مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱، صفحه ۵۴-۴۱

تعریف فضای اپراتوری عمومی و متریک s-gap برای سنجش پایداری مقاوم سیستم‌های کنترلی با دینامیک غیرخطی

سامان ساکی[۱] و حسین بلندی[۲]

[۱]دانشجوی دکتری مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

[۲]عضو هیئت علمی گروه کنترل دانشکده مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران،تهران، ایران

دریافت:۱۴۰۰/۰۱/۰۳ ویرایش: ۱۴۰۰/۰۶/۰۲ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۱۱

چکیده: در دهه‌های اخیر، متریک‌ها به عنوان ابزارهایی برای آنالیز پایداری مقاوم سیستم‌های کنترلی معرفی شده‌اند. از مهم‌ترین مشکلات این ابزارها می‌توان به محدودیت کارایی آن‌ها در آنالیز پایداری سیستم‌های حلقه بسته با دینامیک غیرخطی اشاره کرد. در برخی مقالات، نویسندگان خطی سازی سیستم و استفاده از ایده متریک خطی را مطرح کرده‌اند. در این مقاله نشان می‌دهیم تکیه بر مدل خطی کافی نبوده و ابزارهای ریاضی جدیدتری برای آنالیز پایداری مقاوم این سیستم‌ها نیاز است. لذا، تعریف فضای اپراتوری عمومی[۱] S به عنوان مهم‌ترین نوآوری برای تعیین ضعیف‌ترین توپولوژی میان دو سیستم غیرخطی مطرح می‌شود. در این فضا، اپراتورهای غیرخطی (سیستم‌های دینامیک غیرخطی) با منیفلد[۲] توپولوژی[۳] دیفرانسیل‌پذیر به صورت ایزومورفیسم‌های ایزومتریکی[۴] بیان می‌شوند. ثمره این تعریف، امکان پذیری محاسبه متریک غیرخطی است که تعریف معیار جدید s-gap را نتیجه می‌دهد. نشان می‌دهیم که محاسبه متریک غیرخطی بر روی گراف‌های ایجاد شده را می‌توان به محافظه کارترین فضای مماس در فضای اپراتوری S تعبیر کرد. همچنین، با توجه به روابط و تعریف فضای اپراتوری جدید، باند بالای بهره یا باند پایین حاشیه پایداری تعمیم یافته[۵] (GSM) سیستم حلقه بسته تعیین می‌شود که در کنار s-gap تئوری جدیدی برای پایداری مقاوم ارائه می‌دهد. تئوری پیشرفته اپراتوری و نتایج شبیه سازی، صحت ادعاهای مطرح شده را با اطمینان تایید می‌کند.

کلمات کلیدی: باند بهره، حاشیه پایداری تعمیم یافته، متریک‌های غیرخطی، فضای اپراتوری و غیرخطی‌گری

Definition of General Operator Space and The s-gap Metric for Measuring Robust Stability of Control Systems with Nonlinear Dynamics

Saman Saki, Hossein Bolandi

Abstract: In the recent decades, metrics have been introduced as mathematical tools to determine the robust stability of the closed loop control systems. However, the metrics drawback is their limited applications in the closed loop control systems with nonlinear dynamics. As a solution in the literature, applying the metric theories to the linearized models is suggested. In this paper, we show that using the linear model is not adequate to analyze the robust stability. To this end, the definition of general operator space is proposed as the important novelty to determine the weakest topology between two nonlinear dynamic systems. In this space, all nonlinear operators (nonlinear dynamic systems) with differentiable manifold topology can be considered as isometric isomorphism. The result of this definition is possibility of the nonlinear gap metric solution which leads to definition of the s-

[1] General operator space

[2] Manifold

[3] Topology

[4] Isometric isomorphism

[5] Generalized stability margin

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

gap metric. In fact, we show that the calculation of the nonlinear gap metric leads to the most conservative tangent spaces in the defined space. Also, based on the new results, the gain bound of the closed-loop system is determined, which together with the s-gap offers a new theory for robust stability analysis. Advanced operator theory and simulation results confirm the correctness of the claims.

Key words: The Gain Bounds, The Generalized Stability Margin, Nonlinear Metrics, Operator Space and Nonlinearity

۱- مقدمه

مسئله آنالیز مقاومت سیستم‌های خطی نامعین در سال ۱۹۹۰ با ارائه مقاله [۱] تا حد قابل قبولی پاسخ داده شد. در این مقاله نویسندگان نشان دادند که مقاومت بهینه سیستم حلقه بسته نامعین با انتخاب ساختار کنترلی که شعاع gap metric (به اختصار GM) را برآورده می‌کند، امکان پذیر است. محافظه کاری قابل توجه این روش و عدم ارائه روشی برای حل مسئله بهینه سازی نسبتاً پیچیده GM انگیزه ارائه مقاله [۲] است. در این مقاله، نویسنده روابط ریاضی مشخصی در حوزه فرکانس برای حل مسئله GM ارائه می‌دهد. همچنین نشان داده شد که متریک ارائه شده (v-gap) از محافظه کاری کمتری برخوردار است. بدین ترتیب معیار مفید و سودمندی برای طراحی کنترل کننده‌ها در سیستم‌های خطی با نامعینی بدون ساختار ارائه شد. همچنین، بر اساس نتایج ارائه شده در [۳]، شرط پایداری مقاوم حلقه بسته باید به نحوی باشد که تلورانس نامعینی اندازه‌گیری شده با استفاده از متریک v-Gap، از مقدار حاشیه پایداری تعمیم یافته (به اختصار GSM) تجاوز نکند. بدین ترتیب، در طراحی سیستم‌های کنترل مقاوم، GSM و معیار v-gap به عنوان ابزارهای کلیدی و سودمندی معرفی شده‌اند. کاربرد این ابزارها عموماً در مسائل تشکیل بانک مدل و کنترل کننده‌های چندگانه ([۴]، [۵] و[۶])، تشخیص خطا ([۷] و [۸]) و شناسایی سیستم‌ها ([۹]، [۱۰]) مشاهده می‌شود. در میان مقالات ارائه شده در زمینه کنترل کننده‌های چندگانه، استفاده از متریک‌های خطی برای سیستم‌های غیرخطی مشاهده می‌شود. به عنوان نمونه می‌توان به [۱۱]، [۱۲] و [۱۳] اشاره کرد. در تمامی این مقالات، از خطی سازی سیستم حول نقطه کار استفاده شده است. این مسئله چالش اصلی تمامی مقالات است. در این مقاله نشان می‌دهیم که تنها نمی‌توان بر اطلاعات مدل خطی سیستم غیرخطی برای تعیین تفاوت دو سیستم غیرخطی استفاده کرد.

در واقع، دلیل اصلی استفاده از متریک‌های خطی برای حل مسائل غیرخطی بر اساس خطی سازی، سادگی محاسبات است. از طرفی، استفاده از رابطه اصلی GM برای محاسبه این کمیت به غیر از مواردی خاص و ساده، تقریباً غیر ممکن است [۱۴]. در این راستا، اخیراً تحقیقاتی برای حل این مشکل انجام شده است که به عنوان نمونه در [۹] به محاسبه این کمیت بر اساس داده‌های ورودی و خروجی پرداخته شده است. در زمینه محاسبه این کمیت برای سیستم‌های غیرخطی که در [۳] به آن تاکید شده است، تحقیقاتی در ساده سازی و حل مسئله GM برای سیستم‌های غیرخطی انجام شده است که البته بجز در مواردی بسیار خاص، این روش‌ها کارآیی لازم را نداشته‌اند. یکی از این روش‌ها تعمیم نتایج متریک خطی به سیستم‌های خطی متغیر با زمان (LTV[6]) است که دلیل این مسئله امکان‌پذیری تعمیم نتایج از سیستم‌های LTV به غیرخطی است. به عنوان نمونه می‌توان به مقاله [۱۵] اشاره کرد که در واقع نویسندگان ارتباط میان GM برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان (LTI[7]) و سیستم‌های LTV را ارائه کرده‌اند. مشابه این نتایج پیش‌تر در مقاله [۱۶] ارائه شد. بر اساس نتایج ارائه شده در [۱۶] می‌توان سیستم‌های غیرخطی را به صورت سیستم‌های LTV درنظر گرفت. در واقع نویسندگان استدلال خود را بدین صورت مطرح می‌کنند که فضای مماس بر توپولوژی منیفلد[8] ایجاد شده را می‌توان به عنوان معیاری برای محاسبه GM بین دو سیستم غیرخطی بیان کرد. در این روش بزرگترین مقدار v-gap میان مدل‌های خطی ایجاد شده را می‌توان به عنوان معیار شباهت دو سیستم غیرخطی درنظر گرفت. این مقاله در واقع سرآغازی برای جهت‌دهی به تحقیقات برای تعمیم مفاهیم v-gap و متریک‌های خطی برای سیستم‌های غیرخطی شد. به عنوان نمونه، در [۱۷] و [۱۸] نویسندگان نشان داده‌اند که رابطه GM برای کلاس خاصی از سیستم‌های LTV به صورت v-gap قابل بیان است. همچنین، مقاله [۱۹] با استفاده از مفاهیم اپراتوری متغیر با زمان و ساختار هنکل[9] یک کران بالا برای GSM تعیین می‌کند. در این راستا مقاله [۲۰] به بیان ارتباطات موجود میان انواع

[6] Linear time varying
[7] Linear time invariant
[8] Manifold topology
[9] Hankel

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

متفاوت GM می‌پردازد و نشـان می‌دهد که توپولوژی القایی توسـط v-gap مشـابه متریک فینتاچ[10] اسـت. برخی دیگر از مقالات به محاسـبه مقدار GM با اسـتفاده از روش‌های عددی می‌پردازند [۲۱]. مشـکلی که در این روش‌ها برای تعمیم به حالت غیر خطی وجود دارد این اسـت که این روش‌ها مقدار مانده در خطی سازی سیستم حول یک نقطه مشخص را در نظر نمی‌گیرند. در این مقاله راه حل جامع و کاملی برای حل این مشکل ارائه خواهد شد.

در کنار محاسـبات مربوط به GM، لازم اسـت که باند بهره سـیسـتم حلقه بسـته تا حد ممکن کوچک انتخاب شـود. به بیان دیگر، باید GSM سیسـتم حلقه بسـته تا حد ممکن بزرگ باشـد. در واقع مهندس طراح باید این مسـئله را به عنوان ابتدایی ترین گام درنظر داشـته باشـد. این مسـئله در واقع مصالحه‌ای میان سرعت پاسخ و پایداری سیستم حلقه بسته است. در این زمینه، نویسندگان [۲۲] ابتدا نشان داده‌اند که یک حل سر راست برای معادله بهینه سـازی اسـتاندارد H_∞ بر اسـاس فاکتورهای چپ و راسـت موجود است. سپس، نویسندگان در ادامه نشان دادند که بر این اساس با شکل دهی بهره[11] مسیر پیش‌رو سیستم کنترلی ضمن دست‌یابی به سرعت پاسخ مناسب، می‌توان به بزرگترین GSM ممکن دست یافت. این بدان معنی اسـت که می‌توان بیشـترین شـعاع نامعینی را برای سـرعت پاسـخ مشـخص بدسـت آورد. در حالتی که دینامیک سیسـتم غیرخطی اسـت، محاسبات مربوط به GSM با چالش جدی رو به رو است. بر اساس مقاله [۱۴]، به جز سیسـتم‌های دینامیکی سـاده، محاسـبات مربوط به GSM در سیسـتم‌های کنترل غیرخطی سـنگین و غیر ممکن اسـت. در این زمینه، مقالاتی مانند [۲۳]، [۲۴]، [۲۵] و [۲۶] به ارائه محاسـباتی برای تعیین GSM سیسـتم‌های کنترل با دینامیک غیرخطی پرداخته‌اند. اگرچه نتایج تا حدودی قابل قبول می‌باشـند اما ایراد اصـلی در این مقالات ناکارآمدی روش در حالت وجود انتگرال‌گیر در حلقه کنترل است.

در این مقاله، نشـان خواهیم داد که با تعریف ریاضـی یک فضـای اپراتوری جدید که فضای اپراتوری عمومی (نشان داده شـده با S) نامیده می‌شود، می‌توان مشکلات ایجاد شده در محاسبات GM برای دو سیستم غیرخطی و باند بهره برای سـیسـتم کنترلی با دینامیک غیرخطی را حل کرد. با اسـتفاده از تعریف این فضـا، می‌توان نشـان داده که GM برای دو سـیسـتم غیرخطی به ضـعیف‌ترین توپولوژی بین گراف‌های ایجاد شـده توسـط دنباله‌های اپراتوری ایجاد شـده در فضای اپراتوری S منجر خواهد شد. همچنین، با استفاده از مزایای فضای اپراتوری S، می‌توان روش ارائه شـده در [۲۲] را به سـیسـتم‌های غیرخطی برای دسـت‌یابی به مقاومت حداکثر سیستم حلقه بسته حول یک نقطه کار مشخص اعمال کرد.

سـاختار این مقاله بدین صـورت اسـت که در بخش ۲، ابتدا به معرفی انواع متریک و روابط حاکم بر آن‌ها به همراه ابزارهای ریاضی و تعاریف مربوطه پرداخته می‌شـود. در بخش ۳، فضـای اپراتوری عمومی تعریف خواهد شـد که هسته اصلی مقاله را تشکیل می‌دهد. همچنین، محاسبات مربوط به s-gap و GSM به همراه قضایای مربوطه موضوعی است که در بخش ۴ ارائه خواهد شـد. بخش ۵ نتایج شـبیه سـازی را ارائه می‌دهد و در پایان بخش ۶ نتیجه‌گیری مقاله را ارائه می‌دهد.

۲- انواع متریک و مفاهیم توپولوژی

ابتدایی‌ترین ایده برای مقایسـه رفتار دو سـیسـتم دینامیکی، بررسـی رفتار خروجی آنها به ازای ورودی‌های یکسـان اسـت. در این صـورت می‌توان بیشـینه انرژی تفاضـل دو سـیسـتم را به عنوان معیار سـاده‌ای از نامعینی تعریف کرد. این رابطه در حوزه زمان و فرکانس به صورت:

$$\delta_n\left(P_1,P_2\right)=\sup_{u\in\mathscr{L}_2,u\neq 0}\frac{\left\|P_1u-P_2u\right\|_2}{\left\|u\right\|_2} \qquad (۱)$$

که در آن $\mathscr{L}_2$ فضای سیگنال لبسگو[12] است که شامل تمامی سیگنال های حقیقی با نرم ۲ محدود می‌باشـد. به عبارتی، $u\in\mathscr{L}_2$ به معنای $\sqrt{\int_0^\infty u^T u\,dt}<\infty$ اسـت. رابطه (۱) را می‌توان به صـورت یک مسـئله نرم بی‌نهایت در حوزه فرکانس بیان کرد (صفحه ۵۳ از [۲۷]):

$$\delta_n\left(P_1,P_2\right)=\left\|P_1-P_2\right\|_\infty \qquad (۲)$$

در صورتی که مقدار متریک تعریف شده کوچک باشد، رفتار سیستم‌ها تا حدودی مشابه هسـتند. فرض کنید که فضـای $\mathscr{H}_\infty$ فضـایی باشـد که تمامی توابع تبدیل با نرم بی نهایت محدود و پایدار را پوشش دهد. در این صـورت می‌توان نشـان داد که متریک تعریف شـده با رابطه (۲) بر روی فضای $\mathscr{H}_\infty$ تشکیل یک متر می‌دهد. زیرا خواص زیر را بر روی فضای مذکور ارضا می‌کند.

۱- بـرای هـر $P_1\in\mathscr{H}_\infty$ و $P_2\in\mathscr{H}_\infty$ هـمـواره $\delta_n\left(P_1,P_2\right)=\delta_n\left(P_2,P_1\right)$

۲- برای هر $P_1\in\mathscr{H}_\infty$ و $P_2\in\mathscr{H}_\infty$ همواره $\delta_n\left(P_2,P_1\right)\geq 0$ و $\delta_n\left(P_2,P_1\right)=0$ اگر و فقط اگر $P_1=P_2$

[10] Feintuch

[11] Loop shaping

[12] Lebesgue

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

۳- برای هر $P_1 \in \mathscr{H}_\infty$، $P_2 \in \mathscr{H}_\infty$ و $P_3 \in \mathscr{H}_\infty$ همواره

$$\delta_n\left(P_1,P_3\right) \le \delta_n\left(P_1,P_2\right)+\delta_n\left(P_2,P_3\right)$$

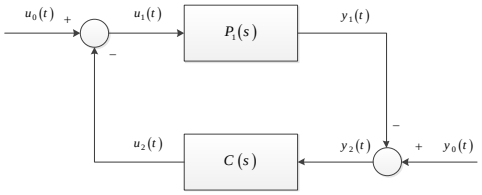
همچنین توجه داریم که برای مجموعه $\mathscr{S} \subset \mathscr{H}_\infty$، متریک $\delta_n\left(P_1,P_2\right)$ تشکیل یک توپولوژی بر روی مجموعه مذکور می‌نماید. توجه داریم که یک توپولوژی بر روی مجموعه $\mathscr{S} \subset \mathscr{H}_\infty$ به صورت مجموعه‌ای از Setهای باز $\mathscr{A}$ تعریف می‌شود که خواص زیر را در بر می‌گیرد:

۱- خود $\mathscr{S}$ و مجموعه تهی عضوی از $\mathscr{A}$ باشند.

۲- تعداد محدودی از زیرمجموعه‌های دلخواه از $\mathscr{A}$ همواره عضوی از $\mathscr{A}$ باشد.

یک نتیجه فوری از تعریف فوق این است که یک فضا می‌تواند با توپولوژی‌های متفاوتی ارائه شود. فرض کنید، متریک δ_n بر روی فضای $\mathscr{S}$ تعریف شود. این فضا می‌تواند یک فضای تابع، فضای اپراتور، فضای برداری و ... باشد. در این صورت مجموعه $\mathscr{E} \in \mathscr{S}$ یک مجموعه باز است اگر مقدار ε به گونه‌ای پیدا شود که برای هر $x \in \mathscr{E}$، مجموعه $\left\{y \mid \delta_n\left(x,y\right)<\varepsilon\right\}$ متعلق به $\mathscr{E}$ باشد. مجموعه تمامی مجموعه‌های مذکور دو شرط توپولوژی را برقرار کرده که در این صورت می‌گوییم متریک δ_n یک توپولوژی بر روی $\mathscr{S}$ القا می‌کند.

متاسفانه استفاده از متریک تعریف شده برای بررسی اثرات نامعینی در سیستم‌های حلقه بسته کارایی لازم را ندارد [۲۸]. از این رو لازم است که ورودی خروجی سیستم حلقه بسته را مورد بررسی و ارزیابی قرار دهیم. به عنوان نمونه، فرض کنیم هدف بررسی شباهت رفتاری جفت $\begin{bmatrix}P_1 & C\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}P_2 & C\end{bmatrix}$ است که در آن منظور از جفت $\begin{bmatrix}P_1 & C\end{bmatrix}$، سیستم حلقه بسته به فرم استاندارد نشان داده شده در شکل (۱) است.



شکل (۱): بلوک دیاگرام استاندارد سیستم کنترلی که با جفت $\begin{bmatrix}P_1 & C\end{bmatrix}$ نشان داده می‌شود.

روش ارزیابی را مشابه قبل درنظر می‌گیریم. به عبارتی، فرض می‌کنیم که ورودی دو جفت (دو سیستم حلقه بسته) یکسان باشد. در این صورت خروجی سیستم‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این صورت مقدار متریک در حالت کلی‌تر به صورت رابطه (۳) داده می‌شود که برای بیان عمومی‌تر، مدل دینامیکی سیستم نیز به صورت غیرخطی درنظر گرفته شده است.

$$\delta_g\left(\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2\right)=\sup_{\begin{pmatrix}u_1\\y_1\end{pmatrix}\in\mathscr{G}_{\mathscr{N}_1}}\inf_{\begin{pmatrix}u_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathscr{G}_{\mathscr{N}_2}}\frac{\left\|\begin{pmatrix}u_1\\y_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u_2\\y_2\end{pmatrix}\right\|_2}{\left\|\begin{pmatrix}u_1\\y_1\end{pmatrix}\right\|_2} \qquad (۳)$$

در این رابطه $\mathscr{N}_1$ و $\mathscr{N}_2$ بیانگر اپراتورهای مربوطه دو سیستم غیرخطی است. همچنین، $\mathscr{G}_{\mathscr{N}_1}$ و $\mathscr{G}_{\mathscr{N}_2}$ نشان دهنده گراف تشکیل شده توسط هر کدام از اپراتورها است. متریک تعریف شده با رابطه فوق را می‌توان از نظر هندسی به صورت اختلاف میان تصاویر متعامد بر روی فضای گراف ایجاد شده تعریف کرد. برای توضیحات بیشتر، فرض کنید $\mathscr{K}_1$ و $\mathscr{K}_2$ زیرفضاهایی از فضای هیلبرت[۱۳] باشند (این زیرفضاها در رابطه (۳) با $\mathscr{G}_{\mathscr{N}_1}$ و $\mathscr{G}_{\mathscr{N}_2}$ نشان داده شده‌اند). در این صورت فاصله بین دو فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$gap\left(\mathscr{K}_1,\mathscr{K}_2\right)=\left\|\Pi_{\mathscr{K}_1}-\Pi_{\mathscr{K}_2}\right\| \qquad (۴)$$

که در آن $\Pi_{\mathscr{K}_1}$ تعامد بر روی $\mathscr{K}_1$ را نشان می‌دهد. حال، در نظر داریم که $\begin{bmatrix}\Pi_{\mathscr{K}_1}\\ \Pi_{\mathscr{K}_1^T}\end{bmatrix}$ یک اپراتور ایزومتریک بر روی فضای هیلبرت است. این بدان معنی است که اپراتور مذکور نرم سیگنال را تغییر نمی‌دهد. همچنین توجه داریم که z را می‌توان به صورت $z=x+y$ تفکیک کرد که در آن $x \in \mathscr{K}_1$ و $y \in \mathscr{K}_1^T$ می‌باشد. ایزومتریک بودن $\begin{bmatrix}\Pi_{\mathscr{K}_1}\\ \Pi_{\mathscr{K}_1^T}\end{bmatrix}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left\|\begin{bmatrix}\Pi_{\mathscr{K}_1}\\ \Pi_{\mathscr{K}_1^T}\end{bmatrix}z\right\|_2=\left\|\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right\|_2=\left\|z\right\|_2 \qquad (۵)$$

در این صورت رابطه (۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}&gap\left(\mathscr{K}_1,\mathscr{K}_2\right)=\\&\left\|\begin{bmatrix}\Pi_{\mathscr{K}_1}\\ \Pi_{\mathscr{K}_1^T}\end{bmatrix}\left(\Pi_{\mathscr{K}_1}-\Pi_{\mathscr{K}_2}\right)\begin{bmatrix}\Pi_{\mathscr{K}_2} & \Pi_{\mathscr{K}_2^T}\end{bmatrix}\right\|=\\&\left\|\begin{bmatrix}0 & \Pi_{\mathscr{K}_1}\Pi_{\mathscr{K}_2^T}\\ -\Pi_{\mathscr{K}_1^T}\Pi_{\mathscr{K}_2} & 0\end{bmatrix}\right\|=\\&\max\left\{\Pi_{\mathscr{K}_1}\Pi_{\mathscr{K}_2^T},\Pi_{\mathscr{K}_1^T}\Pi_{\mathscr{K}_2}\right\}\end{aligned} \qquad (۶)$$

معادله (۶) را با استفاده از مفاهیم تصویر متعامد در فضای هیلبرت می‌توان

[13] Hilbert space

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

بازنویسی کرد. به عبارتی داریم:

$$\begin{aligned}\left\|\Pi_{\mathscr{K}_1}\Pi_{\mathscr{K}_2^T}\right\| &= \left\|\Pi_{\mathscr{K}_2^T}\Pi_{\mathscr{K}_1}\right\| \\ &= \sup_{x\in\mathscr{K}_1, x\neq 0}\frac{\left\|\Pi_{\mathscr{K}_2^T}x\right\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\in\mathscr{K}_1, x\neq 0}\frac{\left\|\Pi_{\mathscr{K}_2^T}x\right\|_2}{\|x\|_2} \\ &= \sup_{x\in\mathscr{K}_1, x\neq 0}\inf_{y\in\mathscr{K}_2}\frac{\left\|\Pi_{\mathscr{K}_2^T}x+\Pi_{\mathscr{K}_2}x-y\right\|_2}{\|x\|_2} \\ &= \sup_{x\in\mathscr{K}_1, x\neq 0}\inf_{y\in\mathscr{K}_2}\frac{\|x-y\|_2}{\|x\|_2}\end{aligned} \quad (۷)$$

بنابراین مشاهده می‌شود که رابطه (۷) همان رابطه (۳) را به بیانی دیگر تعبیر می‌کند. به عبارت دیگر اختلاف بین تصاویر متعامد بر روی فضای گراف با فاصله بین دو فضا برابری می‌کند. منظور از فاصله، بیشترین مقدار متریک مستقیم بین دو فضا است. توپولوژی القا شده توسط نگاشت gap metric به صورت $\delta(\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2):\mathscr{G}_{\mathscr{N}_1}\times\mathscr{G}_{\mathscr{N}_2}\to[0\quad 1]$، توپولوژی گراف نامیده می‌شود. با توجه به اهداف مقاله، لازم است نتایج را برای حالتی که مدل سیستم خطی است به صورت جزئی‌تر مورد بررسی قرار دهیم. در صورتی که اپراتور تشکیل دهنده گراف دو سیستم، از نوع اپراتور LTI باشد، در این صورت رابطه (۳) به صورت تعبیری فرکانسی قابل بیان است. فرض کنید، مسئله بررسی شباهت دو سیستم LTI با توابع تبدیل $P_1(s)$ و $P_2(s)$ باشد. همچنین فرض کنید اپراتورهای $G_1:q_1\to\begin{pmatrix}u_1\\y_1\end{pmatrix}$ و $G_2:q_2\to\begin{pmatrix}u_2\\y_2\end{pmatrix}$ وجود داشته باشند. در این صورت رابطه (۳) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\delta_g(P_1,P_2)=\sup_{q_1\in\mathscr{G}_1}\inf_{q_2\in\mathscr{G}_2}\frac{\|G_1q_1-G_2q_2\|_2}{\|q_1\|_2} \quad (۸)$$

با توجه به محدودیت انرژی گراف‌های q_1 و q_2، موجودیت اپراتور $Q:q_1\to q_2$ با $Q\in\mathscr{H}_\infty$ بدیهی است. با این تعریف، رابطه (۸) را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

$$\delta_g(P_1,P_2)=\inf_{Q\in\mathscr{H}_\infty}\|G_1-G_2Q\|_\infty \quad (۹)$$

این رابطه در واقع یک بهینه سازی را بر روی فضای اپراتوری نشان می‌دهد. حل معادله بهینه سازی فوق به منظور دست‌یابی به یک پاسخ فرکانسی مشخص مسئله‌ای است که در [۲] بیان شده است. همچنین نویسنده در مرجع مذکور به بیان شروطی جهت استفاده از متریک فوق برای بررسی پایداری مقاوم و حداکثر تلورانس نامعینی پرداخته است. در این مقاله قصد داریم نتایج مشابهی را برای سیستم‌های غیرخطی بدست آوریم. بدین منظور در ادامه مفهوم جدید فضای اپراتوری عمومی (فضای S) شرح داده می‌شود.

۳- فضای اپراتوری عمومی

در بخش قبلی، مفاهیم مربوط به متریک‌ها و توپولوژی گراف ارائه شد. با توجه به این مفاهیم مشاهده شد که فاصله میان دو زیر فضا از فضای هیلبرت و فاصله میان تصاویر زیرفضاهای تعریف شده بر روی محورهای فضای هیلبرت تعاریفی معادل هستند. همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، در سیستم‌های LTI، می‌توان فاصله مذکور را به صورت یک مسئله نرم بی‌نهایت در حوزه فرکانس بیان کرد. در واقع، نتیجه کارهای مذکور بدین صورت است که اگر نامعینی به حدی تغییر کند که اندازه v-gap از مقدار GSM کوچکتر باشد و شرایط winding number (جزئیات در صفحه ۳۵۷ از [۲۷]) برقرار باشد، سیستم تحت تاثیر نامعینی قطبی در سمت راست اختیار نمی‌کند. در کنار سودمندی روش برای حل مسائل LTI با نامعینی پارامتری، استفاده از این روش و تعمیم آن به مسائل غیرخطی همچنان به عنوان معضلی اساسی در آنالیز سیستم‌های کنترل مقاوم شناخته می‌شود. دلیل این مسئله این است که معادله (۳) در حالت کلی برای سیستم‌های غیرخطی روش حل مشخصی ندارد. در این قسمت، با تعمیم مفاهیم ارائه شده، به تعریف فضای اپراتوری S خواهیم پرداخت که در آن حل مسئله (۳) برای سیستم‌های غیرخطی ممکن شده است. تعاریف مربوطه به این فضا در این بخش ارائه می‌شود و محاسبات مربوط به GM و حاشیه پایداری تعمیم یافته در بخش بعدی مطرح می‌شود.

فرض کنید سیگنال $q(t)$ تولید شده توسط اپراتور غیرخطی $\mathscr{N}$ بر روی فضای هیلبرت مفروض باشد. این سیگنال تابعی از زمان بوده و محورهای فضای هیلبرت که متشکل از بی‌نهایت محور مختصاتی می‌باشند، سیگنال مذکور را به صورت یک نقطه مدل می‌کنند. در این صورت اپراتور $S^\infty_{q(t)}:q(t)\to q'(t),\quad S\supset S^\infty_{q(t)}$ قابل تعریف است که در آن $q'(t)=\begin{pmatrix}M_l\\N_l\end{pmatrix}\mathscr{T}^{[t_l\quad t_{l+1}]}q(t)$ و $q'(t=t_l)=q(t=t_{l-1})$ می‌باشند. همچنین، اپراتور برش که با نماد $\mathscr{T}^{[t_l\quad t_{l+1}]}$ نشان داده می‌شود، مقدار سیگنال را در بازه $[t_l\quad t_{l+1}]$ نگه داشته و در بقیه زمان‌ها صفر خواهد کرد. فرض بر این است که فاصله t_l و t_{l+1} به صورت حدی به صفر میل می‌کند. از طرفی $M_l\in\mathscr{H}_\infty$ و $N_l\in\mathscr{H}_\infty$ تفکیک چپ را در زمان t_l نشان می‌دهد. نحوه استخراج $M_l\in\mathscr{H}_\infty$ و $N_l\in\mathscr{H}_\infty$ در ادامه مقاله شرح داده می‌شود. توجه داریم که $M_l^*M_l+N_l^*N_l=I$ و

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

$M_l \in \mathscr{H}_\infty$, $N_l \in \mathscr{H}_\infty$ از فرض‌های اساسی در فضای اپراتوری S است. به عبارت بهتر، می‌توان سیگنال تولید شده توسط اپراتور $\mathscr{N}$ در فضای اپراتوری مذکور را به صورت دنباله اپراتوری

$$S_{q(t)}^{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} M_l \\ N_l \end{pmatrix} \right\}_{l=1}^{\infty} \qquad (۱۰)$$

درنظر گرفت. در واقع درنظر داریم که تصویر هر گراف بر روی فضای S به صورت یک نقطه اپراتوری قابل تجسم است.

خواص فضای اپراتوری S به صورت زیر قابل بیان است:

۱- برای هر دو گراف q_1 و q_2 ممکن است تنها یک دنباله اپراتوری در S موجود باشد.

۲- اپراتور $S_{q(t)}^{\infty}$ یک ایزومورفیسم با خاصیت ایزومتریکی است.

۳- اعضای $\begin{pmatrix} M_l \\ N_l \end{pmatrix}$ لزوماً از روی نقطه تعادل استخراج نمی‌شود. در واقع این اعضا از روی مسیر منیفلدی استخراج می‌شوند.

به عبارت بهتر، می‌توان گفت یک اپراتور غیرخطی در فضای اپراتوری S به صورت دنباله‌ای نامتناهی از اپراتورهای تفکیک شده قابل بیان است. این تعریف به ما کمک می‌کند تا از خاصیت $M_l^* M_l + N_l^* N_l = I$ در محاسبات مربوط به GM میان دو فضای گراف استفاده کنیم. در ادامه روند استخراج $\begin{pmatrix} M_l \\ N_l \end{pmatrix}$ را تعیین کرده تا در بخش بعدی با استفاده از نتایج آن بتوان محاسبات متریکی را ممکن کرد. فرض کنید سیستم دینامیکی $\mathscr{N}: \dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right)$ مفروض باشد. در این صورت می‌توان سیستم را در فریم زمانی t_l به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \mathscr{N}: \dot{x}(t) &= f\left(x(t_l), u(t_l)\right) \\ &+ A\left(x(t_l), u(t_l)\right)\left(x(t) - x(t_l)\right) \\ &+ B\left(x(t_l), u(t_l)\right)\left(u(t) - u(t_l)\right) \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

این معادله را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \mathscr{N}: \dot{x}(t) &= A\left(x(t_l), u(t_l)\right)\left(x(t) - x(t_l)\right) \\ &+ \left[B\left(x(t_l), u(t_l)\right) \quad I\right] \begin{bmatrix} u(t) - u(t_l) \\ f\left(x(t_l), u(t_l)\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

به عبارتی، می‌توان اپراتور غیرخطی $\mathscr{N}$ را به فرم اپراتور خطی و متغیر با زمان

$$\mathscr{P}_l = \left\{ A_l, \begin{bmatrix} B_l & I \end{bmatrix}, I, \mathbf{0} \right\} \qquad (۱۳)$$

در فریم زمانی t_l در نظر گرفت. بدین ترتیب اگر تابع تبدیل اپراتور به صورت $P_l(s)$ در نظر گرفته شود، می‌توان M_l و N_l را از روی $P_l(s): \begin{pmatrix} u(t) - u(t_l) \\ f\left(x(t_l), u(t_l)\right) \end{pmatrix} \to x(t) - x(t_l)$ با توجه به الگوریتم داده شده در [۲۲] محاسبه کرد. این موضوع به عنوان ابزاری در راستای تعریف متریک جدید است که در بخش بعدی مورد بررسی واقع می‌شود.

۴- محاسبه s-gap و تعمیم قضیه آنالیز پایداری مقاوم

پایداری مقاوم سیستم‌های فیدبک با دینامیک غیرخطی موضوع اشاره شده در [۱۴] است. بر اساس نتایج ارائه شده در این مرجع ، پایداری جفت $\left[\mathscr{N}_1 \quad C\right]$ در صورتی پایداری جفت $\left[\mathscr{N}_2 \quad C\right]$ را نتیجه می‌دهد که اختلاف دو سیستم غیرخطی که با رابطه (۳) داده می‌شود از مقدار باند بهره سیستم حلقه بسته که با رابطه

$$b_{\mathscr{N}_1, C} = \left(\sup_{\begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}_2} \frac{\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|} \right)^{-1} \qquad (۱۴)$$

داده می‌شود، مقداری کوچک‌تر باشد. در این بخش از مقاله، ارائه بیانی مناسب برای متریک غیرخطی و باند بهره سیستم حلقه بسته ارائه می‌شود. بدین منظور سیستم‌های غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathscr{N}_1: \dot{x}(t) = f_1\left(x(t), u(t)\right) \\ \mathscr{N}_2: \dot{x}(t) = f_2\left(x(t), u(t)\right) \end{cases} \qquad (۱۵)$$

همچنین، فرض کنید توابع f_1 و f_2 در محدوده $\mathscr{D}$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت قضیه زیر یک بیان فرکانسی مشخص برای متریک غیرخطی دو سیستم ارائه می‌دهد.

قضیه ۱: برای دو سیستم غیرخطی داده شده در رابطه (۱۵)، باند بالای مقدار فاصله بین دو سیستم که با رابطه (۳) تعریف می‌شود، در فضای اپراتوری S به صورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \delta_g(\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2) &\le \sup_{n,m \in [0,1,\ldots,\infty]} \left\| \kappa(\mathscr{P}_m, \mathscr{P}_n) \right\|_\infty \\ &= \delta_S(\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2)(\mathscr{D}, \mathscr{D}) \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

در این رابطه، $\mathscr{D}$ ناحیه کاری انتخاب شده برای دو سیستم غیرخطی $\mathscr{N}_1$ و $\mathscr{N}_2$ را نشان می‌دهد. همچنین، $\kappa(\mathscr{P}_m, \mathscr{P}_n) = -\tilde{N}_{\mathscr{N}_2,n} M_{\mathscr{N}_1,m} + \tilde{M}_{\mathscr{N}_2,n} N_{\mathscr{N}_1,m}$ است. همچنین، $M_{\mathscr{N}_1,m}$ و $N_{\mathscr{N}_1,m}$ نشان دهنده تفکیک راست برای اپراتور خطی $\mathscr{P}_m$ است. به همین صورت $\tilde{N}_{\mathscr{N}_2,n}$ و $\tilde{M}_{\mathscr{N}_2,n}$ تفکیک چپ برای اپراتور $\mathscr{P}_n$ را نمایش می‌دهد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

اثبات: رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta_g\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)=\sup_{q_1\in\mathcal{H}_2}\inf_{q_2\in\mathcal{H}_2}\frac{\left\|S^{\infty}_{q_2}q_2-S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|}{\left\|S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|} \qquad (۱۷)$$

توجه داریم که در این رابطه $q_i=\begin{pmatrix}u_i(t)\\ x_i(t)\end{pmatrix}$ گراف سیستم است. به منظور ساده سازی رابطه فوق می‌توان گفت:

$$\frac{\left\|S^{\infty}_{q_2}q_2-S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|}{\left\|S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|}\le\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_1,m}\\ M_{\mathcal{N}_1,m}\end{pmatrix}\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1-\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_2,n}\\ M_{\mathcal{N}_2,n}\end{pmatrix}\mathcal{T}_{t_n,t_n+\Delta t}q_2\right\|}{\|q_1\|} \qquad (۱۸)$$

تعریف می‌کنیم $Q_{mn}:\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1(t)\to\mathcal{T}_{t_n,t_n+\Delta t}q_2(t)$، در این صورت:

$$\frac{\left\|S^{\infty}_{q_2}q_2-S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|}{\left\|S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|}\le\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_1,m}\\ M_{\mathcal{N}_1,m}\end{pmatrix}\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1-\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_2,n}\\ M_{\mathcal{N}_2,n}\end{pmatrix}Q_{mn}\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1\right\|}{\|q_1\|} \qquad (۱۹)$$

باند بالای طرف راست رابطه (۱۹) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}&\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_1,m}\\ M_{\mathcal{N}_1,m}\end{pmatrix}\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1-\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_2,n}\\ M_{\mathcal{N}_2,n}\end{pmatrix}Q_{mn}\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1\right\|}{\|q_1\|}\\ &\le\frac{\sup_{m,n\in\{0,\dots,\infty\}}\left\|\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_1,m}\\ M_{\mathcal{N}_1,m}\end{pmatrix}\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1-\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_2,n}\\ M_{\mathcal{N}_2,n}\end{pmatrix}Q_{mn}\mathcal{T}_{t_m,t_m+\Delta t}q_1\right\|}{\|q_1\|}\\ &=\sup_{m,n\in\{0,\dots,\infty\}}\left\|\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_1,m}\\ M_{\mathcal{N}_1,m}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_2,n}\\ M_{\mathcal{N}_2,n}\end{pmatrix}Q_{mn}\right\|_{\infty}\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

از طرفی، توجه داریم که همواره نامساوی

$$\left\|\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_1,m}\\ M_{\mathcal{N}_1,m}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}N_{\mathcal{N}_2,n}\\ M_{\mathcal{N}_2,n}\end{pmatrix}Q_{mn}\right\|_{\infty}\ge\left\|\kappa\left(\mathscr{P}_m,\mathscr{P}_n\right)\right\|_{\infty}$$

برقرار است. لذا،

$$\frac{\left\|S^{\infty}_{q_2}q_2-S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|}{\left\|S^{\infty}_{q_1}q_1\right\|}\le\sup_{n,m\in\{0,\dots,\infty\}}\left\|\kappa\left(\mathscr{P}_m,\mathscr{P}_n\right)\right\|_{\infty} \qquad (۲۱)$$

رابطه فوق را تضمین می‌کند و به عنوان متریک جدید تعریف می‌شود. ■

با توجه به نتایج قضیه فوق، یک تعریف اولیه برای متریک غیرخطی به صورت،

$$\delta_s^{NL}\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)\left(\mathscr{Q}_1,\mathscr{Q}_2\right)=\inf_{Q_{mn}\in\mathscr{K}_{\infty}}\sup_{m\in[0,1,\dots,\infty]}\sup_{n\in[0,1,\dots,\infty]}\left\|\begin{pmatrix}M_{\mathcal{N}_1,m}\\ N_{\mathcal{N}_1,m}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}M_{\mathcal{N}_2,n}\\ N_{\mathcal{N}_2,n}\end{pmatrix}Q_{mn}\right\|_{\infty} \qquad (۲۲)$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathscr{Q}_1$ و $\mathscr{Q}_2$ حوزه عملکرد سیستم‌های $\mathcal{N}_1$ و $\mathcal{N}_2$ را نشان می‌دهد. مزیت تعریف فوق، امکان پذیری آنالیز فرکانسی برای پایداری سیستم با دینامیک غیر خطی $\mathcal{N}_1$ است. می‌توان نشان داد:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

$$\delta_s^{NL}\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)\left(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2\right)\geq \sup_{m\in[0,1,\ldots,\infty]}\sup_{n\in[0,1,\ldots,\infty]}\left\|\tilde{G}_m G_n\right\|_\infty$$
$$=\sup_{m\in[0,1,\ldots,\infty]}\sup_{n\in[0,1,\ldots,\infty]}\delta_v\left(\mathcal{P}_m,\mathcal{P}_n\right)=\delta_s\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)\left(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2\right) \quad (۲۳)$$

در نهایت، $\delta_s\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)\left(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2\right)$، متریک s-gap نامیده می‌شود. در این رابطه مجدداً یادآوری می‌شود که $G_i=\begin{bmatrix}N_i\\M_i\end{bmatrix}\in\mathcal{H}_\infty$ و $\tilde{G}_i=\begin{bmatrix}-\tilde{M}_i & \tilde{N}_i\end{bmatrix}\in\mathcal{H}_\infty$ است.

ایده اصلی در تعریف s-gap این است که $\delta_s\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)\left(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2\right)<b_{\mathcal{N}_1,C}$ پایداری سیستم حلقه بسته را نتیجه می‌دهد که در قضیه سوم این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما، لازم است که قبل از ارائه قضیه پایداری که قضیه اصلی این مقاله است، نحوه محاسبه GSM (در قالب قضیه ۲) بیان شود. در این قضیه به محاسبه GSM برای سیستم حلقه بسته با دینامیک غیرخطی در فضای اپراتوری S پرداخته می‌شود.

قضیه ۲: برای جفت $\begin{bmatrix}\mathcal{N}_1 & C\end{bmatrix}$، مقدار GSM به صورت زیر قابل بیان است:

$$b^S_{\mathcal{N}_1,C}(\mathcal{P})=\sup_{l\in\{1,\ldots,\infty\}}\inf_{C\in\mathcal{H}_\infty}\left\|\begin{bmatrix}(I-CP_l)^{-1} & -(I-CP_l)^{-1}C\\ P_l(I-CP_l)^{-1} & -P_l(I-CP_l)^{-1}C\end{bmatrix}\right\| \quad (۲۴)$$

در این رابطه $b^S_{\mathcal{N}_1,C}\left(\mathcal{P}\right)$ مقدار GSM را در فضای اپراتوری S و بر روی ناحیه عملکرد $\mathcal{P}$ را نشان می‌دهد.

اثبات: با توجه به توضیحات پیشین، سیستم غیرخطی $\mathcal{N}_1:\dot{x}(t)=f\left(x(t),u(t)\right)$ را می‌توان بر حسب تغییرات زمان، به صورت اپراتور متغیر با زمان $\mathcal{P}_l=\left\{A_l,\begin{bmatrix}B_l & I\end{bmatrix},I,\mathbf{0}\right\}$ در فضای اپراتوری S نشان داد. در این صورت بلوک دیاگرام‌های نشان داده شده در شکل (۲) و معادل آن در فضای اپراتوری S در شکل (۳) را در نظر بگیرید. توجه داریم که می‌توان تابع تبدیل اپراتور $P_l=\begin{bmatrix}u_1\\f_1\end{bmatrix}\to x_1$ را به صورت $\mathcal{P}_t=\left\{A_t,\begin{bmatrix}B_t & I\end{bmatrix},I,\mathbf{0}\right\}$ درنظر گرفت. در این صورت می‌توان کنترل کننده را به صورت یک mapping به صورت $C:x_2\to\begin{bmatrix}u_2\\f_2\end{bmatrix}$ در نظر گرفت. ذکر این نکته لازم است که در واقع عنصری از C که x_2 را به f_2 نگاشت می‌دهد برابر با ماتریس صفر با ابعاد مناسب است. بدین ترتیب، برای هر فریم زمانی t_l می‌توان سیستم حلقه بسته را به صورت اپراتور $H:\begin{bmatrix}u_0\\f_0\\x_0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}u_1\\f_1\\x_1\end{bmatrix}$، با رابطه زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix}u_1\\f_1\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(I-CP_l)^{-1} & -(I-CP_l)^{-1}C\\ P_l(I-CP_l)^{-1} & -P_l(I-CP_l)^{-1}C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0\\f_0\\x_0\end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

بنابراین در فریم زمانی l، داریم:

$$\sup_{\begin{bmatrix}u_0\\f_0\\x_0\end{bmatrix}\in L_2}\frac{\left\|\begin{bmatrix}u_1\\f_1\\x_1\end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix}u_0\\f_0\\x_0\end{bmatrix}\right\|}= \quad (۲۶)$$
$$\left\|\begin{bmatrix}(I-CP_l)^{-1} & -(I-CP_l)^{-1}C\\ P_l(I-CP_l)^{-1} & -P_l(I-CP_l)^{-1}C\end{bmatrix}\right\|_\infty$$

این رابطه مقدار باند بهره سیستم حلقه بسته را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهد و اثبات تمام است.

$$b^S_{\mathcal{N}_1,C}(\mathcal{P})= \quad (۲۷)$$
$$\inf_{l\in\{0,\ldots,\infty\}}\left\|\begin{bmatrix}(I-CP_l)^{-1} & -(I-CP_l)^{-1}C\\ P_l(I-CP_l)^{-1} & -P_l(I-CP_l)^{-1}C\end{bmatrix}\right\|^{-1}_\infty$$

در ادامه لازم است که قضیه پایداری بر اساس معیار s-gap در قضیه ۱ و GSM سیستم حلقه بسته در قضیه ۲ بیان شود. این مطلب در قضیه ۳ آورده می‌شود.

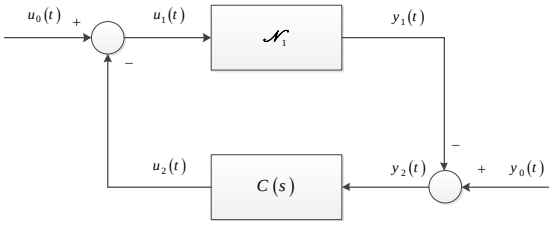
قضیه ۳: فرض کنید جفت $\begin{bmatrix}\mathcal{N}_1 & C\end{bmatrix}$ بر روی حوزه $\mathcal{P}$ پایدار باشد. در این صورت جفت $\begin{bmatrix}\mathcal{N}_2 & C\end{bmatrix}$ بر روی حوزه $\mathcal{P}$ پایدار است اگر و فقط اگر:

$$\delta_s\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)\left(\mathcal{P},\mathcal{P}\right)<b^S_{\mathcal{N}_1,C}\left(\mathcal{P}\right) \quad (۲۸)$$

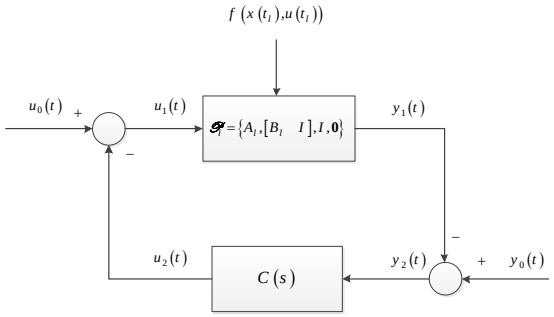
اثبات: با توجه به نتایج ارائه شده در قضیه ۱ از [۱۴]، پایداری سیستم در صورتی امکان پذیر است که $\delta_g\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)<b_{\mathcal{N}_1,C}$ برقرار باشد. با توجه به اینکه همواره نامساوی‌های $b^S_{\mathcal{N}_1,C}\left(\mathcal{P}\right)<b_{\mathcal{N}_1,C}$ و $\delta_g\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)<\delta_s\left(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\right)\left(\mathcal{P},\mathcal{P}\right)$ برقرار هستند،

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

لذا می‌توان نامساوی $\delta_g\left(\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2\right)<b_{\mathscr{N}_1,C}$ را از نامساوی (۲۸) نتیجه گرفت که پایداری سیستم حلقه بسته با آرایش $\begin{bmatrix}\mathscr{N}_2 & C\end{bmatrix}$ بر روی حوزه $\mathscr{D}$ را نتیجه می‌دهد.



شکل (۲): بلوک دیاگرام استاندارد سیستم کنترل غیرخطی حلقه بسته با کنترل کننده خطی



شکل (۳): بلوک دیاگرام معادل شکل (۲) در فضای اپراتوری تعریف شده

بدین ترتیب، قضایای مطرح شده در این مقاله به بیان مفاهیم جدیدی در پایداری سیستم‌های غیرخطی با کنترل کننده خطی مطابق بلوک دیاگرام شکل (۲) می‌پردازد. جذابیت متریک $\delta_s\left(\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2\right)\left(\mathscr{D},\mathscr{D}\right)$ به بیان رفتار فرکانسی اپراتورهای ایجاد شده توسط دو سیستم غیرخطی خلاصه می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان نتایج حاصله را به صورت ضعیف‌ترین توپولوژی ایجاد شده توسط دو سیستم غیرخطی $\mathscr{N}_1$ و $\mathscr{N}_2$ در نظر گرفت که در کنار باند بهره محاسبه شده در فضای S، آنالیز پایداری مقاوم را ممکن می‌سازد. یکی از کاربردهای این روش را می‌توان در تعیین ناحیه جذب سیستم‌های غیرخطی با استفاده از کنترل کننده خطی در حضور نامعینی مدل نشده در نظر گرفت.

در آنالیز پایداری سیستم‌های حلقه بسته غیرخطی با استفاده از روش پایداری ارائه شده، در نظر گرفتن تبصره‌های زیر ضروری است.

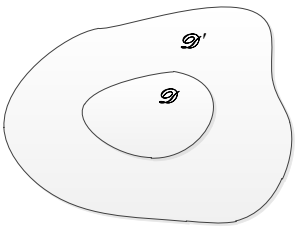
تبصره ۱: به منظور محاسبه مقدار $\delta_s\left(\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2\right)\left(\mathscr{D},\mathscr{D}\right)$، لازم است که ناحیه $\mathscr{D}$ با در نظر گرفتن تعداد کافی نقطه کار گسسته سازی شود. در ادامه ضمن استخراج مدل خطی سیستم در نقاط مذکور، فضای اپراتوری به فرم $\mathscr{P}_l$ تشکیل شود که اندیس l نشان دهنده شماره نقطه کار است. در نهایت بیشترین مقدار v-gap بین نقاط مذکور مقدار $\delta_s\left(\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2\right)\left(\mathscr{D},\mathscr{D}\right)$ را نشان می‌دهد.

تبصره ۲: در طراحی کنترل تنظیم برای سیستم غیرخطی، لازم است که ابتدا ناحیه قرار گیری حالت‌ها حول نقطه کار که معادل حالت گذرای سیستم حلقه بسته است انتخاب گردد. در ادامه مقدار s-gap بین نقطه کار و ناحیه مورد نظر محاسبه می‌شود. حال کنترل کننده طراحی شده برای نقطه کار باید حاشیه پایداری تعمیم یافته‌ای بیشتر از مقدار s-gap بر روی ناحیه مذکور تضمین دهد تا سیستم حلقه بسته در ناحیه مذکور پایدار مقاوم باشد.

تبصره ۳: کنترل ردیابی نیز دقیقاً مانند کنترل کننده تنظیم قابل پیاده سازی است. در این حالت باید ناحیه‌ای حول ناحیه تغییرات مرجع تعیین شود تا ضمن قرار گرفتن حالت‌های سیستم در ناحیه مذکور، شرایط پایداری مقاوم s-gap را برآورده کند. به عبارتی فرض کنیم ناحیه تغییرات حالت‌های مرجع به صورت $\mathscr{D}$ نشان داده شود. در این صورت لازم است است ناحیه $\mathscr{D}'$ تعیین شود. تعبیر هندسی این حالت در شکل (۴) نشان داده شده است.

این ناحیه با توجه به نامساوی $\delta_s\left(\mathscr{N},\mathscr{N}\right)\left(\mathscr{D},\mathscr{D}'\right)\le\gamma^{-1}$ تعیین می‌شود. به عبارتی اگر حالت گذرایی در سیستم ظاهر شود که سبب قرار گیری حالت‌ها در ناحیه $\mathscr{D}'$ باشد، در صورتی که حاشیه بهره کنترل کننده شرایط $\delta_s\left(\mathscr{N},\mathscr{N}\right)\left(\mathscr{D},\mathscr{D}'\right)\le\gamma^{-1}$ را برآورده کند، سیستم پایدار مقاوم خواهد بود.

تبصره ۴: توجه داریم که در تبصره‌های قبلی، مساحت ناحیه وابستگی شدید به حاشیه پایداری تعمیم یافته دارد. لذا طراحی مناسب کنترل کننده نقش مستقیمی در اندازه ناحیه دارد. به عبارت دقیق‌تر در صورتی که کنترل کننده مقاوم تر باشد، ناحیه مذکور وسیع‌تر خواهد بود که کاملاً منطقی است.



شکل (۴): نمایش ناحیه مجاز برای قرار گرفتن مرجع ($\mathscr{D}$) و حالت‌های سیستم واقعی ($\mathscr{D}'$)

۵- نتایج شبیه سازی

برای بررسی و صحت سنجی روش ارائه شده ، در این بخش به ارائه دو مثال خواهیم پرداخت. مثال اول یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است و

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

مثال‌های بعدی دستگاه CSTR است. برای هر مثال نیز دو حالت کنترل تنظیم و ردیابی مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

مثال ۱: سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 = \ln(x_1) x_2^{2/3} + \lambda x_1 x_2 + u \end{cases} \quad (۲۹)$$

فرض بر این است که $\lambda x_1 x_2$ با $\lambda \in [0 \quad 0.1]$ دینامیک مدل نشده است و طراح اطلاعی از مقدار دقیق λ ندارد. در ادامه دینامیک سیستم بدون در نظر گرفتن ترم نامعین، به صورت $\mathcal{N}_1$ و با در نظر گرفتن ترم نامعین به صورت $\mathcal{N}_2$ نشان داده می‌شود. در صورتی که $y = x_1$ در نظر گرفته شود، تابع تبدیل سیستم حول نقطه کار $[x_1 \quad x_2 \quad u]^T = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ با حذف دینامیک مدل نشده، به صورت زیر قابل بیان است:

$$P(s) = \frac{-1}{s^2 - 2s + 1} \quad (۳۰)$$

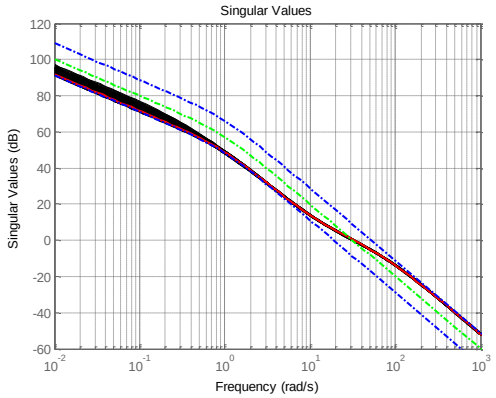
کنترل کننده شکل‌دهی بهره با مقاومت بیشینه از حل مسئله بهینه سازی زیر حاصل می‌شود.

$$\inf_K \left\| \begin{bmatrix} W_1^{-1} K \\ W_2 \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \begin{bmatrix} W_2^{-1} & GW_1 \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (۳۱)$$

که در آن W_1 و W_2 ضرائب وزنی می‌باشند. می‌توان نشان داد که کنترل کننده دینامیکی حاصل باند بهره را به صورت $\gamma = \left(1 - \left\| [N \quad M] \right\|_H^2\right)^{-0.5}$ نتیجه می‌دهد. با انتخاب ضرائب وزنی به صورت $W_1 = 100 + \frac{300}{s}$ و $W_2 = 1$، کنترل کننده به صورت

$$C(s) = 2578.7 \frac{(s + 11.56)(s + 1.01)}{s(s + 77.89)} \quad (۳۲)$$

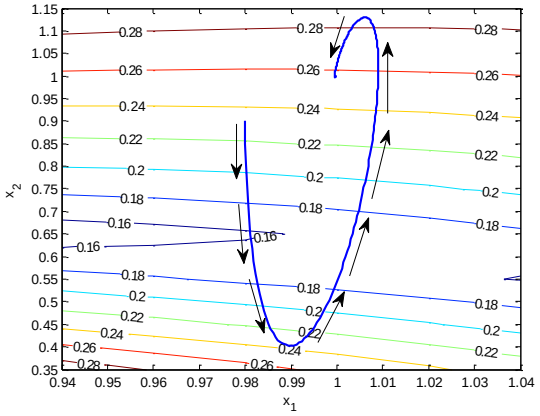
حاصل می‌شود که مقدار باند بهره را به صورت $\gamma = 2.7658$ را نتیجه می‌دهد. حال فرض کنیم هدف بررسی پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته در ناحیه $x_1 \in [0.94 \quad 1.04], x_2 \in [0.35 \quad 1.15]$ باشد. در این صورت رفتار مقدار تکین ماکزیمم بهره حلقه در دامنه عملکردی در فضای اپراتوری S به صورت شکل (۵) قابل بیان است. ابتدا فرض کنید تابع تبدیل سیستم در نقاط کار غیر از نقطه کار $[x_1 \quad x_2 \quad u]^T = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ به صورت P' نشان داده شود. در این صورت با توجه به نمودار مشاهده می‌شود که نمودار تکین مسیر پیشرو (CP) در نقطه کار (نمودار قرمز رنگ) و مسیر پیشرو CP' (نمودارهای مشکی رنگ) همواره در باند فرکانسی $\gamma = 2.7658$ (مرزهای آبی رنگ) قرار دارند. به عبارتی نمودار تکین مسیر پیشرو در نقطه کار در میان مرزهای باند بهره $\gamma = 2.7658$ قرار دارند و تغییرات سیستم غیرخطی سبب ایجاد مدل‌هایی می‌شود که در باند مذکور قرار می‌گیرد. این مسئله نشان می‌دهد که نامعینی فرکانسی از ناحیه مجاز (GSM) تجاوز نکرده و سیستم پایدار مقاوم است. در واقع در این حالت بدون محاسبه مقدار s-gap، مشاهده می‌شود که شرایط پایداری مقاوم برقرار است و پاسخ فرکانسی سیستم‌های نامعین همواره در باند نامعینی مذکور قرار می‌گیرد.



شکل (۵): نمودار مقدار تکین مسیر پیشرو (CP) در نقطه کار (نمودار قرمز رنگ)، مرزهای فرکانسی تضمین GSM (نمودارهای خط چین آبی رنگ)، مسیر پیشرو $W_1 P$ (نمودار سبز رنگ) و CP' (نمودار های مشکی رنگ)

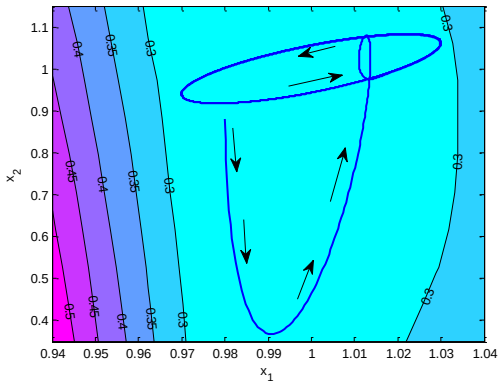
از طرفی، می‌توان ادعا کرد که در ناحیه $\mathscr{D}$ همواره نامساوی $\delta_s(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)(\mathscr{D}, \mathscr{D}) < 0.3616$ برقرار است. این موضوع در شکل (۶) نشان داده شده است. با توجه به کانتورهای موجود در شکل که سطح $\delta_s(P', \mathcal{N}_2)(\infty, \mathscr{D}_2)$ را نشان می‌دهد، مشاهده می‌شود که همواره نامساوی $\delta_s(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)(\mathscr{D}, \mathscr{D}) < 0.3616$ برقرار است. این بدان معنی است که اگر مسیر حالت‌های سیستم در $\mathscr{D}$ قرار گیرد، سیستم پایدار مقاوم است و دینامیک مدل نشده به همراه رفتار غیرخطی، اختلالی در عملکرد حلقه کنترلی ایجاد نخواهد کرد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]



شکل (۶): حرکت مسیرهای حالت سیستم و مقادیر سطوح متریک s-gap در دامنه عملکردی

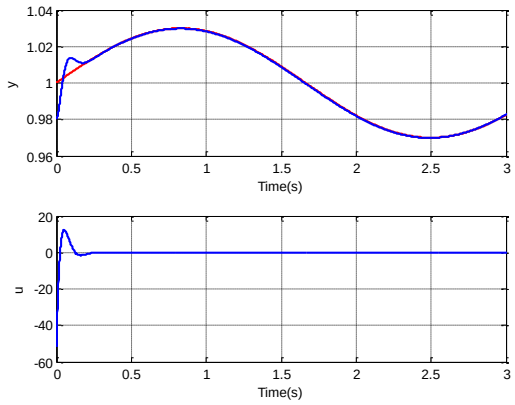
در ادامه به کنترل سیستم برای ردیابی ورودی متغیر با زمان خواهیم پرداخت. در این حالت باید ابتدا ناحیه مجاز برای تضمین پایداری تعیین گردد. به عنوان مثال فرض کنید هدف ردیابی سیگنال $r(t)=0.03\sin(0.6\pi t)+1$ باشد. بدین جهت در ابتدا، لازم است بر روی ناحیه تعریف شده برای عملکرد سیستم حلقه بسته، مقدار s-gap تعیین شود. این مسئله در شکل (۷) نشان داده شده است.



شکل (۷): حرکت حالت‌های سیستم و برقراری شرایط پایداری مقاوم s-gap

همچنین، در این شکل مسیر حرکت حالت‌های سیستم حلقه بسته نشان داده شده است. توجه داریم که مقدار GSM برابر با 0.3616 است. این بدان معنی است که حالت‌های سیستم نباید در مرز s-gap برابر با 0.3616 قرار بگیرند. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که این شرط رعایت شده است و بدین ترتیب می‌توان ادعا کرد که کنترل کننده شرایط پایداری s-gap را رعایت کرده است.

نتایج ردیابی بر حسب زمان در شکل (۸) نشان داده شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که ردیابی کنترل کننده به صورت مناسب انجام شده است. در مورد نحوه انتخاب زمان نشست کنترل کننده، ذکر این نکته لازم است که این مقدار به GSM ارتباط دارد. در واقع اگر این مقدار بزرگ باشد، مقدار GSM بزرگتری حاصل خواهد شد و در نتیجه ناحیه پایداری بزرگتری برای سیستم حلقه بسته حاصل می‌شود. همچنین، عکس این مطلب نیز صادق است.



شکل (۸): نتایج ردیابی کنترل کننده مقاوم برای ورودی متغیر با زمان

مثال ۲: سیستم CSTR با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + \theta(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = -c_1 x_2 + \theta(x_1,x_2) - c_4 x_2 + c_4 u\end{cases} \quad (۳۳)$$

در این رابطه، $\theta(x_1,x_2)=c_2(1-x_1)e^{x_2/(1+x_2/c_3)}$ بوده و مقادیر ثابت به صورت $c_1=1$، $c_2=1$، $c_3=20$ و $c_4=0.3$ است. به منظور توضیح بیشتر، در رابطه فوق، ذات اصلی پارامترها به صورت $x_1=(C_{Af}-C_A)/C_{Af}$، $x_2=c_3(T-T_{f0})/T_{f0}$ و $u=c_3(T_c-T_{f0})/T_{f0}$ است که در آن پارامترها و متغیرهای C_{Af}، C_A، T، T_{f0} و T_c به ترتیب بیان کننده غلظت تغذیه، غلظت مقاومتی، دمای راکتور، دمای نامی راکتور و دمای خنک کننده می‌باشند. ناحیه کاری سیستم به صورت $x_1,x_2\in[0.40,0.80]$ انتخاب می‌شود. فرض کنید هدف کنترل سیستم حول نقطه کار $[x_1 \quad x_2 \quad u]^T=[0.6193 \quad 0.5000 \quad 0.1014]^T$ باشد. در این صورت، خطی سازی سیستم حول نقطه کار مذکور تابع تبدیل زیر را نتیجه می‌دهد:

$$P(s)=\frac{0.3s+0.7886}{s^2+3.3390s+2.8280} \quad (۳۴)$$

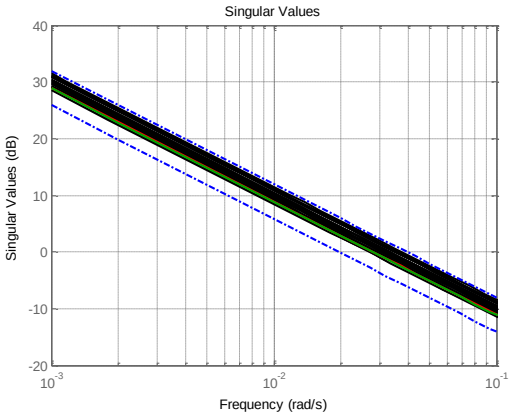
روند طراحی کنترل کننده را با حل معادله بهینه سازی (۳۱) برای تابع تبدیل (۳۴) ادامه می‌دهیم. با توجه به اینکه هدف دست‌یابی به زمان نشست ۲۰۰ ثانیه است، لذا باید فرکانس قطع بهره مسیر حلقه باز (تابع تبدیل $C(s)P(s)$) حدود $\omega_c=0.025\,rad/s$ باشد. بدین منظور

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

ضرائب وزنی به صورت $W_1 = 0.1 + 0.1/s$ و $W_2 = 1$ انتخاب می‌شوند. این انتخاب کنترل کننده نهایی را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهد:

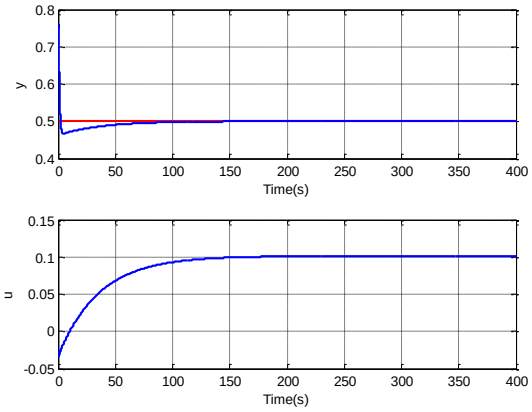
$$C(s) = -0.0995(s+1)/s \qquad (۳۵)$$

این کنترل کننده مقدار حاشیه پایداری تعمیم یافته را به صورت $\gamma = 1.4105$ را نتیجه می‌دهد. در شکل (۹)، نمودار تکین مسیر پیشرو در نقطه کار اصلی به همراه باند مجاز تغییرات نشان داده شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که مدل‌های سیستم در فضای S وقتی که ناحیه عملکرد به صورت $x_1, x_2 \in [0.40, 0.80]$ انتخاب می‌شود، همواره در باند نامعینی مجاز قرار می‌گیرند و سیستم پایدار مقاوم است.



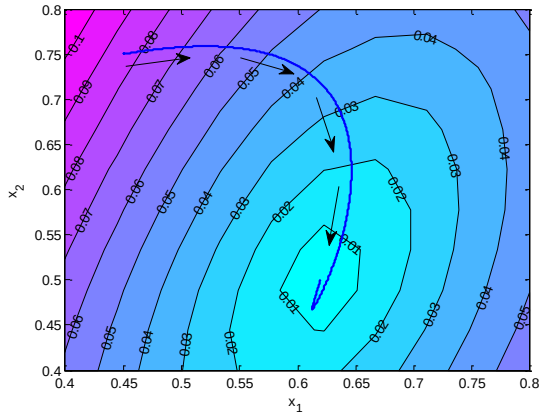
شکل (۹): نمودار مقدار تکین (CP) در نقطه کار (نمودار قرمز رنگ)، مرزهای فرکانسی تضمین GSM (نمودارهای خط چین آبی رنگ)، W_1P (نمودار سبز رنگ) و CP' (نمودار های مشکی رنگ)

در ادامه، ابتدا ردیابی سیستم حلقه بسته در حالت رگولاتوری مورد بحث قرار می‌گیرد. بدین منظور شرایط اولیه سیستم غیرخطی به صورت $[x_1 \quad x_2]^T = [0.45 \quad 0.75]^T$ در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب، نتایج ردیابی سیستم حلقه بسته در شکل (۱۰) نشان داده شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که کنترل کننده در زمان نشستی برابر با مقدار از پیش تعیین شده (حدود ۲۰۰ ثانیه) توانسته است سیستم را به نقطه کار مورد نظر هدایت کند. در ادامه، شکل (۱۱) نمودار حرکت حالت‌ها در دو بعد را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که در طول مسیر حرکت حالت‌ها و ناحیه‌ای که حالت‌ها در آن قرار دارند، شرط پایداری مقاوم در فضای S برآورده می‌شود. به عبارت دیگر، مقدار سطوح s-gap از مقدار GSM ($\gamma^{-1} = 0.7090$) کمتر است.



شکل(۱۰): نتایج کنترل کننده تنظیم برای انتقال حالت‌های سیستم به نقطه کار

$$[x_1 \quad x_2 \quad u]^T = [0.6193 \quad 0.5000 \quad 0.1014]^T$$

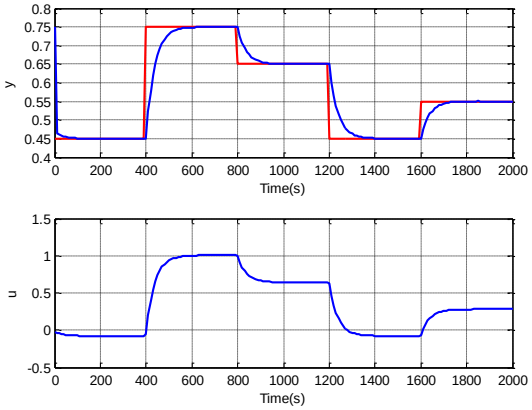


شکل (۱۱): نتایج حرکت مسیر حالت به سمت نقطه کار

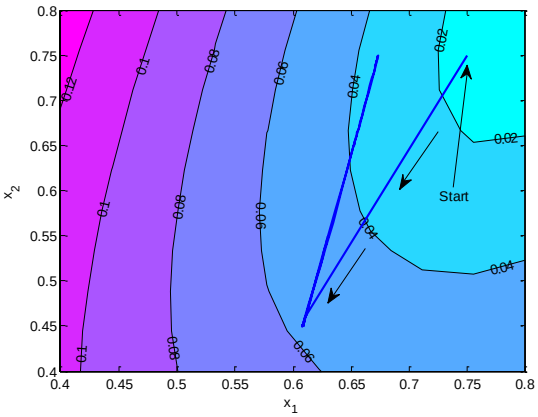
$$[x_1 \quad x_2 \quad u]^T = [0.6193 \quad 0.5000 \quad 0.1014]^T$$ و عبور از سطوح متریک s-gap

در ادامه نتایج برای ردیابی کنترل کننده در شکل (۱۲) ارائه شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که نتایج ردیابی به خوبی حاصل شده است. در واقع، ادعای پایداری مقاوم در این حالت، زمانی ایجاد می‌شود که حرکت حالت‌ها در ناحیه‌ای باشد که شرط پایداری s-gap برآورده گردد. بدین منظور در شکل (۱۳) حرکت مسیر حالت‌ها و سطوح متریک s-gap نشان داده شده است. با توجه به این سطوح مشاهده می‌شود که حرکت حالت‌ها در ناحیه‌ای است که مقدار سطوح از مقدار GSM ($\gamma^{-1} = 0.7090$) کمتر است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]



شکل (۱۲): نتایج ردیابی کنترل کننده مقاوم برای دستگاه CSTR



شکل (۱۳): نمایش سطوح متریکی و مسیر حرکت حالت‌های سیستم در دو بعد

در مثال‌های فوق، سعی کردیم اهمیت تعریف متریک s-gap و GSM در فضای اپراتوری S نشان داده شود. در واقع با استفاده از سطوح متریکی تعریف شده در فضای حالت‌ها مشاهده کردیم که می‌توان درباره پایداری سیستم غیرخطی بر روی یک ناحیه مشخص نظر داد. از طرفی، ذکر این نکته لازم است که معیار s-gap مقدار بزرگتری نسبت به v-gap اتخاذ می‌کند. دلیل این مسئله این است که ابعاد بزرگتری برای اپراتورها در معیار s-gap در نظر گرفته می‌شود. به منظور بیان بهتر، در مقالات ارائه شده در این زمینه مانند [۱۶]، به مقایسه تمام مدل‌های تشکیل شده به فرم $\mathscr{P}_l = \{A_l, B_l, I, \mathbf{0}\}$ پرداخته شده است. حال آنکه در معیار s-gap، این مقایسه به $\mathscr{P}_l = \{A_l, [B_l \quad I], I, \mathbf{0}\}$ معطوف شده است. با توجه به ابعاد ورودی بیشتر، در این حالت واضح است که مقدار s-gap بزرگتر از v-gap است. این نکته بسیار مهم است زیرا ممکن است v-gap نقاطی را برای پایداری پیشنهاد دهد که از نظر s-gap پایدار نیستند و قرار گرفتن حالت‌های سیستم در آن ناحیه غیرمنطقی است.

۶- نتیجه‌گیری

توسعه نتایج اپراتوری به عنوان ابزارهایی در راستای بررسی مقاومت سیستم حلقه بسته با دینامیک غیرخطی، در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. بر اساس نتایج حاصل، فاصله بین دو سیستم غیرخطی به صورت فاصله بین مجموعه‌ای از فضای اپراتوری با ساختار جدیدی قابل بیان خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر، توانستیم با توسعه تعاریف مربوطه در فضای اپراتوری، فضایی تعریف کنیم که در آن هر اپراتور غیرخطی دیفرانسیل پذیر را می‌توان به صورت نقطه‌ای درنظر گرفت. این نقطه به صورت دنباله‌ای شامل تفکیک‌های چپ و یا راست یکه از مدل‌های خطی در فضای اپراتوری S خواهد بود. در ادامه با انتقال مسئله متریک غیرخطی در فضای هیلبرت به فضای اپراتوری S توانستیم صورت صریحی برای رابطه متریک غیرخطی در حوزه فرکانس تحت عنوان s-gap بیان کنیم. همچنین، با تعریف فضای اپراتوری جدید، محاسبات مربوط به باند بهره (و یا GSM) برای سیستم‌های کنترلی حلقه بسته با دینامیک غیرخطی به صورت بیانی فرکانسی مطرح شد. در پایان با استفاده از متریک s-gap و باند بهره جدید، توانستیم تئوری جدیدی برای ارائه پایداری سیستم‌های کنترل غیرخطی مطرح کنیم.

در انتشارات آینده، کاربرد تئوری جدید در سیستم‌های کنترل چندگانه و آنالیز پایداری مقاوم سیستم‌های کنترل مقید با دینامیک غیرخطی ارائه خواهد شد.

۷- مراجع

[1] T. T. Georgiou and M. C. Smith, “Optimal robustness in the gap metric,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 6, pp. 673–686, 1990.

[2] G. Vinnicombe, “Frequency domain uncertainty and the graph topology,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 9, pp. 1371–1383, 1993.

[3] G. Vinnicombe, *Uncertainty and Feedback: H [infinity] Loop-shaping and the [nu]-gap Metric*. World Scientific, 2001.

[4] S. Kersting and M. Buss, “How to Systematically Distribute Candidate Models and Robust Controllers in Multiple-Model Adaptive Control: A Coverage Control Approach,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 63, no. 4, pp. 1075–1089, 2018.

[5] M. Ahmadi and M. Haeri, “Multimodel control of nonlinear systems: An improved gap metric and stability margin-based method,” *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 140, no. 8, 2018.

[6] S. Saki, H. Bolandi, and S. K. Mousavi Mashhadi, “Optimal direct adaptive soft switching multi-model predictive control using the gap metric for spacecraft attitude control in a wide range of

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]

and coprime factor uncertainty for LTV systems," *Syst. Control Lett.*, vol. 80, pp. 16–22, 2015.

[20] M. S. Akram and M. Cantoni, "Gap metrics for linear time-varying systems," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 56, no. 2, pp. 782–800, 2018.

[21] M. Cantoni and H. Pfifer, "Gap metric computation for time-varying linear systems on finite horizons," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 14513–14518, 2017.

[22] K. Glover and D. McFarlane, "Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H/sub infinity/-bounded uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 821–830, 1989.

[23] V. Zahedzadeh, H. J. Marquez, and T. Chen, "On the computation of an upper bound on the gap metric for a class of nonlinear systems," in *2008 American Control Conference*, 2008, pp. 1917–1922.

[24] V. Zahedzadeh, H. J. Marquez, and T. Chen, "Upper bounds for induced operator norms of nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 54, no. 5, pp. 1159–1165, 2009.

[25] V. Zahedzadeh, H. J. Marquez, and T. Chen, "On the robust stability of unforced nonlinear systems," in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, pp. 343–348.

[26] V. Zahedzadeh, H. J. Marquez, and T. Chen, "On the input-output stability of nonlinear systems: Large gain theorem," in *2008 American Control Conference*, 2008, pp. 3440–3445.

[27] K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of robust control*, vol. 104. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998.

[28] A. El-Sakkary, "The gap metric: Robustness of stabilization of feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, no. 3, pp. 240–247, 1985.

operating points," *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 77, 2018, doi: 10.1016/j.ast.2018.03.001.

[7] S. X. Ding, "Application of factorization and gap metric techniques to fault detection and isolation part I: A factorization technique based FDI framework," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 21, pp. 113–118, 2015.

[8] L. Li and S. X. Ding, "Gap metric techniques and their application to fault detection performance analysis and fault isolation schemes," *Automatica*, vol. 118, p. 109029, 2020.

[9] T. Koenings, M. Krueger, H. Luo, and S. X. Ding, "A data-driven computation method for the gap metric and the optimal stability margin," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 63, no. 3, pp. 805–810, 2017.

[10] H. Bolandi and S. Saki, "Design of adaptive model predictive control for a class of uncertain non-linear dynamic systems: stability, convergence, and robustness analysis," *IET Control Theory Appl.*, vol. 13, no. 15, pp. 2376–2386, 2019.

[11] D. Shaghaghi, A. Fatehi, and A. Khaki-Sedigh, "Multi-linear model set design based on the nonlinearity measure and H-gap metric," *ISA Trans.*, vol. 68, pp. 1–13, 2017.

[12] M. Ahmadi and M. Haeri, "A systematic decomposition approach of nonlinear systems by combining gap metric and stability margin," *Trans. Inst. Meas. Control*, vol. 43, no. 9, pp. 2006–2017, 2021.

[13] X. Tao, N. Li, and S. Li, "Multiple model predictive control for large envelope flight of hypersonic vehicle systems," *Inf. Sci. (Ny).*, vol. 328, pp. 115–126, 2016.

[14] T. T. Georgiou and M. C. Smith, "Robustness analysis of nonlinear feedback systems: An input-output approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 9, pp. 1200–1221, 1997.

[15] T. Gong and Y. Lu, "The relationship between gap metric and time-varying gap metric for linear time-varying systems," *Int. J. Innov. Comput. Inform. Control*, vol. 9, pp. 2125–2141, 2013.

[16] B. D. O. Anderson, T. S. Brinsmead, and F. De Bruyne, "The Vinnicombe metric for nonlinear operators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 9, pp. 1450–1465, 2002.

[17] S. Z. Khong and M. Cantoni, "On the metric property of an LTV generalisation of the v-gap," in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012, pp. 214–219.

[18] S. Z. Khong and M. Cantoni, "Gap metrics for time-varying linear systems in a continuous-time setting," *Syst. Control Lett.*, vol. 70, pp. 118–126, 2014.

[19] S. M. Djouadi, "On robustness in the gap metric

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.4.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.41]