مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱، صفحه ۲۴-۱۱

طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره‌ی کلیدزن مقاوم H_2 برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن

رضا یاوری[۱]، سعید شمقدری[۲*]، آرش صادق‌زاده[۳]

[۱] فارغ‌التحصیل دکتری، مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران reza_yavari@elec.iust.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران shamaghdari@iust.ac.ir

[۳] استادیار، دانشکده‌ی مهندسی برق ، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران a_sadeghzadeh@sbu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۹ ویرایش: ۱۴۰۰/۰۶/۰۶ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۷

چکیده: در این مقاله، رویکردی جدید به منظور طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی پس‌خورد خروجی دینامیکی مرتبه کامل کلیدزن مقاوم H_2 برای سیستم‌های پارامتر متغیر خطی (LPV) نامعین کلیدزن ارائه می‌شود. کنترل‌کننده‌های جدول‌بندی بهره‌ی کلیدزن مقاوم پیشنهادی (RSGSOF)، علاوه بر تضمین پایداری بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی سیستم حلقه‌بسته‌ی نامعین کلیدزن را کمینه می‌نماید. منطق کلیدزنی هیسترزیس که وابسته به پارامترهای جدول‌بندی است، در طراحی کنترل‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرد. وابستگی ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز کلیدزن به پارامترهای جدول‌بندی و هم‌چنین متغیرهای نامعینی از نوع چندجمله‌ای در نظر گرفته شده است. هم‌چنین فرض بر آن است که محدوده‌ی تغییرات پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی از پیش معین باشد. رویکرد طراحی به صورت بهینه‌سازی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی به همراه جستجوی خطی دو مقدار عددی ارائه می‌شود. سرانجام روش فوق در طراحی کنترل‌کننده‌ی سیستم تعلیق الکترومغناطیسی (EMS) مورد استفاده قرار گرفته است. بررسی و ارزیابی نتایج این طراحی، قابلیت‌های کاربردی رویکرد کنترلی پیشنهادی در این مقاله را تأیید می‌کند.

کلمات کلیدی: کنترل جدول‌بندی مقاوم، کنترل کلیدزن، سیستم پیوسته-زمان، سیستم پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن.

Robust H_2 switching gain-scheduled controller design for switched uncertain LPV systems

Reza Yavari, Saeed Shamaghdari, and Arash Sadeghzadeh

Abstract: In this article, a new approach is proposed to design robust switching gain-scheduled dynamic output feedback (RSGSOF) control for switched uncertain continuous-time linear parameter varying (LPV) systems. The proposed robust switching gain-scheduled controllers are robustly designed so that the stability and H_2-gain performance of the switched closed-loop uncertain LPV system can be guaranteed even under controller switching determined by scheduling parameters. Hysteresis switching law is exploited for the switching controller synthesis. The system matrices are supposed to depend polynomially on both the scheduling and uncertain parameters which are assumed to belong to intervals with a priori known bounds. The proposed approach is formulated in terms of solutions to a set of parameter-dependent linear matrix inequalities (LMIs) using parameter searches for two scalar values. Finally, the method is applied to electromagnetic suspension (EMS) system to verify the applicability of the presented approach.

Keywords: Robust gain-scheduled control, switching control, continuous-time system, switched uncertain linear parameter-varying system.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، رویکرد طراحی جدول‌بندی بهره با کاربردهای موفق به عنوان یکی از مشهورترین روش‌های کنترلی در سیستم‌های عملی مهندسی توجه زیادی را به سوی خود جلب نموده است [۱]. در این میان مدل‌سازی پارامتر متغیر خطی (LPV) با داشتن ظرفیتی مناسب در بیان مدل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی و عملی توانسته است در رویکرد مدرن کنترل جدول‌بندی بهره که مبتنی بر تضمین پایداری و حصول عملکرد به صورت کاملاً تحلیلی است، نقش مهمی را ایفا نماید [۲، ۳ و ۴]. مدل‌سازی LPV و رویکرد جدول‌بندی بهره می‌تواند نسبت به روش‌های صرفاً مقاوم به کاهش محافظه‌کاری در نتایج طراحی منجر گردد. در این روش‌ها، محاسبه‌ی سیگنال کنترلی همانند مدل سیستم حلقه‌باز به پارامترهای جدول‌بندی از پیش نامشخص وابسته است. برای مشاهده‌ی نتایج آن می‌توان پژوهش‌های [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲] را مشاهده نمود. در روش‌های معمول طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره برای سیستم‌های LPV فرض بر آن است مدل سیستم و هم‌چنین پارامترهای جدول‌بندی به صورت دقیق در دسترس باشند [۱-۱۲].

اما وجود نامعینی در مدل سیستم و هم‌چنین حضور آن در اندازه‌گیری و یا تخمین پارامترهای جدول‌بندی بر اساس پژوهش‌های موجود [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳ و ۲۴] امری اجتناب‌ناپذیر است. در واقع محدویت‌های فیزیکی، عملی و فناوری ممکن است باعث شود مقدار دقیق پارامترها و یا مدل واقعی سیستم در دسترس نباشد [۱۳]-[۲۲]. علاوه بر آن محدود کردن تعداد پارامترهای جدول‌بندی سیستم، می‌تواند استخراج یک مدل LPV در یک سیستم پیچیده‌ی غیرخطی عملی را با نامعینی همراه سازد [۲۳]-[۲۴]. از سوی دیگر، برای بازه‌ی وسیعی از پارامترهای جدول‌بندی یک کنترل‌کننده‌ی یکتا می‌تواند محافظه‌کاری جدی به نتایج طراحی تحمیل نماید و حتی به عدم جواب برای طراحی منجر شود. به همین علت کنترل‌کننده‌های کلیدزن برای سیستم‌های LPV گسترش داده شده‌اند [۲۵، ۲۶ و ۲۷]. اما باید توجه نمود که ممکن است در بازه‌ی وسیعی از تغییرات پارامترهای جدول‌بندی مدل‌های متفاوتی از سیستم حلقه‌باز استخراج شود. در حقیقت به دست آوردن یک مدل یکتا برای سیستم ممکن است شدنی نباشد یا به سخت‌گیری و حجم بالای نامعینی در مدل‌سازی بینجامد. واضح است هر چه مدل دقیق‌تری با کران نامعینی کوچک‌تری برای سیستم حلقه‌باز استخراج شود، میزان محافظه‌کاری و سخت‌گیری در طراحی کاهش می‌یابد و به عملکرد بهتری برای سیستم حلقه‌بسته منتهی می‌شود [۲۰] و [۲۳]. گرچه در پژوهش‌های [۲۶]-[۲۷] مدل LPV سیستم دارای کلیدزنی است؛ اما نامعینی به عنوان جز جدایی‌ناپذیر سیستم عملی مهندسی در نظر گرفته نشده است. از سوی دیگر این پژوهش‌ها به طراحی کنترل‌کننده با ساختار پس‌خورد حالت می‌پردازند؛ در حالی که به دلیل محدودیت‌های فیزیکی و عملی ممکن است کلیه‌ی حالت‌های سیستم برای استفاده در محاسبه‌ی قانون کنترل موجود نباشند. با تکیه بر مطالعات پیشین و با توجه به نیازهای کنونی، رویکردی روشمند جهت انجام طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی دینامیکی برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن پیوسته-زمان با وابستگی از درجه‌ی چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی ارائه نشده است و چالشی اساسی محسوب می‌شود.

بر همین اساس با توجه به فقدان تحقیقات مناسب در گذشته و نیاز جدی جامعه‌ی کنترلی، کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی دینامیکی کلیدزن مقاوم (RSGSOF) برای سیستم LPV نامعین دارای کلیدزنی در این مقاله در نظر گرفته شده است. ایده‌ی اصلی روش پیشنهادی این پژوهش بر دو نیاز عملی کنترلی استوار است که در مراجع پیشین مورد توجه نبوده است: یکی حضور نامعینی در مدل سیستم حلقه‌باز و دیگری داشتن مدل‌های متفاوت از سیستم LPV نامعین در نواحی مختلف پارامتری. فرض بر آن است که ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز کلیدزن دارای وابستگی چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی باشند که متغیر با زمان هستند. با تکیه بر منطق کلیدزنی هیسترزیس، یک سیستم کنترلی RSGSOF با هدف دست‌یابی به عملکرد مطلوب به دست آورده می‌شود. فرض بر آن است پارامترهای جدول‌بندی بتوانند با نرخ تغییرات زمانی دلخواه متغیر با زمان باشند. کنترل‌کننده‌ی مرتبه کامل پس‌خورد خروجی RSGSOF فقط به پارامترهای جدول‌بندی وابسته است؛ و از طرفی به مشتق زمانی آن‌ها و هم‌چنین پارامترهای نامعینی وابسته نیست. این کنترل‌کننده طی فرایند بهینه‌سازی نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) به کمک جستجوی خطی دو-بعدی به دست می‌آید. این سیستم کنترلی پایداری و حصول عملکرد خروجی مبتنی بر بهینه‌سازی (کمینه نمودن) نرم H_2 را تضمین می‌نماید. برای استخراج روابط طراحی کنترل‌کننده، خانواده‌ای از متغیرهای کمکی در قالب یک تبدیل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرند که مستقل از متغیرهای لیاپانوف هستند. روش بیان‌شده در طراحی سیستم کنترل مورد مطالعه‌ی عددی قرار گرفته است تا کاربردپذیری و میزان مؤثر بودن این رویکرد طراحی نشان داده شود. ارزیابی نتایج ردیابی فرمان‌های اعمالی به سیستم حلقه‌بسته، عملکرد مناسب این روش را تأیید می‌کند.

ساختار مقاله به این صورت است که پس از بیان مقدمه، در بخش ۲ مقدمات ریاضی آورده شده است. در این قسمت، زیربخش‌های نمادگذاری، تعریف‌های ضروری و لم‌های مورد نیاز آورده می‌شود. سپس در بخش بعدی مسئله‌ی مورد نظر تشریح شده است. در ادامه، طراحی سیستم کنترل در بخش ۴ انجام می‌شود. تبدیل مسئله‌ی طراحی به فرایند بهینه‌سازی حل نامساوی‌های ماتریسی خطی موضوع اصلی بخش ۵ است. در بخش ۶، مثال‌های عددی جهت انجام مقایسه و قابلیت‌های کاربردی روش پیشنهادی بیان شده‌اند. در پایان نیز نتیجه‌گیری و منابع موجود در این تحقیق آورده می‌شوند. در پیوست این مقاله نیز مقادیر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

عددی عناصر طراحی موجود در فضای حالت سیستم کنترلی در مثال عددی ۲ ارائه خواهند شد.

۲- معرفی مقدمات ریاضی

در این بخش ابتدا نمادهای مورد استفاده در این مقاله تعریف می‌شوند. سپس تعریف‌های مورد نیاز از جمله بهره‌ی عملکرد H_2 بیان خواهند شد. در انتها هم لم‌های مورد استفاده در طراحی ارائه می‌شوند.

۲-۱- نمادگذاری

نمادهای مورد استفاده در این پژوهش در زیر آورده شده است:

مجموعه اعداد حقیقی	$\Re$
مجموعه اعداد حقیقی مثبت	$\Re_+$
مجموعه بردارهای حقیقی با بعد n	$\Re^n$
مجموعه ماتریس‌های با ابعاد $n\times m$	$\Re^{n\times m}$
مجموعه ماتریس‌های متقارن $n\times n$	S^n
مجموعه ماتریس‌های متقارن مثبت معین $n\times n$	S_+^n
ترانهاده‌ی ماتریس X	X^T
بیان کوتاه عبارت $X+X^T$	$\langle X\rangle$
معکوس ماتریس X	X^{-1}
منفی (مثبت) معین بودن ماتریس $X-Y$	$X<Y (X>Y)$
ماتریس واحد با ابعاد مناسب	I
ماتریس صفر با ابعاد مناسب	0
مجموع عناصر قطری ماتریس X	$tr(X)$
الحاق قطری عناصر ورودی و غیرقطری صفر	$diag(.)$
عملگر امید ریاضی	$E\{.\}$
تابع ضربه‌ی دلتای دیراک	δ_d
مقدار کمینه‌ی (بهینه‌سازی) متغیر ورودی	$\min(.)$
نرخ (مشتق) زمانی سیگنال $x(t)$	$\dot{x}(t)$
بردار حالت‌های سیستم حلقه‌بسته	$x(t)$
بردار حالت‌های سیستم حلقه‌باز	$x_p(t)$
بردار حالت‌های سیستم کنترل	$x_c(t)$
بردار ورودی کنترل	$u(t)$
بردار اغتشاش خارجی	$w(t)$
بردار خروجی عملکردی	$z(t)$
بردار خروجی اندازه‌گیری	$y(t)$
بردار پارامترهای نامعینی	$\delta(t)$
بردار پارامترهای جدول‌بندی	$\theta(t)$
سیگنال کلیدزنی با مقادیر گسسته‌ی طبیعی	$\sigma(t)$
مجموعه اعداد طبیعی $\{1,2,\cdots,N\}$	Z_N
اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه	$A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B$

۲-۲- بیان تعریف‌ها

فضای حالت سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن را (با در نظر گرفتن نمادگذاری بخش قبل) به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G^\sigma(\theta,\delta):\begin{cases}\dot{x}=A^\sigma(\theta,\delta)x+B^\sigma(\theta,\delta)w\\ z=C^\sigma(\theta,\delta)x\end{cases} \quad (۱)$$

که در آن فرض کنید متغیر جدول‌بندی θ_i تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر بر حسب زمان با کران از پیش‌معین زیر در ناحیه‌ی j–ام $\theta\in\Theta^{(j)}$ باشد:

$$\Theta^{(j)}:=\left\{\theta\in\Re^s:\underline{\theta}_i^{(j)}\le\theta_i(t)\le\overline{\theta}_i^{(j)};\ i=1,\ldots,s\ ,\ j\in Z_N\right\} \quad (۲)$$

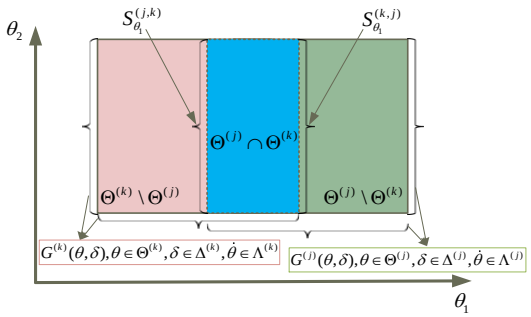
علاوه بر آن، برای پارامترهای نامعینی $\delta\in\Delta^{(j)}$ تصور نمایید که:

$$\Delta^{(j)}:=\left\{\delta\in\Re^{N_\delta}:\underline{\delta}_i^{(j)}\le\delta_i(t)\le\overline{\delta}_i^{(j)};\ i=1,\ldots,N_\delta\ ,\ j\in Z_N\right\} \quad (۳)$$

هم‌چنین برای محدوده‌ی تغییرات نرخ زمانی پارامترهای جدول‌بندی $\dot{\theta}\in\Lambda^{(j)}$ در رابطه‌ی (۴) به صورت زیر داریم:

$$\Lambda^{(j)}:=\left\{\dot{\theta}\in\Re^s:\underline{\omega}_i^{(j)}\le\dot{\theta}_i(t)\le\overline{\omega}_i^{(j)};\ i=1,\ldots,s\ ,\ j\in Z_N\right\} \quad (۴)$$

از سوی دیگر، $\sigma(\theta)\in Z_N$ سیگنال کلیدزنی با منطق کلیدزنی هیسترزیس است که دارای مقادیر گسسته‌ی طبیعی (عدد صحیح مثبت) بر حسب پارامترهای جدول‌بندی است. برای درک چگونگی کارکرد قانون کلیدزنی زمانی هیسترزیس، می‌توان شکل ۱ و توضیحات مربوط به آن را در ادامه ملاحظه نمود. تصور نمایید مجموعه‌ی Θ توسط سطوح کلیدزنی $S^{(j,k)}$ به تعداد N زیرناحیه‌ی $\left\{\Theta^{(j)}\right\}_{j\in Z_N}$ تقسیم‌بندی شود که در آن $Z_N:=\{1,2,\ldots,N-1,N\}$ است. این کار با تقسیم Θ_i (تصویر مجموعه‌ی Θ_i روی محور مختصات i–امین پارامتر جدول‌بندی) به N_i بازه با نواحی همپوشانی بین هر دو بازه‌ی مجاور صورت می‌گیرد که در آن داریم: $N=\prod_{i=1}^{s}N_i$، $\Theta=\bigcup_{j=1}^{N}\left\{\Theta^{(j)}\right\}_{j\in Z_N}$ و $\Delta=\bigcup_{j=1}^{N}\left\{\Delta^{(j)}\right\}_{j\in Z_N}$ و $\Lambda=\bigcup_{j=1}^{N}\left\{\Lambda^{(j)}\right\}_{j\in Z_N}$.



شکل ۱: تقسیم‌بندی Θ در قالب مجموعه‌ای دو-بعدی.

در شکل ۱ $S_{\theta_l}^{(j,k)}$ بیان‌گر سطح کلیدزنی بین دو ناحیه‌ی $\Theta^{(j)}$ و $\Theta^{(k)}$ در جهت پارامتر جدول‌بندی θ_1 است. اگر شرط (۵) برقرار بماند، آن‌گاه دو ناحیه‌ی $\Theta^{(j)}$ و $\Theta^{(k)}$ در جهت پارامتر جدول‌بندی θ_l مجاور هم هستند.

$$\mathrm{int}\left(\Theta^{(k)}\cap\Theta^{(j)}\right)\neq\varnothing,\ \ \Theta_{\theta_l}^{(k)}\neq\Theta_{\theta_l}^{(j)} \quad (۵)$$

که در آن $\Theta_{\theta_l}^{(j)}$ بیان‌گر تصویر ناحیه‌ی $\Theta^{(j)}$ روی محور θ_l و عملگر $\mathrm{int}(.)$ ناحیه‌ی داخلی یک مجموعه است. به عنوان مثال شکل ۱ را در

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

نظر بگیرید. در این شکل، طبق این تعریف دو ناحیه‌ی $\Theta^{(j)}$ و $\Theta^{(k)}$ در جهت پارامتر جدول‌بندی θ_1 مجاوراند.

در ادامه در طراحی سیستم کنترل معیار عملکردی بهره‌ی H_2 به صورت تعریف ۱ بیان می‌شود [۶].

تعریف ۱ (عملکرد H_2)- برای تمامی مقادیر مجاز $(\theta,\delta,\dot{\theta})$، قید بهره‌ی عملکردی H_2 در سیستم حلقه‌بسته‌ی (۱) با خروجی عملکردی $z(t)$ برای مقدار مثبت ν و ورودی اغتشاش $w(t)=w_0\delta_d(t)$ در رابطه‌ی (۶) تعریف می‌شود.

$$\sup_{\forall(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta\times\Delta\times\Lambda}\left(E\left\{\int_0^\infty z(t)^T z(t)dt\right\}\right)\le\nu^2 \qquad (۶)$$

که در آن داریم: $E\{w_0 w_0^T\}=I_{n_w}$.

۳-۲- لم‌های اساسی

در این قسمت لم‌های اساسی مورد نیاز برای فرایند طراحی بیان می‌شوند. برای جلوگیری از ایجاد غیرخطی‌گری متغیرهای طراحی به دلیل ضرب شدن این عامل‌ها در یکدیگر، لم ۱ را در نظر گرفته شده است. سپس در حالت غیرکلیدزن ($\sigma(t)\in Z_1$) مفاهیم تحلیل پایداری و تضمین قید عملکردی بهره‌ی H_2 در مرجع [۶] برای سیستم LPV نامعین بسط داده می‌شود. سپس به عنوان یکی از ابزارهای اساسی طراحی کنترل‌کننده برای سیستم LPV نامعین کلیدزن، لم ۳ جهت تضمین پایداری و قید عملکردی تعریف ۱ ارائه خواهد شد.

لم ۱ [۱۹]- برای ماتریس متقارن $\Pi^\sigma(\theta,\delta)$ و ماتریس‌های $\Psi_1^\sigma(\theta,\delta)$ ، $\Psi_2^\sigma(\theta,\delta)$ و $\Psi_3^\sigma(\theta,\delta)$ با ابعاد مناسب، اگر ماتریس مثبت معین $\Sigma^\sigma(\theta,\delta)$ که دارای ابعاد سازگار است موجود باشد به گونه‌ای که نامساوی (۸) برقرار بماند، آن‌گاه نامساوی (۷) برقرار می‌شود.

$$\Pi^\sigma(\theta,\delta)+\begin{bmatrix}0 & * & *\\ -\Psi_2^\sigma(\theta,\delta)^T\Psi_1^\sigma(\theta,\delta) & 0 & *\\ 0 & -\Psi_3^\sigma(\theta,\delta)^T\Psi_2^\sigma(\theta,\delta) & 0\end{bmatrix}>0 \qquad (۷)$$

$$\begin{bmatrix}\Pi^\sigma(\theta,\delta) & *\\ \begin{bmatrix}\Psi_1^\sigma(\theta,\delta) & \Sigma^\sigma(\theta,\delta)\Psi_2^\sigma(\theta,\delta) & \Psi_3^\sigma(\theta,\delta)\end{bmatrix} & \Sigma^\sigma(\theta,\delta)\end{bmatrix}>0 \qquad (۸)$$

نکته ۱: برای سیستم LPV نامعین غیرکلیدزن لم ۲ با استفاده از تحقیق [۶] بسط و توسعه می‌یابد. برای این حالت با در نظر گرفتن $\sigma=1$ فرض نمایید در مدل فضای حالت (۱) ماتریس‌های سه‌گانه‌ی حلقه‌بسته‌ی $\left(A^\sigma(\theta,\delta),B^\sigma(\theta,\delta),C^\sigma(\theta,\delta)\right)$ با عناصر نوع غیرکلیدزن $\left(A(\theta,\delta),B(\theta,\delta),C(\theta,\delta)\right)$ در ناحیه‌ی یکتای $\theta\in\Theta$ جایگزین شوند. با تکیه بر مفاهیم لم۲، برای بخش طراحی لم ۳ استخراج می‌گردد.

لم ۲ [۶]- به ازای مقدار مثبت داده شده‌ی ν، فرض کنید ماتریس پیوسته‌ی مشتق‌پذیر وابسته به پارامتر $P(\theta)\in S^{2n}$ و ماتریس $H(\theta)\in S^{n_w}$ موجود باشند، به گونه‌ای که شرایط (۹)-(۱۲) در زیر برقرار گردند:

$$P(\theta)>0,\forall\theta\in\Theta \qquad (۹)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{P}(\theta)-\langle A(\theta,\delta)P(\theta)\rangle & *\\ -C(\theta,\delta)P(\theta) & I_{n_z}\end{bmatrix}>0,\ \forall(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta\times\Delta\times\Lambda \qquad (۱۰)$$

$$\begin{bmatrix}P(\theta) & *\\ B(\theta,\delta)^T & H(\theta)\end{bmatrix}>0,\ \forall(\theta,\delta)\in\Theta\times\Delta \qquad (۱۱)$$

$$tr\left(H(\theta)\right)<\nu^2,\ \forall\theta\in\Theta \qquad (۱۲)$$

آن‌گاه سیستم حلقه‌بسته‌ی موجود در رابطه‌ی (۱) با $\sigma=1$ (نوع غیرکلیدزن) پایدار نمایی می‌شود و شرط بهره‌ی عملکردی H_2 در قید (۶) با سطح کمینه‌ی ν به ازای $\forall(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta\times\Delta\times\Lambda$ برقرار خواهد شد.

لم ۳- به ازای مقدار مثبت داده شده‌ی ν و تمامی مقادیر $j\neq k\in Z_N$ ، فرض کنید خانواده‌ای از ماتریس‌های پیوسته‌ی مشتق‌پذیر وابسته به پارامتر $P^{(j)}(\theta)\in S^{2n}$ ، ماتریس‌های $G^{(j)}(\theta)\in\Re^{2n\times 2n}$ و $H^{(j)}(\theta)\in S^{n_w}$ و هم‌چنین مقدار عددی $\lambda\in\Re_+$ موجود باشند، به گونه‌ای که شرایط (۱۳)-(۱۷) در زیر برقرار گردند:

$$P^{(j)}(\theta)>0,\forall\theta\in\Theta^{(j)} \qquad (۱۳)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{P}^{(j)}(\theta)-\langle A^{(j)}(\theta,\delta)F^{(j)}(\theta)\rangle & * & *\\ -C^{(j)}(\theta,\delta)F^{(j)}(\theta) & I_{n_z} & *\\ \begin{Bmatrix}G^{(j)}(\theta)-P^{(j)}(\theta)-\\ \lambda F^{(j)}(\theta)^T A^{(j)}(\theta,\delta)^T\end{Bmatrix} & -\lambda F^{(j)}(\theta)^T C^{(j)}(\theta,\delta)^T & \lambda\langle F^{(j)}(\theta)\rangle\end{bmatrix}>0,\ \forall(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta^{(j)}\times\Delta^{(j)}\times\Lambda^{(j)} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{bmatrix}P^{(j)}(\theta) & *\\ B^{(j)}(\theta,\delta)^T & H^{(j)}(\theta)\end{bmatrix}>0,\ \forall(\theta,\delta)\in\Theta^{(j)}\times\Delta^{(j)} \qquad (۱۵)$$

$$tr\left(H^{(j)}(\theta)\right)<\nu^2,\ \forall\theta\in\Theta^{(j)} \qquad (۱۶)$$

$$\begin{bmatrix}P^{(j)}(\theta) & *\\ P^{(j)}(\theta) & P^{(k)}(\theta)\end{bmatrix}\ge 0,\ \forall\theta\in S^{(j,k)},\ j\neq k\in Z_N \qquad (۱۷)$$

آن‌گاه سیستم حلقه‌بسته در رابطه‌ی (۱) با قانون کلیدزنی هیسترزیس پایدار نمایی می‌شود و شرط بهره‌ی عملکردی H_2 در قید (۶) با سطح کمینه‌ی ν به ازای $\forall(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta\times\Delta\times\Lambda$ برقرار خواهد شد.

اثبات لم ۱- با ضرب نامساوی (۱۱) از سمت چپ در ماتریس غیرتکین (رتبه کامل ردیفی)

$$\begin{bmatrix}I_{2n+n_z}\\ A^{(j)}(\theta,\delta)^T & C^{(j)}(\theta,\delta)^T\end{bmatrix}^T \qquad (۱۸)$$

و ترانهاده‌ی آن (رتبه کامل ستونی) از سمت راست داریم:

$$\begin{bmatrix}\dot{P}^{(j)}(\theta)-\langle A^{(j)}(\theta,\delta)P^{(j)}(\theta)\rangle & *\\ -C^{(j)}(\theta,\delta)P^{(j)}(\theta) & I_{n_z}\end{bmatrix}>0,\quad \forall(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta^{(j)}\times\Delta^{(j)}\times\Lambda^{(j)} \qquad (۱۹)$$

حال با تکیه بر نتیجه به دست آمده و در نظر گرفتن لم ۲ از پژوهش [۶] برای تضمین پایداری و عملکرد H_2 در قالب حل LMI، با برقراری

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

شرایط موجود در (۱۳)-(۱۶)، پایداری نمایی و شرط بهره‌ی عملکردی (۶) برای سیستم حلقه‌بسته‌ی کلیدزن (۱) تضمین می‌شود. اما برای توابع چندگانه‌ی لیاپانوف سیستم حلقه‌بسته $V_{cl}^{\sigma}(x)=x^T P^{\sigma}(\theta)^{-1}x$ جهت تضمین پایداری باید شرط غیرافزایشی بودن آن‌ها در لحظات کلیدزنی در سطوح $S^{(j,k)}(\theta)$ تأیید گردد؛ یعنی $V_{cl}^{(k)}(x(t^+))\le V_{cl}^{(j)}(x(t))$ (سیگنال $\sigma(t^+)$ حد زمانی سمت راست σ در لحظه‌ی t است). بنابراین در تغییر از مجموعه پارامترهای جدول‌بندی از $\Theta^{(j)}$ به $\Theta^{(k)}$ باید شرط $P^{(k)}(\theta)^{-1}\le P^{(j)}(\theta)^{-1}$ با توجه به قانون کلیدزنی هیسترزیس برقرار بماند. به کمک لم مکمل شر داریم:

$$\begin{bmatrix} P^{(j)}(\theta)^{-1} & * \\ I & P^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \ge 0,\ \forall \theta \in S^{(j,k)},\ j\ne k\in Z_N \qquad (۲۰)$$

متعاقباً با ضرب رابطه‌ی (۲۰) از سمت چپ در $diag\left(P^{(j)}(\theta),I\right)$ و از سمت راست در ترانهاده‌ی آن، در نهایت رابطه‌ی (۱۷) به دست می‌آید که منتهی به تأیید شرط $V_{cl}^{(k)}(x(t^+))\le V_{cl}^{(j)}(x(t))$ در لحظات کلیدزنی $S^{(j,k)}(\theta)$ خواهد شد و اثبات تکمیل می‌شود.

۳- بیان مسئله

مدل فضای حالت سیستم حلقه‌باز پارامتر متغیر خطی نامعین دارای کلیدزنی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G_p^{\sigma}(\theta(t),\delta(t)):\begin{cases}\dot{x}_p = A_p^{\sigma}(\theta,\delta)x_p + B_w^{\sigma}(\theta,\delta)w + B_u^{\sigma}(\theta,\delta)u\\ z = C_z^{\sigma}(\theta,\delta)x_p + D_{zu}^{\sigma}(\theta,\delta)u\\ y = C_y^{\sigma}(\theta)x_p + D_{yw}^{\sigma}(\theta,\delta)w\end{cases} \qquad (۲۱)$$

که در آن $x_p(t)\in\Re^n$، $u(t)\in\Re^{n_u}$، $w(t)\in\Re^{n_w}$ و $y(t)\in\Re^{n_y}$ قبلاً در بخش نمادگذاری معرفی شدند. $z(t)\in\Re^{n_z}$ بردار پارامترهای نامعینی غیرقابل $\delta(t):=\left[\delta_1(t)\ \cdots\ \delta_{N_\delta}(t)\right]^T\in\Re^{N_\delta}$ اندازه‌گیری متغیر با زمان، $\theta(t):=\left[\theta_1(t)\ \cdots\ \theta_s(t)\right]\in\Re^s$ بردار پارامترهای جدول‌بندی در دسترس زمان-حقیقی هستند. ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز با داشتن ابعاد مناسب دارای وابستگی چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و هم‌چنین متغیرهای نامعینی هستند. برای ماتریس‌های فضای حالت $M^{\sigma}(\theta,\delta)$ داریم:

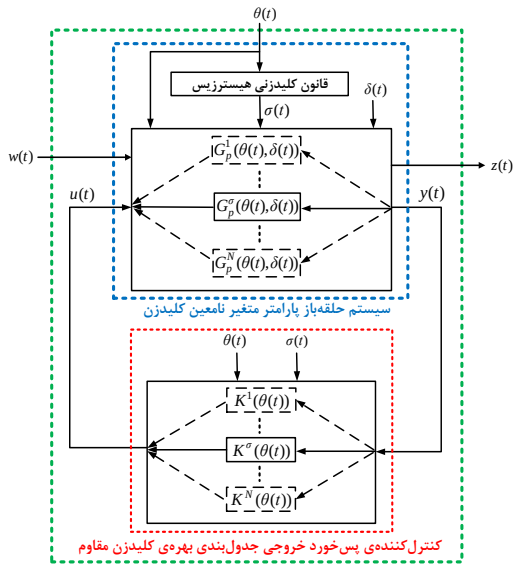
$$M^{\sigma}(\theta,\delta)=\sum_{k=1}^{k_M^{\sigma}}\theta_1^{a_{k1}^{\sigma}}\cdots\theta_s^{a_{ks}^{\sigma}}\delta_1^{b_{k1}^{\sigma}}\cdots\delta_{N_\delta}^{b_{kN_\sigma}^{\sigma}}M_k^{\sigma} \qquad (۲۲)$$

که در آن M_k^{σ} ماتریس‌های حقیقی مستقل از پارامتر و هم‌چنین a_{ki}^{σ} و b_{ki}^{σ} بیان‌گر مقادیر صحیح غیرمنفی هستند. در این مقاله جهت ایجاد سادگی در انجام فرایند طراحی، فرض بر آن است ماتریس‌های $C_y^{\sigma}(\theta)$ مستقل از پارامترهای نامعینی باشند؛ یعنی برای هر مقدار σ، i، و k داریم: $b_{ki}^{\sigma}=0$. از سوی دیگر، سیگنال $\sigma(\theta)\in Z_N$ تعیین‌کننده‌ی زیرسیستم حلقه‌باز فعال‌شده برای یک ناحیه‌ی جدول‌بندی محلی مفروض است که قبلاً معرفی شد.

در این مقاله، هدف طراحی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کامل جدول‌بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی کلیدزن برای سیستم حلقه‌باز LPV نامعین کلیدزن (۲۱) است؛ به گونه‌ای که پایداری نمایی و سطح کمینه‌ی بهره‌ی عملکردی H_2 طبق قید (۶) به ازای تمامی مقادیر مجاز پارامترهای جدول‌بندی و متغیرهای نامعینی تضمین شود. ساختار کنترلی پس‌خورد خروجی کلیدزن RSGSOF، شامل خانواده‌ای از کنترل‌کننده‌های دینامیکی مرتبه کامل پس‌خورد خروجی (RGSOF) است. آرایش فضای حالت دینامیکی مرتبه کامل آن در رابطه‌ی (۲۳) داده شده است.

$$K^{\sigma}(\theta(t)):\begin{cases}\dot{x}_c = A_c^{\sigma}(\theta)x_c + B_c^{\sigma}(\theta)y\\ u = C_c^{\sigma}(\theta)x_c\end{cases} \qquad (۲۳)$$

که در آن $x_c\in\Re^n$. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود ماتریس‌های کنترل‌کننده $\left(A_c^{\sigma}(\theta(t)),B_c^{\sigma}(\theta(t)),C_c^{\sigma}(\theta(t))\right)$ برای هر مقدار $\sigma\in Z_N$ به پارامترهای جدول‌بندی اندازه‌گیری $\theta(t)$ وابسته هستند و به مقادیر پارامترهای نامعینی یعنی $\delta(t)$ وابسته نیستند. سرانجام با اعمال کنترل‌کننده‌ی کلیدزن (۲۳)، یک سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن در آرایش موجود در رابطه‌ی (۱) با قانون کلیدزنی هیسترزیس و سیگنال کلیدزنی σ به دست می‌آید که در آن $x:=\left[x_p^T\ \ x_c^T\right]^T\in\Re^{2n}$. نمایی از سیستم حلقه‌بسته در شکل ۲ آورده شده است. ماتریس‌های سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن (۱) در رابطه‌ی (۲۴) داده شده‌اند.



شکل ۲: سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

$$A^{\sigma}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix} A_p^{\sigma}(\theta,\delta) & B_u^{\sigma}(\theta,\delta)C_c^{\sigma}(\theta) \\ B_c^{\sigma}(\theta)C_y^{\sigma}(\theta) & A_c^{\sigma}(\theta) \end{bmatrix},$$
$$B^{\sigma}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix} B_w^{\sigma}(\theta,\delta) \\ B_c^{\sigma}(\theta)D_{yw}^{\sigma}(\theta,\delta) \end{bmatrix}, \quad (۲۴)$$
$$C^{\sigma}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix} C_z^{\sigma}(\theta,\delta) & D_{zu}^{\sigma}(\theta,\delta)C_c^{\sigma}(\theta) \end{bmatrix}$$

٤- طراحی

پس از بیان مسئله و استفاده از مقدمات ریاضی گفته‌شده در بخش‌های قبلی، طراحی سیستم کنترل پیشنهادی در این قسمت آورده شده است.

قضیه ۱- به ازای مقدار عددی $\nu\in\Re_+$ و $j\neq k\in Z_N$ ، فرض کنید خانواده‌ای از ماتریس‌های وابسته به پارامتر $L_1^{(j)}(\theta)\in\Re^{n\times n}$ ، $L_2^{(j)}(\theta)\in\Re^{n\times n_y}$ ، $L_3^{(j)}(\theta)\in\Re^{n_u\times n}$ ، $X^{(j)}(\theta)\in\Re^{n\times n}$ ، $W^{(j)}(\theta)\in\Re^{n_w\times n}$ ، $H^{(j)}(\theta)\in S_+^{n_w}$ ، $P_3^{(j)}(\theta)\in S_+^{n}$ ، $P_2^{(j)}(\theta)\in\Re^{n\times n}$ ، $P_1^{(j)}(\theta)\in S_+^{n}$ ، $\Sigma^{\sigma}(\theta,\delta)\in S_+^{n}$ ، ماتریس مستقل از پارامتر $Y\in\Re^{n\times n}$ و مقدار عددی مثبت λ وجود داشته باشند، به گونه‌ای که شرایط (۲۵)-(۲۸) و شرط کلیدزنی (۲۹) برقرار باشند، آن‌گاه کنترل‌کننده‌ی (۲۳) که ماتریس‌های فضای حالت آن در (۳۳) محاسبه شده‌اند، سیستم حلقه‌بسته‌ی (۱) را پایدار نمایی می‌نماید و مقدار کمینه‌ی ν را برای بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی طبق قید (۶) در کل نواحی $(\theta,\delta,\dot\theta)\in\Theta\times\Delta\times\Lambda$ تضمین می‌کند.

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}\theta) \end{bmatrix}>0,\ \forall\theta\in\Theta^{(j)} \quad (۲۵)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi^{(j)}(\theta,\delta) & * \\ \begin{bmatrix}\Psi_1^{(j)}(\theta,\delta) & \Sigma^{(j)}(\theta,\delta)\Psi_2^{(j)}(\theta,\delta) & \Psi_3^{(j)}(\theta,\delta)\end{bmatrix} & \Sigma^{(j)}(\theta,\delta) \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$
$$>0,\ \forall(\theta,\delta,\dot\theta)\in\Theta^{(j)}\times\Delta^{(j)}\times\Lambda^{(j)}$$

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & * \\ B_w^{(j)}(\theta,\delta)^T & \left(YB_w^{(j)}(\theta,\delta)+L_2^{(j)}(\theta)D_{yw}^{(j)}(\theta,\delta)\right)^T & H^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (۲۷)$$
$$>0,\ \forall(\theta,\delta)\in\Theta^{(j)}\times\Delta^{(j)}$$

$$tr(H^{(j)}(\theta))<\nu^2,\ \forall\theta\in\Theta^{(j)} \quad (۲۸)$$

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * & * & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & * & * \\ P_1^{(j)}(\theta) & P_2^{(j)}(\theta)^T & P_1^{(k)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & P_2^{(k)}(\theta) & P_3^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$
$$\geq 0,\ \forall\theta\in S^{(j,k)},\ j\neq k\in Z_N$$

که در آن:

$$\Pi^{(j)}(\theta,\delta):=\begin{bmatrix} \Pi_{11}^{(j)} & * & * & * & * \\ \Pi_{21}^{(j)} & \Pi_{22}^{(j)} & * & * & * \\ \Pi_{31}^{(j)} & -C_z^{(j)}(\theta,\delta) & I_{n_z} & * & * \\ \Pi_{41}^{(j)} & \Pi_{42}^{(j)} & \Pi_{43}^{(j)} & \lambda\langle X^{(j)}(\theta)\rangle & * \\ \Pi_{51}^{(j)} & \Pi_{52}^{(j)} & -\lambda C_z^{(j)}(\theta,\delta)^T & \Pi_{54}^{(j)} & \lambda\langle Y\rangle \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

با عناصر:

$$\Pi_{11}^{(j)}(\theta,\delta):=\dot P_1^{(j)}(\theta)-\left\langle A_p^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+B_u^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta)\right\rangle,$$
$$\Pi_{21}^{(j)}(\theta,\delta):=\dot P_2^{(j)}(\theta)-L_1^{(j)}(\theta)-A_p^{(j)}(\theta,\delta)^T,$$
$$\Pi_{31}^{(j)}(\theta,\delta):=-C_z^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)-D_{zu}^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta),$$
$$\Pi_{41}^{(j)}(\theta,\delta):=X^{(j)}(\theta)-P_1^{(j)}(\theta)-\lambda\left(A_p^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+B_u^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta)\right)^T,$$
$$\Pi_{51}^{(j)}(\theta,\delta):=W^{(j)}(\theta)-P_2^{(j)}(\theta)-\lambda A_p^{(j)}(\theta,\delta)^T,$$
$$\Pi_{22}^{(j)}(\theta,\delta):=\dot P_3^{(j)}(\theta)-\left\langle YA_p^{(j)}(\theta,\delta)+L_2^{(j)}(\theta)C_y^{(j)}(\theta)\right\rangle,$$
$$\Pi_{42}^{(j)}(\theta,\delta):=I_n-P_2^{(j)}(\theta)-\lambda L_1^{(j)}(\theta)^T,$$
$$\Pi_{52}^{(j)}(\theta,\delta):=Y-P_3^{(j)}(\theta)-\lambda\left(YA_p^{(j)}(\theta,\delta)+L_2^{(j)}(\theta)C_y^{(j)}(\theta)\right)^T,$$
$$\Pi_{43}^{(j)}(\theta,\delta):=-\lambda\left(C_z^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+D_{zu}^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta)\right)^T,$$
$$\Pi_{54}^{(j)}(\theta,\delta):=\lambda\left(W^{(j)}(\theta)+I_n\right) \quad (۳۱)$$

و هم‌چنین:

$$\Psi_1^{(j)}(\theta,\delta):=\Delta A_p^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+\Delta B_u^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta),$$
$$\Psi_2^{(j)}(\theta,\delta):=Y^T,$$
$$\Psi_3^{(j)}(\theta,\delta):=\begin{bmatrix} 0_{n\times n_z} & \lambda\begin{Bmatrix}\Delta A_p^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+\\ \Delta B_u^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta)\end{Bmatrix} & 0_{n\times n}\end{bmatrix}, \quad (۳۲)$$
$$\Delta A_p^{(j)}(\theta,\delta):=A_p^{(j)}(\theta,\delta)-A_p^{(j)}(\theta),$$
$$\Delta B_u^{(j)}(\theta,\delta):=B_u^{(j)}(\theta,\delta)-B_u^{(j)}(\theta)$$

ماتریس‌های فضای حالت کنترل‌کننده‌ی پس‌خورد خروجی دینامیکی مرتبه کامل جدول‌بندی بهره‌ی کلیدزن (RSGSOF) به کمک رابطه‌ی (۳۳) به دست آورده می‌شوند.

$$\begin{cases} A_c^{(j)}(\theta)=V^{-1}\left(L_1^{(j)}(\theta)-YA_p^{(j)}(\theta)X^{(j)}(\theta)-YB_u^{(j)}(\theta)L_3^{(j)}(\theta)-\right. \\ \left.L_2^{(j)}(\theta)C_y^{(j)}(\theta)X^{(j)}(\theta)\right)U^{(j)}(\theta)^{-1}, \\ B_c^{(j)}(\theta)=V^{-1}L_2^{(j)}(\theta), \\ C_c^{(j)}(\theta)=L_3^{(j)}(\theta)U^{(j)}(\theta)^{-1} \end{cases} \quad (۳۳)$$

که در آن ماتریس دلخواه V دارای رتبه‌ی کامل است. هم‌چنین ماتریس‌های معکوس‌پذیر $U^{(j)}(\theta)$ با استفاده از رابطه‌ی $U^{(j)}(\theta)=V^{-1}\left(W^{(j)}(\theta)-YX^{(j)}(\theta)\right)$ محاسبه می‌شوند.

اثبات قضیه ۱- با تکیه بر لم ۳ اگر روابط (۱۳)-(۱۷) برقرار باشند، آن‌گاه علاوه بر پایداری نمایی، یک مقدار کمینه برای کران بالای عملکرد بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی برابر ν در سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن (۱) تضمین می‌شود. در ادامه نشان داده می‌شود اگر شرایط (۲۵)-(۲۹) برقرار باشند، به برقراری نامساوی‌های (۱۳)-(۱۷) منجر خواهند شد. با توسعه‌ی مفاهیم [۱۱]، [۱۸] و منابع موجود در آن‌ها در حالت کلیدزن، ماتریس کمکی $F^{(j)}(\theta)$ و معکوس آن $F^{(j)}(\theta)^{-1}$ به صورت زیر تعریف (بخش‌بندی) شده‌اند:

$$F^{(j)}(\theta):=\begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & Z_1^{(j)}(\theta) \\ U^{(j)}(\theta) & Z_2^{(j)}(\theta) \end{bmatrix},\ F^{(j)}(\theta)^{-1}:=\begin{bmatrix} Y^{(j)}(\theta) & Z_3^{(j)}(\theta) \\ V^{(j)}(\theta) & Z_4^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

که در آن برای $j\in Z_N$ داریم:
$U^{(j)}(\theta),Y^{(j)}(\theta),V^{(j)}(\theta),X^{(j)}(\theta),Z_1^{(j)}(\theta),Z_2^{(j)}(\theta),Z_3^{(j)}(\theta),Z_4^{(j)}(\theta)\in\Re^{n\times n}$.

با برقراری رابطه‌ی $F^{(j)}(\theta)F^{(j)}(\theta)^{-1}=I$ می‌توان گفت:

$$Z_1^{(j)}(\theta)=\left(V^{(j)}(\theta)^T\right)^{-1}-X^{(j)}(\theta)Y^{(j)}(\theta)^T\left(V^{(j)}(\theta)^T\right)^{-1},$$
$$Z_2^{(j)}(\theta)=-U^{(j)}(\theta)Y^{(j)}(\theta)^T\left(V^{(j)}(\theta)^T\right)^{-1} \quad (۳۵)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

حال به علتی که در ادامه گفته خواهد شد، مشابه مراجع [۱۷]، [۱۹]-[۲۰] جهت ایجاد سادگی در بیان شرایط طراحی ماتریس‌های $V^{(j)}(\theta)$ و $Y^{(j)}(\theta)$ مستقل از پارامتر و غیرکلیدزن در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه داریم:

$$F^{(j)}(\theta):=\begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & \left(V^T\right)^{-1}-X^{(j)}(\theta)Y^T\left(V^T\right)^{-1} \\ U^{(j)}(\theta) & -U^{(j)}(\theta)Y^T\left(V^T\right)^{-1} \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

اکنون ماتریس مستقل از پارامتر Q (غیرتکین و رتبه کامل) برای استفاده در تبدیل متجانس به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$Q:=\begin{bmatrix} I_n & Y^T \\ 0_{n\times n} & V^T \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

حال با اعمال تبدیل متجانس روی نامساوی‌های (۱۳)-(۱۵) و (۱۷) به ترتیب با Q، $diag(Q,I)$ ، $diag(Q,I,Q)$ و $diag(Q,Q)$ می‌توان شرایطی را برای کل نواحی تغییرات $(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta\times\Delta\times\Lambda$ استخراج نمود که در ادامه آورده شده‌اند:

$$Q^TP^{(j)}(\theta)Q>0,\forall\theta\in\Theta^{(j)} \quad (۳۸)$$

$$\begin{bmatrix} Q^T\left\{\dot{P}^{(j)}(\theta)-\left\langle A^{(j)}(\theta,\delta)F^{(j)}(\theta)\right\rangle\right\}Q & * & * \\ -C^{(j)}(\theta,\delta)F^{(j)}(\theta)Q & I_{n_z} & * \\ Q^T\left\{F^{(j)}(\theta)-P^{(j)}(\theta)-\lambda F^{(j)}(\theta)^TA^{(j)}(\theta,\delta)^T\right\}Q & \left\{-\lambda Q^TF^{(j)}(\theta)^T\times C^{(j)}(\theta,\delta)^T\right\} & \lambda\left\langle Q^TF^{(j)}(\theta)Q\right\rangle \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$
$$>0,\forall(\theta,\delta,\dot{\theta})\in\Theta^{(j)}\times\Delta^{(j)}\times\Lambda^{(j)}$$

$$\begin{bmatrix} Q^TP^{(j)}(\theta)Q & * \\ B^{(j)}(\theta,\delta)^TQ & H^{(j)}(\theta) \end{bmatrix}>0,\ \forall(\theta,\delta)\in\Theta^{(j)}\times\Delta^{(j)} \quad (۴۰)$$

$$\begin{bmatrix} Q^TP^{(j)}(\theta)Q & * \\ Q^TP^{(j)}(\theta)Q & Q^TP^{(k)}(\theta)Q \end{bmatrix}\geq 0,\ \forall\theta\in S^{(j,k)},\ j\neq k\in Z_N \quad (۴۱)$$

بنابراین اگر نامساوی‌های (۳۸)-(۴۱) و (۱۶) برقرار باشند، پایداری نمایی و یک مقدار کمینه‌ی کران بالای بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی برابر ν طبق قید (۶) برای سیستم حلقه‌بسته‌ی (۱) تضمین می‌شود. حال تعریف نمایید:

$$Q^TP^{(j)}(\theta)Q:=\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (۴۲)$$

به کمک رابطه‌ی (۴۲)، شرط (۲۵) به دست می‌آید که معادل روابط (۱۳) و (۳۸) است. از طرفی مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۴۲) به رابطه‌ی (۴۳) می‌انجامد.

$$Q^T\dot{P}^{(j)}(\theta)Q=\begin{bmatrix} \dot{P}_1^{(j)}(\theta) & * \\ \dot{P}_2^{(j)}(\theta) & \dot{P}_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (۴۳)$$

لازم به ذکر است تأکید شود که رابطه‌ی (۴۳) صرفاً هنگامی برقرار است که ماتریس Q مستقل از پارامتر باشد. این همان دلیلی است که در بخش قبلی اثبات قضیه‌ی ۱ در رابطه‌ی (۳۷) برای ماتریس همانندی Q تذکر داده شد. در حقیقت، این همان فلسفه‌ی در نظر گرفتن ماتریس‌های V و Y به صورت مستقل از پارامتر است. علاوه بر آن با پذیرفتن مقداری محافظه‌کاری جهت ایجاد سادگی در انجام محاسبات رابطه‌ی (۲۹) به کمک (۴۱) این ماتریس مشترک و غیرکلیدزن در نظر گرفته می‌شود. این رویکرد با الهام از تحقیق‌های موجود در مراجع [۱۸]-[۲۰] و بسط آن‌ها در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. علاوه بر آن، یک تبدیل غیرخطی در آرایش (۴۴) به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} L_1^{(j)}(\theta) & L_2^{(j)}(\theta) \\ L_3^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}A_p^{(j)}(\theta)\begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix} V & Y^TB_u^{(j)}(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix}K_c^{(j)}(\theta)\begin{bmatrix} U^{(j)}(\theta) & 0 \\ C_y^{(j)}(\theta)X^{(j)}(\theta) & I \end{bmatrix}, \quad (۴۴)$$
$$W^{(j)}(\theta):=YX^{(j)}(\theta)+VU^{(j)}(\theta)$$

که در آن برای $K_c^{(j)}(\theta)$ داریم:

$$K_c^{(j)}(\theta):=\begin{bmatrix} A_c^{(j)}(\theta) & B_c^{(j)}(\theta) \\ C_c^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (۴۵)$$

و ماتریس‌های $B_u^{(j)}(\theta)$ و $A_p^{(j)}(\theta)$ به ترتیب از جایگذاری بردار صفر ($\{\delta_i=0,\forall i\in\{1,...,N_\delta\}$) به جای δ در متغیرهای $B_u^{(j)}(\theta,\delta)$ و $A_p^{(j)}(\theta,\delta)$ برای $j\in Z_N$ حاصل می‌شوند. از تعریف متغیر کمکی $F^{(j)}(\theta)$ در رابطه‌ی (۳۴) به راحتی می‌توان گفت:

$$Q^TF^{(j)}(\theta)Q=\begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & I \\ W^{(j)}(\theta) & Y \end{bmatrix} \quad (۴۶)$$

از سوی دیگر، پس از انجام مقداری محاسبات جبری به راحتی می‌توان گفت که:

$$Q^TA^{(j)}(\theta,\delta)F^{(j)}(\theta)Q=$$
$$\begin{bmatrix} \left\{A_p^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+B_u^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta)\right\} & A_p^{(j)}(\theta,\delta) \\ L_1^{(j)}(\theta) & \left\{YA_p^{(j)}(\theta,\delta)+L_2^{(j)}(\theta)C_y^{(j)}(\theta)\right\} \end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & L_2^{(j)}(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_p^{(j)}(\theta,\delta)-A_p^{(j)}(\theta) & B_u^{(j)}(\theta,\delta)-B_u^{(j)}(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\times \quad (۴۷)$$
$$\begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & 0 \\ L_3^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix},\ Q^TB^{(j)}(\theta,\delta)=$$
$$\begin{bmatrix} B_w^{(j)}(\theta,\delta) \\ YB_w^{(j)}(\theta,\delta)+L_2^{(j)}(\theta)D_{yw}^{(j)}(\theta,\delta) \end{bmatrix},$$
$$C^{(j)}(\theta,\delta)F^{(j)}(\theta)Q=$$
$$\begin{bmatrix} C_z^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+D_{zu}^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta) & C_z^{(j)}(\theta,\delta) \end{bmatrix}$$

سرانجام با جایگذاری روابط (۴۲)-(۴۷) در (۳۹)، شرط زیر پس از مقداری محاسبه‌ی جبری حاصل می‌شود:

$$\Pi^{(j)}(\theta,\delta)+$$
$$\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & * & * & * & * \\ -\Phi^{(j)}(\theta,\delta) & 0_{n\times n} & * & * & * \\ 0_{n_z\times n} & 0_{n_z\times n} & 0_{n_z\times n_z} & * & * \\ 0_{n\times n} & -\lambda\Phi^{(j)}(\theta,\delta)^T & 0_{n\times n_z} & 0_{n\times n} & * \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n_z} & 0_{n\times n_z} & 0_{n\times n_z} \end{bmatrix}<0 \quad (۴۸)$$

که در آن داریم:

$$.\Phi^{(j)}(\theta,\delta):=Y\Delta A_p^{(j)}(\theta,\delta)X^{(j)}(\theta)+Y\Delta B_u^{(j)}(\theta,\delta)L_3^{(j)}(\theta)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

توجه نمایید که ماتریس‌های $\Delta A_p^{(j)}(\theta,\delta)$ و $\Delta B_u^{(j)}(\theta,\delta)$ در رابطه‌ی (۳۲) داده شده‌اند. با توجه به رابطه‌ی (۴۸) و شکل نامساوی (۷) در لم ۱ می‌توان گفت:

$$\Psi_2^{(j)}(\theta,\delta)^T\Psi_1^{(j)}(\theta,\delta)=\Phi^{(j)}(\theta,\delta),$$
$$\Psi_3^{(j)}(\theta,\delta)^T\Psi_2^{(j)}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix}0_{n_z\times n}\\ \lambda\Phi^{(j)}(\theta,\delta)^T\\ 0_{n\times n}\end{bmatrix} \qquad (۴۹)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود ضرب عوامل طراحی در شرایط استخراج کنترل‌کننده ایجاد غیرخطی‌گری می‌نماید. برای حل چنین مشکلی، با انتخاب متغیرهای موجود در رابطه‌ی (۳۲) در بالا و به کمک لم ۱ می‌توان به این مسئله صحه گذاشت که اگر رابطه‌ی (۲۶) برقرار باشد، آن‌گاه نامساوی (۴۸) برقرار می‌شود که معادل شرط (۳۹) و نیز رابطه‌ی (۱۴) از لم ۳ است. هم‌چنین با جایگذاری (۴۲) و (۴۷) در روابط (۲۷) و (۲۹) به ترتیب نامساوی‌های (۴۰) و (۴۱) به دست آورده خواهند شد که معادل رابطه‌های (۲۷) و (۲۹) هستند.

به عنوان جمع‌بندی، می‌توان این‌گونه بیان نمود که اگر (۲۵)-(۲۹) برقرار باشند، آن‌گاه رابطه‌های (۱۳)- (۱۷) برقرار می‌شوند که به تضمین پایداری نمایی و حاصل نمودن یک مقدار کمینه‌ی کران بالای بهره‌ی H_2 برابر ν برای خروجی عملکردی سیستم حلقه‌بسته‌ی (۱) منتهی می‌گردد. توجه نمایید رابطه‌ی فضای حالت سیستم کنترل‌کننده در (۳۳) از معکوس رابطه‌ی غیرخطی (۴۴) استخراج می‌شود. در ادامه در روابط استخراج ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی در (۳۳) باید معکوس‌پذیری ماتریس‌های V و $U^{(j)}(\theta)$ اثبات شود. لازم به ذکر است ماتریس V می‌تواند یک ماتریس رتبه‌ی کامل دلخواه و مستقل از پارامتر که به عنوان مثال به صورت I_n در نظر گرفته شود. اما در مورد $U^{(j)}(\theta)$ باید این مسئله مورد بررسی قرار گیرد. طبق شرط (۲۶) باید نامساوی مثبت معین (۵۰) برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix}\langle X^{(j)}(\theta)\rangle & *\\ W^{(j)}(\theta)+I_n & \langle Y\rangle\end{bmatrix}>0 \qquad (۵۰)$$

که در نهایت برای سطر و ستون دوم (۵۰) هم باید این نامساوی برقرار باشد. متعاقباً برای تمام مقادیر θ، ماتریس‌های Y و $X^{(j)}(\theta)$ باید غیرتکین باشند. هم‌چنین با ضرب نامساوی (۵۰) در عبارت $\begin{bmatrix}\left(X^{(j)}(\theta)^T\right)^{-1} & -I\end{bmatrix}$ از سمت چپ و ترانهاده‌ی آن از سمت راست داریم:

$$\left\langle\left(W^{(j)}(\theta)-YX^{(j)}(\theta)\right)X^{(j)}(\theta)^{-1}\right\rangle>0 \qquad (۵۱)$$

که تأکید می‌کند عبارت $W^{(j)}(\theta)-X^{(j)}(\theta)Y$ غیرتکین است. بنابراین برای هر ماتریس غیرتکین V، ماتریس $U^{(j)}(\theta)=V^{-1}\left(W^{(j)}(\theta)-YX^{(j)}(\theta)\right)$ غیرتکین و برای تمام مقادیر θ موجود است. جالب توجه آن است که با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۴۶)، غیرتکین بودن ماتریس $U^{(j)}(\theta)$ معکوس‌پذیری ماتریس کمکی $F^{(j)}(\theta)$ را نیز تضمین می‌کند. در این‌جا اثبات به اتمام می‌رسد.

۵- حل مسئله‌ی بهینه‌سازی طراحی

در این کار هدف طراحی سیستم کنترل RSGSOF دینامیکی مرتبه کامل است به گونه‌ای که مقدار بهره‌ی عملکردی H_2 کمینه گردد. بر اساس منابع گذشته این کار به روش‌های مختلفی می‌تواند انجام شود. در این مقاله فرایند بهینه‌سازی بر اساس جستجوی دو-بعدی و حل مسئله‌ی بهینه‌سازی LMI ارائه شده است. به صورت ساده فرض نمایید که: $M^{(j)}(\theta,\delta)=\alpha I_n$. ضرب عناصر مجهول α و λ در حل شرایط طراحی غیرخطی‌گری ایجاد نموده و حل بر پایه‌ی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی را دچار چالش جدی می‌کند. برای حل این مشکل، فرایند جستجوی خطی به این صورت مورد استفاده قرار می‌گیرد که با در نظر گرفتن مقادیر ثابت برای متغیرهای فوق، سیستم کنترل به ازای کمترین مقدار بهره‌ی عملکردی H_2 استخراج می‌شود. به منظور یافتن مقدار بهینه‌ی متغیرهای α و λ می‌توان از بازه‌های تقسیم‌بندی شده‌ی لگاریتمی کمک گرفت. پس برای مسئله‌ی بهینه‌سازی طراحی داریم:

$$\begin{aligned}&\min\ \ \nu\\ &L_1^{(j)}(\theta),L_2^{(j)}(\theta),L_3^{(j)}(\theta),X^{(j)}(\theta),Y,W^{(j)}(\theta),\\ &P_1^{(j)}(\theta),P_2^{(j)}(\theta),P_3^{(j)}(\theta),M^{(j)}(\theta,\delta),\lambda\\ &s.t\ \ (25-29),\ M^{(j)}(\theta,\delta)=\alpha I,\ \alpha=\alpha_0,\ \lambda=\lambda_0\end{aligned} \qquad (۵۲)$$

نکته ۲: طبیعی است با توجه روش بهینه‌سازی پیشنهادی یک مقدار زیربهینه (بهینه‌ی محلی) برای نرم عملکردی H_2 در فرایند جستجوی خطی دو-بعدی (۵۲) حاصل شود [۱۶]. یکی از موضوعات جدی در این زمینه آن است که هر چه بازه‌ی انتخابی برای متغیرهای α و λ وسیع‌تر و فواصل بیان نقاط کمتر شود، مقدار زیربهینه‌ی این نرم به مقدار بهینه‌ی (سراسری) آن نزدیک‌تر می‌شود.

نکته ۳: اگر عناصر طراحی و ماتریس‌های لیاپانوف بین تمامی نواحی کارکرد سیستم مشترک در نظر گرفته شوند، یک کنترل‌کننده‌ی غیرکلیدزن (RGSOF) یکتا به دست می‌آید. برای این کار کافی است در بهینه‌سازی (۵۲) داشته باشیم:

$$\begin{cases}L_1^{(j)}(\theta)=L_1(\theta),\ L_2^{(j)}(\theta)=L_2(\theta),\ L_3^{(j)}(\theta)=L_3(\theta),\\ X^{(j)}(\theta)=X(\theta),\ W^{(j)}(\theta)=W(\theta),\\ P_1^{(j)}(\theta)=P_1(\theta),\ P_2^{(j)}(\theta)=P_2(\theta),\ P_3^{(j)}(\theta)=P_3(\theta),\end{cases} \qquad (۵۳)$$

توجه کنید در این حالت شرط کلیدزنی (۲۰) از شرایط طراحی حذف می‌شود. انتظار می‌رود با اعمال شرط (۵۳) سخت‌گیری و محافظه‌کاری به نتایج طراحی تحمیل شود.

نکته ٤: بدیهی است بر اساس منابع گذشته [۱۲]، [۲۶]-[۲۷] در حوزه‌ی طراحی کنترل کلیدزن سیگنال کنترلی دارای جهش‌هایی در لحظات کلیدزنی باشد. برای مشاهده‌ی این پدیده می‌توان مثال عددی ۲ در همین

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

مقاله و موارد مشابه در تحقیقات گذشته را مشاهده نمود. برای حل چنین مشکلی می‌توان رویکردهای متفاوتی در آینده مورد بررسی و تحقیق قرار داد. در این‌جا برای کاهش جهش کنترلی در لحظات کلیدزنی می‌توان برخی عناصر طراحی را بین نواحی به صورت زیر مشترک در نظر گرفت (بر اساس یکسان بودن ماتریس‌های فضای حالت کنترلی $B_c^{(j)}(\theta)$ و $C_c^{(j)}(\theta)$ در رابطه‌ی (۳۳) به کمک مرجع [۱۲]):

$$\begin{cases} L_2^{(j)}(\theta)=L_2(\theta),\ L_3^{(j)}(\theta)=L_3(\theta), \\ X^{(j)}(\theta)=X(\theta),\ W^{(j)}(\theta)=W(\theta) \end{cases} \tag{۵۴}$$

٦- نتایج شبیه‌سازی

برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی طراحی ابتدا باید روابط وابسته به پارامتر دارای بعد بی‌نهایت را به نامساوی‌های ماتریسی خطی دارای بعد محدود تبدیل نمود. این کار توسط ابزار حل Rolmip [۲۸] انجام می‌شود. سپس به کمک ابزار حل LMI نتایج طراحی محاسبه خواهند شد. به عنوان مثال، می‌تواند از بسته‌های نرم‌افزاری Mosek [۲۹] به همراه رابط کاربر Yalmip [۳۰] بهره‌گیری شود. لازم به ذکر است پارامترهای لیاپانوف و متغیرهای طراحی بر حسب پارامترهای جدول‌بندی در مثال‌های عددی این مقاله از درجه‌ی افاین انتخاب شده‌اند.

۱-۶- مثال عددی ۱ (سیستم دانشگاهی)

برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن در مراجع گذشته روشی ارائه نشده است. از این رو، جهت مقایسه با روش‌های پیشین فرض می‌شود نامعینی در مدل سیستم حلقه‌باز وجود نداشته باشد و هم‌چنین برای ناحیه‌ی وسیعی از پارامترهای جدول‌بندی تنها یک مدل یکتای غیرکلیدزن برای سیستم موجود در نظر گرفته شود. ماتریس‌های مدل فضای حالت سیستم حلقه‌باز در روابط (۵۵) داده شده‌اند [۶]:

$$\begin{aligned} &A_p^{\sigma}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix} 0 & 11+\theta(t) & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6+\theta(t) \end{bmatrix}, \\ &B_w^{\sigma}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_u^{\sigma}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &C_z^{\sigma}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ D_{zu}^{\sigma}(\theta,\delta)=[1], \\ &C_y^{\sigma}(\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_{yw}^{\sigma}(\theta,\delta)=[2] \end{aligned} \tag{۵۵}$$

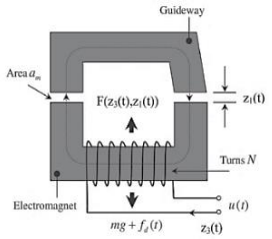
که در آن داریم: $|\theta(t)|\le 1$ و $|\dot\theta(t)|\le 1$. طراحی به کمک رویکرد جستجوی خطی با دو روش قبلی [۶] و روش پیشنهادی در قضیه‌ی ۱ انجام و نتایج در جدول ۱ آورده شده‌اند. در این جدول ν بیان‌گر بهره‌ی عملکردی H_2 حاصل از روش طراحی است که عملکرد مناسب‌تر روش پیشنهادی را تأیید می‌کنند. البته باید توجه نمود مقدار کمی بر پیچیدگی محاسباتی غیربرخط بهینه‌سازی طراحی در روش پیشنهادی افزوده می‌شود.

جدول ۱: مقایسه‌ی ν و پیچیدگی محاسباتی در روش پیشنهادی و پژوهش [۶]

رویکرد	پیچیدگی محاسباتی		بهره‌ی عملکردی
	تعداد ردیف LMI	تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری	
مرجع [۶]	81	80	1.110
روش پیشنهادی	120	94	0.780

۲-۶- مثال عددی ۲ (سیستم تعلیق الکترومغناطیسی

در این قسمت برای نشان دادن میزان کاربردی بودن و مؤثر بودن روش گفته شده، در استخراج کنترل‌کننده‌ی سیستم تعلیق الکترومغناطیسی از این رویکرد پیشنهادی استفاده می‌شود. قطار مغناطیسی یکی از وسایل با فناوری روز در در صنعت حمل و نقل است که عمل معلق ماندن آن در یک فاصله‌ی مناسب توسط یک سیستم تعلیق الکترومغناطیسی موسوم به EMS صورت می‌پذیرد. سیستم تعلیق الکترومغناطیسی که هسته‌ی ایجاد کننده‌ی نیروی عمودی در قطار مغناطیسی می‌باشد که در شکل ۳ آورده شده است. نیروی تعلیق $F\left(z_3(t),z_1(t)\right)$ وابسته به فاصله‌ی تعلیق $z_1(t)$ و جریان DC هسته‌ی مغناطیسی $z_3(t)$ است.



شکل ۳: ساختار مجموعه سیستم EMS [۳۲].

به راحتی با انجام مقداری محاسبات جبری به کمک مراجع [۳۱]-[۳۲]، طبق قانون‌های کیرشهف و نیوتن، مدل دینامیکی سیستم EMS به صورت رابطه‌ی (۵۶) قابل استخراج است.

$$\begin{cases} \dot z_1(t)=z_2(t) \\ \dot z_2(t)=-\dfrac{\mu_0 N^2 a_m}{4m}\left(\dfrac{z_3(t)}{z_1(t)}\right)^2+g+\dfrac{1}{m}f_d(t) \\ \dot z_3=-\dfrac{-2R_m}{\mu_0 N^2 a_m}z_1(t)z_3(t)+\dfrac{z_2(t)z_3(t)}{z_1(t)}+\dfrac{2z_1(t)}{\mu_0 N^2 a_m}v(t) \end{cases} \tag{۵۶}$$

که در آن $z_1(t)$، $z_2(t)$، $z_3(t)$، و $v(t)$ به ترتیب فاصله‌ی تعلیق (m)، نرخ تغییر زمانی آن (m/s)، جریان عبوری از هسته‌ی مغناطیسی (A) و ولتاژ اعمالی (V) به دو سر پلاریته‌ی سیم‌پیچ هسته می‌باشند. هم‌چنین نیروی وارد شده به سیستم (N) در قالب اغتشاش خارجی به صورت متغیر $f_d(t)$ تعریف شده است. دیگر پارامترهای عددی مدل (۵۶) در جدول ۲ آورده شده‌اند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

جدول ۲: توصیف کمی پارامترهای عددی مربوط به مدل (۵۶) سیستم EMS

توصیف	پارامترهای مدل سیستم EMS		نمادها
	واحد	مقدار	
جرم سیستم در حال تعلیق	kg	1.5	m
سطح مؤثر هسته	m^2	1.024×10^{-2}	a_m
مقاومت سیم‌پیچ هسته	Ω	1.1	R_m
شتاب جاذبه	m/s^2	9.8	g
ثابت گذردهی خلأ یا هوا	H/m	$4\pi\times10^{-7}$	μ_0
تعداد دورهای سیم‌پیچ	-	280	N

هدف از طراحی سیستم کنترل با ساختار RSGSOF مرتبه کامل، نگه داشتن سیستم در یک فاصله‌ی تعادل پایدار به صورت $z_{1e}=z_{ref}$ است. توجه نمایید طبق مراجع [۳۱]-[۳۲]، نقاط تعادل سیستم به صورت $\begin{bmatrix} z_{1e} & z_{2e} & z_{3e}\end{bmatrix}^T=\begin{pmatrix} z_{ref} & 0 & \sqrt{\kappa}z_{ref}\end{pmatrix}^T$ محاسبه می‌شوند که در آن داریم: $\kappa:=\frac{4mg}{\mu_0N^2a_m}$. به منظور تبدیل مسئله‌ی تنظیم خروجی(ردیابی) حول مقدار مطلوب به مسئله‌ی پایدارسازی، پیشنهاد می‌شود از تغییر متغیر موجود در رابطه‌ی (۵۷) استفاده شود.

$$x(t):=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1-z_{1e}\\z_2\\z_3-z_{3e}\end{bmatrix},\ u(t):=v(t)-u_e,\ u_e=R_mz_{3e} \qquad (۵۷)$$

با اعمال تبدیل مختصات (۵۷) روی مدل (۵۶) طبق [۳۱] داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{2z_{ref}+x_1}{\left(x_1+z_{ref}\right)^2}gx_1-\dfrac{2\sqrt{\kappa}z_{ref}+x_1}{\kappa\left(x_1+z_{ref}\right)^2}gx_3+\dfrac{1}{m}f_d\\ \dot{x}_3=\dfrac{x_3+\sqrt{\kappa}z_{ref}}{x_1+z_{ref}}x_2-\kappa\dfrac{x_1+z_{ref}}{2mg}\left(R_mx_3-u\right)\end{cases} \qquad (۵۸)$$

بدیهی است که سیستم فوق با روابط نسبتاً پیچیده کاملاً غیرخطی است. بنابراین یک طراحی معمول خطی برای استخراج کنترل‌کننده قابل استفاده نخواهد بود. از سوی دیگر استخراج یک مدل پارامتر متغیر خطی برای سیستم در کل بازه‌ی تغییرات می‌تواند به طراحی محافظه‌کاری جدی تحمیل نماید. برای حل این مشکل ابتدا پیشنهاد می‌شود نمایش سیستم در قالب یک مدل LPV دارای کلیدزنی زمانی وابسته به پارامترهای جدول‌بندی به دست آورده شود. دسته‌ای از پارامترهای جدول‌بندی و متغیر نامعینی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\theta_1:=x_1=z_1-z_{ref}\\ \theta_2:=z_{ref}\\ \delta_1:=x_3=z_3-\sqrt{\kappa}z_{ref}\end{cases} \qquad (۵۹)$$

لازم به ذکر است در این جا فرض می‌شود مقدار جریان عبوری از هسته‌ی مغناطیسی z_3 و در نتیجه مقدار $x_3=\delta_1$ در هر لحظه از زمان به کلی نامعین باشد. از سوی دیگر، مشکل اساسی پیش رو در مدل‌سازی LPV سیستم حلقه‌باز بخش کسری و غیرخطی $1/(x_1+z_{ref})$ در مدل سیستم EMS (۵۸) است. توجه کنید که این قسمت از روابط مستقل از پارامترهای جدول‌بندی نیست و به $\theta_1=x_1$ و $\theta_2=z_{ref}$ وابسته می‌باشد. بر همین اساس تعریف عبارت $1/(x_1+z_{ref})$ به عنوان یک متغیر جدول‌بندی جدید می‌تواند محافظه‌کاری را به نتایج طراحی تحمیل کند. با توجه به این نکته و با الهام از پژوهش‌های پیشین [۲۰] و [۲۳] در مواجهه با این مسئله، پیشنهاد می‌شود این بخش با عبارت $b_0^{(j)}+b_1^{(j)}x_1+b_2^{(j)}z_{ref}$ تقریب زده شود که در آن ضرایب $b_0^{(j)}$، $b_1^{(j)}$ و $b_2^{(j)}$ به کمک روش‌های درون‌یابی همچون روش حداقل مربع خطای (LSE) در هر ناحیه‌ی کاری مجزا قابل محاسبه هستند. در ادامه بر اساس خطای تقریب $e^{(j)}$ متغیر سوم از پارامترهای جدول‌بندی (با قابلیت دسترسی از طریق اندازه‌گیری و محاسبه) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_3:=e^{(j)}=\frac{1}{x_1+z_{ref}}-\left(b_0^{(j)}+b_1^{(j)}x_1+b_2^{(j)}z_{ref}\right)=\frac{1}{\theta_1+\theta_2}-\left(b_0^{(j)}+b_1^{(j)}\theta_1+b_2^{(j)}\theta_2\right);\ \theta_1,\theta_2\in\Theta^{(j)} \qquad (۶۰)$$

که مقدار آن متعلق به $\theta_3\in\left[\min\left(e^{(j)}\right),\max\left(e^{(j)}\right)\right]$ می‌باشد. بر اساس کران در نظر گرفته شده برای θ_1 و θ_2 در هر ناحیه‌ی جدول‌بندی مقدار ضرایب رابطه‌ی (۶۰) محاسبه می‌شوند. دو ناحیه برای تغییرات پارامتر جدول‌بندی θ_3 بر حسب ورودی فرمان فاصله‌ی تعادل پایدار θ_2 و خطای ردیابی θ_1 در نظر گرفته می‌شود. مشخصات ناحیه‌ی اول در رابطه‌ی (۶۱) داده شده است:

$$\Theta^{(1)}\times\Delta^{(1)}\times\Lambda^{(1)}:\begin{cases}-3\times10^{-3}\le\theta_1\le+2\times10^{-3}\\ 6\times10^{-3}\le\theta_2\le8.5\times10^{-3}\\ -0.35\le\delta_1\le+0.7\\ -0.1\le\dot{\theta}_2\le+0.1\end{cases} \qquad (۶۱)$$

و هم‌چنین برای ناحیه‌ی دوم داریم:

$$\Theta^{(2)}\times\Delta^{(2)}\times\Lambda^{(2)}:\begin{cases}-2\times10^{-3}\le\theta_1\le+3\times10^{-3}\\ 8\times10^{-3}\le\theta_2\le10\times10^{-3}\\ -0.7\le\delta_1\le+0.35\\ -0.1\le\dot{\theta}_2\le+0.1\end{cases} \qquad (۶۲)$$

مقدار ضرایب $b_0^{(j)}$، $b_1^{(j)}$ و $b_2^{(j)}$ در جدول ۳ آورده شده‌اند.

جدول ۳: تخمین ضرایب تقریب رابطه‌ی (۶۰) به کمک روش LSE

$\Theta^{(j)}$	$b_0^{(j)}$	$b_1^{(j)}$	$b_2^{(j)}$	$\underline{\theta}_3^{(j)}$	$\overline{\theta}_3^{(j)}$
$\Theta^{(1)}$	+336.313	-25087.9	-26308.9	-12.20	+79.610
$\Theta^{(2)}$	+222.350	-11721.8	-12019.3	-3.44	+17.027

توجه نمایید در این‌جا فرض می‌شود هنگامی که سطح ثابت $\theta_2=z_{ref}$ از مقداری به مقدار دیگری تغییر کند، نرخ تغییرات زمانی ورودی مرجع فاصله‌ی هوایی تعلیق $\dot{\theta}_2=\dot{z}_{ref}$ مقادیر محدود ثابتی را اختیار نماید. بر اساس این فرض هنگام اعمال ورودی مرجع به سیستم حلقه‌بسته داریم: $\ddot{\theta}_2=\ddot{z}_{ref}=0$. با گرفتن الهام از مباحث بیان شده در خصوص تنظیم تقریبی خروجی در پژوهش [۱۱] و بر اساس تعریف سیگنال‌های اغتشاش

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

خارجی w_1 و w_2 در نظر بگیرید: $\dot{z}_{ref}=-a_1w_1,\ f_d=a_2w_2$. به کمک رابطه‌ی (۵۸)، تعریف (۵۹)، جایگذاری θ_1، θ_2 و θ_3 در (۶۰) با:

$$\rho^{(j)}:=\frac{1}{x_1+z_{ref}}=\theta_3+\left(b_0^{(j)}+b_1^{(j)}\theta_1+b_2^{(j)}\theta_2\right);\ \theta_1,\theta_2,\theta_3\in\Theta^{(j)} \qquad (۶۳)$$

و نیز تعریف $y=\begin{bmatrix}x_1+a_4w_3 & x_2+a_5w_4\end{bmatrix}^T$ و $z=x_1$ به عنوان خروجی اندازه‌گیری و بردار عملکرد خروجی، ماتریس‌های مدل فضای حالت سیستم حلقه‌باز (۲۱) در این‌جا مطابق رابطه‌ی (۶۴) به دست می‌آیند. توجه نمایید این فضای حالت پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن علی‌رغم استفاده از تقریب بیان‌شده به کمک همان مدل غیرخطی سیستم اصلی استخراج می‌شود. به عبارت دیگر، با توجه به این‌که متغیر جدول‌بندی سوم همواره در دسترس است مدل‌سازی LPV با ذات غیرخطی خود سیستم تفاوتی ندارد و تقریب گفته شده صرفاً ابزاری برای کاهش محافظه‌کاری در طراحی است. از طرف دیگر، لازم به ذکر است که پس از طراحی کنترل‌کننده، سیگنال تلاش کنترلی به عنوان خروجی بخش طراحی به همان سیستم غیرخطی اصلی اعمال شده است و نتایج زمانی به نمایش درآمده‌اند.

$$A_p^{(j)}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ g\left(\rho^{(j)}\right)^2(2\theta_2+\theta_1) & 0 & -\frac{g\left(\rho^{(j)}\right)^2}{\kappa}\left(2\sqrt{\kappa}\theta_2+\delta_1\right)\\ 0 & \rho^{(j)}\left(\delta_1+\sqrt{\kappa}\theta_2\right) & -\frac{\kappa R_m}{2mg}(\theta_2+\theta_1)\end{bmatrix},$$

$$B_w^{(j)}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{a_2}{m} & 0 & 0\\ a_3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B_u^{(j)}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{\kappa}{2mg}(\theta_2+\theta_1)\end{bmatrix}, \qquad (۶۴)$$

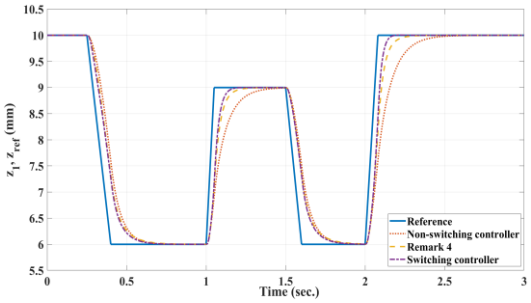
$$C_z^{(j)}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ D_{zu}^{(j)}(\theta,\delta)=0,$$

$$C_y^{(j)}(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ D_{yw}^{(j)}(\theta,\delta)=\begin{bmatrix}0 & 0 & a_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_5\end{bmatrix}$$

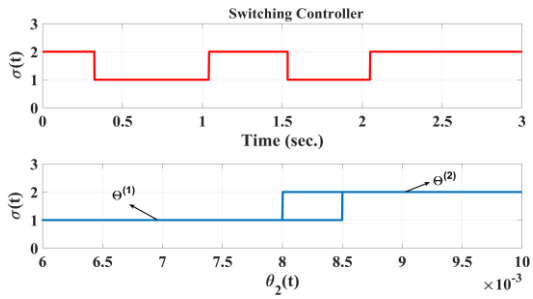
در ادامه، با قرار دادن $a_1=a_4=a_5=0.001,\ a_2=1,\ a_3=\sqrt{\kappa}a_1=0.2414$ به کمک جستجوی خطی متغیرهای عددی λ و α بخش‌بندی شده‌ی ده نقطه‌ای لگاریتمی یکسان به ترتیب در خلال بازه‌های $\left[10^{-4},10^{-2}\right]$ و $\left[10^{+4},10^{+7}\right]$ بهینه‌سازی طراحی انجام می‌شود. مقدار بهینه‌ی آن‌ها در این‌جا پس از انجام محاسبات بهینه‌سازی به صورت $\lambda_{opt}=0.00129$ و $\alpha_{opt}=215443.469$ به دست آورده شده‌اند. کنترل‌کننده‌ی RSGSOF استخراج شده، پایداری و سطح کمینه‌ی کران بالای بهره‌ی H_2 برابر $\nu=3.904$ را برای سیستم حلقه‌بسته تضمین می‌کند. جهت ارزیابی رفتار سیستم حلقه‌بسته با اعمال کنترل‌کننده‌ی RSGSOF شبیه‌سازی زمانی به ازای شرایط اولیه‌ی $x(0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ انجام و نتایج در قالب نمودارهای موجود در شکل ۴ تا شکل ۷ به تصویر کشیده شده‌اند. علاوه بر انجام طراحی RSGSOF (قضیه ۱)، برای کنترل‌کننده‌ی نوع غیرکلیدزن در نکته ۳ و همچنین روش نکته ۴ (به منظور کاهش جهش نامطلوب سیگنال کنترل) مطالعات عددی انجام شده است. جهت انجام مقایسه‌ی عددی بهتر نتایج طراحی، انتگرال مربع بردار عملکرد خروجی z از مرجع [۲۰] به صورت $IS_z:=\int_0^\infty|z(t)|^2\,dt=\int_0^\infty\left(z(t)^Tz(t)\right)dt$ معرفی می‌گردد. با در نظر گرفتن جدول ۴ و شکل ۴ می‌توان گفت جهش‌های سریع در ورودی کنترل به دلیل انجام کلیدزنی اتفاق افتاده که برای کاهش و یا حذف آن طراحی نیازمند سخت‌گیری و پذیرفتن کاهش عملکرد سیستم حلقه‌بسته است. با این وجود از مشاهده‌ی نمودارها و نتایج می‌توان تأیید نمود که در طراحی قضیه ۱، فاصله‌ی تعلیق ورودی مرجع را با سرعت بیش‌تری در مقایسه با سایر روش‌ها دنبال می‌کند. هنگام اعمال فرمان ورودی مرجع ثابت، خطای ردیابی روش‌های طراحی صفر است. هم‌چنین کنترل‌کننده عملکرد مطلوبی از خود به نمایش می‌گذارد.

جدول ۴: مقایسه‌ی عملکردی IS_z در روش‌های مختلف (برحسب $mm^2.sec.$)

قضیه ۱	غیرکلیدزن (نکته ۳)	نکته ٤
0.589	1.170	0.706



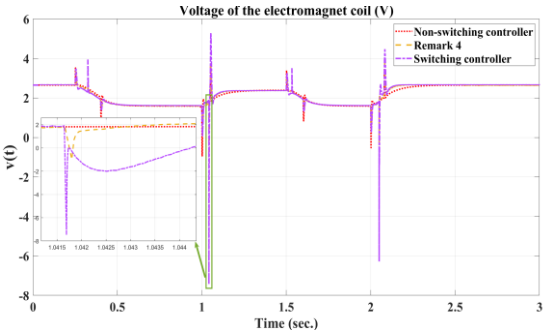
شکل ۴: نمودار زمانی ورودی مرجع و فاصله‌ی تعلیق (ورودی مرجع، حالت غیرکلیدزن، نکته ۴ و قضیه ۱ به ترتیب با رنگ‌های آبی، قرمز، زرد و بنفش).



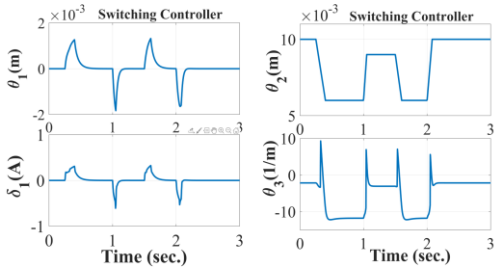
شکل ۵: نمودار سیگنال کلیدزنی (قضیه ۱).

به علاوه مقدار پارامترهای جدول‌بندی دینامیکی و هم‌چنین نامعینی متغیر با زمان، در بازه‌ی از پیش در نظر گرفته شده به عنوان مقادیر کمینه و بیشینه‌ی آن‌ها در طراحی (قضیه ۱)، تغییر می‌کنند. از سوی دیگر، پرش‌های سیگنال کنترلی در لحظات کلیدزنی به دلیل تغییر کنترل‌کننده‌ی پس‌خورد خروجی جدول‌بندی بهره‌ی مقاوم به خوبی قابل مشاهده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]



شکل ۶: نمودار زمانی ولتاژ ورودی کنترل اعمالی به سیم‌پیچ هسته‌ی مغناطیسی (حالت غیرکلیدزن، نکته ۴ و قضیه ۱ به ترتیب با رنگ‌های قرمز، زرد و بنفش).



شکل ۷: نمودار تغییرات زمانی پارامترهای جدول‌بندی و متغیر نامعینی (قضیه ۱)

.

نکته‌ی قابل توجه در این روش پیشنهادی آن است که می‌توان با تحمیل مقداری محافظه‌کاری در طراحی، عنصر حسگر جریان سیم‌پیچ هسته را در سیستم کنترل حذف کرد. هم‌چنین بازه‌ی تغییرات ولتاژ ورودی سیم‌پیچ دارای رنج مناسبی می‌باشد و سیگنال کنترلی در طراحی نکته ۴ دارای رفتار دینامیکی بهتری است.

نکته ۵: علاوه بر این‌که روش‌های پیشنهادی در گذشته قادر به در نظر گرفتن نامعینی و هم‌چنین ماهیت کلیدزن سیستم حلقه‌باز در طراحی نیستند، یک محدودیت جدی در رابطه با سیستم‌های عملی مهندسی دارند. این مانع اساسی ناتوانی در نظر گرفتن موارد وابستگی غیرافاین و چندجمله‌ای مدل LPV نامعین به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی است. این محدویت هم در استخراج شرایط طراحی و هم فضای حالت کنترلی دیده می‌شود. برای مشاهده‌ی جزئیات بیش‌تر می‌توان [۱۶]، [۱۹]، [۲۸]، [۳۳] و منابع موجود در آن‌ها را مشاهده نمود. اما در مورد مثال EMS بیان‌شده و موارد عملی دیگر در منابع [۱۷]، [۱۸]، [۲۰]، [۲۵] و پژوهش‌های موجود در آن‌ها، باید بتوان در طراحی حالت کلی‌تر وابستگی چندجمله‌ای فضای حالت سیستم حلقه‌باز به پارامترهای جدول‌بندی قابل اندازه‌گیری و متغیرهای نامعینی غیرقابل دسترس را نیز در نظر گرفت. به همین دلیل روش پیشنهادی در مقایسه با کارهای پیشین دارای گستردگی کاربردی عمومی‌تری است.

۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی جدید برای طراحی کنترل سیستم‌های پارامتر متغیر خطی نامعین دارای کلیدزنی زمانی ارائه شده است. ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز LPV نامعین کلیدزن به صورت چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و متغیرهای نامعینی وابسته هستند. سیستم کنترل طراحی شده، به صورت خانواده‌ای از کنترل‌کننده‌های جدول‌بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی دینامیکی مقاوم تحت منطق کلیدزنی هیسترزیس استخراج می‌شود. فضای حالت آن هم به پارامترهای جدول‌بندی در دسترس زمان–حقیقی وابسته است و هم به سیگنال کلیدزنی. بازه‌ی تغییرات پارامترهای جدول‌بندی و متغیرهای نامعینی پیش از طراحی محدود در نظر گرفته شده‌اند. کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، با حل بهینه‌ی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی به همراه جستجوی خطی دو مقدار عددی به دست می‌آید. سرانجام برای نمایش مزیت‌ها و قابلیت‌های کاربردی بودن رویکرد ارائه‌شده، علاوه بر مقایسه با روش‌های قبلی در یک حالت خاص محدود ابتدا مدل پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن سیستم تعلیق الکترومغناطیسی استخراج شده است که امروزه در وسایل حمل و نقل با فناوری روز اهمیت ویژه‌ای دارد. سپس روش ارائه‌شده در طراحی سیستم کنترل آن مورد استفاده قرار گرفته است. بررسی و ارزیابی نتایج آن، عملکرد مناسب این رویکرد طراحی را تأیید می‌کند.

پیوست

برای اعمال کنترل‌کننده‌ی RSGSOF طراحی شده لازم است ماتریس‌های مورد نیاز رابطه‌ی (۳۳) را داشته باشیم. در این مسیر از اندازه‌گیری و اطلاعات پارامترهای جدول‌بندی و هم‌چنین سیگنال کلیدزنی نیز بهره‌گیری می‌شود. داریم:

$$L_1^{(1)}(\theta)=\begin{bmatrix}-135.28 & 36225.3 & 418838.9\\ 150.38 & -26082.8 & -469110.9\\ 0.0628 & 19.6751 & 18.9421\end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}-1715.86 & -969053.6 & 1039938.7\\ 20627.7 & 121880.08 & 21553969.5\\ -14.93 & -1304.59 & 21634.92\end{bmatrix}\theta_1+$$
$$\begin{bmatrix}8996.92 & -3533153.7 & -62479576.4\\ -10656.83 & 2499054.7 & 60512255.6\\ -6.847 & -1538.63 & -9132.76\end{bmatrix}\theta_2+$$
$$\begin{bmatrix}0.267 & 47.925 & -1388.24\\ -0.389 & -20.079 & 1262.9\\ 0.00059 & 0.01758 & -0.419\end{bmatrix}\theta_3,$$
$$L_1^{(2)}(\theta)=\begin{bmatrix}499.48 & -7827.69 & 108489.1\\ 265.55 & -5623.7 & -265380.9\\ 0.242 & 7.212 & -65.315\end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}14808.2 & 756377.5 & 19213337.2\\ -15587.2 & 1387120.8 & 2264047.6\\ 7.137 & -2413 & 1.604\end{bmatrix}\theta_1+$$
$$\begin{bmatrix}-60427 & 1356083.4 & -11579768.9\\ -34049.5 & 604643.2 & 30622498\\ -31.951 & 551.242 & 9635.4\end{bmatrix}\theta_2+$$
$$\begin{bmatrix}-0.651 & 96.478 & -1843.9\\ 0.919 & -5.153 & -321.618\\ -0.00074 & 0.193 & -0.618\end{bmatrix}\theta_3,$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

$$\begin{bmatrix} 2.826 & -556.029 & -1385 \\ -0.202 & 49.929 & 838.800 \\ 0.052 & 6.664 & 66.306 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} -49.975 & 2983.3 & 11957.6 \\ 23.143 & -226.157 & 8798.6 \\ 0.133 & -5.450 & -98.328 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} 0.00002 & 0.046 & -0.592 \\ -0.00004 & 0.002 & 0.130 \\ -0.000003 & -0.00004 & -0.009 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1601 & -0.1488 & -0.0010 \\ 0.0867 & 0.0135 & -0.0001 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix},\quad V = I_3$$

در نهایت، به کمک سه انتگرال‌گیر، اندازه‌گیری پارامترهای جدول‌بندی و خروجی اندازه‌گیری، مقداری عملیات ماتریسی، خروجی سیستم کنترلی (۲۳) به کمک رابطه‌ی (۳۳) قابل محاسبه است. انجام این محاسبات به کمک رشد روزافزون پردازنده‌های امروزی به سادگی امکان‌پذیر خواهد بود.

مراجع

[1] W. J. Rugh and J. S. Shamma, "Research on gain scheduling," Automatica, vol. 36, no. 10, pp. 1401–1425, 2000.

[2] C. Hoffmann and H. Werner, "A Survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations," IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 23, pp. 416–433, 2015.

[3] J. Mohammadpour and C. W. Scherer, Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications, New York: Springer-Verlag, 2012.

[4] B. Sereni, E. Assuncao, and M. C. M. Teixeira, "New gain-scheduled static output feedback controller design strategy for stability and transient performance of LPV systems," IET Control Theory and Applications, vol. 14, pp. 717–725, March 2020.

[5] M. L. Peixoto, P. S. Coutinho, R. M. Palhares, "Improved robust gain-scheduling static output feedback control for discrete-time LPV systems," vol. 58, , pp. 11-16, 2021.

[6] W. Xie, "Multi-objective H2/L2 performance controller synthesis for LPV systems," Asian Journal of Control, vol. 14, no. 5, pp. 1273-1281, 2012.

[7] J. D. Caigny, J. F. Camino, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and J. Swevers, "Gain-scheduled H_2 and H_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems," IET Control Theory Applications, vol. 4, no. 3, pp. 362–380, 2010.

[8] J. De Caigny, J. F. Camino, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and J. Swevers,"Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 22, no. 5, pp. 535–558, 2012..

[9] A. Sadeghzadeh, "Gain-scheduled static output feedback controller synthesis for discrete-time LPV systems," International Journal of Systems Science, vol. 48, no. 14, pp. 2936–2947, 2017.

$$L_2^{(1)}(\theta) = \begin{bmatrix} -9351.7 & 6.116 \\ -3.574 & -6407.2 \\ -2.116 & -0.567 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5311.7 & 3212.03 \\ 12823.5 & 2088.3 \\ 33.072 & 3.730 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} -232033.8 & -196825.5 \\ -164473 & 531820.3 \\ 3.193 & 54.936 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} 0.166 & 0.036 \\ -0.029 & 0.151 \\ -0.0025 & -0.00018 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$L_2^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} -4049.3 & 3711.4 \\ 24834 & -1458.9 \\ 2.159 & -0.072 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26392.2 & 5958.6 \\ -96119.5 & 14218.3 \\ 40.990 & 2.559 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} -869456.9 & -5.87916.9 \\ -491431.7 & -96177.6 \\ -206.852 & -14.923 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} 1.400 & 0.142 \\ 7.044 & -0.5698 \\ -0.005 & -0.00028 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$L_3^{(1)}(\theta) = \begin{bmatrix} 949.167 & 172236.6 & -2340343.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6.73906195 & -67390619.5 & 782429344 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} -171441.4 & -693172.51 & 38360851.9 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} -7.696 & 1985.9 & -15907.02 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$L_3^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} -2153.6 & 256134 & -911010 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 57896.6 & -361158341 & 104464921.1 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} 209660.2 & -11402360.5 & 76513123.7 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} -3.968 & 2265.798 & -7378.7 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$X^{(1)}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.304 & -10.073 & -7.469 \\ -3.631 & 7.759 & 6770.2 \\ 38.380 & 1754.1 & 9.889 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.049 & -134.364 & -3985.4 \\ -107.114 & -35103.7 & 396185.6 \\ 4143.5 & 39473.3 & 19891401.6 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} 6.923 & 509.586 & 11635 \\ -306.120 & -23437.9 & -233432.4 \\ 35724 & 480347 & 13564647.5 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} -0.0002 & 0.005 & -0.301 \\ -0.0003 & 1.509 & 23.286 \\ 0.035 & -0.834 & -413.163 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$X^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} -0.848 & 50.257 & 11.767 \\ 50.928 & -2092.5 & -951.992 \\ -36.962 & 397.456 & -126424 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.394 & -232.703 & -4550.4 \\ -243.594 & -1693.5 & -266389.6 \\ 2832.1 & 402675.4 & 8879109.4 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} 147.346 & -6791 & 9387.5 \\ -6993.9 & 328077 & 1114591.4 \\ 14891.4 & 649580.8 & 51857390.8 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.012 & -0.858 \\ -0.012 & 5.002 & 33.948 \\ -0.507 & 71.266 & -1737.6 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$W^{(1)}(\theta) = \begin{bmatrix} -0.791 & -4.720 & -6.454 \\ -0.0407 & -2.268 & -29.530 \\ 0.0005 & -0.042 & 1.319 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.588 & -910.400 & -4576.5 \\ 0.674 & 36.047 & 1278.5 \\ 0.057 & 5.586 & 65.515 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} 7.374 & -405.582 & 2424.2 \\ -9.231 & 334.867 & 733.101 \\ -0.037 & 0.866 & -39.685 \end{bmatrix}\theta_2 + \begin{bmatrix} 0.00007 & 0.041 & -0.207 \\ 0.00001 & -0.002 & 0.098 \\ -0.000001 & 0.00003 & -0.005 \end{bmatrix}\theta_3,$$

$$W^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} -0.341 & -31.401 & -56.607 \\ -0.300 & 2.401 & -94.961 \\ -0.001 & 0.021 & 1.840 \end{bmatrix} +$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]

varying systems," IET Control Theory and Applications, vol. 13, pp. 486–495, 2018.

[24] D. Rotondo, F. Nejjari, and V. Puig, "Robust state-feedback control of uncertain LPV systems: An LMI-based approach," Journal of the Franklin Institute, vol. 351, no. 5, pp. 2781–2803, 2014.

[25] C. Yuan, F. Wu, "Hybrid control for switched linear systems with average dwell time," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, no. 1, pp. 240-245, 2015.

[26] D . Yang, J. Zhao, "H_∞ bumpless transfer for switched LPV systems and its application," International Journal of Control,vol. 92, pp. 1500-1508, 2019.

[27] D. Yang, G . Zong, S. K. Nguang, "H_∞ bumpless transfer reliable control of Markovian switching LPV systems subject to actuator failures," Information Sciences, vol. 512, pp. 431-445, 2020.

[28] C. M. Agulhari, R. C. L. F. de Oliveira, and P. L. D. Peres, "Robust LMI Parser: a computational package to construct LMI conditions for uncertain systems," Proc. XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012), Campina Grande, PB, Brazil, pp. 2298–2305, 2012.

[29] MOSEK ApS, "The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28)", 2015.

[30] J. Löfberg, "YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB," Proc. CACSD Conference, 2004.

[31] P. K. Sinha, A. N. Pechev, "Nonlinear H_∞ controllers for electromagnetic suspension systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 4, pp. 563–568, 2004.

[32] X. Su, X. Yang, P. Shi, L. Wu, "Fuzzy control of nonlinear electromagnetic suspension systems," Mechatronics, vol. 24, no. 4, pp. 328–335, 2014.

[33] AK. Al-Jiboory, GG. Zhu, "Static output-feedback robust gain-scheduling control with guaranteed H2 performance," Journal of The Franklin Institute, vol. 335, pp. 2221-2242, 2018.

[10] A. P. Pandey and M. C. de Oliveira, "Discrete-time H∞ control of linear parameter-varying systems," International Journal of Control, vol. 92, no. 12, pp. 2750-2760, 2019.

[11] C. Yuan, C. Duan, and F. Wu, "Almost output regulation of LFT systems via gain-scheduling control," International Journal of Control, vol. 91, pp. 1161–1170, 2018.

[12] T. He, G.G. Zhu, S.S.M. Swei, and W. Su, "Smooth-switching LPV control for vibration suppression of a flexible airplane wing," Aerospace Science and Technology; vol. 84, pp. 895-903, 2019.

[13] V. Veselý and A. Ilka, "Design of robust gain-scheduled PI controllers," Journal of the Franklin Institute, vol. 352, no. 4, pp. 1476–1494, 2015.

[14] V. Veselý and A. Ilka "Generalized robust gain-scheduled PID controller design for affine LPV systems with polytopic uncertainty," Systems and control letters, vol. 105, pp. 6–13, 2017.

[15] A. Ilka and T. Mckelvey, "Robust discrete-time gain-scheduled guaranteed cost PSD controller design," Proc. International Conference on Process Control (PC), Strbske Pleso, Slovakia, pp. 54–59, 2017.

[16] M. Sato and D. Peaucelle, "Gain-scheduled output-feedback controllers using inexact scheduling parameters for continuous-time LPV systems," Automatica, vol. 49, no. 4, pp. 1019–1025, 2013.

[17] A. Sadeghzadeh, "On exploiting inexact scheduling parameters for gain-scheduled control of linear parameter-varying discrete-time systems," Systems and Control Letters, vol. 117, pp. 1 – 10, 2018.

[18] A. Sadeghzadeh, "Gain-scheduled continuous-time control using polytope-bounded inexact scheduling parameters," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 28, no. 17, pp. 5557–5574, 2018.

[19] R. Yavari, A. Sadeghzadeh, and S. Shamaghdari, "Comments on 'Improved synthesis conditions for mixed H_2/H_∞ gain-scheduling control subject to uncertain scheduling parameters'," International Journal of Control, vol. 94, pp. 804–806, 2021.

[20] R. Yavari, A. Sadeghzadeh, and S. Shamaghdari, "Improved multiobjective H_2/H_∞ switching gain-scheduled controller synthesis exploiting inexact scheduling parameters," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 30, pp. 7706-7730, 2020.

[21] S. Wang, H. Pfifer, and P. Seiler, "Robust synthesis for linear parameter varying systems using integral quadratic constraints," Automatica, vol. 68, pp. 111–118, 2016.

[22] T. E. Rosa, C. F. Morais, and R. C. Oliveira, "H_∞ output-feedback gain-scheduled control for discrete-time linear systems affected by time-varying parameters," IFAC-PapersOnLine, 20th IFAC World Congress, vol. 50, no. 1, pp. 8618 – 8623, 2017.

[23] A. Sadeghzadeh, "LMI relaxations for robust gain-scheduled control of uncertain linear parameter

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.2.6]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.11]