی در حالت MS. تابع غیرخطی $\ell_\psi(\bar\alpha,\bar\beta)$ در بازه $\mathcal{S} := [\bar\alpha,\bar\beta] \in \mathbb{R}^2$ عضوی از Z-sector می‌باشد و با نماد $\ell_\psi^Z(\bar\alpha,\bar\beta) := \{\ell_\psi(\bar\alpha,\bar\beta) \in \text{sect}_Z(\mathcal{S})\}$ نشان داده می‌شود، اگر و تنها اگر

$$(\bar\alpha u - \psi(t,u))(\bar\beta u - \psi(t,u)) \le Z, \qquad (۷)$$

که در آن $Z \in \{0,\mathbb{R}^+\}$. یک مورد از تابع $\ell_\psi^Z(\bar\alpha,\bar\beta)$ که عنصر غیرخطی تابع هزلولی است در شکل ۴ دیده می‌شود.



شکل ۴. یک توصیف نمایشی از کران‌های تابع $\ell_\psi^Z(\bar\alpha,\bar\beta)$.

در ادامه، با استفاده از مفهوم Z-section، پایداری ناقص را بیان کرده و پس از تعریف مفهوم MS، از آن در پایداری مطلق MS استفاده خواهیم کرد.

لم ۲ [۱۸]. فرض کنید $(\Sigma,\ell_\psi^Z(\bar\alpha,\bar\beta))$ یک سیستم حلقه‌بسته با Σ اکیداً سره و تابع تبدیل $G(s)$ بوده و $(A,B,C,0)$ یک تحقق کمینه با بردار حالت $x \in \mathbb{R}^n$ باشد. همچنین

$$F(s,\bar\alpha,\bar\beta) := \frac{1+\bar\beta G_{Lur'e}(s)}{1+\bar\alpha G_{Lur'e}(s)} \qquad (۸)$$

یک تابع PR : ϵ است که (P,L,W,ϵ)، پاسخ مساله KYP از تحقق این تابع به دست آمده است. یعنی

$$Q_F(\bar\alpha,\bar\beta) := (\tilde A,\tilde B,\tilde C,\tilde D) := (A-\bar\alpha BKC, B, KC(\bar\beta-\bar\alpha), 1).$$

همچنین برای $t \in \mathbb{R}$ و $|u| \le u_{\max}$ که $u_{\max}$ بیشینه مقدار مجاز تعریف شده u از Z-sector مد نظر می‌باشد، نامعادله

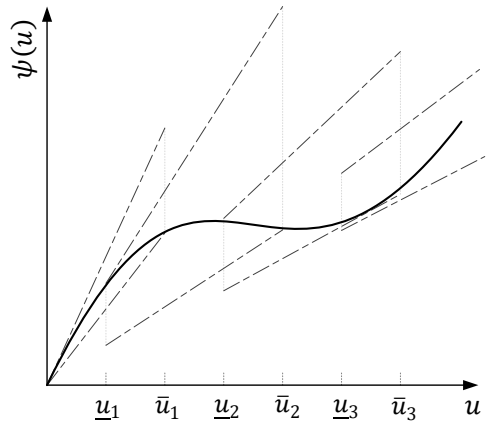
$$\frac{4Z}{\epsilon} < (KCP^{-1}C^TK^T)^{-1}u_{\max}^2 \qquad (۹)$$

برقرار باشد. آنگاه به ازای هر مقدار $\eta \in \mathbb{R}^+$، اگر حالت x در بیضی‌گون $\varepsilon_P(0.5(KCP^{-1}C^TK^T)^{-1}u_{\max}^2)$ قرار داشته باشد، در زمان محدود به بیضی‌گون داخلی $\varepsilon_P(2Z/\epsilon+\eta)$ وارد خواهد شد.

به عنوان یک نتیجه از لم ۲ و نامعادله (۹)، می‌توان به تعریف کلمه پایداری ناقص[1] اشاره کرد که در آن، حالت‌های سیستم از یک مجموعه بزرگتر به یک مجموعه کوچکتر در درون مجموعه اول و در زمان محدود خواهند رسید و در درون آن حبس خواهند شد. به ناحیه بین بیضی‌گون اول و دوم ناحیه جذب گفته می‌شود. با این حال، شرایط حالت‌های سیستم در درون مجموعه کوچکتر نامعلوم خواهد بود.

تذکر ۲. برای $Z=0$ نامعادله (۷) معادل (۳) بوده و رویکرد CC در پایداری حلقه‌بسته را نتیجه می‌دهد. همچنین، لم ۲ مساله پایداری مجانبی را بیان می‌کند که در آن، بیضی‌گون ناحیه جذب $\varepsilon_P(0.5(KCP^{-1}C^TK^T)^{-1}u_{\max}^2)$ را نشان می‌دهد زیرا بیضی‌گون $\varepsilon_P(2Z/\epsilon)$ با توجه به تعریف آن، در مبدا خلاصه خواهد شد.

تجزیه MS تابع $\ell_\psi(\alpha,\beta)$. در این بخش فرض می‌شود دنباله‌ی $\mathcal{U}_i := \{(\underline{u}_i,\overline{u}_i)\}, i \in \{0,\mathbb{N}\}$ طوری تعریف می‌شود که $\underline{u}_0 = \overline{u}_0 = 0$ و همچنین به ازای $i \in \mathbb{N}$ داریم $0 < \overline{u}_{i-1} < \underline{u}_i < \overline{u}_i$. از سوی دیگر، دنباله محدوده داخلی $\mathcal{S}_k := [\alpha_k,\beta_k], k \in \{1,\cdots,m\}$ طوری در نظر گرفته می‌شود که شامل m زوج از $\alpha_k,\beta_k \in \mathbb{R}(\alpha,\beta)$ باشند که $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \neq \emptyset, |i-j| \le 1$ و $i,j \in \{1,\cdots,m\}$. یک نمونه از تجزیه مطرح شده، در شکل ۵ آمده است و نشان می‌دهد که می‌توان تابع $\ell_\psi(\alpha,\beta)$ را به چندین زیربخش تقسیم کرد.



شکل ۵. نمونه‌ای از دیدگاه MS تابع غیرخطی $\ell_\psi(\alpha,\beta)$.

می‌توان تحلیل پایداری را بر اساس لم ۲ و بخش‌های داخلی $\mathcal{S}_k$ که Z-sector محسوب می‌شوند، به شکل دیگری مطرح کرد. طبق لم ۲،

[1] Incomplete Stability (IS)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

می‌توان پایداری IS را برای هر $\mathcal{S}_k$ به طور مجزا بررسی کرد. با این حال، اگر بتوان نشان داد ناحیه جذب بخش‌های در نظر گرفته شده اشتراک کامل دارند، پایداری مجانبی و یا مطلق، اثبات شده است. بنابراین u_i و $\mathcal{S}_k$ باید به شکلی انتخاب شوند که به ازای هر $i \in \{1, \cdots, m\}$،

$$\varepsilon_{P_{i+1}}\left(\frac{2Z_{i+1}}{\epsilon_{i+1}}+\eta\right) \subset \varepsilon_{P_i}\left(0.5\left(KCP_i^{-1}C^TK^T\right)^{-1}\bar{u}_i^2\right) \quad (۱۰)$$

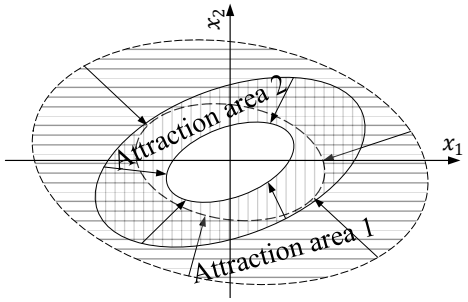
برقرار باشد که در آن P_i و ϵ_i پاسخ مساله KYP بخش iام می‌باشند. همچنین $\eta \in \mathbb{R}^+$ یک عدد دلخواه بوده و $Z_{i+1} = (\beta-\alpha)^2\underline{u}_i^2$. یک نمونه از چینش مجاز بیضی‌گون‌ها برای $x \in \mathbb{R}^2$ در شکل ۶ نشان داده شده است. لم زیر شرط لازم جهت ارضا شدن قید (۱۰) را فراهم می‌آورد.

لم ۳ [۱۸]. فرض کنید یک تحقق کمینه از سیستم اکیداً سره (۱) در دسترس باشد که ماتریس‌های $(A, B, C, 0)$ دینامیک سیستم را مشخص می‌کنند. همچنین تابع فرد و دلخواه $\ell_\psi(\alpha, \beta)$، همانند شکل ۵ به چند بخش تقسیم شده است. آنگاه سیستم حلقه‌بسته $(\Sigma, \ell_\psi(\alpha, \beta))$ پایدار مجانبی سراسری است اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$، نامساوی

$$\frac{\overline{y}_i}{\underline{y}_i} > \Gamma_i, \qquad \Gamma_i := 2(\beta-\alpha)\max\left\{\sqrt{\frac{\lambda_k^+}{\epsilon_{k+1}}KCP_k^{-1}C^TK^T}, \sqrt{\frac{\lambda_k^-}{\epsilon_k}KCP_{k+1}^{-1}C^TK^T}\right\} \quad (۱۱)$$

برقرار باشد که در آن $\lambda_k^+ = \lambda_{\max}(P_{k+1}^{-1}P_k)$ و $\lambda_k^- = \lambda_{\max}(P_k^{-1}P_{k+1})$ می‌باشند. توجه شود که ϵ_k و P_k پارامترهای مساله بهینه‌سازی KYP (۶) برای هر بخش می‌باشند.

تذکر ۳. باید توجه کرد که در نامعادله (۱۱)، به ازای هر i، مقدار $k \in \{1, \cdots, m\}$ وجود دارد که $\mathcal{S}_k$ در بازه $[\underline{u}_{i-1}, \overline{u}_i]$ تابع $\psi(t, u)$ را محدود می‌کند، اما در حالت کلی Z-section بوده و ممکن است همانند شکل ۴، در سایر uها، مقداری خارج از ناحیه لیبشیتز $\mathcal{S}_k$ به خود اختصاص دهد.



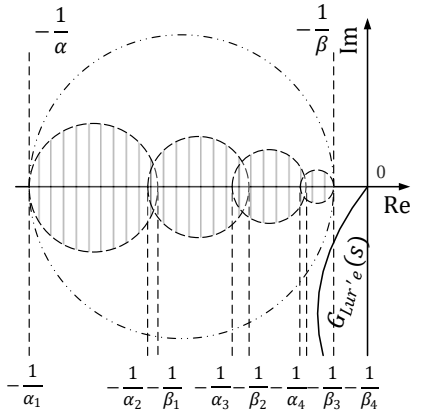
شکل ۶. ترکیب مجاز بیضی‌گون‌ها در تجزیه MS برای یک سیستم با دو حالت x_1 و x_2.

٤- تعریف حاشیه‌پایداری با رویکرد MS و نحوه حل آن

GM و PM سیستم حلقه‌بسته در حالت MS. در این بخش، ابتدا توصیف فرکانسی از MS ارائه شده، سپس با تعریف PGM و PPM در ساختار MS، الگوریتم بهینه‌ای جهت دستیابی به حداکثر بهره‌برداری از PGM و PPM در این ساختار پیشنهاد می‌شود.

نتیجه‌گیری لم ۳ (ECC). در ساختار MS، مجموع دوایر $\mathbb{O}(\alpha_k, \beta_k)$ در درون دایره لیبشیتز $\mathbb{O}(\alpha, \beta)$ قرار گرفته و زیرمجموعه‌ای از آن خواهند بود. زیرا با توجه به $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}(\alpha, \beta)$ و تعریف دایره $\mathbb{O}(.,.)$، می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbb{O}(\alpha_k, \beta_k) \subset \mathbb{O}(\alpha, \beta)$ می‌باشد. از سوی دیگر، با توجه به برقرار بودن این شرط برای هر مقدار k، رابطه‌ی $\bigcup_k \mathbb{O}(\alpha_k, \beta_k) \subset \mathbb{O}(\alpha, \beta)$ همواره برقرار می‌باشد. بنابراین، ناحیه لیبشیتز در قضیه CC به محدوده کوچکتری در رویکرد MS مبدل می‌شود. شکل ۷ توصیف نمایشی از ECC ارائه می‌کند که ناحیه ممنوعه آن کوچکتر شده است. از سوی دیگر، دیاگرام نایکوئیست $G_{Lur'e}(s)$، دایره‌های $\mathbb{O}(\alpha_k, \beta_k)$ را قطع نمی‌کند و این مورد به عنوان نتیجه دوم از مفهوم ECC و فرض۲ و رویکرد CC بدست می‌آید زیرا طبق فرض ۲، سیستم پایدار CC می‌باشد و در نتیجه نمودار نایکوئیست سیستم نامی خارج از دایره $\mathbb{O}(\alpha, \beta)$ خواهد بود.

تذکر ٤. مساله KYP برای تمام $(\Sigma, \ell_\psi^Z(\hat{\alpha}_k^t, \hat{\beta}_k^t))$ که $\hat{\alpha}_k^t, \hat{\beta}_k^t \in \mathbb{R}(\alpha, \beta)$ است بنا بر لم ۱ و فرض ۲ دارای پاسخ یکتا می‌باشد.



شکل ۷. توصیف فرکانسی ECC سیستم حلقه‌بسته $(\Sigma, \ell_\psi(\alpha, \beta))$ برای سیستم نامی.

تعریف ۲ (حد بهره و حد فاز). به حداقل افزایش بهره حلقه کنترل تا مرز ناپایداری سیستم حلقه‌بسته، حد بهره گفته می‌شود. از طرفی، حد بهره‌ی معکوس[1] به عنوان معکوس حداقل کاهش بهره تا مرز ناپایداری سیستم حلقه‌بسته تعریف می‌شود و با $\text{IGM} := 1/g_{\text{m}}$ بیان می‌شود که در آن g_{m} مقدار مرز ورود به ناپایداری است. در رویکرد CC، حداقل تغییر در تابع تبدیل $G_{Lur'e}(s)$ تا پیش از ورود به ناحیه $\mathbb{O}(\alpha, \beta)$ معرف GM خواهد بود. از سوی دیگر، حداقل تغییر در فاز حلقه کنترل تا مرز ناپایداری را حد فاز و حد فاز معکوس[2] می‌نامند. در [۱۲]، مساله CC برای سیستم‌های $G_{Lur'e}(s)$ پایدار بررسی شده است که تنها به مقدار β در تابع $\ell_\psi(\alpha, \beta)$ بستگی خواهد داشت. بنابراین، α در تابع لیبشیتز اهمیت چندانی ندارد و در دیاگرام نایکوئیست، دایره $\mathbb{O}(\alpha, \beta)$ به مجموعه حقیقی خالص موجود در فضای $\mathbb{O}(\alpha, \beta)$ محدود خواهد شد.

[1] Inverse Gain Margin (IGM)
[2] Inverse Phase Margin (IPM)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

حد بهره و حد فاز با معیار ECC. با توجه به تعریف حاشیه پایداری در رویکرد CC و همچنین نتیجه ECC که ناحیه ممنوعه را کوچکتر می‌سازد، به حداقل تغییر بهره در حلقه کنترل پیش از ورود به ناحیه $\bigcup_k \mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k)$ حد بهره کاربردی و به حداقل تغییر فاز پیش از ورود به آن ناحیه، حد فاز کاربردی گفته می‌شود.

تذکر ۵. با توجه به تعریف PGM و PPM در معیار ECC، موقعیت دایره‌های $\mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k)$ در صورت تغییر بهره و فاز حلقه کنترل، ثابت فرض شده‌اند، و به این دلیل GM و PM مطرح شده تقریبی بوده و تحت عنوان practical شناخته می‌شوند.

در حالت کلی، تنظیم پارامترهای u_i و $\mathcal{S}_k$ برای مساله PGM و PPM در روش ECC موجود در لم ۳، اگر غیرممکن نباشد، بسیار دشوار خواهد بود. بنابراین با در نظر گرفتن چند فرض، مساله را به یک مساله قابل حل تبدیل خواهیم کرد.

فرض ۳. تابع $\ell_\psi(\alpha,\beta)$ مستقل از زمان بوده و تابع $v=\psi(u)$ به صورت صریح در دسترس می‌باشد.

فرض ٤. تعداد متغیرها با شرط $\mathcal{H}:=\{h_i|h_0=0,h_1=\underline{u}_1,h_{m+1}=u_\infty,h_i:=\overline{u}_i=\underline{u}_{i+1},i\in\mathbb{N}>1\}$ به نصف مقدار اولیه کاهش می‌یابد که در آن u_∞ حداکثر دامنه مجاز جهت بررسی پایداری می‌باشد و می‌بایست عدد بزرگی انتخاب گردد تا به واقعیت نزدیک‌تر باشد.

فرض ۵. مساله حداقل‌سازی $\mathbb{S}(\bigcup_k \mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k))$ با مساله حداقل‌سازی $\sum \mathbb{S}(\mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k))$ معادل در نظر گرفته شده است، که در آن $\mathbb{S}(\eta)$ مساحت مجموعه بسته η را نشان می‌دهد. توجه شود که این معادل‌سازی لزوماً برقرار نیست و به ناحیه اشتراک دوایر $\mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k)$ بستگی دارد، به طوری که اگر $\bigcap_k \mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k)=\emptyset$، دو عبارت مطرح شده معادل یکدیگر خواهند بود. با این حال، جهت طراحی یک الگوریتم بهینه به منظور دستیابی به مقادیر $\mathcal{H}$ و $\mathcal{S}_k$، به عنوان یک تقریب، این فرض پذیرفته شده و $\sum \mathbb{S}(\mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k)) \sim \mathbb{S}(\bigcup_k \mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k))$.

با فرضیات مطرح شده، مساله حداقل‌سازی مساحت مجموع دوایر $\mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k)$ مد نظر قرار می‌گیرد که به طور مستقیم به اختلاف بین α_k و β_k بستگی دارد، زیرا حداقل‌سازی شعاع دوایر که به صورت

$$\min \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{0.5(\beta_k-\alpha_k)}{\alpha_k\beta_k}\right|$$

تعریف شده است با کاهش اختلاف $\beta_k-\alpha_k$ محقق خواهد شد. توجه شود که همواره $\beta_k>\alpha_k$ می‌باشد. جهت حداقل‌سازی مقدار $\beta_k-\alpha_k$، می‌بایست اختلاف $\tilde{h}_k:=h_{k+1}-h_{k-1}$ به حداقل برسد؛ زیرا با حداقل‌سازی $\tilde{h}_i$، تابع $\ell_\psi^{Z_k}(\alpha_k,\beta_k)$ فرصت بیشتری می‌یابد تا در ناحیه کوچک‌تری از α_k و β_k قرار گیرد. فرض شود $\ell_\psi^{Z_k}(\bar{\alpha}_k,\bar{\beta}_k)$ در بازه $[h_{i-1},h_{i+1}]$ برقرار است و طبق تعریف می‌دانیم $\bar{\alpha}_k u^2 \le u\psi(u)$ حال اگر $\bar{\alpha}_k$ و $\bar{\beta}_k$ از مسائل بهینه‌سازی

$$\bar{\alpha}_k=\min_{u\in[h_{i-1},h_{i+1}]}\frac{\psi(u)}{u},\ \bar{\beta}_k=\max_{u\in[h_{i-1},h_{i+1}]}\frac{\psi(u)}{u} \qquad (۱۲)$$

بدست آیند، حداقل اختلاف $\beta_k-\alpha_k$ را نتیجه خواهد داد. حال اگر بازه جستجو $[h_{i-1},h_{i+1}]$ کوچکتر شود در حالی که مقدار h_{i-1} ثابت فرض شده است، طبق رابطه (۱۲) مقادیر بدست آمده برای $\bar{\alpha}_k$ و $\bar{\beta}_k$ می‌توانند اختلاف $\beta_k-\alpha_k$ را بیش از پیش کاهش دهند. بنابراین مساله حداقل‌سازی $\tilde{h}_k$ در دستور کار قرار خواهد گرفت و این روند از $k=1$ تا $k=m$ ادامه می‌یابد. در بهترین حالت، اگر $\tilde{h}_i$ به سمت صفر برود، تابع غیرخطی $\psi(u)$ محقق خواهد شد و شعاع دوایر $\mathbb{O}(\alpha_k,\beta_k)$ به سمت صفر میل خواهند کرد. با این حال، شرط (۱۱) به عنوان یک محدودیت مانع این امر خواهد شد و نمی‌توان $\tilde{h}_i$ را به هر مقدار دلخواه کاهش داد.

تنظیم خودکار پارامترهای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{S}_k$. اگر مقادیر m (تعداد متغیرهای h_i) و h_1 در دسترس باشند، سایر h_iها از مساله بهینه‌سازی

$$\min_H J=\sum_{i=1}^{m}\tilde{h}_i$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\left\{\begin{matrix}\min\limits_{\alpha_k}\frac{\psi(u)}{u}\ \text{and}\ \max\limits_{\beta_k}\frac{\psi(u)}{u}\\ \text{s.t.}\ h_{k-1}\le u\le h_{k+1}\end{matrix}\right\}\ \text{for all}\ k\in\{1,\cdots,m\}\\ \mathcal{KYP}_k\{Q_F(\alpha_k,\beta_k)\}\ \text{for all}\ k\in\{1,\cdots,m\}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-\Gamma_1&1&0&\cdots&0\\0&-\Gamma_2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-\Gamma_{m-1}&1\end{bmatrix}H>0\end{cases}$$

بدست می‌آیند که در آن $H=[h_1,h_2,\cdots,h_m]^T$ می‌باشد. همچنین $\mathcal{KYP}_k\{Q_F(\alpha_k,\beta_k)\}$ به تعداد $m-1$ مساله KYP به صورت رابطه (۶) می‌باشد و ماتریس‌های P_k و ϵ_k را نتیجه خواهند داد که در محاسبه مقادیر Γ_i در رابطه (۱۱) تاثیر مستقیم خواهند داشت. محدودیت آخر، محدودیتی خطی با ماتریس ضرایب متغیر بر حسب Γ_i می‌باشد و نابرابری (۱۱) را برای تمام بخش‌ها برآورده خواهد کرد. از سوی دیگر، در دو مساله بهینه‌سازی داخلی در (۱۳) با توجه به h_i های موجود، مقادیر α_k و β_k، در بهترین حالت ممکن محاسبه می‌شوند. یک روش جهت حل مساله بهینه‌سازی (۱۳) به صورت زیر پیشنهاد می‌شود.

الگوریتم ۱. در این روش، با در نظر گرفتن $\hat{H}_t=[\hat{h}_1^t,\hat{h}_2^t,\cdots,\hat{h}_{m-1}^t]$ به عنوان متغیر تخمین و یک نقطه اولیه $\hat{H}_0$ با پارامترهای $0<\hat{h}_i^0<\hat{h}_{i+1}^0$ به عنوان نقطه آغاز، و همچنین در نظر گرفتن بردار خطای پیشنهادی، با انجام چند تکرار به پاسخ مساله بهینه‌سازی دست خواهیم یافت. قابل ذکر است که می‌بایست مقدار m و $\hat{h}_1^0=h_1$ در ابتدا مشخص گردند. گر چه در طول فرآیند تکرار، بردار $\hat{H}_t$ اصلاح خواهد شد اما با این حال، مقدار $\hat{h}_1^t$ تغییر نخواهد کرد.

مرحله اول. محاسبه $(\hat{\alpha}_k^t,\hat{\beta}_k^t)$ توسط تابع $\psi(u)$ در نقطه $\hat{H}_{t-1}$ و حل $(\Sigma,\ell_\psi^{Z_k}(\hat{\alpha}_k^t,\hat{\beta}_k^t))$ $\mathcal{KYP}_k\{Q_F(\hat{\alpha}_k^t,\hat{\beta}_k^t)\}$ برای سیستم‌های حلقه‌بسته و دستیابی به ماتریس‌های P_k^t و اسکالرهای ϵ_k^t در تمام $k\in\{1,\cdots,m\}$. توجه شود که پارامتر $t\in\mathbb{N}$ مرتبه تکرار را نشان می‌دهد.

مرحله دوم. محاسبه $\Gamma_i^t, i\in\{1,\cdots,m-1\}$ توسط مقادیر بدست آمده از P_k^t و ϵ_k^t در مرحله ۱.

مرحله سوم. بردار خطا به شکل

$$E_t:=\begin{bmatrix}0\\\hat{h}_2^{t-1}-\hat{h}_1^t\Gamma_1^t\\\vdots\\\hat{h}_m^{t-1}-\hat{h}_{m-1}^t\Gamma_{m-1}^t\end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

تعریف می‌شود و تخمین‌گر به صورت

$$\widehat{H}_t = \widehat{H}_{t-1} - WE_t \qquad (۱۵)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن W یک ماتریس مربعی و قطری با درایه‌های $w_i \in \mathbb{R}(0,1)$ می‌باشد که نرخ همگرایی و اصلاح را تعیین خواهد کرد. اگر $W = wI$ و $w \in \mathbb{R}(0,1)$ در نظر گرفته شود، مقدار $\widehat{H}_t$ از دستگاه معادله زیر بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -w\Gamma_1^t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -w\Gamma_2^t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -w\Gamma_{m-1}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_1^t \\ \hat{h}_2^t \\ \vdots \\ \hat{h}_m^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^{t-1} \\ (1-w)\hat{h}_2^{t-1} \\ \vdots \\ (1-w)\hat{h}_m^{t-1} \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

مرحله ٤. با بازگشت به مرحله ۱ و تکرار الگوریتم برای مقدار جدید $\widehat{H}_t$، مراحل را تا زمانی که مقادیر Γ_i^t به مقدار نسبتاً ثابتی همگرا شوند ادامه می‌دهیم.

تذکر ٦. توجه شود که می‌توان w را بر حسب پارامتر تکرار t طراحی نمود. به عنوان مثال می‌توان از رابطه

$$w(t) = \frac{\delta_1}{1+\delta_2 t} \qquad (۱۷)$$

استفاده کرد که در آن t پارامتر تکرار بوده و $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ پارامتر ثابت تنظیم‌شونده می‌باشد و می‌بایست $\delta_1 < \delta_2 + 1$ برقرار باشد.

بررسی همگرایی الگوریتم پیشنهادی. جهت بررسی همگرایی، تساوی (۱۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\widehat{H}_t^- := A_{t-1}\widehat{H}_{t-1}^- + B_{t-1}, \qquad (۱۸.الف)$$

$$A_{t-1} = \begin{bmatrix} 1-w & 0 & \cdots & 0 \\ (1-w)w\Gamma_2^{t-1} & 1-w & \cdots & 0 \\ (1-w^2)w^2\Gamma_2^{t-1}\Gamma_3^{t-1} & (1-w)w\Gamma_3^{t-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod_{k=3}^{m}((1-w)w\Gamma_{k-1}^{t-1}) & \cdots & (1-w)w\Gamma_{m-1}^{t-1} & 1-w \end{bmatrix}, \qquad (۱۸.ب)$$

$$B_{t-1} = \begin{bmatrix} w\Gamma_1^{t-1} \\ w^2\Gamma_1^{t-1}\Gamma_2^{t-1} \\ \vdots \\ \prod_{k=2}^{m} w\Gamma_{k-1}^{t-1} \end{bmatrix} h_1,\ \widehat{H}_t^- = [\hat{h}_2^t \quad \hat{h}_3^t \quad \cdots \quad \hat{h}_m^t]^T. \qquad (۱۸.پ)$$

در دستگاه معادلات (۱۸) h_1 یک اسکالر مثبت و ثابت می‌باشد و $\Gamma_k^{t-1} = f_k\left(\widehat{H}_{t-1}^-\right)$ نمایانگر توابع غیرصریح می‌باشند که در هر زمان t از مساله بهینه‌سازی و به صورت عددی محاسبه می‌شوند. معادله (۱۸.الف) نمایانگر یک سیستم گسسته‌زمان غیرخطی است که ماتریس‌های A_{t-1} و B_{t-1} وابسته به $\widehat{H}_{t-1}^-$ در زمان $t-1$ می‌باشند. در ادامه، مساله پایداری (۱۸) مورد توجه قرار می‌گیرد. نقطه کار سیستم ایجاد شده در معادله (۱۸.الف) از رابطه $\widehat{H}_{eq}^- = A_{eq}\widehat{H}_{eq}^- + B_{eq}$ بدست می‌آید که به صورت زیر می‌باشد [۱].

$$\widehat{H}_{eq}^- = \begin{bmatrix} \Gamma_1^{eq} \\ \Gamma_1^{eq}\Gamma_2^{eq} \\ \vdots \\ \prod_{k=1}^{m-1}\Gamma_k^{eq} \end{bmatrix} h_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_1^{eq}h_1 \\ \Gamma_2^{eq}\hat{h}_2^{eq} \\ \vdots \\ \Gamma_{m-1}^{eq}\hat{h}_{m-1}^{eq} \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

با توجه به رابطه (۱۹) ملاحظه می‌شود که نقطه کار سیستم (۱۸)، همان پاسخ مساله بهینه‌سازی اولیه می‌باشد که شرط‌های بهینه‌سازی در مرز شدنی بدست می‌آیند. از سوی دیگر $\Gamma_k^{\mathrm{eq}} = f_k\left(\widehat{H}_{eq}^-\right)$ها به دلیل نامشخص بودن مقادیر $\widehat{H}_{eq}^-$ پیش از حل مساله نامعلوم می‌باشند و عدم وجود رابطه صریح $f_k(.)$، قادر به تلفیق معادله (۱۹) و رابطه صریح ذکر شده وجود ندارد. در این بخش نشان داده شده است که سیستم (۱۸) در صورت همگرایی، به پاسخ مساله بهینه‌سازی همگرا خواهد شد. در معادله (۱۸) اگر فرض شود ماتریس‌های A_{t-1} و B_{t-1} در گذر زمان t ثابت باشند و یا تغییرات کوچکی داشته باشند، با توجه به آن که مقادیر ویژه ماتریس $A_{t-1} \cong A_{\mathrm{eq}}$ برابر است با $\lambda_i(A_{\mathrm{eq}}) = 1 - w$، سیستم پایدار بوده و تخمین‌گر همگرا می‌شود. اگر شرایط اولیه $\widehat{H}_0^-$ در نزدیکی $\widehat{H}_{\mathrm{eq}}^-$ انتخاب شود و تابع غیرخطی و لیپشیتز $\psi(h)$ در همسایگی نقاط $\widehat{H}_{\mathrm{eq}}^-$ رفتار غیرخطی شدیدی نداشته باشد، با تقریب مناسبی می‌توان $A_{t-1} \cong A_{\mathrm{eq}}$ و $B_{t-1} \cong B_{\mathrm{eq}}$ را معتبر دانست و در نتیجه تخمین‌گر پایدار بوده و به $\widehat{H}_{\mathrm{eq}}^-$ همگرا خواهد شد. قابل ذکر است که با توجه به ساختار ماتریس‌های A_{t-1} و B_{t-1} که در (۱۸) آمده است و وجود حاصل‌ضرب Γ_k^{t-1}ها در درایه‌های آن، با بزرگتر شدن m اعتبار تقریب‌های $A_{t-1} \cong A_{\mathrm{eq}}$ و $B_{t-1} \cong B_{\mathrm{eq}}$ به خطر می‌افتند. بنابراین تحلیل صورت گرفته بیان می‌کند که اگر m کوچک انتخاب شود، همگرایی تخمین‌گر محتمل‌تر خواهد بود. خوشبختانه در شبیه‌سازی‌ها نشان داده شده است که حد بهره و حد فاز برای $m > 3$ بی‌اثر می‌باشد و حداکثر بهره‌برداری از رویکرد ذکر شده متعلق به $m \in \{2,3\}$ می‌باشند. در شبیه‌سازی‌ها دیده می‌شود که تعداد تکرار لازم جهت همگرایی، به w ربط دارد و همگرایی Γ_i^t برای مقادیر کوچک‌تر w کندتر خواهد بود. با این حال انتخاب کوچک m اعتبار همگرایی بیشتری را دارا می‌باشد. از طرف دیگر انتخاب بزرگ w می‌تواند باعث نوسانی شدن در زمان نشست گردد.

تذکر ۷. پس از همگرایی Γ_i^t، نامساوی (۱۱) برای تمامی بخش‌ها در مرز تساوی برآورده می‌شوند و نشان می‌دهد که بیضی‌گون‌های مربوطه، دو به دو در یک نقطه مشترک خواهند شد و در نتیجه پاسخ بهینه‌ای بدست آمده است.

برای دستیابی به $m \in \mathbb{N}$ و h_1 بهینه، جهت بهره‌برداری حداکثری از PGM و PPM، می‌توان از رویکرد grid search استفاده کرد. در این مقاله، برای حل مسائل بهینه‌سازی داخلی جهت یافتن $(\hat{\alpha}_k^t, \hat{\beta}_k^t)$ در مساله (۱۳) از تابع fmincon و همچنین حل مسائل KYP، از رویکرد موجود در پیوست ۱ و با استفاده از ابزار YALMIP در نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. رویکرد موجود در پیوست ۱، تبدیل مساله KYP به مساله نامساوی‌های دوخطی ماتریسی[1] و حل آن توسط ابزارهای LMI می‌باشد.

۵- شبیه‌سازی‌های کامپیوتری و مقایسه

در این بخش، با ارائه ۳ مثال عددی و نتایج و شبیه‌سازی‌ها، صحت مطالب ارائه شده در مقاله را بررسی کرده و با مقایسه آن با سایر روش‌های موجود، خصوصیات منفی و مثبت روش ECC شفاف‌تر بیان خواهد شد.

مثال ۱. سیستم Σ_1 با معادلات (۱) و داده‌های زیر داده شده است.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = 0. \qquad (۲۰)$$

[1] Bilinear Matrix Inequality (BMI)

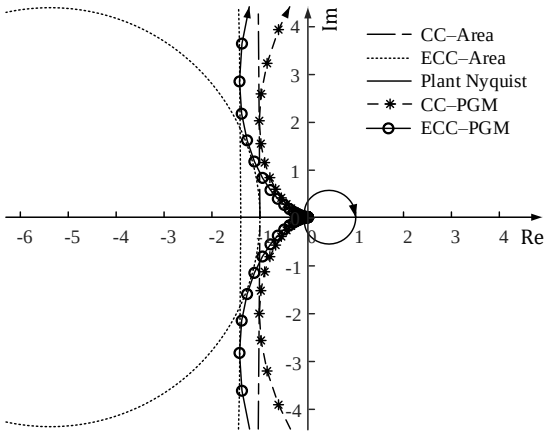
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

همچنین $K=1$ و تابع غیرخطی $\ell_{\psi_1}(0,1)$ به صورت

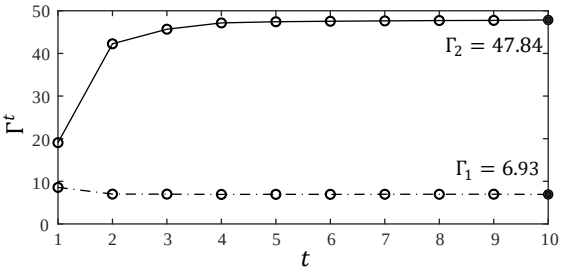
$$\psi_1(u)=\operatorname{sat}_{\bar{s}}u=\begin{cases}\bar{s} & u>\bar{s}\\ -\bar{s} & u<-\bar{s}\\ \bar{s}u & -\bar{s}\le u\le\bar{s}\end{cases}$$

انتخاب شده است که $\bar{s}=1$ است. این مساله توسط رویکرد ECC و انتخاب خودکار بخش‌ها، بررسی شده و با قرار دادن $m=3$، $h_1=1.4$، $u_\infty=10^6$ و $w=0.6$ نتایج به صورت زیر بدست آمده است.

$$(\hat{h}_1,\hat{h}_2,\hat{h}_3)=(1.4,9.7599,464.8612),$$
$$(\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2,\hat{\alpha}_3,\hat{\beta}_3)=$$
$$(0.1025,1,0.0022,0.7143,0,0.1025)$$



شکل ۸ حد بهره سیستم حلقه‌بسته $((\Sigma_1,\ell_{\psi_1}(0,1))$ با معیار CC و ECC.

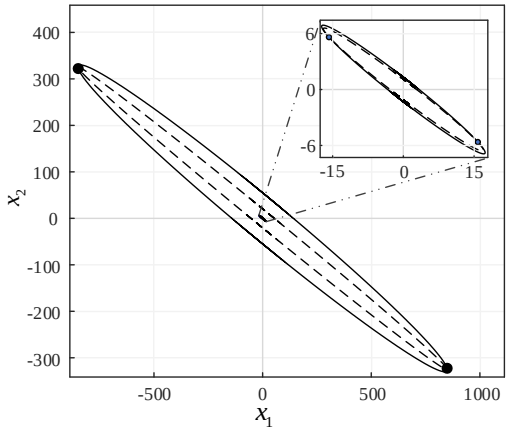


شکل ۹. نمودار همگرایی Γ_i^t مثال ۱.

توجه شود که در این مثال، مقدار $m=2$ با دقت بسیار خوبی، نتایج نزدیک به $m=3$ را داده است و حجم محاسبات کمتری نیز دارد. با این حال، شبیه‌سازی برای $m=3$ انجام شده است. شکل ۸ مقایسه GM در حالت‌های CC و ECC و شکل ۹ همگرایی Γ_i^t را نشان می‌دهند. با توجه به شکل ۸، در این مثال PM تعریف نمی‌شود زیرا با تزریق هر فاز به حلقه کنترلی، سیستم ناپایدار نخواهد شد. در شکل ۱۰ بیضی‌گون‌های پایداری و ناحیه جذب سیستم نمایش داده شده است و نشان می‌دهد که در مرز عبور از یکدیگر قرار دارند و در یک نقطه مشترک می‌باشند. این رخداد نشان می‌دهد که پاسخ بهینه بدست آمده است. در جدول ۱، مقایسه‌ای بین روش‌های مختلف از مثال مطرح شده آمده است و نشان می‌دهد که برای سیستم پایدار (۲۰)، رویکرد ECC پاسخ مناسب‌تری نسبت به CC و رویکرد LMI ارائه شده در [۱۴] نتیجه داده است. با این حال رویکرد CC ارائه شده در [۱۳] که برای سیستم‌های پایدار توسعه یافته است، دقت مناسب‌تری داشته است. همچنین نتیجه شبیه‌سازی عددی سیستم حلقه‌بسته $((\Sigma_1,\ell_{\psi_1}(0,1))$، نشان داده است که GM واقعی $+\infty$ می‌باشد.

جدول ۱. مقایسه حاشیه پایداری مثال ۱ با روش‌های مختلف.

Method	Practical GM
CC	23.5218 dB
LMI approach [14]	0.08804 dB
Stable CC and DF [13]	$+\infty$
ECC	26.6080 dB
Simulation	$+\infty$



شکل ۱۰. بیضی‌گون‌های بهینه بدست آمده از سیستم مثال ۱ با رویکرد MS. بیضی‌گون‌های خط‌چین، نمایانگر $\varepsilon_{P_{i+1}}(2Z_{i+1}/\epsilon_{i+1})$ و بیضی‌گون‌های خط ممتد نمایانگر $\varepsilon_{P_i}(0.5(KCP_i^{-1}C^TK^T)^{-1}\bar{u}_i^2)$ می‌باشند و $i\in\{1,2\}$.

مثال ۲. سیستم Σ_2 با معادلات (۱) و با اطلاعات زیر داده شده است.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ C=[0\quad 0.02\quad 0.3],\ D=0. \quad (۲۱)$$

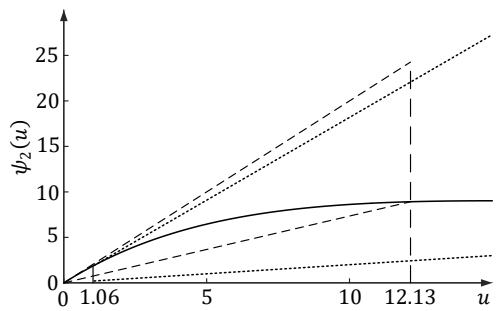
همچنین $K=1$ و تابع غیرخطی $\ell_{\psi_2}(0.2,2)$ به صورت

$$\psi_2(u)=\left(0.2+1.8e^{-0.1|u|}\right)u$$

در نظر گرفته شده است. با قرار دادن $m=2$، $h_1=1.06$ و $u_\infty=10^8$ و استفاده از $w(t)$ رابطه (۱۷) و پارامترهای $\delta_1=\delta_2=5$، نتایج به صورت زیر بدست آمده است.

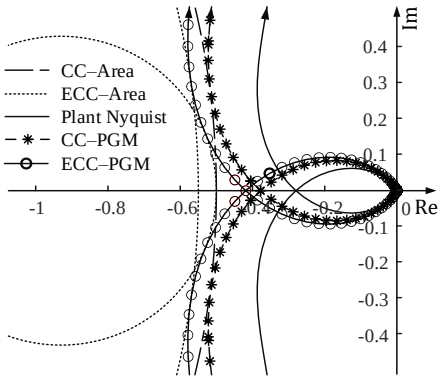
$$(\hat{h}_1,\hat{h}_2)=(1.06,12.1357)$$
$$(\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2)=(0.7348,2,0.2,1.8190)$$

جدول ۲، نتایج روش‌های مختلف محاسبه حاشیه پایداری می‌باشد. توجه شود که رویکرد LMI، فقط برای سیستم‌های $G_{Lur'e}$ پایدار طراحی شده است. در شکل ۱۱، تابع غیرخطی $\psi_2(u)$ به همراه بخش‌های بدست آمده از رویکرد ECC نشان داده شده است. شکل ۱۲، مقایسه GM در حالت‌های CC و ECC و شکل ۱۳ همگرایی Γ_i^t را نشان می‌دهند.

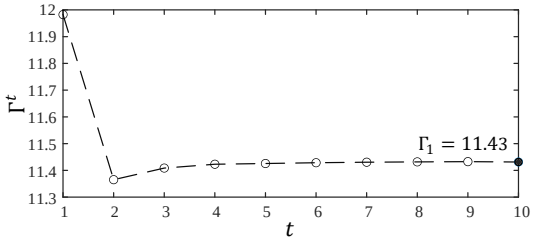


شکل ۱۱. دیدگاه MS تابع غیرخطی $\ell_{\psi_2}(0.2,2)$ مثال ۲.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]



شکل ۱۲. حد بهره سیستم حلقه‌بسته $((\Sigma_2, \ell_{\psi_2}(0.2,2))$ با معیار CC و ECC.



شکل ۱۳. نمودار همگرایی Γ_i^t مثال ۲.

جدول ۲. مقایسه حاشیه پایداری مثال ۲ با روش‌های مختلف.

Method	Practical GM	Practical PM
CC	2.607 dB	21.2567 deg
Stable CC and DF [13]	5 dB	39.4768 deg
ECC	3.4986 dB	24.5226 deg
Simulation	5.2 dB	-

مثال ۳. سیستم ناپایدار Σ_3 با معادلات (۱) و با اطلاعات زیر داده شده است.

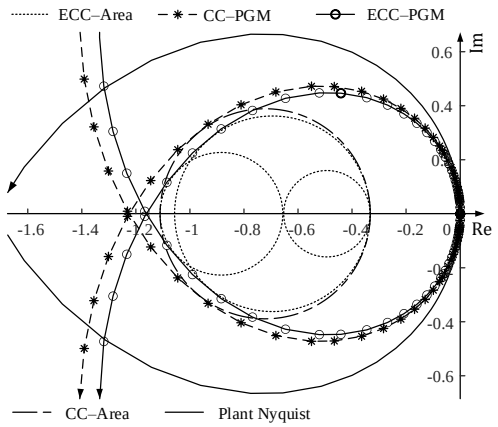
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.199 & 1.311 & 0.9373 \\ 0 & 0.6239 & 1 & 0 \\ 0 & -0.04906 & 0.6239 & 1.896 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7821 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$
$$C = [1.3502 \quad 1.8433 \quad 2.0150 \quad 1.4407], D = 0. \qquad (۲۲)$$

همچنین $K = 0.6$ و تابع غیرخطی $\ell_{\psi_3}(0.9,3)$ به صورت

$$\psi_3(u) = \left(3 - 2.1e^{-0.1|u|}\right)u$$

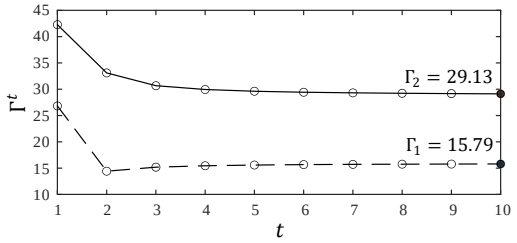
در نظر گرفته شده است. با قرار دادن $m = 3$، $u_\infty = 10^6$ و $h_1 = 0.22$ و استفاده از $w(t)$ با پارامترهای $\delta_1 = 3$ و $\delta_2 = 4$ نتایج به صورت زیر بدست می‌آید.

$$(\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{h}_3) = (0.22, 3.5382, 107.5301),$$
$$(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_3) = (0.9, 1.5258, 0.9457, 3, 1.5258, 3)$$



شکل ۱۴. حد بهره سیستم حلقه‌بسته $((\Sigma_3, \ell_{\psi_3}(0.9,3))$ با معیار CC و ECC.

شکل ۱۴ مقایسه GM در حالت‌های CC و ECC و شکل ۱۵ همگرایی Γ_i^t را نشان می‌دهند.



شکل ۱۵. نمودار همگرایی Γ_i^t مثال ۳.

نتایج روش‌های مختلف در جدول ۳ آمده است. توجه شود که سایر روش‌ها برای سیستم‌های پایدار طراحی شده‌اند. نکته قابل توجه، تعریف دوم GM می‌باشد و شکل ۱۴ نشان می‌دهد که سیستم حلقه‌بسته تا زمانی که دیاگرام نایکوئیست Σ_3 دوایر $\mathbb{O}(\alpha_k, \beta_k)$ را ۲ مرتبه و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند، پایدار خواهد بود. بنابراین سیستم Σ_3 تنها با کاهش بهره، در آستانه ناپایداری قرار خواهد گرفت.

جدول ۳. مقایسه حاشیه‌پایداری مثال ۳ با روش‌های مختلف.

Method	Inverse Practical GM	Inverse Practical PM
CC	2.9748 dB	21.7724 deg
ECC	3.4397 dB	25.7831 deg
Simulation	3.8223 dB	-

۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله حاشیه پایداری سیستم‌های غیرخطی Lur'e با استفاده از رویکرد دایره توسعه‌یافته مورد بررسی قرار گرفته است و پس از انجام شبیه‌سازی و ارائه چند مثال، می‌توان به دقت بالاتر این روش در سیستم‌هایی که ذاتاً غیرخطی هستند پی برد، به طوری که ECC پاسخ دقیق‌تری نسبت به CC ارائه داده است. از سوی دیگر، برای سیستم‌هایی که ذاتاً پایدار هستند، رویکرد ECC نسبت به رویکردهای LMI پایه و CC، از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد. رویکرد Stable CC و DF که برای سیستم‌های پایدار طراحی شده است، دقت مناسب‌تری دارند. حجم محاسبات در رویکرد ECC نسبت به CC، Stable CC و LMI بالاتر می‌باشد. نقطه قوت رویکرد ECC نسبت به رویکرد DF، استفاده از تابع غیرخطی می‌باشد به طوری که در رویکرد DF، ضرایب سری فوریه تابع غیرخطی $\psi(u)$ ممکن است به راحتی در دسترس نباشند.

ارائه رویکردی مناسب جهت طراحی کنترل‌کننده K برای دستیابی به حاشیه‌پایداری دلخواه، و همچنین توسعه الگوریتم ارائه شده برای سیستم‌های دارای ادوات غیرخطی استاتیک و متغیر با زمان، و از سوی دیگر، راحت‌تر کردن شرط (۱۳) برای دستیابی به مقادیر دقیق‌تری از حاشیه پایداری، می‌توانند موضوعات کارهای بعد باشند.

مراجع

[1] R. Dorf, R. Bishop, Modern Control System, 2011.

[2] Z.Y. Nie, M. Wu, Q.G. Wang, Y. He, "A novel computational method for loop gain and phase margins of TITO systems", *Journal of Franklin Institute*, vol. 350, pp. 503-520, 2013.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]

[3] M. G. Safonov, "Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems," *20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, pp. 1472-1478, 1981.

[4] J.C. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainties", *IEEE Proceedings Part D*, vol. 129, pp. 242-250, 1982.

[5] L. Arnold, V. Wihstutz, Lyapunov exponents: *A survey, Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, New York*, pp. 1186-1985, 2006.

[6] X. Yang, J.J. Zhu, "Singular perturbation margin assessment of linear time-invariant systems via the Bauer-Fike theorems", *51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 6521-6528, 2013.

[7] X. Yang, J.J. Zhu, "Singular perturbation margin and generalized gain margin for nonlinear time-invariant systems", *International Journal of Control*, vol. 89, pp. 451-468, 2016.

[8] A. Rosales, L. Ibarra, P. Ponce, A. Molina, "Fuzzy sliding mode control design based on stability margins", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, pp. 5260-5273, 2019.

[9] X. Yang, J.J. Zhu, "Generalized gain margin for nonlinear systems", *American Control Conference*, pp. 3316-3321, 2012.

[10] A. Rosales, Y. Shtessel, L. Fridman, "Analysis and design of systems driven by finite-time convergent controllers", *International Journal of Control*, vol. 91, pp. 2563-2572, 2017.

[11] C.B. Panathula, Y. Shtessel, "Practical stability margins in continuous higher order sliding mode control systems", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, pp. 106-120, 2020.

[12] J. Zhou, "Interpreting Popov criteria in Lur´e systems with complex scaling stability analysis", *Communication Nonlinear Science Numerical Simulation*, vol. 59, pp. 306-318, 2018.

[13] S.S. Das, Y. Shtessel, F. Plestan, "Phase and gain stability margins for a class of nonlinear systems", *IFAC*, vol. 51, pp. 263-268, 2018.

[14] S.S. Das, Y. Shtessel, F. Plestan, "Gain margins in a class of nonlinear systems: Lyapunov approach", *IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pp. 839-844, 2020.

[15] C. Guiver, H. Logemann, "A circle criterion for strong integral input-to-state stability", *Automatica*, vol. 111, 10.1016/j.automatica.2019.108641, 2020.

[16] B. Jayawardhana, H. Logemann, E.P. Ryan, "The circle criterion and input-to-state stability", *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 31, pp. 32-67, 2011.

[17] H. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd edition, 2002.

[18] D. Materassi, G. Innocenti, R. Genesio, M. Basso, "A composite circle criterion", *46th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), USA*, pp. 4459-4464, 2007.

[19] T.D. Quoc, S. Gumussoy, W. Michiels, M. Diehl, "Combining convex-concave decompositions and linearization approaches for solving BMIs, with application to static output feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, pp. 1377-1390, 2011.

پیوست ۱. الگوریتم حل مساله KYP با تبدیل آن به مسائل نامساوی دوخطی ماتریسی و حل آن توسط ابزارهای LMI.

با کمک [۱۹] و تعریف SPR در بخش ۳، مساله (۸) معادل با مساله BMI

$$L = \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + \left(P\tilde{B} - \tilde{C}^T\right)\left(\tilde{D} + \tilde{D}^T\right)^{-1}\left(P\tilde{B} - \tilde{C}^T\right)^T + \epsilon P \quad (۱\text{–}۱)$$

و $L = 0$ می‌باشد. با فرض آن که $L \leq 0$ باشد، با استفاده از لم ۲، این نامساوی، معادل است با

$$X = \begin{bmatrix} \left(\tilde{A} + \frac{1}{2}\epsilon I\right)^T P + P\left(\tilde{A} + \frac{1}{2}\epsilon I\right) & P\tilde{B} - \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T P - \tilde{C} & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0. \quad (۱\text{–}۲)$$

نامعادله (۱–۲)، یک مساله BMI با ضرب پارامترهای ϵ و P می‌باشد. از سوی دیگر، هدف یافتن $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ و P می‌باشد تا $L = 0$ برقرار باشد. بنابراین با استفاده از مساله مقدار ویژه، مساله بهینه‌سازی

$$\min_x \gamma$$
$$s.t. -\gamma I \leq X \leq 0$$

با قیدهای BMI طراحی می‌شود. از سوی دیگر، با استفاده از بهینه‌سازی خطی، در یک لایه بالاتر از BMI، با ثابت فرض کردن ϵ و با چند تکرار، مساله بهینه‌سازی LMI حل شده و طبق رابطه $\lambda_{\max}(L) \leq \lambda_{\max}(X)$، نتیجه بهینه‌سازی به عنوان پاسخ مساله KYP معرفی خواهد شد. نکته قابل توجه آن است که در مساله KYP، پارامتر بهینه ϵ_{opt}، برابر با کران بالای آن است که در مرز ناشدنی قرار دارد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.1.5]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.1]