



طراحی الگوریتمی برای افزایش همگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته مبنی بر مدل پیش‌بین تفاضلی در ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی و تحلیل پایداری آن

نعمت‌الله قهرمانی^۱، حسن مجید الحسن^۲

^۱ دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، ghahremani@mut.ac.ir

^۲ دانشجوی دکتری مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، hassan.majed.alhassan@gmail.com

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۴

دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۴

چکیده: در این مقاله نوعی فیلتر پیش‌بین با رویکرد جدید برای ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی با مدل غیرخطی ارائه و پایداری آن تحلیل شده است. پایداری فیلتر جدید بر اساس روش لیاپانوف مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. تابع لیاپانوف را به صورت تابع هزینه درجه دوم انتخاب می‌شود. این روش شرایط کافی را برای پایداری حالت تعادل در برابر عدم قطعیت و نویزهای اندازه‌گیری ارائه می‌دهد. از روش پیشنهادی برای بهبود دقت ترازیابی اولیه یک سامانه ناوبری اینرسی با عدم قطعیت و خطای سمت با مقدار بزرگ استفاده شده است. مدل اندازه‌گیری این سامانه غیرخطی بوده و دارای خطای مدل‌سازی است. در این روش خطای مدل تخمین زده شده و سپس در الگوریتم فیلتر این خطای جبران می‌شود؛ به همین خاطر خطای حالت‌های تخمین نیز در مرحله بهینگانم اطلاعات فیلتر کاهش می‌یابد. با انجام شبیه‌سازی‌های گوناگون این روش بر روی داده‌های واقعی حسگر میکرو الکترومکانیکی MEMS و با مقایسه آن با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو، مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی دقت و سرعت همگرایی بالاتری نسبت به فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو دارد. اثبات می‌شود الگوریتم جدید دارای پایداری مجانبی است.

کلمات کلیدی: فیلتر کالمن توسعه یافته، مدل پیش‌بین، خطای مدل، ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی. تحلیل پایداری.

Design of a new algorithm to improve the convergence of extended Kalman filter based on incremental predictive model for inertial navigation system alignment and its stability analysis

Nemat Allah Ghahremani, Hassan Majed Alhassan

Abstract: In this paper, a new predictive filter for alignment of the inertial navigation system with a nonlinear model is presented, and its stability is analyzed. The stability is analyzed according to the Lyapunov method. The Lyapunov function is selected as a quadratic cost function. This method provides sufficient conditions for the stability of the estimated state against measurement uncertainty and noise. The proposed method is used to improve the initial alignment accuracy of the inertial navigation system with a large misalignment azimuth angle. The measurement model of this system is nonlinear and has a modeling error. In this method, the model error is estimated and compensated in the filter algorithm; therefore, the error of the state estimation is reduced in the updating step. By performing various simulations of this method on the real data of microelectromechanical (MEMS) sensor and comparing it with EKF and UKF, it is observed that the proposed method has higher accuracy and convergence speed than EKF and UKF. The new filter proves to have asymptotic stability.

Keywords: Stability analyses, predictive filter, model error, nonlinear alignment, inertial navigation system.

۱- مقدمه

این به شرط آن است که تمام حالت‌های سیستم کاملاً مشاهده‌پذیر باشند. در مرجع [۱۳]، شرایط پایداری کلاس بزرگی از خانواده فیلتر کالمن که حتی دارای حالت مشاهده‌پذیر باشد غیرخطی می‌باشد، ارائه شده است. در این مقاله تجزیه و تحلیل پایداری با استفاده از مفهوم محدود بودن متوسط مربعات خطای فیلتر و ماتریس کوواریانس خطای صورت گرفته است.

از طرف دیگر، حتی اگر نویز به صورت گوسی باشد، به دلیل تأثیر دینامیک غیرخطی، حالت‌ها یا اندازه‌گیری‌ها غیر گوسی خواهند بود. فیلتر EKF^۱ می‌تواند با نویز غیر گوسی سازگار شود [۱۴]؛ بنابراین، مسئله تخمین در حضور نویز غیر گوسی مسئله مهمی است. تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه صورت گرفته است. مثلاً در مرجع [۱۵]، برای افزایش دقت تخمین در حضور نویز غیر گوسی در روش EKF^۲، طراحی یک جبران‌کننده با عوامل غیرخطی در قالب چندجمله‌ای‌ها با پارامترهای قابل تنظیم پیشنهاد شده است که این طراحی منجر به پایداری مجانبی فیلتر می‌شود. در این مقاله، یک الگوریتم پیش‌بین تفاضلی^۳ (IPA) برای کمینه نمودن خطای مدل‌سازی و خطای ماتریس کوواریانس نویز فرایند و نویز اندازه‌گیری ارائه شده است. این فیلتر از ایده کنترل پیش‌بین تفاضلی تعیین یافته^۴ (GIPC) گرفته شده است [۱۶، ۱۷]. در روش ارائه شده معادلات فضای حالت به فرم تفاضلی نوشتۀ شده و تخمین حالت‌ها بر حسب حالت‌های فعلی و گذشته بیان شده است. مهم‌ترین مزیت این روش آن است که در معادلات تخمین، خطای مدل پس از محاسبه جبران و تصحیح می‌شود. با ترکیب روش‌های EKF و IPA الگوریتم جدیدی به نام فیلتر کالمن توسعه یافته پیش‌بین تفاضلی^۵ (IPEKF) ارائه شده است. برای نشان دان کارایی فیلتر جدید، از این فیلتر برای انجام فرآیند ترازیابی یک سامانه ناوبری اینرسی با مدل غیرخطی استفاده شده است. روش جدید توانسته دقت و زمان همگرایی را بهبود بیخشد. همچنین در بخش چهارم پایداری فیلتر پیشنهادی با استفاده از تئوری لیپانوف بررسی و تجزیه و تحلیل شده است.

مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم، فرمول‌بندی مسئله بیان می‌شود. در بخش سوم، معادلات فیلتر پیشنهادی استخراج شده و برخی نکات لازم برای بهینه‌سازی تابع هزینه بیان می‌شود. در بخش چهارم، تجزیه و تحلیل پایداری الگوریتم جدید با استفاده از قضیه پایداری لیپانوف صورت می‌گیرد. در بخش پنجم، تحلیل نتایج آزمون الگوریتم پیشنهادی بیان می‌شود و در بخش ششم، نتایج مقاله ارائه می‌گردد. در ضمیمه (الف) و (ب) روابط ریاضی مدل ترازیابی غیرخطی و الگوریتم فیلتر کالمن بدون بیان می‌شود.

فیلتر کالمن توسعه یافته^۱ (EKF) معروف‌ترین روش برای تخمین حالت‌های سامانه‌های غیرخطی از جمله سامانه ناوبری اینرسی است. این فیلتر در تلفیق داده‌های سامانه ناوبری اینرسی^۲ و سامانه موقعیت‌یاب جهانی^۳،^۴ تخمین زوایای ترازیابی اولیه^۵ [۳]، بهبود دقت سامانه‌های تعیین زوایا^۶ و تخمین حالت اینرسی^۷ [۵] دارای کاربرد است. به دلیل انتگرال‌گیری از معادلات ناوبری اینرسی و وجود خطای در خروجی حسگر‌های اینرسی خصوصاً از نوع ارزان‌قیمت میکروالکترومکانیکی MEMS که دارای دقت کم می‌باشد، باگذشت زمان خطای افزایش خواهد یافت.

با توجه به مشاهده ناپذیر بودن تعدادی از حالت‌های سیستم، زمان همگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته بسیار طولانی خواهد بود، در حالی که در ترازیابی ناوبری اینرسی زمان همگرایی باید بسیار کوتاه باشد. به علت این که فیلتر کالمن توسعه یافته در خطی سازی معادلات غیرخطی از تقریب مرتبه اول سری تیلور حول آخرین مسیر تخمین استفاده می‌کند، بنابراین اگر مسیر تخمین نزدیک به مسیر نامی معادلات باشد، همگرایی محلی این روش تضمین می‌شود [۵]. در غیر این صورت خطای سازی می‌تواند منجر به عملکرد ضعیف فیلتر شده و به علت وجود خطای مدل و خطای مخصوص آماری نویز اندازه‌گیری و سیستم، دقت تخمین کاهش یافته و حتی فیلتر واگرا شود [۶].

برای اطمینان از همگرایی EKF، پژوهش‌های فراوانی انجام شده است. مثلاً در مرجع [۷] برای جلوگیری از واگرایی روش EKF وقتی که اطلاعات دقیقی از خطاهای مدل‌سازی در دسترس نیست، الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته تطبیقی^۸ پیشنهاد شده است. این روش ماتریس‌های نویز Q و R را به گونه‌ای تنظیم می‌کند که بتواند تغییرات ایجاد شده در سیستم را دنبال کند. در مقاله [۸] تجزیه و تحلیل پایداری فیلتر محوکننده تطبیقی^۹ با استفاده از یک ضربی فراموشی برای بهبود عملکرد فیلتر کالمن صورت گرفته است. همچنین، در مقاله [۹]، تجزیه و تحلیل همگرایی فیلتر کالمن بدون بو^{۱۰} (UKF) اصلاح شده ارائه شده است. این فیلتر از روش تیلور از دقت آماری استفاده می‌کند که نسبت به خطی سازی روش تیلور از دقت بالاتری برخوردار است. در این مرجع نشان داده می‌شود که بر عکس آن که فیلتر EKF به طور نمایی پایدار است، اما UKF یک رویگر همگراییست. برخی فن‌ها وجود دارد که نشان می‌دهد در صورتی که خطای تخمین اولیه و اغتشاشات به اندازه کافی کوچک باشد، فیلتر EKF به صورت محلی دارای همگرایی مجانبی خواهد بود [۱۱]. همچنین، مرجع [۱۲] با استفاده از روش لیپانوف ثابت می‌کند که EKF دارای یک همگرایی نمایی است.

^۱ Extended Kalman Filter (EKF)

^۲ Inertial Navigation System (INS)

^۳ Global Positioning System (GPS)

^۴ Initial Alignment

^۵ Attitude Determination

^۶ Adaptive Extended Kalman Filter (AEKF)

^۷ Adaptive Fading Kalman Filter (AFKF)

^۸ Unscented Kalman Filter (UKF)

^۹ Incremental Predictive Algorithm (IPA)

^{۱۰} Generalized Incremental Predictive Control (GIPC)

^{۱۱} Incremental Predictive Extended Kalman Filter (IPEKF)

که در آن $\hat{\mathbf{x}}_{k+i}$ خطای اندازه‌گیری، $\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}$ تغییرات خطای مدل ناوبری، $i = 1, 2, \dots, p$ افق آینده و P افق پیش بین می‌باشد. با بهینه‌سازی این تابع هزینه هم خطای اندازه‌گیری با خطای تخمین کاهش می‌یابد و هم خطای مدل در سامانه ناوبری کم می‌شود. به این ترتیب دقت ترازیابی سامانه ناوبری در برابر نامعینی‌های مدل و نویز اندازه‌گیری و فرایند افزایش می‌یابد. در ادامه خواهیم دید که چگونه با بهینه‌سازی تابع فوق روش IPEKF استخراج می‌شود.

۳- فرمول بندی IPEKF

معمولًاً، در مدل‌سازی، خطای با میانگین غیر صفر را می‌توان با افزودن حالت‌های به حالت‌های مدل تخمین زد. افزایش تعداد حالت‌ها باعث کاهش میزان مشاهده‌پذیری فیلتر و افزایش بار محاسباتی آن می‌شود. در یک سامانه ناوبری به دلیل آن که ماتریس اندازه‌گیری متأثر از نامعینی‌ها می‌باشد، ممکن است واگرایی فیلتر رخ دهد. فیلتر پیشنهادی بدون افزایش حالت‌های اضافی، خطای مدل سامانه غیرخطی ناوبری را با تخمین می‌زند. در ادامه روابط ریاضی الگوریتم فیلتر پیشنهادی ارائه می‌شود.

۳-۱- الگوریتم پیش‌بین تفاضلی IPA در تخمین خطای مدل

فرم تفاضلی فضای حالت به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \Delta\mathbf{F}_k \Delta\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}_k \Delta\hat{\mathbf{m}}_k \quad (3)$$

که در آن $\Delta\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ ، $\Delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k$ ، $\Delta\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k-1}$ و $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k = \hat{\mathbf{m}}_k - \hat{\mathbf{m}}_{k-1}$ می‌باشد. با نوشتن این فرم می‌توانیم تغییرات خطای مدل $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k$ را به دست آوریم. در واقع وقتی به معادلات فوق Δ اضافه می‌کنیم، به معنی اضافه کردن انتگرال گیر به سیستم است. با این کار خطای مانای تخمین از بین می‌رود. با ترکیب معادلات فوق، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_k) \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_k \Delta\hat{\mathbf{m}}_k \quad (4)$$

که در آن \mathbf{I} ماتریس واحد، \mathbf{F}_k ماتریس ژاکوبی تابع $f(\cdot)$ می‌باشد. حالت $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ از روی حالت‌های $\hat{\mathbf{x}}_k$ و $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ به دست می‌آیند. برای محاسبه حالت در افق آینده بر اساس معادله حالت تفاضلی (۴)، رابطه کلی زیر نوشته شده است:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+p} &= \left(\sum_{i=0}^p \mathbf{F}_k^i \right) \hat{\mathbf{x}}_k - \left(\sum_{i=1}^p \mathbf{F}_{k-i} \mathbf{F}_k^{i-1} \right) \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^p \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}_k^i \right) \mathbf{G}_k \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+p-n} \end{aligned} \quad (5)$$

برای سهولت محاسبات، این دسته معادلات در قالب ماتریسی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{X}_{k+1,p} = \mathbf{F}_x \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{x-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_m \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1} \quad (6)$$

۲- مدل‌سازی ریاضی مسائله

گرچه روش EKF به صورت محلی پایدار است، اما در برخی شرایط هنگامی که تخمین حالت از مقدار نامی دور باشد، هیچ تضمینی برای همگرایی وجود ندارد. در فرایند ترازیابی INS، هنگامی که خطای تراز کوچک است مدل سیستم تقریباً خطی است. اگر خطای تراز بزرگ بوده و اطلاعات پیشین مربوط به ماتریس‌های خطای حالت و خطای اندازه‌گیری به طور دقیق مشخص نشده باشد آنگاه خطای خطی سازی می‌تواند باعث واگرایی الگوریتم EKF شود.

ترازیابی سامانه ناوبری با روش EKF دارای پنج حالت است. از طرفی به دلیل اضافه شدن مدل ژیروسکوپ و شتاب‌سنج در معادلات، تعداد حالت‌ها به 10 افزایش می‌یابد که سه تای آن‌ها مشاهده ناپذیرند. البته افزایش تعداد حالت‌ها باعث کاهش میزان مشاهده‌پذیری فیلتر و افزایش بار محاسباتی می‌شود. به همین علت نامعینی‌های ماتریس کوواریانس اندازه‌گیری، ممکن است باعث واگرایی فیلتر شود؛ بنابراین، فیلتر ناوبری به گونه‌ای باید طراحی شود که خطاهای مدل به درستی جبران شود تا فیلتر در برابر خطاهای مدل‌سازی مقاوم باشد. در این مقاله، فیلتر پیشنهادی برای حل مشکلات مهم فوق با پیش‌بینی و جبران خطاهای مدل توسعه یافته است. فیلتر پیشنهادی شامل فقط پنج حالت خطای ناوبری است و خطای مدل ژیروسکوپ و شتاب‌سنج با استفاده از الگوریتم پیش‌بین، تخمین زده می‌شود. در ترازیابی مدل غیرخطی و زمان گسته زیر در نظر گرفته شده است (توضیحات بیشتر مدل در ضمیمه الف آمده است):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، \mathbf{x}_k ، \mathbf{m}_k و \mathbf{y}_{k+1} به ترتیب بردار حالت‌های سامانه، بردار ورودی سیستم (خطای مدل) و بردار اندازه‌گیری در لحظه k می‌باشد، $f(\cdot)$ تابع غیرخطی مدل سامانه و \mathbf{H}_{k+1} مدل خطی اندازه‌گیری سامانه است، \mathbf{w}_k و \mathbf{v}_{k+1} به ترتیب یانگر نویز سامانه و نویز اندازه‌گیری هستند. فرض می‌شود این نویزها سفید گوسی با میانگین صفر بوده و ماتریس کوواریانس آن‌ها یعنی \mathbf{Q} و \mathbf{R} مستقل از هم هستند. الگوریتم‌های مختلفی برای تخمین حالت مدل غیرخطی وجود دارد که هر کدام دارای مزایهای خاص خود هستند. در این مقاله، یک روش نوین برای افزایش مقاومت تخمینگر خطاهای نویز و مدل سامانه ناوبری و جبران آن‌ها با استفاده از مفهوم الگوریتم پیش‌بین مدل با بهره گیری از بهینه‌سازی افق محدود، ارائه شده و در فیلتر کالمن توسعه یافته بکار رفته است. در این روش تابع هزینه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,p}, \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}) &= \\ \min_{\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+1,p}} & \left[\sum_{i=1}^p (\hat{\mathbf{y}}_{k+i})^T \mathbf{R}_y (\hat{\mathbf{y}}_{k+i}) + \sum_{i=1}^p (\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

subject to:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k) + \mathbf{w}_k; \quad \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}; \quad \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k-1} + \Delta\mathbf{m}_k$$

پارامترهای قابل تنظیم در این الگوریتم عبارت است از افق پیش بینی p و ماتریس های وزنی R و Q_m که مربوط به تابع هزینه می باشد. تنظیم این پارامترها می توان پایداری و عملکرد مطلوب را برای سیستم تضمین کرد.

۳-۳- الگوریتم IPEKF برای سامانه غیرخطی

فیلتر کالمن توسعه یافته برای محاسبه حالت های سیستم تصادفی غیرخطی با نویز فرایند و اندازه گیری گوسی مستقل است. به منظور بهبود عملکرد EKF، الگوریتم پیش بین تفاضلی طراحی شده برای تخمین خطای مدل سازی ناشی از بایاس شتاب سنج ها و ژیروسکوپ ها مناسب است. بر عکس فیلتر کالمن توسعه یافته، این خطای مدل سازی در فیلتر IPEKF به صورت متغیرهای مدل حالت نیستند. در مسئله ترازیابی سامانه ناوبری، تعداد حالت هایی که در فیلتر پیشنهادی باید تخمین زده شوند از ۱۰ حالت (فیلتر کالمن توسعه یافته) به پنج حالت کاهش می باید؛ بنابراین، در فیلتر IPEKF درجه رویت پذیری فیلتر افزایش و بار محاسباتی کاهش می باید. مزیت دیگر این الگوریتم نسبت به الگوریتم های معمول، آن است که لزوماً نویز در این روش نباید سفید باشد و می تواند رنگی هم باشد. همچنین روش پیشنهادی حساسیت کمتری به الگوریتم های فرایند دارد. ساختار الگوریتم IPEKF از اجزای زیر تشکیل می شود:

۱- تخمین خطای مدل

برای تخمین خطای مدل از الگوریتم پیش بین تفاضلی IPA استفاده می شود. تغییرات خطای مدل از رابطه (۱۲) و خطای مدل از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k-1} + \Delta\mathbf{m}_k^* \quad (13)$$

برای کاهش خطای تخمین حالت، خطای مدل \mathbf{m}_k (بایاس حسگرها) در هر گام محاسبه و جبران می شود.

۲- تخمین حالت های سیستم

• بهروزرسانی زمانی

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = f(\hat{\mathbf{x}}_k) + \Delta\mathbf{m}_k^* \\ \mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{cases} \quad (14)$$

• بهروزرسانی اندازه گیری

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T \left[\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}] \\ \mathbf{P}_{k+1} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{P}_{k+1/k} \end{cases} \quad (15)$$

در این روابط، $\hat{\mathbf{x}}_k$ بردار حالت، $\hat{\mathbf{m}}_k$ بردار خطای مدل، \mathbf{y}_{k+1} مدل اندازه گیری، \mathbf{H}_{k+1} ماتریس اندازه گیری، $f(\hat{\mathbf{x}}_k)$ مدل ترازیابی غیرخطی و \mathbf{F}_k راکوبی آن است که در ضمیمه الف بیان شده اند. همچنین \mathbf{P} ماتریس کوواریانس خطای تخمین و \mathbf{K} بهره تخمین فیلتر کالمن می باشند.

که در آن $\mathbf{X}_{k+1,p}$ بردار تخمین حالت ها p افق پیش بینی و $\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}$ خطای مدل است که باید بهینه شود. ماتریس های معادله هم به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\mathbf{X}_{k+1,p} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+2} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+3} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+p} \end{bmatrix}, \quad \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{m}}_k \\ \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+1} \\ \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+p-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k + \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_k^2 + \mathbf{F}_k + \mathbf{I} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^p \mathbf{F}_k^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{F}_k + \mathbf{I})\mathbf{G}_k & \mathbf{G}_k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{F}_k^i)\mathbf{G}_k & (\sum_{i=0}^{p-2} \mathbf{F}_k^i)\mathbf{G}_k & \cdots & \mathbf{G}_k \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_{x-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k-1} \\ \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{I} + \mathbf{F}_k) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{F}_k^{i-1} \end{bmatrix}$$

بردار تخمین اندازه گیری ها در افق محدود پیش بین p به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mathbf{Y}_{k+1,p} = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{X}_{k+1,p} = \mathbf{F}_y \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{y-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_y \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1} \quad (18)$$

که در آن $\mathbf{F}_y = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{F}_x$ ، $\mathbf{F}_{y-1} = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{F}_{x-1}$ ، $\mathbf{H}_y = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{G}_m$ و $\mathbf{H}_{k+1,p} = diag(\mathbf{H}_{k+1})$ می باشد.

۲-۳- بهینه سازی خطای مدل بر اساس معادله تفاضلی

تابع هزینه تعريف شده در رابطه (۱) دارای متغیرهای $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k$ است و با حل مسئله بهینه سازی مقادیر بهینه آن ها محاسبه می شود و فقط اولین عنصر محاسبه شده به فرآیند اعمال می شود. در زمان بعدی تمام محاسبات قبل دوباره تکرار می شود. با بهینه سازی این تابع هزینه بردار $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}^* = -\mathbf{K}_k^{IPA} (\mathbf{F}_y \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{y-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (19)$$

که در آن:

$$\mathbf{K}_k^{IPA} = (\mathbf{H}_y^T \mathbf{R}_y \mathbf{H}_y + \mathbf{Q}_m)^{-1} \mathbf{H}_y^T \mathbf{R}_y \quad (20)$$

در هر گام بهینه سازی فقط اولین مقدار محاسبه شده به فرآیند اعمال می شود، یعنی:

$$\Delta\hat{\mathbf{m}}_k^* = -[\mathbf{I} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \mathbf{K}_k^{IPA} (\mathbf{F}_y \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{y-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (21)$$

که در آن $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = J_{\min}$ است (معادله ۱۲). حال با توجه به فرض دوم قضیه، جواب بهینه $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^*$ تضمین می شود. در معادله (۱۸) مشاهده می شود که $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ مثبت معنی بوده و از تواند یک تابع لیپانوف مناسب باشد. در لحظه $I + k$ با استفاده از رابطه (۱۸) تابع لیپانوف به صورت زیر نوشته می شود:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) = \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i}) \quad (19)$$

با بهینه سازی تابع هزینه (۱۷) جواب بهینه $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+1}^*$ به دست آمده و از معادله (۱۹) خواهیم داشت:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p} + \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+p})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+p}) + \sum_{i=1}^{p-1} (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i}) \quad (20)$$

در این حالت با توجه به فرض محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ داریم:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + \sum_{i=1}^{p-1} (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i}) = V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) \quad (21)$$

به این ترتیب، ناتساوی (۲۱) به صورت زیر در می آید.

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \leq V(\hat{\mathbf{x}}_k, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \quad (22)$$

تابع $V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1)$ شامل خطای مدل و حالت می باشد و با تابع $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ برابر است. از طرفی داریم:

$$V'(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k)^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k) \quad (23)$$

با توجه به محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ در فرض اول، خواهیم داشت:

$$V'(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = -\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k)^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k) \quad (24)$$

با در نظر گرفتن روابط (۲۲) و (۲۴) نتیجه می شود:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \leq -\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k)^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k) < 0 \quad (25)$$

بنابراین می بینیم که $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ به صورت منفی معین است. پس با استفاده از روش مستقیم لیپانوف، معادله (۱۹) یک نقطه تعادل پایدار مجذوبی در مبدأ دارد.

ماتریس ها وزنی \mathbf{R}_x و \mathbf{Q}_m متریس های مقارن و مثبت معنی هستند که به صورت قطری در نظر گرفته می شوند. چون هدف کمینه کردن تابع هزینه (۱۶) است باید ماتریس \mathbf{R}_x مثبت معنی باشد. بزرگ شدن ماتریس وزنی \mathbf{R}_x باعث می شود که مؤلفه حالت ها اهمیت بیشتری نسبت به خطای مدل داشته باشد؛ همچنین پاسخ با سرعت و دقیق بیشتری و روودی مرجع را دنبال کند.

۴. تجزیه و تحلیل پایداری مجذوبی الگوریتم IPA با استفاده از قضیه پایداری لیپانوف

در این بخش، شرایط کافی که پایداری مجذوبی روش پیشنهادی را تضمین می کند، به دست می آید. در لحظه I ، مسیر آینده خطای مدل $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1} : i = 1, 2, \dots, p$ با بهینه سازی تابع هزینه زیر تعیین می شود:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^p (\hat{\mathbf{y}}_{k+i} - \mathbf{y}_{k+i}^r)^T \mathbf{R}_y (\hat{\mathbf{y}}_{k+i} - \mathbf{y}_{k+i}^r) + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \quad (16)$$

در سیستم ترازیابی اولیه، خروجی مرجع صفر است ($\mathbf{y}_{k+i}^r = 0$). با استفاده از مدل پیش بین اندازه گیری ($\hat{\mathbf{y}}_{k+i} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}$)، می توان تابع هزینه را به صورت زیر ساده کرد:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^p (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k+i/k})^T \mathbf{R}_y (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}) + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \quad (17)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^p (\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k})^T \mathbf{R}_x (\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}) + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})$$

که در آن $\mathbf{R}_x = \mathbf{H}^T \mathbf{R}_y \mathbf{H}$ بوده و فقط با به دست آمدن اولین عنصر کنترل بهینه $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^*$ اجرا می شود. در لحظه بعدی همان مراحل بهینه سازی تکرار می شوند. مسئله ای اصلی پایداری، برقراری محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ می باشد. حال قضیه زیر را اثبات می کنیم.

قضیه ۱ - تابع هزینه (۱۷) را با فرضیات زیر در نظر بگیرید.

- فرض کنید محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ که در آن $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k}$ است، برقرار بوده و خطای مدل $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1} : i = 1, 2, \dots, p$ جواب بهینه مسئله است.

- همچنین برای هر لحظه k ، یک جواب مثل $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^*$ وجود دارد که با توجه به محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ تابع هزینه \mathbf{J} را کمینه می کند.

با توجه به این فرضیات، الگوریتم تخمین پیش بین خطای مدل، پایدار مجذوبی است.

اثبات: ایده اصلی در اثبات پایداری الگوریتم IPA در نظر گرفتن تابع هزینه (۱۷) به عنوان یک تابع لیپانوف است. پایداری الگوریتم زمانی است که تغییرات تابع هزینه در تمام مسیرها همیشه غیر منفی باشد (یعنی $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k) < 0$)؛ بنابراین، با معادل قرار دادن تابع لیپانوف $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ با تابع هزینه کمینه در افق محدود (J_{\min})، به صورت زیر پایداری مجذوبی آن را اثبات می کنیم.

$$V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{x}}_{k+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+i} + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \quad (18)$$

در این آزمایش، فرایند ترازیابی با استفاده از داده‌های ثابت خودرو برای ۱۲۰۰ ثانیه انجام می‌شود. زمان نمونهبرداری برای سامانه ناوبری اینرسی، برابر $0/01$ ثانیه و افق پیش‌بینی یا P برابر 10 می‌باشد. برای اندازه‌گیری تأثیر خطای کوواریانس اندازه‌گیری در دقت همگرایی تخمین زوایای اولیه، آزمایش ترازیابی سه بار طبق جدول ۳ تکرار می‌شود.

۵-نتایج تحلیل عملکرد IPEKF

برای تجزیه و تحلیل عملکرد فیلتر طراحی شده، این فیلتر با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو مقایسه شده است. فیلتر کالمن بدون بو [۹]، با استفاده از تعداد محدودی از نقاط سیگمایی که با دقت انتخاب شده‌اند بهره می‌برد تا بدین‌وسیله تابع توزیع احتمال را به دست آورد. برخلاف فیلتر کالمن توسعه یافته که به دلیل استفاده از ماتریس ژاکوبی در فرآیند خطی سازی، دارای دقت کمی است، فیلتر کالمن بدون بو مجموعه مینیمال نقاط سیگما را محاسبه نموده و به دقت بالاتری دست می‌یابد (توضیحات بیشتر الگوریتم فیلتر کالمن بدون بو در ضمیمه (ب) آمده است).

در جدول ۲ سه نوع آزمون توضیح داده شده است. در آزمون ۳، دقت برآورد خطای سمت هنگام استفاده از فیلتر جدید برابر $10/77 \pm 0/19$ است، در حالی که دقت تخمین زاویه سمت با استفاده از فیلتر EKF 4 است، در حالی که دقت تخمین زاویه سمت با استفاده از فیلتر UKF $10/712 \pm 0/52$ و از فیلتر UKF دارای حساسیت بیشتر از EKF می‌باشد. می‌بینیم که الگوریتم پیشنهادی به طور قابل توجهی دقت برآورد زاویه سمت را در مقایسه با EKF و UKF بهبود می‌بخشد.

۵-تحلیل نتایج آزمون الگوریتم پیشنهادی

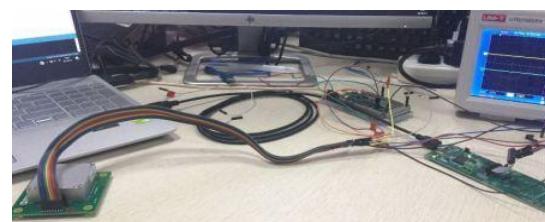
در این بخش عملکرد فیلتر پیشنهادی در یک آزمون واقعی تحلیل خواهد شد. برای ارزیابی الگوریتم ارائه شده در تخمین زوایای ترازیابی اولیه‌ی یک سامانه ناوبری اینرسی، این الگوریتم روی سخت‌افزارهای آزمایشگاهی پیاده‌سازی شده و با انجام آزمون‌های گوناگونی از صحت عملکرد نرم‌افزارها و سخت‌افزارها اطمینان حاصل شده است.

در آزمون‌ها، از سامانه ناوبری اینرسی میکروالکترومکانیکی نوع ADIS16488A استفاده شده است. در جدول ۱ مشخصات این حسگرهای اینرسی آمده است.

جدول ۱: مشخصات حسگرهای اینرسی ADIS16488A [۲۰]

نام پارامتر	ژیروسکوپ	شتاب سنج
Misalignment Axis	$\pm 0.05^\circ$	$\pm 0.035^\circ$
Nonlinearity	0.01% of FS	0.1% of FS
Bias Repeatability	$\pm 0.2^\circ/\text{sec}$	$\pm 16 \text{ mg}$
In-Run Bias Stability	$5.1^\circ/\text{hr}$	0.07 mg
Random Walk	$0.269^\circ/\sqrt{\text{hr}}$	$0.029 \text{ m/sec}/\sqrt{\text{hr}}$
Output Noise	$0.135^\circ/\text{sec rms}$	1.29 mg rms
Noise Density	$0.0059^\circ/\text{sec}/\sqrt{\text{Hz}}$	$0.063 \text{ mg}/\sqrt{\text{Hz}}$

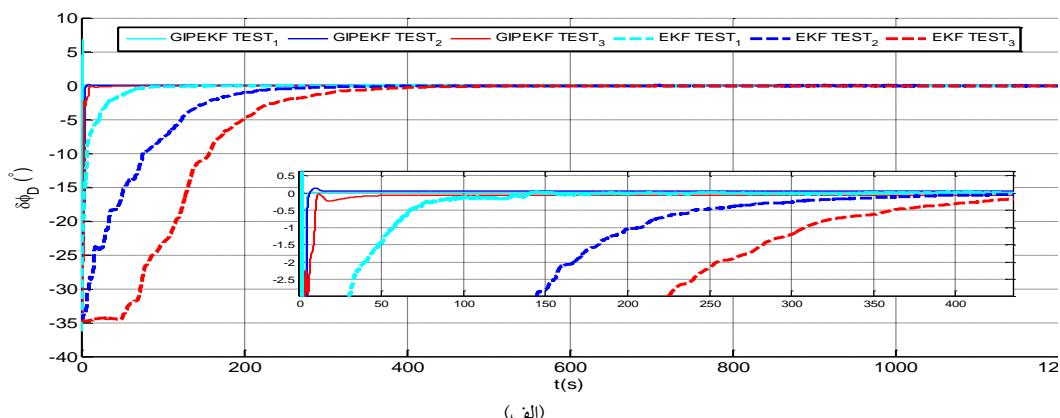
سخت‌افزار و لوازم آزمون ترازیابی سامانه ناوبری در شکل ۲ نشان داده شده است.

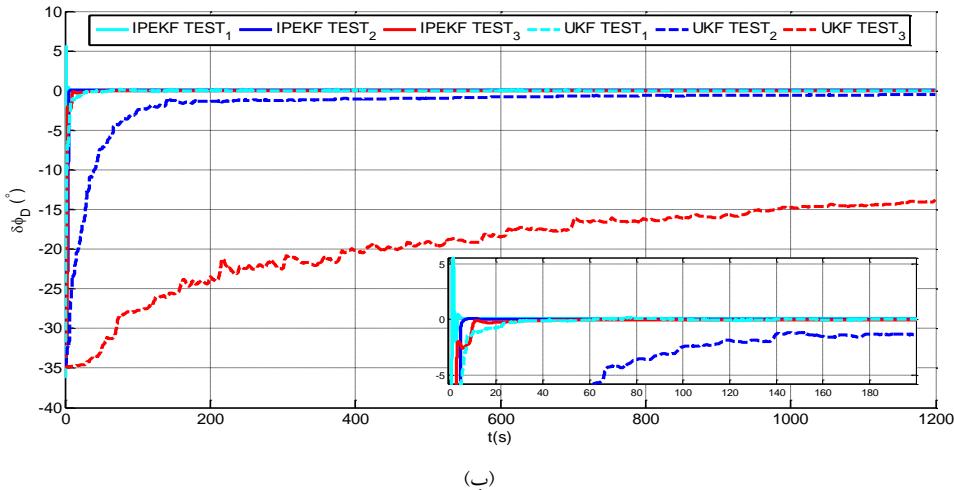


شکل ۲: سخت‌افزارهای جانبی آزمایشگاه

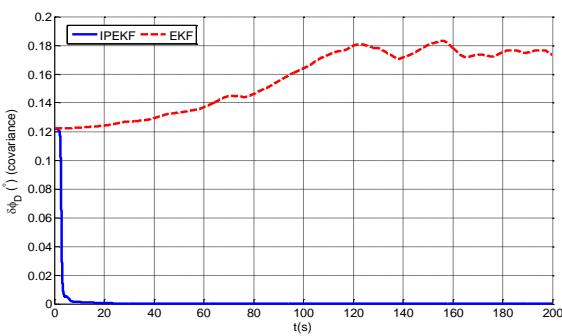
جدول ۲: نتایج آزمایش ترازیابی برای زاویه عدم انتظام سمت.

انحراف استاندارد خطای تخمین (arc.min)			خطای RMSE تخمین زاویه سمت (arc.min)			زمان همگرایی (sec)			پارامتر مورد ارزیابی	
IPEKF	EKF	UKF	IPEKF	EKF	UKF	IPEKF	EKF	UKF	نوع فیلتر	
$0/14$	$0/91$	$0/8$	$0/39$	$1/12$	$0/82$	8	150	50	$(\sigma_R=10^{-3})$	آزمون ۱
$0/003$	$10/42$	$15/1$	$2/67$	$11/38$	$50/7$	20	400	300	$(\sigma_R=10^{-2})$	آزمون ۲
$0/019$	48	162	$4/087$	$58/009$	1071	52	524	>1200	$(\sigma_R=10^{-1})$	آزمون ۳



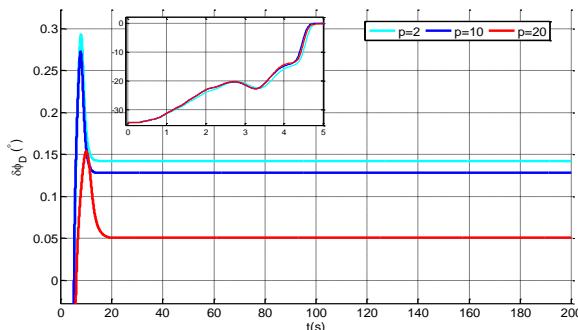


شکل ۳: (الف) همگرایی زاویه سمت توسط EKF و IPEKF، (ب) همگرایی زاویه سمت توسط UKF و IPEKF



شکل ۵: همگرایی کوواریانس خطای زاویه سمت در روش‌های EKF و IPEKF با بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری

در ادامه نتایج شبیه‌سازی برای $p=2$, $p=10$ و $p=20$ در شکل ۶ آورده شده است. افق پیش‌بین خروجی باید به حد کافی بزرگ باشد تا خروجی بتواند به مقدار ماندگار همگرا شود. در این آزمون چون سیستم غیرخطی است افق پیش‌بینی به حد کافی باید بزرگ باشد. کوچک بودن افق پیش‌بینی خروجی باعث می‌شود که الگوریتم تخمین مناسبی را از رفتار آینده سیستم نداشته باشد:



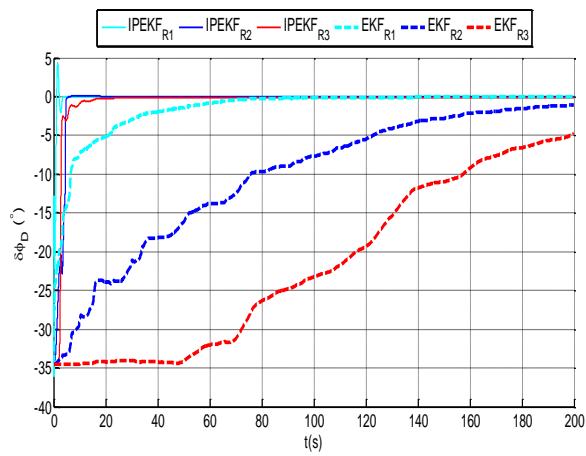
شکل ۶: همگرایی تخمین زاویه سمت برای $p=2$, $p=10$ و $p=20$

در شکل ۶ به خوبی مشخص است که با بزرگ شدن افق پیش‌بینی خطای همگرایی کم می‌شود.

نتایج ترازیابی زاویه سمت و زمان همگرایی آن در جدول ۲ آمده است.
شکل ۳(الف) مقایسه همگرایی زاویه سمت را با استفاده از EKF و IPEKF و شکل ۳(ب) مقایسه همگرایی زاویه سمت را با استفاده از IPEKF و UKF نشان می‌دهد.

۵- نتایج تحلیل پایداری

در شکل ۴ نتایج تأثیر بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری و کوواریانس خطای حالت‌های فرآیند روی زاویه سمت، مربوط به الگوریتم جدید و فیلتر کالمن توسعه یافته به طور هم‌زمان نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در روش جدید میزان همگرایی افزایش یافته است.



شکل ۴: همگرایی زاویه سمت در روش‌های EKF و IPEKF با بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری

در شکل ۵ نتایج تأثیر بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری و کوواریانس خطای حالت‌های فرآیند روی کوواریانس خطای زاویه سمت مربوط به الگوریتم جدید و فیلتر کالمن توسعه یافته به طور هم‌زمان نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در روش جدید میزان پایداری افزایش یافته است.

بار محاسباتی الگوریتم‌های IPEKF و UKF و EKF را می‌توان از روی تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه از اجرای آن محاسبه نمود [۲۱]. فرض می‌کنیم بعد بردار حالت n و بعد بردار اندازه‌گیری m و بعد افق پیش‌بینی p است؛ بنابراین، تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه برای هر بار اجرای الگوریتم‌ها طبق جدول ۳ آمده است. از جدول ۳ ملاحظه می‌شود که بار محاسباتی IPEKF بسیار کمتر از EKF و UKF می‌باشد.

جدول ۳: مقایسه بار محاسباتی الگوریتم‌های UKF، EKF و IPEKF

الگوریتم	رابطه‌ی تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه	تعداد حالت‌ها	بار محاسباتی
EKF	$6n^3 + 6n^2m + 4nm^2 + m^3 + nm - n$	$1 = n$ $2 = m$	۷۳۷۸
UKF	$(16/3)n^3 + 6n^2m + 4nm^2 + 11n^2 + m^3 + nm + 3n$	$1 = n$ $2 = m$	۷۸۵۱
IPEKF	$6n^3 + 6n^2m + 4nm^2 + m^3 + nm - n + n^2 p^2 m + n^2 pm$	$5 = n$ $2 = m$ $1 = p$	۶۵۶۰
		$5 = n$ $2 = m$ $1 = p$	۱۳۷۳

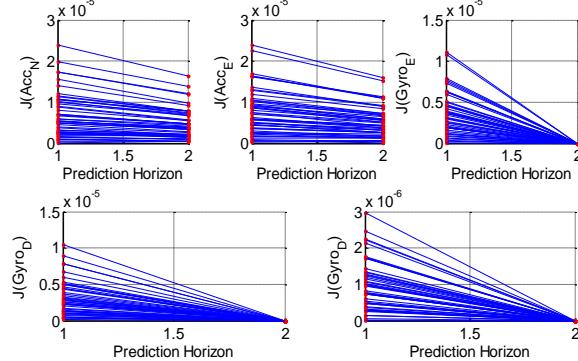
۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ترازیابی اولیه برای سامانه ناوبری اینرسی میکرو الکترومکانیکی با استفاده از یک مدل ترازیابی غیرخطی در نظر گرفته شد. با استخراج مدل غیرخطی خطای برای این سیستم و با در نظر گرفتن حالت سکون حسگرهای اینرسی (صفر بودن سرعت واقعی حسگرهای) خطای زوایای تراز و سمت تخمين زده شد. عملکرد و مقاومت الگوریتم پیشنهادی با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو مقایسه گردید.

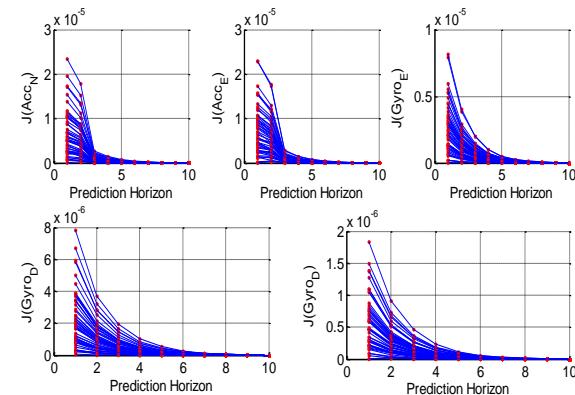
روش جدید IPEKF که ترکیبی از فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر پیش‌بین تفاضلی تعیین‌یافته است برای تخمین خطاهای مدل‌سازی و نویز استفاده شد. الگوریتم‌های متداول به خاطر ناشناخته بودن خطاهای حسگرهای اینرسی با مشکل همگرایی مواجه می‌شوند. این مشکل در روش ارائه شده در این مقاله برطرف شده است. علاوه بر این، درجهٔ مشاهده‌پذیری روش IPEKF نسبت به روش EKF افزایش یافته و بار محاسباتی آن در مقایسه با سایر روش‌ها به خاطر کاهش تعداد حالت‌ها، کاهش می‌یابد.

مسئله اصلی این مقاله، نشان دادن پایداری و همگرایی روش پیشنهادی با استفاده از تئوری لیپانوف بود. طبق نتایج به دست آمده از آزمون‌ها، مقایسه‌ی روش نوین با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو، بهبود دقت و عملکرد الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد.

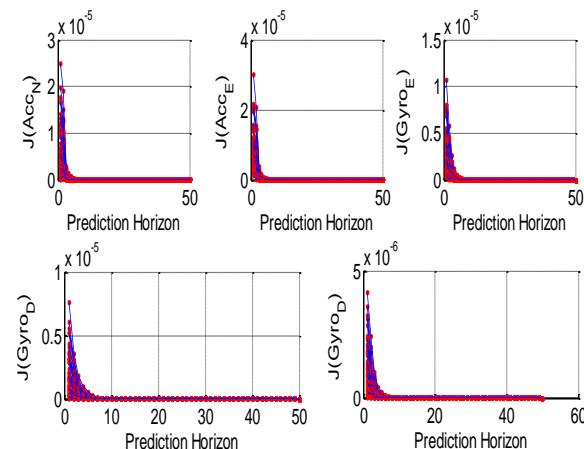
در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ نتایج مربوط به تأثیر افزایش افق پیش‌بینی در تابع هزینه الگوریتم جدید نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که تابع هزینه نزولی است.



شکل ۷: تابع هزینه در حالت ۲



شکل ۸: تابع هزینه در حالت ۱۰



شکل ۹: تابع هزینه در حالت ۵۰

۳- مقایسه بار محاسباتی روش‌های EKF، IPEKF و UKF

[۹] UKF ضمیمه ب - الگوریتم

۱- مقداردهی اولیه این فیلتر با متوسط و کوواریانس حالت پیش‌بینی شده زیر صورت می‌گیرد:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}} \quad (۱-۱)$$

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T \quad (۱-۲)$$

۲- مجموعه نقاط سیگما از متوسط و کوواریانس حالت پیشین طبق رابطه زیر تولید کنید

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^a, i=0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^a + \gamma \left(\sqrt{\mathbf{P}_k^a} \right)_i, i=1 \dots L \\ \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^a - \gamma \left(\sqrt{\mathbf{P}_k^a} \right)_i, i=L+1 \dots 2L \end{cases} \quad \text{where: } \begin{cases} \gamma = \sqrt{L+\lambda} \\ \kappa = 3-L \\ \lambda = \alpha^2(L+\kappa) - L \\ 10^{-4} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (۲)$$

۳- نقاط سیگما را توسط معادله مدل غیرخطی زیر انتقال دهید.

$$\mathbf{x}_{i|k+1|k} = f(\mathbf{x}_{i|k}^a, \mathbf{m}_k, k) \quad (۳)$$

۴- میانگین و کوواریانس نقاط انتقال داده شده را توسط رابطه زیر محاسبه کنید.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{mean} \mathbf{x}_{i|k+1|k} \quad (۴-۱)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{cov} (\mathbf{x}_{i|k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) (\mathbf{x}_{i|k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T \quad (۴-۲)$$

۵- وزن‌های W_i^{mean} و W_i^{cov} از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} W_0^{mean} = \frac{\lambda}{L+\lambda} \\ W_0^{cov} = \frac{\lambda}{L+\lambda} + (1-\alpha^2 + \beta), \quad \beta = 2 \\ W_i^{mean} = W_i^{cov} = \frac{1}{2(L+\lambda)}, \quad i=1,2,...,2L \end{cases} \quad (۵)$$

۶- نقاط سیگما را در معادله اندازه‌گیری قرار داده و آن‌ها را انتقال دهید.

$$\mathbf{y}_{i|k+1|k} = h(\mathbf{x}_{i|k+1|k}^a, \mathbf{m}_k, k) \quad (۶)$$

۷- میانگین اندازه‌گیری را پیشگوئی کنید.

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{mean} \mathbf{y}_{i|k+1|k} \quad (۷-۱)$$

۸- کوواریانس خطا را پیشگوئی کنید.

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{R}_{k+1} + \sum_{i=0}^{2L} W_i^{cov} [\mathbf{y}_{i|k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}] [\mathbf{y}_{i|k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}]^T \quad (۸-۱)$$

۹- ماتریس همبستگی بین \mathbf{y}, \mathbf{x} را حساب کنید.

$$\mathbf{P}_{xz|k+1|k} = \mathbf{R}_{k+1} + \sum_{i=0}^{2L} W_i^{cov} [\mathbf{x}_{i|k+1|k}^a - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] [\mathbf{x}_{i|k+1|k}^a - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]^T \quad (۹-۱)$$

ضمیمه ب- مدل ترازیابی غیرخطی الگوریتم IPEKF

در سامانه ناوبری اینرسی، قبل از شروع به ناوبری لازم است ترازیابی اولیه که تخمين اولیه از وضعیت جسم (ماتریس تبدیل) نسبت به دستگاه مرجع (دستگاه جغرافیایی) تعیین می‌شود. این ترازیابی اولیه طی دو مرحله ترازیابی غیردقیق^۱ و ترازیابی دقیق^۲ به صورت متوالی انجام می‌شود. می‌توان مدل ترازیابی غیرخطی را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t) + \mathbf{m}_t + \mathbf{w}_t \quad (\text{الف-۱})$$

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{v}_{t+1}$$

متغیرهای حالت مورد نیاز برای تعریف خطای سرعت عبارت اند از: δv_N و δv_E . متغیرهای حالت مورد نیاز برای تعریف خطاهای زاویه، φ_N و φ_E می‌باشد؛ بنابراین، بردار حالت این مسئله به صورت زیر است:

$$\mathbf{x}_t = [\delta v_N \quad \delta v_E \quad \varphi_N \quad \varphi_E \quad \varphi_D]^T \quad (\text{الف-۲})$$

بردار خطای مدل سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m}_t = [\Delta f_N \quad \Delta f_E \quad \Delta \omega_D \quad \Delta \omega_E \quad \Delta \omega_N]^T \quad (\text{الف-۳})$$

مدل غیرخطی خطاهای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_N^{n'} = (1 - c \varphi_D) f_N^{n'} + s \varphi_D f_E^{n'} + 2 \omega_D \delta \mathbf{v}_y^{n'} \\ \quad - (\varphi_E c \varphi_D + \varphi_N s \varphi_D) f_D^{n'} + \Delta f_N \\ \delta \dot{v}_E^{n'} = -s \varphi_D f_N^{n'} + (1 - c \varphi_D) f_E^{n'} - 2 \omega_D \delta \mathbf{v}_y^{n'} \\ \quad + (-\varphi_E s \varphi_D + \varphi_N c \varphi_D) f_D^{n'} + \Delta f_E \\ \dot{\varphi}_x = (1 - \cos \varphi_z) \omega_N + \varphi_y \omega_D + \delta v_E / r \\ \dot{\varphi}_y = \sin \varphi_z \omega_N - \varphi_x \omega_D - \delta v_N / r \\ \dot{\varphi}_z = -(\varphi_y \cos \varphi_z + \varphi_x \sin \varphi_z) \omega_N - \delta v_E \tan \varphi / r \end{cases} \quad (\text{الف-۴})$$

و مدل اندازه‌گیری به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mathbf{y}_{t+1} = \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۵})$$

ماتریس ژاکوبی تابع $f(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_D & -s\varphi_D f_D^{n'} & -c\varphi_D f_D^{n'} & F_{15} \\ -2\omega_D & 0 & c\varphi_D f_D^{n'} & -s\varphi_D f_D^{n'} & F_{25} \\ 0 & 1/r & 0 & \omega_D & \omega_N s \varphi_D \\ -1/r & 0 & -\omega_D & 0 & \omega_N c \varphi_D \\ 0 & -\tan \varphi / r & -\omega_N s \varphi_D & -\omega_N c \varphi_D & F_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۶})$$

که در آن:

$$F_{15} = f_E^{n'} c \varphi_D + f_N^{n'} s \varphi_D + (\varphi_E s \varphi_D - \varphi_N c \varphi_D) f_D^{n'}$$

$$F_{25} = f_E^{n'} s \varphi_D - f_N^{n'} c \varphi_D - (\varphi_E c \varphi_D + \varphi_N s \varphi_D) f_D^{n'}$$

$$F_{55} = (-\varphi_N c \varphi_D + \varphi_E s \varphi_D) \omega_N$$

² Fine alignment

¹ Coarse alignment

- filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems”, IEEE transactions on automatic control, vol. 42, no. 4, pp. 581-586, 1997.
- [11] K. Reif and R. Unbehauen, “The extended Kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems”, IEEE Transactions on Signal processing, vol. 47, no. 8, pp. 2324-2328, 1999.
- [12] K. Reif et al., “Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter”, IEEE Transactions on Automatic control, vol. 44, no. 4, pp. 714-728, 1999.
- [13] T. Karvonen et al., “On Stability of a Class of Filters for Nonlinear Stochastic Systems”, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 58, no. 4, pp. 2023-2049, 2020.
- [14] M. Ren, Q. Zhang, and J. Zhang, “An introductory survey of probability density function control”, Systems Science & Control Engineering, vol. 7, no. 1, pp. 158-170, 2019.
- [15] Q. Zhang, “Performance enhanced Kalman filter design for non-Gaussian stochastic systems with data-based minimum entropy optimisation”, AIMS Electronics and Electrical Engineering, vol. 3, no. 4, pp. 382-396, 2019.
- [16] N. Ghahramani and F. Towhidkhah, “Constrained incremental predictive controller design for a flexible joint robot”, ISA transactions, vol. 48, no. 3, pp. 321-326, 2009.
- [17] N. Ghahramani, A. Naghash, and F. Towhidkhah, “Incremental Predictive Command of Velocity to Be Gained Guidance Method”, JAST, vol. 5, no. 3, pp. 99-105, 2008.
- [18] K.R. Britting, Inertial navigation systems analysis, Johan Wiley and Sons. Inc, New York, 1971.
- [19] D. Titterton, J.L. Weston, and J. Weston, Strapdown inertial navigation technology, IET, Vol. 17, 2004.
- [20] ADIS16488A, Tactical Grade Ten Degrees of Freedom Inertial Sensor, Analog Devices, “<http://www.analog.com>”, access: 2018.
- [۲۱] س. ظهیری، م. نصیری، ر. هاونگی، ح. الیاسی، “طراحی یک فیلتر تلفیق غیرخطی بهینه مبتنی بر الگوریتم بهینه سازی گروه ذرات برای سیستم ناوبری تلفیقی INS/GPS”， فصلنامه علمی دریافتون، دوره ۵، شماره ۳، صفحه ۱۷۴-۲۰۱، ۱۴۰۰-۱۸-۱.
- برای به دست آوردن تخمین بهینه از معادلات فیلتر کالمن استفاده کنید.

مراجع

- [1] N. Nagui et al., “Improved GPS/IMU Loosely Coupled Integration Scheme Using Two Kalman Filter-based Cascaded Stages”, Arabian Journal for Science and Engineering, vol. 46, no. 2, pp. 1345-1367, 2021.
- [2] N. A. Anbu and D. Jayaprasanth. “Integration of Inertial Navigation System with Global Positioning System using Extended Kalman Filter”, in International Conference on Smart Systems and Inventive Technology, IEEE, 2019.
- [3] H. Rahimi and A. A. Nikkhah, “Improving the speed of initial alignment for marine strapdown inertial navigation systems using heading control signal feedback in extended Kalman filter”, International Journal of Advanced Robotic Systems, vol. 17, no. 1, 2020.
- [4] F. Farhangian and R. Landry, “Accuracy improvement of attitude determination systems using EKF-based error prediction filter and PI controller”, Sensors, vol. 20, no. 14, pp. 4055, 2020.
- [5] W. Liu and et al., “TLIO: Tight Learned Inertial Odometry”. IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 5, no. 4, pp. 5653-5660, 2020.
- [6] S. Song and J. Wu, “Motion State Estimation of Target Vehicle under Unknown Time-Varying Noises Based on Improved Square-Root Cubature Kalman Filter”, Sensors, vol. 20, no. 9, pp. 2620, 2020.
- [7] I. Hashlamon, “A new adaptive extended Kalman filter for a class of nonlinear systems”, Journal of Applied and Computational Mechanics, vol. 6, no. 1, pp. 1-12, 2020.
- [8] K. H. Kim et al., “The stability analysis of the adaptive fading extended Kalman filter using the innovation covariance”, international journal of control, automation and systems, vol. 7, no. 1, pp. 49-56, 2009.
- [9] A. Daid, E. Busvelle, and M. Aidene, “On the convergence of the unscented Kalman filter”, European Journal of Control, vol. 57, pp. 125-134, 2021.
- [10] M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach, “Convergence analysis of the extended Kalman