**مجله کنترل**
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
**مقاله پژوهشی**
جلد۱۶، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحه ۳۶-۲۷

# طراحی الگوریتمی برای افزایش همگرایی فیلتر کالمن توسعه‌یافته مبنی بر مدل پیش‌بین تفاضلی در ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی و تحلیل پایداری آن

نعمت‌الله قهرمانی [۱]، حسن ماجد الحسن [۲]

[۱] دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، ghahremani@mut.ac.ir

[۲] دانشجوی دکتری مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر،تهران، ایران، hassan.majed.alhassan@gmail.com

دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۴ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۴

**چکیده:** در این مقاله نوعی فیلتر پیش‌بین با رویکرد جدید برای ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی با مدل غیرخطی ارائه و پایداری آن تحلیل‌شده است. پایداری فیلتر جدید بر اساس روش لیاپانوف مورد تجزیه‌وتحلیل قرارگرفته است. تابع لیاپانوف را به‌صورت تابع هزینه درجه دوم انتخاب می‌شود. این روش شرایط کافی را برای پایداری حالت تعادل در برابر عدم قطعیت و نویزهای اندازه‌گیری ارائه می‌دهد. از روش پیشنهادی برای بهبود دقت ترازیابی اولیه یک سامانه ناوبری اینرسی با عدم قطعیت و خطای سمت با مقدار بزرگ استفاده‌شده است. مدل اندازه‌گیری این سامانه غیرخطی بوده و دارای خطای مدل‌سازی است. در این روش خطای مدل تخمین زده‌شده و سپس در الگوریتم فیلتر این خطا جبران می‌شود؛ به همین خاطر خطای حالت‌های تخمین نیز در مرحله بهنگام سازی اطلاعات فیلتر کاهش می‌یابد. با انجام شبیه‌سازی‌های گوناگون این روش بر روی‌داده‌های واقعی حسگر میکرو الکترومکانیکی MEMS و با مقایسه آن با فیلتر کالمن توسعه‌یافته و فیلتر کالمن بدون بو، مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی دقت و سرعت همگرایی بالاتری نسبت به فیلتر کالمن توسعه‌یافته و فیلتر کالمن بدون بو دارد. اثبات می‌شود الگوریتم جدید دارای پایداری مجانبی است.

**کلمات کلیدی:** فیلتر کالمن توسعه‌یافته، مدل پیش‌بین، خطای مدل، ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی. تحلیل پایداری.

# Design of a new algorithm to improve the convergence of extended Kalman filter based on incremental predictive model for inertial navigation system alignment and its stability analysis

**Nemat Allah Ghahremani, Hassan Majed Alhassan**

**Abstract:** In this paper, a new predictive filter for alignment of the inertial navigation system with a nonlinear model is presented, and its stability is analyzed. The stability is analyzed according to the Lyapunov method. The Lyapunov function is selected as a quadratic cost function. This method provides sufficient conditions for the stability of the estimated state against measurement uncertainty and noise. The proposed method is used to improve the initial alignment accuracy of the inertial navigation system with a large misalignment azimuth angle. The measurement model of this system is nonlinear and has a modeling error. In this method, the model error is estimated and compensated in the filter algorithm; therefore, the error of the state estimation is reduced in the updating step. By performing various simulations of this method on the real data of microelectromechanical (MEMS) sensor and comparing it with EKF and UKF, it is observed that the proposed method has higher accuracy and convergence speed than EKF and UKF. The new filter proves to have asymptotic stability.

**Keywords:** Stability analyses, predictive filter, model error, nonlinear alignment, inertial navigation system.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

## ۱- مقدمه

فیلتر کالمن توسعه‌یافته[1] (EKF) معروف‌ترین روش برای تخمین حالت‌های سامانه‌های غیرخطی ازجمله سامانه ناوبری اینرسی است. این فیلتر در تلفیق داده‌های سامانه ناوبری اینرسی[2] و سامانه موقعیت‌یاب جهانی[3] [۱، ۲]، تخمین زوایای ترازیابی اولیه[4] [۳]، بهبود دقت سامانه‌های تعیین زوایا[5] [۴] و تخمین حالت اینرسی [۵] دارای کاربرد است. به دلیل انتگرال‌گیری از معادلات ناوبری اینرسی و وجود خطا در خروجی حسگرهای اینرسی خصوصاً از نوع ارزان‌قیمت میکروالکترومکانیکی MEMS که دارای دقت کم می‌باشند، باگذشت زمان خطا افزایش خواهد یافت.

با توجه به مشاهده ناپذیر بودن تعدادی از حالت‌های سیستم، زمان همگرایی فیلتر کالمن توسعه‌یافته بسیار طولانی خواهد بود، درحالی‌که در ترازیابی ناوبری اینرسی زمان همگرایی باید بسیار کوتاه باشد. به علت این‌که فیلتر کالمن توسعه‌یافته در خطی سازی معادلات غیرخطی از تقریب مرتبه اول سری تیلور حول آخرین مسیر تخمین استفاده می‌کند، بنابراین اگر مسیر تخمین نزدیک به مسیر نامی معادلات باشد، همگرایی محلی این روش تضمین می‌شود [۵]. در غیر این صورت خطی سازی می‌تواند منجر به عملکرد ضعیف فیلتر شده و به علت وجود خطای مدل و خطای مشخصات آماری نویز اندازه‌گیری و سیستم، دقت تخمین کاهش‌یافته و حتی فیلتر واگرا شود [۶].

برای اطمینان از همگرایی EKF، پژوهش‌های فراوانی انجام‌شده است. مثلاً در مرجع [۷] برای جلوگیری از واگرایی روش EKF وقتی‌که اطلاعات دقیقی از خطاهای مدل‌سازی در دسترس نیست، الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته تطبیقی[6] پیشنهادشده است. این روش ماتریس‌های نویز Q و R را به‌گونه‌ای تنظیم می‌کند که بتواند تغییرات ایجادشده در سیستم را دنبال کند. در مقاله‌ی [۸] تجزیه‌وتحلیل پایداری فیلتر محوکننده تطبیقی[7] با استفاده از یک ضریب فراموشی برای بهبود عملکرد فیلتر کالمن صورت گرفته است. همچنین، در مقاله [۹]، تجزیه‌وتحلیل همگرایی فیلتر کالمن بدون بو[8] (UKF) اصلاح‌شده ارائه‌شده است. این فیلتر از روش خطی سازی آماری استفاده می‌کند که نسبت به خطی سازی روش تیلور از دقت بالاتری برخوردار است. در این مرجع نشان داده می‌شود که برعکس آن‌که فیلتر EKF به‌طور نمایی پایدار است، اما UKF یک رویگر همگرا نیست.

برخی فن‌ها وجود دارد که نشان می‌دهد درصورتی‌که خطای تخمین اولیه و اغتشاشات به‌اندازه کافی کوچک باشند، فیلتر EKF به‌صورت محلی دارای همگرایی مجانبی خواهد بود [۱۱]. همچنین، مرجع [۱۲] با استفاده از روش لیاپونوف ثابت می‌کند که EKF دارای یک همگرایی نمایی است.

این به‌شرط آن است که تمام حالت‌های سیستم کاملاً مشاهده‌پذیر باشند. در مرجع [۱۳]، شرایط پایداری کلاس بزرگی از خانواده فیلتر کالمن که حتی دارای حالت مشاهده ناپذیر با مدل غیرخطی می‌باشند، ارائه‌شده است. در این مقاله تجزیه‌وتحلیل پایداری با استفاده از مفهوم محدود بودن متوسط مربعات خطای فیلتر و ماتریس کوواریانس خطا صورت گرفته است.

از طرف دیگر، حتی اگر نویز به‌صورت گوسی باشد، به دلیل تأثیر دینامیک غیرخطی، حالت‌ها یا اندازه‌گیری‌ها غیر گوسی خواهند بود. فیلتر EKF نمی‌تواند با نویز غیر گوسی سازگار شود [۱۴]؛ بنابراین، مسئله تخمین در حضور نویز غیر گوسی مسئله مهمی است. تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه صورت گرفته است. مثلاً در مرجع [۱۵]، برای افزایش دقت تخمین در حضور نویز غیر گوسی درروش EKF، طراحی یک جبران‌کننده با عوامل غیرخطی در قالب چندجمله‌ای‌ها با پارامترهای قابل تنظیم پیشنهادشده است که این طراحی منجر به پایداری مجانبی فیلتر می‌شود.

در این مقاله، یک الگوریتم پیش‌بین تفاضلی[9] (IPA) برای کمینه نمودن خطای مدل‌سازی و خطای ماتریس کوواریانس نویز فرایند و نویز اندازه‌گیری ارائه‌شده است. این فیلتر از ایده کنترل پیش‌بین تفاضلی تعمیم‌یافته[10] (GIPC) گرفته‌شده است [۱۶، ۱۷]. درروش ارائه‌شده معادلات فضای حالت به فرم تفاضلی نوشته‌شده و تخمین حالت‌ها برحسب حالت‌های فعلی و گذشته بیان‌شده است. مهم‌ترین مزیت این روش آن است که در معادلات تخمین، خطای مدل پس از محاسبه جبران و تصحیح می‌شود. با ترکیب روش‌های EKF و IPA الگوریتم جدیدی به نام فیلتر کالمن توسعه‌یافته پیش‌بین تفاضلی[11] (IPEKF) ارائه‌شده است. برای نشان دان کارایی فیلتر جدید، از این فیلتر برای انجام فرآیند ترازیابی یک سامانه ناوبری اینرسی با مدل غیرخطی استفاده‌شده است. روش جدید توانسته دقت و زمان همگرایی را بهبود ببخشد. همچنین در بخش چهارم پایداری فیلتر پیشنهادی با استفاده از تئوری لیاپانوف بررسی و تجزیه‌وتحلیل شده است.

مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش دوم، فرمول‌بندی مسئله بیان می‌شود. در بخش سوم، معادلات فیلتر پیشنهادی استخراج‌شده و برخی نکات لازم برای بهینه‌سازی تابع هزینه بیان می‌شود. در بخش چهارم، تجزیه و تحلیل پایداری الگوریتم جدید با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف صورت می‌گیرد. در بخش پنجم، تحلیل نتایج آزمون الگوریتم پیشنهادی بیان می‌شود و در بخش ششم، نتایج مقاله ارائه می‌گردد. در ضمیمه (الف) و (ب) روابط ریاضی مدل ترازیابی غیرخطی و الگوریتم فیلتر کالمن بدون بو بیان می‌شود.

[1] Extended Kalman Filter (EKF)
[2] Inertial Navigation System (INS)
[3] Global Positioning System (GPS)
[4] Initial Alignment
[5] Attitude Determination
[6] Adaptive Extended Kalman Filter (AEKF)
[7] Adaptive Fading Kalman Filter (AFKF)
[8] Unscented Kalman Filter (UKF)
[9] Incremental Predictive Algorithm (IPA)
[10] Generalized Incremental Predictive Control (GIPC)
[11] Incremental Predictive Extended Kalman Filter (IPEKF)



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

## ۲- مدل‌سازی ریاضی مسأله

گرچه روش EKF به‌صورت محلی پایدار است، اما در برخی شرایط هنگامی‌که تخمین حالت از مقدار نامی دور باشد، هیچ تضمینی برای همگرایی وجود ندارد. در فرایند ترازیابی INS، هنگامی‌که خطای تراز کوچک است مدل سیستم تقریباً خطی است. اگر خطای تراز بزرگ بوده و اطلاعات پیشین مربوط به ماتریس‌های خطای حالت و خطای اندازه‌گیری به‌طور دقیق مشخص نشده باشند آنگاه خطای خطی سازی می‌تواند باعث واگرایی الگوریتم EKF شود.

ترازیابی سامانه ناوبری با روشEKF دارای پنج حالت است. از طرفی به دلیل اضافه شدن مدل ژیروسکوپ و شتاب‌سنج در معادلات، تعداد حالت‌ها به ۱۰ افزایش می‌یابد که سه تای آن‌ها مشاهده ناپذیرند. البته افزایش تعداد حالت‌ها باعث کاهش میزان مشاهده‌پذیری فیلتر و افزایش بار محاسباتی می‌شود. به همین علت نامعینی‌های ماتریس کوواریانس اندازه‌گیری، ممکن است باعث واگرایی فیلتر شود؛ بنابراین، فیلتر ناوبری به‌گونه‌ای باید طراحی شود که خطاهای مدل به‌درستی جبران شود تا فیلتر در برابر خطاهای مدل‌سازی مقاوم باشد. در این مقاله، فیلتر پیشنهادی برای حل مشکلات مهم فوق با پیش‌بینی و جبران خطاهای مدل توسعه‌یافته است. فیلتر پیشنهادی شامل فقط پنج حالت خطای ناوبری است و خطای مدل ژیروسکوپ و شتاب سنج با استفاده از الگوریتم پیش‌بین، تخمین زده می‌شود. در ترازیابی مدل غیرخطی و زمان گسسته زیر در نظر گرفته‌شده است (توضیحات بیشتر مدل در ضمیمه الف آمده است):

$$\begin{cases}\mathbf{x}_{k+1} = f\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k\right) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}\end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن، $\mathbf{x}_k$ , $\mathbf{m}_k$ و $\mathbf{y}_{k+1}$ به ترتیب بردار حالت‌های سامانه، بردار ورودی سیستم (خطای مدل) و بردار اندازه‌گیری در لحظه $k$ می‌باشند، $f(.)$ تابع غیرخطی مدل سامانه و $\mathbf{H}_{k+1}$ مدل خطی اندازه‌گیری سامانه است، $\mathbf{W}_k$ و $\mathbf{V}_{k+1}$ به ترتیب بیانگر نویز سامانه و نویز اندازه‌گیری هستند. فرض می‌شود این نویزها سفید گوسی با میانگین صفر بوده و ماتریس کوواریانس آن‌ها یعنی $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ مستقل از هم هستند. الگوریتم‌های مختلفی برای تخمین حالت مدل غیرخطی وجود دارد که هرکدام دارای ملزومات خاص خود هستند. در این مقاله، یک روش نوین برای افزایش مقاومت تخمینگر خطاهای نویز و مدل سامانه ناوبری و جبران آن‌ها با استفاده از مفهوم الگوریتم پیش‌بین مدل با بهره‌گیری از بهینه‌سازی افق محدود، ارائه‌شده و در فیلتر کالمن توسعه‌یافته بکار رفته است. در این روش تابع هزینه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J}_{k+1}(\hat{\mathbf{X}}_{k+1,p}, \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}) = \min_{\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}} \left[\sum_{i=1}^{p}(\hat{\mathbf{y}}_{k+i})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_y(\hat{\mathbf{y}}_{k+i}) + \sum_{i=1}^{p}(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T\mathbf{Q}_m(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})\right] \qquad (۲)$$

subject to:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k\right) + \mathbf{w}_k; \quad \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}; \quad \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k-1} + \Delta\mathbf{m}_k$$

که در آن $\hat{\mathbf{y}}_{k+i}$ خطای اندازه‌گیری، $\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}$ تغییرات خطای مدل ناوبری، $i = 1, 2, \cdots p$ افق آینده و $p$ افق پیش‌بین می‌باشند. با بهینه‌سازی این تابع هزینه هم خطای اندازه‌گیری با خطای تخمین کاهش می‌یابد و هم خطای مدل در سامانه ناوبری کم می‌شود. به‌این‌ترتیب دقت ترازیابی سامانه‌ی ناوبری در برابر نامعینی‌های مدل و نویز اندازه‌گیری و فرایند افزایش می‌یابد. در ادامه خواهیم دید که چگونه با بهینه‌سازی تابع فوق روش IPEKF استخراج می‌شود.

## ۳- فرمول‌بندی IPEKF

معمولاً، در مدل‌سازی، خطای با میانگین غیر صفر را می‌توان با افزودن حالت‌هایی به حالت‌های مدل تخمین زد. افزایش تعداد حالت‌ها باعث کاهش میزان مشاهده‌پذیری فیلتر و افزایش بار محاسباتی آن می‌شود. در یک سامانه ناوبری به دلیل آن‌که ماتریس اندازه‌گیری متأثر از نامعینی‌ها می‌باشد، ممکن است واگرایی فیلتر رخ دهد. فیلتر پیشنهادی بدون افزایش حالت‌های اضافی، خطای مدل سامانه غیرخطی ناوبری را با تخمین می‌زند. در ادامه روابط ریاضی الگوریتم فیلتر پیشنهادی ارائه می‌شود.

### ۳-۱- الگوریتم پیش‌بین تفاضلی IPA در تخمین خطای مدل

فرم تفاضلی فضای حالت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \Delta\mathbf{F}_k\Delta\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}_k\Delta\mathbf{m}_k \qquad (۳)$$

که در آن $\Delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k$ ، $\Delta\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ ، $\Delta\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k-1}$ و $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k = \hat{\mathbf{m}}_k - \hat{\mathbf{m}}_{k-1}$ می‌باشند. با نوشتن این فرم می‌توانیم تغییرات خطای مدل $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k$ را به دست آوریم. درواقع وقتی به معادلات فوق $\Delta$ اضافه می‌کنیم، به معنی اضافه کردن انتگرال گیر به سیستم است. با این کار خطای مانای تخمین از بین می‌رود. با ترکیب معادلات فوق، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_k)\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_k\Delta\hat{\mathbf{m}}_k \qquad (۴)$$

که در آن $\mathbf{I}$ ماتریس واحد، $\mathbf{F}_k$ ماتریس ژاکوبی تابع $f(.)$ می‌باشند. حالت $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ از روی حالت‌های $\hat{\mathbf{x}}_k$ و $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ به دست می‌آیند. برای محاسبه حالت در افق آینده بر اساس معادله حالت تفاضلی (۴)، رابطه کلی زیر نوشته‌شده است:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+p} = (\sum_{i=0}^{p}\mathbf{F}_k^{\,i})\hat{\mathbf{x}}_k - (\sum_{i=1}^{p}\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{F}_k^{\,i-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \sum_{n=1}^{p}(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{F}_k^{\,i})\mathbf{G}_k\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+p-n} \qquad (۵)$$

برای سهولت محاسبات، این دسته معادلات در قالب ماتریسی به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{X}_{k+1,p} = \mathbf{F}_x\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{x-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_m\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1} \qquad (۶)$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

که در آن $\mathbf{x}_{k+1,p}$ بردار تخمین حالت‌ها، $p$ افق پیش‌بینی و $\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}$ خطای مدل است که باید بهینه شود. ماتریس‌های معادله هم به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\mathbf{X}_{k+1,p}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}\\ \hat{\mathbf{x}}_{k+2}\\ \hat{\mathbf{x}}_{k+3}\\ \vdots\\ \hat{\mathbf{x}}_{k+p}\end{bmatrix},\quad \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}=\begin{bmatrix}\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k}\\ \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+1}\\ \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+2}\\ \vdots\\ \Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+p-1}\end{bmatrix},\qquad (۷)$$

$$\mathbf{F}_x=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_k+\mathbf{I}\\ \mathbf{F}_k{}^2+\mathbf{F}_k+\mathbf{I}\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{p}\mathbf{F}_k{}^i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_m=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ (\mathbf{F}_k+\mathbf{I})\mathbf{G}_k & \mathbf{G}_k & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ (\sum_{i=0}^{p-1}\mathbf{F}_k{}^i)\mathbf{G}_k & (\sum_{i=0}^{p-2}\mathbf{F}_k{}^i)\mathbf{G}_k & \cdots & \mathbf{G}_k\end{bmatrix},\qquad (۸)$$

$$\mathbf{F}_{x-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{k-1}\\ \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{I}+\mathbf{F}_k)\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{p}\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{F}_k{}^{i-1}\end{bmatrix}$$

بردار تخمین اندازه‌گیری‌ها در افق محدود پیش‌بین $p$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{Y}_{k+1,p}=\mathbf{H}_{k+1,p}\mathbf{X}_{k+1,p}=\mathbf{F}_y\hat{\mathbf{x}}_k-\mathbf{F}_{y-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}+\mathbf{H}_y\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}\quad (۹)$$

که در آن $\mathbf{F}_y=\mathbf{H}_{k+1,p}\mathbf{F}_x$ ، $\mathbf{F}_{y-1}=\mathbf{H}_{k+1,p}\mathbf{F}_{x-1}$ ، $\mathbf{H}_y=\mathbf{H}_{k+1,p}\mathbf{G}_m$ و $\mathbf{H}_{k+1,p}=diag(\mathbf{H}_{k+1})$ می‌باشند.

## ۳-۲- بهینه‌سازی خطای مدل بر اساس معادله تفاضلی

تابع هزینه تعریف‌شده در رابطه (۱) دارای متغیرهای $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k$ تا $\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+p-1}$ است و با حل مسئله بهینه‌سازی مقادیر بهینه آن‌ها محاسبه می‌شود و فقط اولین عنصر محاسبه‌شده به فرآیند اعمال می‌شود. در زمان بعدی تمام محاسبات قبل دوباره تکرار می‌شود. با بهینه‌سازی این تابع هزینه بردار $\Delta\hat{\mathbf{m}}_k$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta\hat{\mathbf{m}}^{*}_{k,p\text{-}1}=-\mathbf{K}_k^{IPA}\left(\mathbf{F}_y\hat{\mathbf{x}}_k-\mathbf{F}_{y-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)\qquad (۱۰)$$

که در آن:

$$\mathbf{K}_k^{IPA}=(\mathbf{H}_y^T\mathbf{R}_y\mathbf{H}_y+\mathbf{Q}_m)^{-1}\mathbf{H}_y^T\mathbf{R}_y\qquad (۱۱)$$

در هر گام بهینه‌سازی فقط اولین مقدار محاسبه‌شده به فرآیند اعمال می‌شود، یعنی:

$$\Delta\hat{\mathbf{m}}_k^{*}=-[\mathbf{I}\quad 0\quad\cdots\quad 0]^T\mathbf{K}_k^{IPA}\left(\mathbf{F}_y\hat{\mathbf{x}}_k-\mathbf{F}_{y-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)\qquad (۱۲)$$

پارامترهای قابل تنظیم در این الگوریتم عبارت است از افق پیش‌بینی $p$ و ماتریس‌های وزنی $\mathbf{R}_y$ و $\mathbf{Q}_m$ که مربوط به تابع هزینه می‌باشند. با تنظیم این پارامترها می‌توان پایداری و عملکرد مطلوب را برای سیستم تضمین کرد.

## ۳-۳- الگوریتم IPEKF برای سامانه غیرخطی

فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای محاسبه حالت‌های سیستم تصادفی غیرخطی با نویز فرایند و اندازه‌گیری گوسی مستقل است. به‌منظور بهبود عملکرد EKF، الگوریتم پیش‌بین تفاضلی طراحی‌شده برای تخمین خطای مدل‌سازی ناشی از بایاس شتاب سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها مناسب است. برعکس فیلتر کالمن توسعه‌یافته، این خطای مدل‌سازی در فیلترIPEKF به‌صورت متغیرهای مدل حالت نیستند. در مسئله ترازیابی سامانه ناوبری، تعداد حالت‌هایی که در فیلتر پیشنهادی باید تخمین زده شوند از ۱۰ حالت (فیلتر کالمن توسعه‌یافته) به پنج حالت کاهش می‌یابد؛ بنابراین، در فیلتر IPEKF درجه رؤیت پذیری فیلتر افزایش و بار محاسباتی کاهش می‌یابد. مزیت دیگر این الگوریتم نسبت به الگوریتم‌های معمول، آن است که لزوماً نویز در این روش نباید سفید باشد و می‌تواند رنگی هم باشد. همچنین روش پیشنهادی حساسیت کمتری به نویز اندازه‌گیری و فرایند دارد. ساختار الگوریتمIPEKF از اجزای زیر تشکیل می‌شود:

۱- تخمین خطای مدل

برای تخمین خطای مدل از الگوریتم پیش‌بین تفاضلی IPA استفاده می‌شود. تغییرات خطای مدل از رابطه‌ی (۱۲) و خطای مدل از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{m}_k=\mathbf{m}_{k-1}+\Delta\mathbf{m}_k^{*}\qquad (۱۳)$$

برای کاهش خطای تخمین حالت، خطای مدل $\mathbf{m}_k$ (بایاس حسگرها) در هر گام محاسبه و جبران می‌شود.

۲- تخمین حالت‌های سیستم

- به‌روزرسانی زمانی

$$\begin{cases}\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}=f\left(\hat{\mathbf{x}}_k\right)+\Delta\mathbf{m}_k^{*}\\ \mathbf{P}_{k+1/k}=\mathbf{F}_k\mathbf{P}_k\mathbf{F}_k^T+\mathbf{Q}_k\end{cases}\qquad (۱۴)$$

- به‌روزرسانی اندازه‌گیری

$$\begin{cases}\mathbf{K}_{k+1}=\mathbf{P}_{k+1/k}\mathbf{H}_{k+1}^T\left[\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1/k}\mathbf{H}_{k+1}^T+\mathbf{R}_{k+1}\right]^{-1}\\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}+\mathbf{K}_{k+1}\left[\mathbf{y}_{k+1}-\mathbf{H}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}\right]\\ \mathbf{P}_{k+1}=\left[\mathbf{I}-\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}\right]\mathbf{P}_{k+1/k}\end{cases}\qquad (۱۵)$$

در این روابط، $\hat{\mathbf{x}}_k$ بردار حالت، $\hat{\mathbf{m}}_k$ بردار خطای مدل، $\mathbf{y}_{k+1}$ مدل اندازه‌گیری، $\mathbf{H}_{k+1}$ ماتریس اندازه‌گیری، $f\left(\hat{\mathbf{x}}_k\right)$ مدل ترازیابی غیرخطی و $\mathbf{F}_k$ ژاکوبی آن است که در ضمیمه‌ی الف بیان‌شده‌اند. همچنین $\mathbf{P}$ ماتریس کوواریانس خطای تخمین و $\mathbf{K}$ بهره تخمین فیلترکالمن می‌باشند.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

## ٤. تجزیه و تحلیل پایداری مجانبی الگوریتم IPA با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف

در این بخش، شرایط کافی که پایداری مجانبی روش پیشنهادی را تضمین می‌کند، به دست می‌آید. در لحظه‌ی فعلی $k$ ، مسیر آینده خطای مدل یا $\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1} : i = 1,2,...,p$ با بهینه‌سازی تابع هزینه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{p} \left(\hat{\mathbf{y}}_{k+i} - \mathbf{y}^{r}_{k+i}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_y \left(\hat{\mathbf{y}}_{k+i} - \mathbf{y}^{r}_{k+i}\right) + \sum_{i=1}^{p} \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right) \quad (۱۶)$$

در سیستم ترازیابی اولیه، خروجی مرجع صفر است ( $\mathbf{y}^{r}_{k+i} = 0$ ). با استفاده از مدل پیش‌بین اندازه‌گیری ( $\hat{\mathbf{y}}_{k+i} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}$ )، می‌توان تابع هزینه را به‌صورت زیر ساده کرد:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{p} \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_y \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}\right) + \sum_{i=1}^{p} \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right)$$
$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{p} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}\right) + \sum_{i=1}^{p} \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right) \quad (۱۷)$$

که در آن $\mathbf{R}_x = \mathbf{H}^T\mathbf{R}_y\mathbf{H}$ بوده و فقط با به دست آمدن اولین عنصر کنترل بهینه $\Delta\hat{\mathbf{m}}^{*}_{k}$ اجرا می‌شود. در لحظه‌ی بعدی همان مراحل بهینه‌سازی تکرار می‌شوند. مسئله‌ی اصلی پایداری، برقراری محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ می‌باشد. حال قضیه‌ی زیر را اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱–** تابع هزینه (۱۷) را با فرضیات زیر در نظر بگیرید.

- فرض کنید محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ که در آن $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k}$ حالت نهایی است، برقرار بوده و خطای مدل یا $\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1} : i = 1,2,...,p$ جواب بهینه مسئله است.
- همچنین برای هرلحظه $k$، یک جواب مثل $\Delta\hat{\mathbf{m}}^{*}_{k}$ وجود دارد که با توجه به محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ تابع هزینه $\mathbf{J}$ را کمینه می‌کند.

با توجه به این فرضیات، الگوریتم تخمین پیش‌بین خطای مدل، پایدار مجانبی است.

**اثبات:** ایده اصلی در اثبات پایداری الگوریتم IPA در نظر گرفتن تابع هزینه (۱۷) به‌عنوان یک تابع لیاپانوف است. پایداری الگوریتم زمانی است که تغییرات تابع هزینه در تمام مسیرها همیشه غیرمنفی باشد (یعنی $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k) < 0$ )؛ بنابراین، با معادل قرار دادن تابع لیاپانوف $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ با تابع هزینه کمینه در افق محدود ( $J_{\min}$ )، به‌صورت زیر پایداری مجانبی آن را اثبات می‌کنیم.

$$V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = \sum_{i=1}^{p} \hat{\mathbf{x}}_{k+i}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+i} + \sum_{i=1}^{p} \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}\right) \quad (۱۸)$$

که در آن $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = J_{\min}$ و $\Delta\hat{\mathbf{m}}^{*}_{k}$ تابعی از $\hat{\mathbf{x}}_k$ است (معادله (۱۲)). حال با توجه به فرض دوم قضیه، جواب بهینه‌ی $\Delta\hat{\mathbf{m}}^{*}_{k}$ تضمین می‌شود. در معادله (۱۸) مشاهده می‌شود که $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ مثبت معین بوده و می‌تواند یک تابع لیاپانوف مناسب باشد. در لحظه‌ی $k+1$، با استفاده از رابطه‌ی (۱۸) تابع لیاپانوف به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) = \sum_{i=1}^{p} \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + \sum_{i=1}^{p} \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}\right) \quad (۱۹)$$

با بهینه‌سازی تابع هزینه‌ی (۱۷) جواب بهینه $\Delta\hat{\mathbf{m}}^{*}_{k+1}$ به‌دست‌آمده و از معادله (۱۹) خواهیم داشت:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p} + \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+p}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+p}\right) + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}\right) \quad (۲۰)$$

در این حالت با توجه به فرض محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ داریم:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) \le \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_{k+i}\right) = V^{'}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) \quad (۲۱)$$

به‌این‌ترتیب، نا تساوی (۲۱) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \le V^{'}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \quad (۲۲)$$

تابع $V^{'}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1)$ شامل خطای مدل و حالت می‌باشد و با تابع $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ برابر است. از طرفی داریم.

$$V^{'}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_k\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_k\right) \quad (۲۳)$$

با توجه به محدودیت $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$ در فرض اول، خواهیم داشت:

$$V^{'}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = -\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_k\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_k\right) \quad (۲۴)$$

با در نظر گرفتن روابط (۲۲) و (۲۴) نتیجه می‌شود:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \le -\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_k\right)^{T} \mathbf{Q}_m \left(\Delta\hat{\mathbf{m}}_k\right) < 0 \quad (۲۵)$$

بنابراین می‌بینیم که $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$ به‌صورت منفی معین است. پس با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف، معادله‌ی (۱۹) یک نقطه تعادل پایدار مجانبی در مبدأ دارد.

ماتریس‌ها وزنی $\mathbf{R}_x$ و $\mathbf{Q}_m$ ماتریس‌های متقارن و مثبت معین هستند که به‌صورت قطری در نظر گرفته می‌شوند. چون هدف کمینه کردن تابع هزینه (۱۶) است باید ماتریس $\mathbf{R}_x$ مثبت معین باشد. بزرگ شدن ماتریس وزنی $\mathbf{R}_x$ باعث می‌شود که مؤلفه حالت‌ها اهمیت بیشتری نسبت به خطای مدل داشته باشد؛ همچنین پاسخ با سرعت و دقت بیشتری ورودی مرجع را دنبال کند.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

## ۵-تحلیل نتایج آزمون الگوریتم پیشنهادی

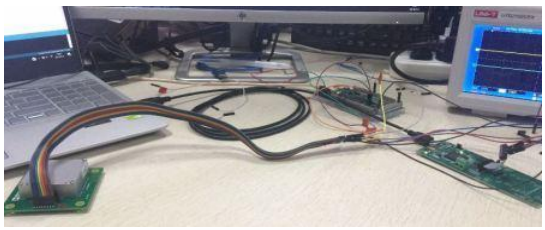
در این بخش عملکرد فیلتر پیشنهادی در یک آزمون واقعی تحلیل خواهد شد. برای ارزیابی الگوریتم ارائه‌شده در تخمین زوایای ترازیابی اولیه‌ی یک سامانه‌ی ناوبری اینرسی، این الگوریتم روی سخت‌افزارهای آزمایشگاهی پیاده‌سازی شده و با انجام آزمون‌های گوناگونی از صحت عملکرد نرم‌افزارها و سخت‌افزارها اطمینان حاصل‌شده است.

در آزمون‌ها، از سامانه‌ی ناوبری اینرسی میکروالکترومکانیکی نوع ADIS16488A استفاده‌شده است. در جدول ۱ مشخصات این حسگرهای اینرسی آمده است.

جدول ۱: مشخصات حسگرهای اینرسی ADIS16488A [۲۰]

| نام پارامتر | ژیروسکوپ | شتاب سنج |
|---|---|---|
| Misalignment Axis | ±0.05 ° | ±0.035 ° |
| Nonlinearity | 0.01% of FS | 0.1% of FS |
| Bias Repeatability | ±0.2°/sec | ±16 mg |
| In-Run Bias Stability | 5.1°/hr | 0.07 mg |
| Random Walk | 0.26°/√hr | 0.029 m/sec/√hr |
| Output Noise | 0.135°/sec rms | 1.29 mg rms |
| Noise Density | 0.0059°/sec/√Hz | 0.063 mg/√Hz |

سخت‌افزار و لوازم آزمون ترازیابی سامانه ناوبری در شکل ۲ نشان داده‌شده است.



شکل ۲: سخت‌افزارهای جانبی آزمایشگاه

در این آزمایش، فرایند ترازیابی با استفاده از داده‌های ثابت خودرو برای ۱۲۰۰ ثانیه انجام می‌شود. زمان نمونه‌برداری برای سامانه ناوبری اینرسی، برابر ۰/۰۱ ثانیه و افق پیش‌بینی یا $p$ برابر ۱۰ می‌باشد. برای اندازه‌گیری تأثیر خطای کوواریانس اندازه‌گیری در دقت همگرایی تخمین زوایای اولیه، آزمایش ترازیابی سه بار طبق جدول ۳ تکرار می‌شود.

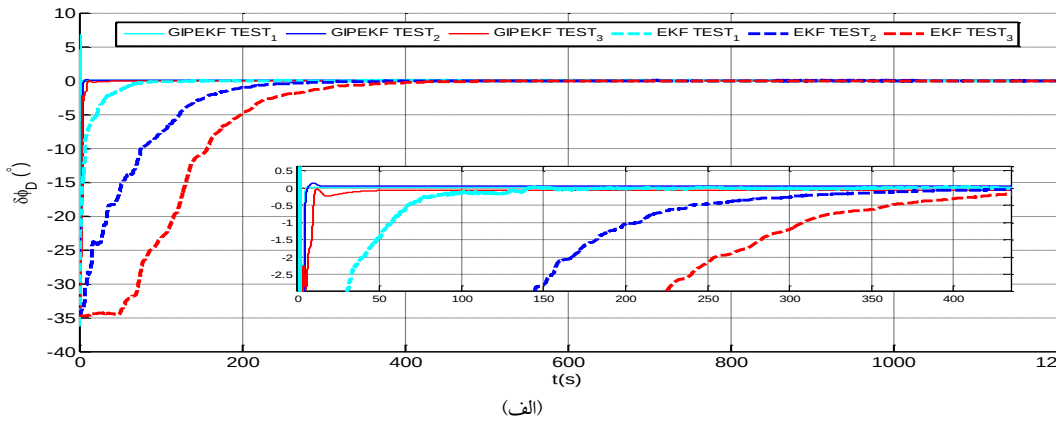
### ۵-۱-نتایج تحلیل عملکرد IPEKF

برای تجزیه‌وتحلیل عملکرد فیلتر طراحی‌شده، این فیلتر با فیلتر کالمن توسعه‌یافته و فیلتر کالمن بدون بو مقایسه شده است. فیلتر کالمن بدون بو [۹]، با استفاده از تعداد محدودی از نقاط سیگمایی که با دقت انتخاب‌شده‌اند بهره می‌برد تا بدین‌وسیله تابع توزیع احتمال را به دست آورد. برخلاف فیلتر کالمن توسعه‌یافته که به دلیل استفاده از ماتریس ژاکوبی در فرآیند خطی سازی، دارای دقت کمی است، فیلتر کالمن بدون بو مجموعه مینیمال نقاط سیگما را محاسبه نموده و به‌دقت بالاتری دست می‌یابد (توضیحات بیشتر الگوریتم فیلتر کالمن بدون بو در ضمیمه (ب) آمده است).

در جدول ۲ سه نوع آزمون توضیح داده‌شده است. در آزمون ۳، دقت برآورد خطای سمت هنگام استفاده از فیلتر جدید برابر ′۰/۰۱۹±′۰۸۷/ ۴ است، درحالی‌که دقت تخمین زاویه سمت با استفاده از فیلتر EKF ′۴۸±′۵۲ و از فیلتر UKF ′۱۰۷۱۲ است (ازایی تغییرات کوواریانس اندازه‌گیری، UKF دارای حساسیت بیشتر از EKF می‌باشد). می‌بینیم که الگوریتم پیشنهادی به‌طور قابل‌توجهی دقت برآورد زاویه سمت را در مقایسه با EKF و UKF بهبود می‌بخشد.

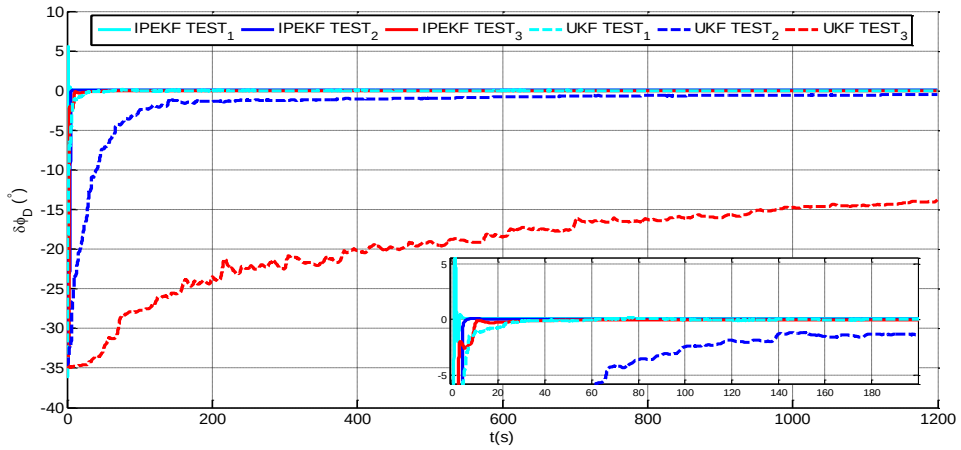
جدول ۲. نتایج آزمایش ترازیابی برای زاویه عدم انطباق سمت.

| پارامتر مورد ارزیابی | | زمان همگرایی (sec) | | | خطای RMSE تخمین زاویه سمت (arc.min) | | | انحراف استاندارد خطای تخمین (arc.min) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | نوع فیلتر | UKF | EKF | IPEKF | UKF | EKF | IPEKF | UKF | EKF | IPEKF |
| آزمون ۱ | ($\sigma_R=10^{-3}$) | ۵۰ | ۱۵۰ | ۸ | ۰/۸۲ | ۱/۱۲ | ۰/۳۹ | ۰/۸ | ۰/۹۱ | ۰/۱۴ |
| آزمون ۲ | ($\sigma_R=10^{-2}$) | ۳۰۰ | ۴۰۰ | ۲۰ | ۵۰/۷ | ۱۱/۳۸ | ۲/۶۷ | ۱۵/۱ | ۱۰/۴۲ | ۰/۰۰۳ |
| آزمون ۳ | ($\sigma_R=10^{-1}$) | >۱۲۰۰ | ۵۲۴ | ۵۲ | ۱۰۷۱ | ۵۸/۰۰۹ | ۴/۰۸۷ | ۱۶۲ | ۴۸ | ۰/۰۱۹ |




(الف)

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]



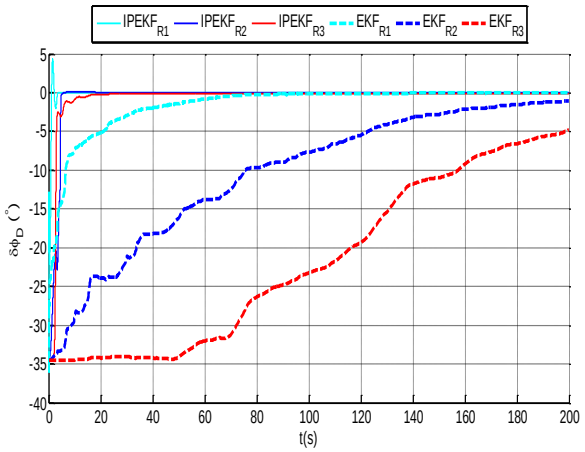

(ب)

شکل ۳: (الف) همگرایی زاویه سمت توسط IPEKF و EKF, (ب) همگرایی زاویه سمت توسط IPEKF و UKF

نتایج ترازیابی زاویه سمت و زمان همگرایی آن در جدول ۲ آمده است. شکل ۳(الف) مقایسه همگرایی زاویه سمت را با استفاده از IPEKF و EKF و شکل ۳ (ب) مقایسه همگرایی زاویه سمت را با استفاده از IPEKF و UKF نشان می‌دهد.

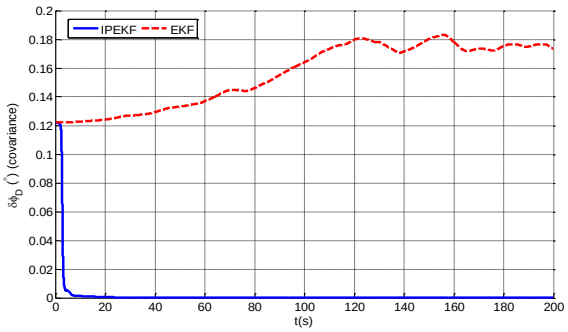
## ۵-۲-نتایج تحلیل پایداری

در شکل ۴ نتایج تأثیر بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری و کوواریانس خطای حالت‌های فرآیند روی زاویه سمت، مربوط به الگوریتم جدید و فیلتر کالمن توسعه‌یافته به‌طور هم‌زمان نشان داده‌شده است. ملاحظه می‌شود که در روش جدید میزان همگرایی افزایش‌یافته است.



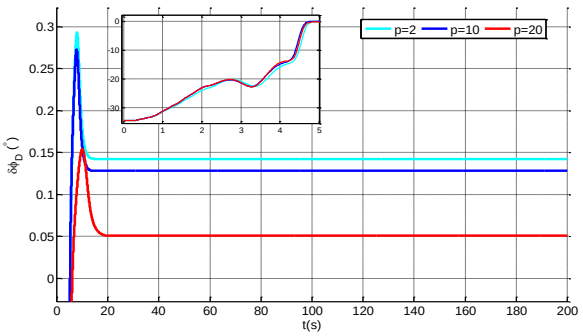

شکل ۴: همگرایی زاویه سمت در روش‌های IPEKF و EKF با بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری

در شکل ۵ نتایج تأثیر بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری و کوواریانس خطای حالت‌های فرآیند روی کوواریانس خطای زاویه سمت مربوط به الگوریتم جدید و فیلتر کالمن توسعه‌یافته به‌طور هم‌زمان نشان داده‌شده است. ملاحظه می‌شود که درروش جدید میزان پایداری افزایش‌یافته است.




شکل ۵: همگرایی کوواریانس خطای زاویه سمت در روش‌های IPEKF و EKF با بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری

در ادامه نتایج شبیه‌سازی برای p= ۲, p=۱۰ و p= ۲۰ در شکل ۶ آورده شده است. افق پیش‌بین خروجی باید به حد کافی بزرگ باشد تا خروجی بتواند به مقدار ماندگار همگرا شود. در این آزمون چون سیستم غیرخطی است افق پیش‌بینی به حد کافی باید بزرگ باشد. کوچک بودن افق پیش‌بینی خروجی باعث می‌شود که الگوریتم تخمین مناسبی را از رفتار آینده سیستم نداشته باشد:



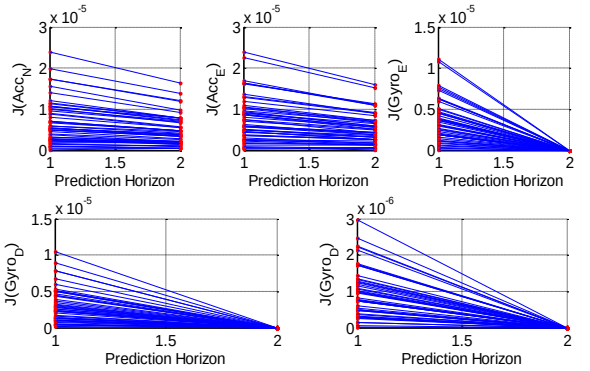

شکل ۶: همگرایی تخمین زاویه سمت برای p=۲،p=۱۰ و p=۲۰

در شکل ۶ به‌خوبی مشخص است که با بزرگ شدن افق پیش‌بینی خطای همگرایی کم می‌شود.

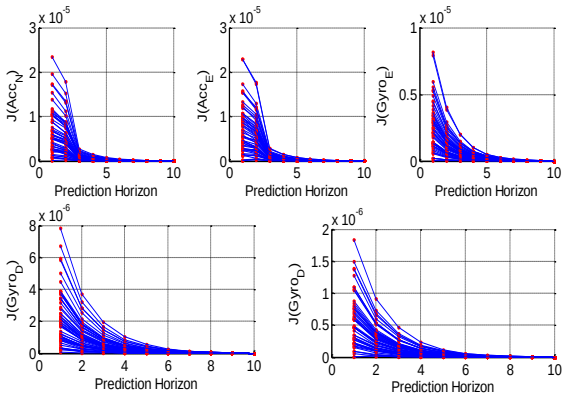


[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

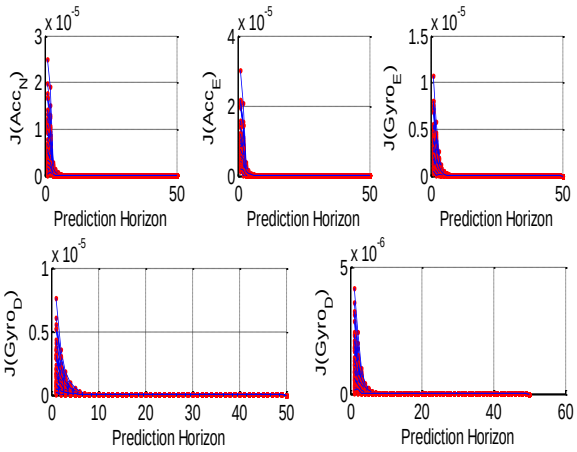
در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ نتایج مربوط به تأثیر افزایش افق پیش‌بینی در تابع هزینه الگوریتم جدید نشان داده‌شده است. ملاحظه می‌شود که تابع هزینه نزولی است.




شکل ۷: تابع هزینه در حالت p=2




شکل ۸: تابع هزینه در حالت p=۱۰




شکل ۹: تابع هزینه در حالت p=۵۰

بار محاسباتی الگوریتم‌های IPEKF، EKF و UKF را می‌توان از روی تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه از اجرای آن محاسبه نمود[۲۱] . فرض می‌کنیم بعد بردار حالت $n$ و بعد بردار اندازه‌گیری $m$ و بعد افق پیش‌بینی $p$ است؛ بنابراین، تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه برای هر بار اجرای الگوریتم‌ها طبق جدول ۳ آمده است. از جدول ۳ ملاحظه می‌شود که بار محاسباتی IPEKF بسیار کمتر از EKF و UKF می‌باشد.

جدول ۳: مقایسه‌ی بار محاسباتی الگوریتم‌های IPEKF، EKF و UKF

| الگوریتم | رابطه‌ی تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه | تعداد حالت‌ها | بار محاسباتی |
|---|---|---|---|
| EKF | $6n^3+6n^2m+4nm^2+m^3+nm-n$ | $n=۱۰$<br>$m=۲$ | ۷۳۷۸ |
| UKF | $(16/3)n^3+6n^2m+4nm^2+11n^2+m^3+nm+3n$ | $n=۱۰$<br>$m=۲$ | ۷۸۵۱ |
| IPEKF | $6n^3+6n^2m+4nm^2+m^3+nm-n+n^2p^2m+n^2pm$ | $n=۵$<br>$m=۲$<br>$p=۱۰$ | ۶۵۶۰ |
| | | $n=۵$<br>$m=۲$<br>$p=۲$ | ۱۳۷۳ |

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ترازیابی اولیه برای سامانه ناوبری اینرسی میکرو الکترومکانیکی با استفاده از یک مدل ترازیابی غیرخطی در نظر گرفته شد. با استخراج مدل غیرخطی خطا برای این سیستم و با در نظر گرفتن حالت سکون حسگرهای اینرسی (صفر بودن سرعت واقعی حسگرها) خطای زوایای تراز و سمت تخمین زده شد. عملکرد و مقاومت الگوریتم پیشنهادی با فیلترکالمن توسعه‌یافته و فیلترکالمن بدون بو مقایسه گردید.

روش جدید IPEKF که ترکیبی از فیلتر کالمن توسعه‌یافته و فیلتر پیش‌بین تفاضلی تعمیم‌یافته است برای تخمین خطاهای مدل‌سازی و نویز استفاده شد. الگوریتم‌های متداول به خاطر ناشناخته بودن خطای حسگرهای اینرسی با مشکل همگرایی مواجه می‌شوند. این مشکل در روش ارائه‌شده در این مقاله برطرف شده است. علاوه براین، درجه‌ی مشاهده‌پذیری روش IPEKF نسبت به روش EKF افزایش‌یافته و بار محاسباتی آن در مقایسه با سایر روش‌ها به خاطر کاهش تعداد حالت‌ها، کاهش می‌یابد.

مسئله اصلی این مقاله، نشان دادن پایداری و همگرایی روش پیشنهادی با استفاده از تئوری لیاپانوف بود. طبق نتایج به‌دست‌آمده از آزمون‌ها، مقایسه‌ی روش نوین با فیلتر کالمن توسعه‌یافته و فیلتر کالمن بدون بو، بهبود دقت و عملکرد الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد.

### ۵-۳-مقایسه بار محاسباتی روش‌های IPEKF، EKF و UKF



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

## ضمیمه الف- مدل ترازیابی غیرخطی الگوریتم IPEKF

در سامانه ناوبری اینرسی، قبل از شروع به ناوبری لازم است ترازیابی اولیه که تخمین اولیه از وضعیت جسم (ماتریس تبدیل) نسبت به دستگاه مرجع (دستگاه جغرافیایی) تعیین می‌شود .این ترازیابی اولیه طی دو مرحله‌ی ترازیابی غیردقیق[1] و ترازیابی دقیق[2] به‌صورت متوالی انجام می‌شود. می‌توان مدل ترازیابی غیرخطی را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} &= f(\mathbf{x}_t)+\mathbf{m}_t+\mathbf{w}_t \\ \mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_{t+1}+\mathbf{v}_{t+1}\end{aligned} \quad \text{.....(الف-۱)}$$

متغیرهای حالت موردنیاز برای تعریف خطای سرعت عبارت‌اند از: $\delta v_N$ و $\delta v_E$. متغیرهای حالت موردنیاز برای تعریف خطاهای زاویه، $[\varphi_N \ \varphi_E \ \varphi_D]$ می‌باشند؛ بنابراین، بردار حالت این مسئله به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{x}_t = [\delta v_N \quad \delta v_E \quad \varphi_N \quad \varphi_E \quad \varphi_D]^T \quad \text{.....(الف-۲)}$$

بردار خطای مدل سیستم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m}_t = [\Delta f_N \quad \Delta f_E \quad \Delta\omega_D \quad \Delta\omega_E \quad \Delta\omega_N]^T \quad \text{.....(الف-۳)}$$

مدل غیرخطی خطاها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}):\begin{cases}\delta\dot v_N^{n'} = (1-\mathrm{c}\varphi_D) f_N^{n'} + \mathrm{s}\varphi_D f_E^{n'} + 2\omega_D \delta\mathbf{v}_y^{n'} \\ \qquad -(\varphi_E \mathrm{c}\varphi_D + \varphi_N \mathrm{s}\varphi_D) f_D^{n'} + \Delta f_N \\ \delta\dot v_E^{n'} = -\mathrm{s}\varphi_D f_N^{n'} + (1-\mathrm{c}\varphi_D) f_E^{n'} - 2\omega_D \delta\mathbf{v}_y^{n'} \\ \qquad +(-\varphi_E \mathrm{s}\varphi_D + \varphi_N \mathrm{c}\varphi_D) f_D^{n'} + \Delta f_E \\ \dot\varphi_x = (1-\cos\varphi_z)\omega_N + \varphi_y\omega_D + \delta v_E / r \\ \dot\varphi_y = \sin\varphi_z \omega_N - \varphi_x \omega_D - \delta v_N / r \\ \dot\varphi_z = -(\varphi_y \cos\varphi_z + \varphi_x \sin\varphi_z)\omega_N - \delta v_E \tan\varphi / r\end{cases} \quad \text{...(الف-۴)}$$

و مدل اندازه‌گیری به‌صورت زیر در نظر گرفته‌شده است:

$$\mathbf{y}_{t+1} = \begin{bmatrix}\delta v_N \\ \delta v_E\end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{.....(الف-۵)}$$

ماتریس ژاکوبی تابع $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix}0 & 2\omega_D & -s\varphi_D f_D^{n'} & -c\varphi_D f_D^{n'} & F_{15} \\ -2\omega_D & 0 & c\varphi_D f_D^{n'} & -s\varphi_D f_D^{n'} & F_{25} \\ 0 & 1/r & 0 & \omega_D & \omega_N \mathrm{s}\varphi_D \\ -1/r & 0 & -\omega_D & 0 & \omega_N \mathrm{c}\varphi_D \\ 0 & -\tan\varphi/r & -\omega_N \mathrm{s}\varphi_D & -\omega_N \mathrm{c}\varphi_D & F_{55}\end{bmatrix} \quad \text{(الف-۶)}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}F_{15} &= f_E^{n'} \mathrm{c}\varphi_D + f_N^{n'} \mathrm{s}\varphi_D + (\varphi_E \mathrm{s}\varphi_D - \varphi_N \mathrm{c}\varphi_D) f_D^{n'} \\ F_{25} &= f_E^{n'} \mathrm{s}\varphi_D - f_N^{n} \mathrm{c}\varphi_D - (\varphi_E \mathrm{c}\varphi_D + \varphi_N \mathrm{s}\varphi_D) f_D^{n'} \\ F_{55} &= (-\varphi_N \mathrm{c}\varphi_D + \varphi_E \mathrm{s}\varphi_D)\omega_N\end{aligned}$$

## ضمیمه ب- الگوریتم UKF [۹]

۱-مقداردهی اولیه این فیلتر با متوسط و کوواریانس حالت پیش‌بینی شده زیر صورت می‌گیرد:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_0 &= \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{P}_0 &= (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T\end{aligned} \quad \text{.....(ب-۱)}$$

۲-مجموعه نقاط سیگما از متوسط و کوواریانس حالت پیشین طبق رابطه زیر تولید کنید

$$\chi^a_{i\backslash k} = \begin{cases}\hat{\mathbf{x}}^a_{0\backslash k} & , i=0 \\ \hat{\mathbf{x}}^a_{i\backslash k} + \gamma\left(\sqrt{\mathbf{P}^a_k}\right)_i, & i=1....L \\ \hat{\mathbf{x}}^a_{i\backslash k} - \gamma\left(\sqrt{\mathbf{P}^a_k}\right)_i, & i=L+1....2L\end{cases} \quad where: \begin{cases}\gamma = \sqrt{L+\lambda} \\ \kappa = 3-L \\ \lambda = \alpha^2(L+\kappa)-L \\ 10^{-4} < \alpha \le 1\end{cases} \quad \text{(ب-۲)}$$

۳-نقاط سیگما را توسط معادله مدل غیرخطی زیر انتقال دهید.

$$\mathbf{x}^a_{i\backslash k+1|k} = f(\chi^a_{i\backslash k}, \mathbf{m}_k, k) \quad \text{.....(ب-۳)}$$

۴- میانگین و کوواریانس نقاط انتقال داده‌شده را توسط رابطه زیر محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^{mean} \chi^{\alpha}_{i\backslash k+1|k} \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^{\mathrm{cov}} (\chi^{\alpha}_{i\backslash k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(\chi^{\alpha}_{i\backslash k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T\end{aligned} \quad \text{....(ب-۴)}$$

۵-وزن‌های $W_i^{mean}$ و $W_i^{\mathrm{cov}}$ از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases}W_0^{mean} = \dfrac{\lambda}{L+\lambda} \\ W_0^{\mathrm{cov}} = \dfrac{\lambda}{L+\lambda} + (1-\alpha^2+\beta), \quad \beta = 2 \\ W_i^{mean} = W_i^{\mathrm{cov}} = \dfrac{1}{2(L+\lambda)}, \quad i = 1,2,...,2L\end{cases} \quad \text{.....(ب-۵)}$$

۶- نقاط سیگما را در معادله اندازه‌گیری قرار داده و آن‌ها را انتقال دهید.

$$\mathbf{y}_{i\backslash k+1|k} = h(\mathbf{x}^a_{i\backslash k+1|k}, \mathbf{m}_k, k) \quad \text{.....(ب-۶)}$$

۷- میانگین اندازه‌گیری را پیشگوئی کنید.

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{mean} \mathbf{y}_{i\backslash k+1|k} \quad \text{.....(ب-۷)}$$

۸- کوواریانس خطا را پیشگوئی کنید.

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{R}_{k+1} + \sum_{i=0}^{2L} W_i^{\mathrm{cov}} \left[\mathbf{y}_{i\backslash k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}\right]\left[\mathbf{y}_{i\backslash k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}\right]^T \quad \text{(ب-۸)}$$

۹- ماتریس همبستگی بین $\mathbf{y},\mathbf{x}$ را حساب کنید.

$$\mathbf{P}_{xz\backslash k+1|k} = \mathbf{R}_{k+1} + \sum_{i=0}^{2L} W_i^{\mathrm{cov}} \left[\mathbf{x}^a_{i\backslash k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right]\left[\mathbf{x}^a_{i\backslash k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right]^T \quad \text{(ب-۹)}$$

[1] Coarse alignment

[2] Fine alignment



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]

۱۰- برای به دست آوردن تخمین بهینه از معادلات فیلتر کالمن استفاده کنید.

## مراجع

[1] N. Nagui et al., "Improved GPS/IMU Loosely Coupled Integration Scheme Using Two Kalman Filter-based Cascaded Stages", Arabian Journal for Science and Engineering, vol. 46, no. 2, pp. 1345-1367, 2021.

[2] N. A. Anbu and D. Jayaprasanth. "Integration of Inertial Navigation System with Global Positioning System using Extended Kalman Filter", in International Conference on Smart Systems and Inventive Technology, IEEE, 2019.

[3] H. Rahimi and A. A. Nikkhah, "Improving the speed of initial alignment for marine strapdown inertial navigation systems using heading control signal feedback in extended Kalman filter", International Journal of Advanced Robotic Systems, vol. 17, no. 1, 2020.

[4] F. Farhangian and R. Landry, "Accuracy improvement of attitude determination systems using EKF-based error prediction filter and PI controller", Sensors, vol. 20, no. 14, pp. 4055, 2020.

[5] W. Liu and et al., "TLIO: Tight Learned Inertial Odometry". IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 5, no. 4, pp. 5653-5660, 2020.

[6] S. Song and J. Wu, "Motion State Estimation of Target Vehicle under Unknown Time-Varying Noises Based on Improved Square-Root Cubature Kalman Filter", Sensors, vol. 20, no. 9, pp. 2620, 2020.

[7] I. Hashlamon, "A new adaptive extended Kalman filter for a class of nonlinear systems", Journal of Applied and Computational Mechanics, vol. 6, no. 1, pp. 1-12, 2020.

[8] K. H. Kim et al., "The stability analysis of the adaptive fading extended Kalman filter using the innovation covariance", international journal of control, automation and systems, vol. 7, no. 1, pp. 49-56, 2009.

[9] A. Daid, E. Busvelle, and M. Aidene, "On the convergence of the unscented Kalman filter", European Journal of Control, vol.57, pp. 125-134, 2021.

[10] M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach, "Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems", IEEE transactions on automatic control, vol. 42, no. 4, pp. 581-586, 1997.

[11] K. Reif and R. Unbehauen, "The extended Kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems", IEEE Transactions on Signal processing, vol. 47, no. 8, pp. 2324-2328, 1999.

[12] K. Reif et al., "Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter", IEEE Transactions on Automatic control, vol. 44, no. 4, pp. 714-728, 1999.

[13] T. Karvonen et al., "On Stability of a Class of Filters for Nonlinear Stochastic Systems", SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 58, no. 4, pp. 2023-2049, 2020.

[14] M. Ren, Q. Zhang, and J. Zhang, "An introductory survey of probability density function control", Systems Science & Control Engineering, vol. 7, no. 1, pp. 158-170, 2019.

[15] Q. Zhang, "Performance enhanced Kalman filter design for non-Gaussian stochastic systems with data-based minimum entropy optimisation", AIMS Electronics and Electrical Engineering, vol. 3, no. 4, pp. 382-396, 2019.

[16] N. Ghahramani and F. Towhidkhah, "Constrained incremental predictive controller design for a flexible joint robot", ISA transactions, vol. 48, no. 3, pp. 321-326, 2009.

[17] N. Ghahramani, A. Naghash, and F. Towhidkhah, "Incremental Predictive Command of Velocity to Be Gained Guidance Method", JAST, vol. 5, no. 3, pp. 99-105, 2008.

[18] K.R. Britting, Inertial navigation systems analysis, Johan Wiley and Sons. Inc, New York, 1971.

[19] D. Titterton, J.L. Weston, and J. Weston, Strapdown inertial navigation technology, IET, Vol. 17, 2004.

[20] ADIS16488A, Tactical Grade Ten Degrees of Freedom Inertial Sensor, Analog Devices, *"http://www.analog.com"*, access: 2018.

[۲۱] س. ظهیری، م. نصیری، ر. هاونگی، ح. الیاسی، "طراحی یک فیلتر تلفیق غیرخطی بهینه مبتنی بر الگوریتم بهینه سازی گروه ذرات برای سیستم ناوبری تلفیقی INS/GPS"، فصلنامه علمی دریا فنون، دوره ۵، شماره ۳، صفحه ۱-۱۷،۲۰۱۸.

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.1.3.5 ]
[ DOI: 10.52547/joc.16.1.27 ]