

# طراحی یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی برای سیستم‌های کنترل پذیر حالت ویژه قوی

طاهره عزیزپور<sup>۱</sup>، مجید یاراحمدی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، لرستان، ایران azizpor.tahereh@gmail.com

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، لرستان، ایران yarahmadi.m@lu.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸

ویرایش: ۱۴۰۱/۰۱/۱۲

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۱

**چکیده:** در این مقاله یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی جدید برای کنترل یک سیستم کوانتومی کنترل پذیر حالت ویژه قوی طراحی می‌شود. برای این منظور، اگر حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار داشته باشد، از یک کنترل کننده کوانتومی لیاپانوفی<sup>۱</sup> برای انتقال حالت استفاده می‌شود در غیر این صورت، با استفاده از یک قاعده کنترل ترکیبی مبتنی بر الگوریتم گروور<sup>۲</sup>، حالت اولیه را به یک حالت واسط دیگر که حالت هدف در دسترس آن باشد، انتقال می‌دهیم و سپس با استفاده از یک کنترل کننده کوانتومی لیاپانوفی، حالت واسط را به حالت هدف انتقال می‌دهیم. برای این منظور یک قضیه ارائه و اثبات شده است و یک الگوریتم جدید، با هدف پیاده‌سازی روش پیشنهادی، طراحی شده است. مثال شبیه‌سازی شده کارآیی و مزیت روش ارائه شده را به خوبی نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** کنترل ترکیبی، انتقال، کنترل کننده کوانتومی، الگوریتم گروور، کنترل پذیر حالت ویژه قوی.

## Designing a hybrid quantum controller for strongly eigenstate controllable systems

Tahereh Azizipour, Majid Yarahmadi

**Abstract:** In this paper, a new quantum hybrid controller for controlling the strongly eigenstate controllable systems, is designed. For this purpose, a Lyapunov control law is implemented when the target state is in reachable set of the initial state. On the other hand, if the target state is not in the reachable set of the given initial state, based on Grover algorithm, a new interface state that the target state is in its reachable set, will be found and the given initial state is transferred to the new interface state. Then, the new interface state is transferred to the target state, based on a designed Lyapunov control law. A theorem and a new algorithm, for implementing the presented method, is designed. Finally, a simulated example illustrates the applications and advantages of presented method.

**Keywords:** Hybrid Control, State Transformation, Quantum Controller, Grover Algorithm, Strongly eigenstate controllable.

<sup>1</sup> Lyapunov

<sup>2</sup> Grover's algorithm

## ۱- مقدمه

همیتونین سیستم، ارائه شده است. توانایی کنترل کردن سیستم‌های کوانتومی باز در فیزیک کوانتومی [۶]، شیمی کوانتومی [۷] و محاسبات کوانتومی کاربردهای چشمگیری دارد. به طور کلی، سیستم‌های کوانتومی را به دو دسته تقسیم بندی می کنند: سیستم‌های کوانتومی بسته<sup>۳</sup> و سیستم‌های کوانتومی باز<sup>۴</sup>. یک سیستم کوانتومی بسته دارای تحول یکانی است که دینامیک آن از طریق معادله‌ی شرودینگر<sup>۵</sup> یا معادله‌ی لیویل<sup>۶</sup> بیان می شود. اما تحول یک سیستم باز به علت فعل و انفعالاتی که با محیط دارد، یکانی نیست و از معادله‌ی شرودینگر ساده تبعیت نمی کند. در دنیای واقعی پیرامون ما اکثر سیستم‌ها از این نوع هستند. در دو دهه گذشته، موضوع کنترل پذیری سیستم‌های کوانتومی توسط بسیاری از محققان در زمینه‌های مختلف مورد مطالعه قرار داده شده است. هوانگ و همکارانش<sup>۷</sup> کنترل پذیری سیستم‌های مکانیک کوانتومی را با استفاده از نظریه‌ی تحلیلی دامنه‌ی نیلسون<sup>۸</sup>، گروه لی و جبر لی<sup>۹</sup> بررسی کردند [۸]. شمر<sup>۱۰</sup>، شرایط کافی برای کنترل پذیری کامل سیستم‌های کوانتومی<sup>N</sup> سطحی، فقط با یک پالس را ارائه نمود [۹]. نتایج نظری هدایت یک تابع موج دلخواه سیستم کوانتومی تحت میدان خارجی وابسته به زمان توسط ترنسی<sup>۱۱</sup> و ریتر<sup>۱۲</sup> در [۱۰] ارائه شد. استفاده از روش کنترل بر اساس لیاپانوف [۱۱، ۱۲، ۱۳] که پایداری سیستم را با طراحی میدان‌های کنترلی ترکیب می کند یک فرآیند مناسب و کارا محسوب می شود. به عنوان مثال می توان توابع لیاپانوف براساس فاصله‌ی حالت [۱۲، ۱۴]، متوسط مشاهده پذیر [۱۲] و خطای حالت [۱۲] را ذکر کرد. در این روش برای پایداری سیستم کنترل یک تابع لیاپانوف پیشنهاد می شود و قانون‌های کنترلی از شرایط حاکم بر تابع لیاپانوف و با هدف حفظ پایداری استخراج می شوند. در کنترل لیاپانوف، ایده اصلی، پیدا کردن میدان‌های کنترلی است که وقتی که زمان به سمت بینهایت میل می کند، تابع لیاپانوف به مینیمم خودش برسد. دانگ<sup>۱۳</sup> و همکاران در [۱۵] میدان‌های کنترل بهینه‌ای را طراحی کردند که تابع لیاپانوف را سریع تر کاهش می داد. در [۱۶] یک کنترل کننده ترکیبی تطبیقی هوشمند برای ردیابی یک مسیر دینامیک در سیستم‌های کوانتومی بسته متناهی براساس تئوری پایداری لیاپانوف ارائه شده است. اخیراً ظهور کامپیوترهای کوانتومی در مقیاس کوچک، نظر ریاضیدانان و مهندسان را بخصوص در حوزه الگوریتم‌های کاربردی به خود جلب کرده است [۱۷]. در حقیقت با وجود این که محاسبات کوانتومی [۱۸] از زمان بنیوف<sup>۱۴</sup> [۱۹] وجود داشته است اما دوویچ<sup>۱۵</sup> [۲۰]، فاینمن [۲۱] و مانین<sup>۱۶</sup> [۲۲] پیشنهاد کردند که یک کامپیوتر کوانتومی این قابلیت را دارد که وظایفی را انجام دهد که دور از دسترس کامپیوترهای کلاسیک است. احتمالاً مشهورترین

با وجود پیشرفت‌های عظیمی که در دهه‌های گذشته صورت گرفته است، اما باز هم کامپیوترهای کلاسیک دارای محدودیت ذاتی هستند که نمی توانند بر آن‌ها غلبه کنند. ایده کامپیوتر کوانتومی [۱] اولین بار در سال ۱۹۸۱ توسط برنده جایزه نوبل، ریچارد فاینمن<sup>۱</sup> مطرح شد، وی اظهار داشت که شبیه سازی دقیق و علمی سیستم‌های مکانیک کوانتومی در یک کامپیوتر کلاسیک غیرممکن است، اما نوع جدیدی از ماشین‌های ساخته شده از عناصر مکانیکی که از قوانین مکانیکی کوانتومی پیروی می کنند، ممکن است روزی شبیه سازی‌های دقیق سیستم‌های کوانتومی را انجام دهند. امروزه در آستانه انقلابی در فناوری قرار داریم. این انقلاب ورود به تجاری سازی فناوری کوانتومی<sup>۲</sup> است [۲]. یک کار حیاتی برای گسترش فناوری کوانتومی، گسترش پایه‌های نظری کنترل سیستم‌های کوانتومی است. بنابراین نیاز به ورود مهندسين کنترل و ریاضی دانان در این زمینه احساس می شود. در نظریه کنترل کوانتومی، کنترل پذیری سیستم‌های کوانتومی یک بحث اساسی است و مرتبط با رشته‌های مختلف علمی است که چگونگی رفتار سیستم‌های دینامیکی را دسته بندی می کند. منظور از کنترل یک پدیده، دخالت در رفتار آن است، به طوری که، نتایج مطلوب حاصل گردد. این عمل به این صورت انجام می گردد که هدف مورد نظر برای یک سیستم یا همان هدف مطلوب به عنوان مرجع در نظر گرفته می شود. هنگامی که یک یا چند تا از خروجی‌های سیستم باید برای رسیدن به مقدار مطلوب عمل نمایند، کنترل کننده با دستکاری ورودی‌ها، سیستم را ناچار به رسیدن به مقدار مطلوب می نماید. یک قانون کنترل (قاعده ورودی سیستم) یک تابعی است که در معادلات توصیف کننده دینامیک سیستم ظاهر می شود. هدف اصلی در کنترل کوانتومی، یافتن مسیریابی به منظور مدیریت کردن ساختار تحول سیستم‌هایی است که برحسب قوانین مکانیک کوانتومی تحول می یابند. به عنوان نمونه در [۳] برای کنترل سیستم‌های غیرخطی نامعین، یک کنترل کننده‌ی مقاوم تطبیقی هوشمند کوانتومی طراحی شده است. در این نوع کنترل کننده، سطح لغزشی همه فرکانس‌های مدل نشده را فیلتر می کند و برای غلبه بر نامعینی‌های ساختاری در توابع غیرخطی موجود در دینامیک سیستم از شبکه‌های عصبی کوانتومی استفاده می شود. در [۴] یک فرآیند کنترل یادگیر مبتنی بر یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی به منظور ردیابی مسیر در سیستم‌های کوانتومی بسته ارائه شده است. هم چنین در [۵] یک کنترل کننده مبتنی بر سیستم‌های فازی برای هدایت و نگهداری حالت یک سیستم کوانتومی نمونه در ناحیه‌ای از پیش تعریف شده، در حضور نامعینی‌های کراندار در

<sup>9</sup> Lie- Algebra<sup>10</sup> Schirmer<sup>11</sup> Gabriel Turinici<sup>12</sup> Rabitz<sup>13</sup> Dong<sup>14</sup> Benioff<sup>15</sup> Deutsch<sup>16</sup> Manin<sup>1</sup> Feynman<sup>2</sup> Quantum Technology Commercialization<sup>3</sup> Close Quantum System<sup>4</sup> Open Quantum Systems<sup>5</sup> Schrödinger equation<sup>6</sup> Sturm-Liouville Equation<sup>7</sup> Huang et al<sup>8</sup> Nelson's Analytic Domain Theory

و حل یک مثال از آن پرداخته شده است. با هدف پشتیبانی نظری، در بخش پنجم، یک قضیه بیان و اثبات شده است و همچنین برای سهولت در پیاده سازی روش پیشنهادی، یک الگوریتم جدید ترکیبی مبتنی بر کنترل لیاپانوفی و الگوریتم جستجوی گرور ارائه گردیده است. در بخش ششم با شبیه سازی یک مثال، کاربردها و مزیت های روش پیشنهادی بیان شده است و نتیجه گیری در بخش هفتم این مقاله عنوان شده است.

## ۲- بیان مسأله

یک سیستم مکانیک کوانتومی بسته با معادله شرودینگر زیر بیان می شود [۱۲]:

$$i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \quad (1)$$

که در آن  $H$  و  $\hbar$  به ترتیب بیانگر همیلتونی سیستم و ثابت پلانک هستند.  $|\psi(t)\rangle$  به عنوان بردار حالت سیستم عضو فضای هیلبرت  $H$  تعریف شده تحت تعریف ضرب داخلی بردارها می باشد. برای راحتی کار ثابت پلانک برابر با یک در نظر گرفته می شود. با جداسازی همیلتونی سیستم کوانتومی (۱) به یک قسمت ثابت نسبت به زمان و یک قسمت متغیر با زمان، معادله (۱) به صورت زیر توصیف می شود [۱۲]:

$$\begin{cases} i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = (H_0 + H_I)|\psi(t)\rangle = (H_0 + \sum_{k=1}^r u_k(t)H_k)|\psi(t)\rangle \\ |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $H_0$  را همیلتونی درونی سیستم می نامند و  $H_I$  بیانگر همیلتونی برهم کنشی بین سیستم و میدان های کنترل خارجی  $u_k$  است و آن را همیلتونی خارجی گویند. هدف کنترل کوانتومی در این مقاله، هدایت سیستم کوانتومی از حالت ابتدایی  $|\psi_0\rangle$  به حالت هدف  $|\psi_f\rangle$  مبتنی بر طراحی یک سری قوانین کنترلی می باشد. در کنترل سیستم های کوانتومی، بدون کاستن از کلیت مسئله، حالت هدف معمولاً یک حالت ویژه ای از همیلتونی درونی سیستم در نظر گرفته می شود، بنابراین، باید در شرط زیر صدق کند [۱۲]:

$$H_0|\psi_f\rangle = \lambda_f|\psi_f\rangle \quad (3)$$

که  $\lambda_f$  مقدار ویژه  $H_0$  متناظر با  $|\psi_f\rangle$  است.

**تعریف ۱-** کره واحد مختلط  $S_C^{n-1}$  به صورت زیر تعریف می شود [۲۸]:

$$S_C^{n-1} = \left\{ \begin{aligned} & (x_0 + iy_0)|0\rangle + \dots + (x_{n-1} + iy_{n-1})|n-1\rangle \\ & \sum_{j=0}^{n-1} |x_j + iy_j|^2 = 1, x_j, y_j \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

که در آن  $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle\}$  بردارهای حالت پایه متناظر با فضای حالت سیستم (۲) هستند  $i = \sqrt{-1}$  می باشد.

تحول در محاسبات کوانتومی، انتشار الگوریتم کوانتومی توسط پیتر شور<sup>۱</sup> [۲۳] در سال ۱۹۹۷ که برای تجزیه عددها به عوامل اول در زمان چند جمله ای<sup>۲</sup> می باشد. الگوریتم شور یک کشف بزرگ بود. امروزه در حوزه های علوم و مهندسی، الگوریتم های جستجو از اهمیت بالایی برخوردار هستند. به عنوان مثال جستجو یک نام با استفاده از یک شماره تلفن [۲۴] جستجوی مسیر بهینه برای یک ربات [۲۵]. برای جستجو، الگوریتم های جستجوی بسیاری وجود دارد. به طور کلی می توان گفت که الگوریتم جستجو در علوم کامپیوتر به الگوریتمی اطلاق می شود که هدف آن یافتن یک داده با خواص مشخص از بین مجموعه ای از داده ها است. حال این داده ها می توانند در یک پایگاه داده ثبت شده باشند یا این که فضای مورد جستجو به صورت انتزاعی توسط رابطه ریاضی بیان می شود. جستجو انواع مختلفی دارد که عبارت است از جستجو در پایگاه داده نامرتب<sup>۳</sup>، جستجوی خطی<sup>۴</sup>، جستجو به منظور مرتب سازی داده<sup>۵</sup> و... یکی از مشهورترین الگوریتم های جستجوی کوانتومی، الگوریتم گرور<sup>۶</sup> [۲۷، ۲۶] است. این الگوریتم در  $O(\sqrt{N})$  مرحله به جستجوی یک عنصر از  $N$  عنصر پایگاه داده و در  $O(\sqrt{M/N})$  مرحله به جستجو  $M$  عنصر از میان  $N$  پایگاه داده نامرتب می پردازد [۲۷]. این الگوریتم از الگوریتم های متعارف کلاسیکی که در  $O(N)$  مرحله به جواب می رسد، سریع تر است. اگرچه نشان داده شده است که بسیاری از سیستم های کوانتومی مورد نظر کاملاً کنترل پذیر هستند، اما سیستم های نیز وجود دارند که به طور جزئی کنترل پذیر می باشند یا این که در کل کنترل پذیر نیستند. در روش کنترل لیاپانوفی اگر حالت هدف در دسترس حالت اولیه نباشد، فرآیند کنترل با شکست مواجه خواهد شد. به همین دلیل کنترل کننده های طراحی شده با این روش با فرض در دسترس بودن حال هدف طراحی شده اند. برای غلبه بر این چالش، در این مقاله، یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی برای کنترل سیستم های کوانتومی کنترل پذیر حالت ویژه قوی ارائه شده است. برای این منظور، یک کنترل کوانتومی ترکیبی مبتنی بر روش کنترل لیاپانوفی و الگوریتم جستجوی کوانتومی گرور ارائه خواهد شد. در این روش، هنگامی که حالت هدف در مجموعه قابل دسترس<sup>۷</sup> حالت اولیه قرار داشته باشد، از یک کنترل کننده کوانتومی لیاپانوفی برای انتقال حالت استفاده می شود. در غیر این صورت، اگر حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه نباشد با استفاده از الگوریتم گرور حالت اولیه را به یک حالت اولیه دیگر که حالت هدف در دسترس آن باشد، انتقال می دهیم و سپس با استفاده از یک کنترل کننده کوانتومی لیاپانوفی، حالت اولیه جدید را به حالت هدف انتقال می دهیم. این مقاله در هفت بخش تهیه و تنظیم شده است. در بخش دوم، به بیان مسأله پرداخته شده است. در بخش سوم، طراحی قاعده های کنترل کننده کوانتومی لیاپانوفی ارائه شده است. در بخش چهارم به معرفی، بیان الگوریتم گرور کوانتومی

<sup>5</sup> Sorting Search  
<sup>6</sup> Grover Algorithm  
<sup>7</sup> Reachable set

<sup>1</sup> Peter Shore  
<sup>2</sup> Polynomial time  
<sup>3</sup> Unstructured Database Search  
<sup>4</sup> Linear Search

همانگونه که در قضیه قانون ۱ نشان داده شده است، کنترل متناظر همیلونی  $H_k$  به صورت زیر انتخاب می شود:

$$u_k = K_k f_k \left( \mathfrak{I} \left[ e^{iZ(\psi|\psi_f)} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \right) \quad (6)$$

که در آن  $\langle \psi | \psi_f \rangle$  بیانگر زاویه عبارت مختلط  $\langle \psi | \psi_f \rangle$  است،  $\mathfrak{I}$  بیانگر قسمت موهومی آرگومان خود بوده و  $K_k > 0$  و برای تنظیم دامنه کنترل انتخاب می شود.

### ب- تابع لیپانوف مبتنی بر متوسط مشاهده پذیر و کنترل کننده متناظر آن:

$$V_2(t) = \langle \psi(t) | P | \psi(t) \rangle, \quad u_k(t) = -K_k f_k \left( i \langle \psi(t) | [H_k, P] | \psi(t) \rangle \right) \quad (7)$$

که در آن،  $P$  یک عملگر هرمیتی نیمه معین مثبت فرض شده است و  $K_k > 0$  و برای تنظیم دامنه کنترل در نظر گرفته شده است.

### ج- تابع لیپانوف مبتنی بر خطای حالت و کنترل کننده متناظر آن:

$$V_3(t) = \frac{1}{2} \langle \psi - \psi_f | \psi - \psi_f \rangle$$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda_f + \omega = K_0 f_0 \left( \mathfrak{I} \langle \psi_f | \psi \rangle \right) \\ u_k = K_k f_k \left( \mathfrak{I} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right), \quad k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (8)$$

$\lambda_f$  مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه  $|\psi_f\rangle$  از همیلونی آزاد  $H_0$  است و  $\omega$  نیز یک میدان کنترل اسکالر حقیقی مقدار می باشد.

**تعریف ۵-** حالتی مثل  $|\psi\rangle$  را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |i\rangle \quad (9)$$

که  $|i\rangle$  بردار حالت پایه متناظر با فضای حالت سیستم (۲) می باشد و  $\alpha_i$  ثابت حقیقی مقدار است. رابطه (۹) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |i\rangle, \quad \alpha_i = \langle i | \psi \rangle \rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \langle i | \psi \rangle |i\rangle \quad (10)$$

آنگاه متوسط حالت  $|\psi\rangle$  به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |i\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \langle i | \psi \rangle |i\rangle \quad (11)$$

### ۴- الگوریتم جستجوی گروور کوانتومی

الگوریتم گروور یک الگوریتم جستجوی کوانتومی برای جستجو در یک پایگاه داده نامرتب دارای  $N$  عضو، در زمان  $O(\sqrt{N})$  و در فضای ذخیره سازی  $O(\log(N))$  است. گروور این الگوریتم را در سال ۱۹۹۶ مطرح کرد. بر روی یک کامپیوتر کلاسیک، جستجو در یک پایگاه داده نامرتب نمی تواند در زمان کمتر از زمان خطی یا  $O(N)$  صورت پذیرد، یعنی جستجو با بررسی تک تک ورودی ها انجام می گیرد. الگوریتم گروور بیان می کند که روی یک کامپیوتر کوانتومی این عمل با پیچیدگی زمان

**تعریف ۲-** اگر به ازای هر دو حالت داده شده  $|\psi_0\rangle$  و  $|\psi_d\rangle$  یک بازه زمانی  $[0, T]$  و همیلونی خارجی  $H_t$  وجود داشته باشد به طوری که با حرکت از  $|\psi_0\rangle$  تحت تاثیر  $H_t$  به  $|\psi_d\rangle = |\psi(T)\rangle$  برسیم، آنگاه سیستم (۲) را کنترل پذیر می گوئیم [۲۸].

**تعریف ۳-** اگر دو حالت  $|\psi_0\rangle$  و  $|\psi_d\rangle$  داده شده باشند و یک مجموعه کنترل مجاز  $U = \{u_k(t), k = 1, 2, \dots, r\}$  وجود داشته باشد به طوری که جواب معادله (۲) در زمان  $t$  با حالت اولیه  $|\psi_0\rangle$ ، برابر با  $|\psi_d\rangle$  باشد، آنگاه گوئیم که حالت  $|\psi_d\rangle$  در زمان  $t$  از  $|\psi_0\rangle$  قابل دسترس است [۲۸].

**تذکره ۱-** مجموعه قابل دسترس از  $|\psi\rangle$  در زمان  $t$ ، به عبارت معادل مجموعه نقاط در  $S_{\mathbb{C}}^{n-1}$  قابل دسترسی در زمان  $t$ ، با  $R_t(|\psi\rangle)$  نشان داده می شود. علاوه بر این مجموعه قابل دسترس  $|\psi\rangle$  برای همه زمان های مثبت  $t > 0$  را با  $R(|\psi\rangle) = \bigcup_{t>0} R_t(|\psi\rangle)$  نشان می دهند.

**تعریف ۴-** اگر  $|\psi_1^e\rangle, |\psi_2^e\rangle, \dots, |\psi_n^e\rangle$  حالت ویژه همیلونی درونی  $H_0$  باشند و برای هر  $t > 0$ ،  $S_{\mathbb{C}}^{n-1} = \bigcup_{i=1}^n R_t(|\psi_i^e\rangle)$  آنگاه سیستم (۲) را کنترل پذیر حالت ویژه قوی می نامند [۲۸].

اگر در یک سیستم کنترل، حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار بگیرد با استفاده از یک کنترل کننده کوانتومی لیپانوفی حالت اولیه به حالت هدف انتقال می یابد. در غیر این صورت، کنترل کننده مذکور امکان انتقال حالت را ندارد. در این مقاله، یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی برای غلبه بر این چالش طراحی شده است.

### ۳- کنترل کننده های لیپانوفی

در روش طراحی کنترل لیپانوفی، قوانین کنترل مبتنی بر مشتق مرتبه اول زمانی نیمه معین منفی تابع لیپانوف طراحی می شوند. به طور کلی تر، توابع لیپانوف مختلف منجر به طراحی های مختلف قوانین کنترل و اثرات مختلف کنترلی می شود. سه نوع تابع لیپانوف به شرح زیر وجود دارد [۱۲، ۱۴]:

#### الف- تابع لیپانوف مبتنی بر فاصله ی حالت و کنترل کننده متناظر آن:

مفاهیم زیادی برای بیان فاصله بین دو حالت وجود دارد. در این جا ما فاصله هیلبرت اشمیت<sup>۱</sup> بین حالت کنترل شده  $|\psi\rangle$  و حالت مطلوب  $|\psi_f\rangle$  را به عنوان تابع لیپانوف در نظر می گیریم. به عبارتی دیگر:

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \left| \langle \psi_f | \psi(t) \rangle \right|^2 \right) \quad (5)$$

که در آن  $\left| \langle \psi_f | \psi(t) \rangle \right|^2$  بیانگر احتمال تحول از  $|\psi\rangle$  به  $|\psi_f\rangle$  می باشد.

<sup>1</sup> Hilbert Schmidt

## الگوریتم گرور

گام اول: اگر  $H$  عملگر هادامارد<sup>2</sup> باشد یعنی:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

قرار دهید:

$$|s\rangle \leftarrow H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle \quad (14)$$

گام دوم: تا زمانی که

$$K = \left[ \frac{\pi\sqrt{N}}{4 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} \right] \approx \left[ \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \right] \quad (15)$$

مراحل زیر را تکرار کنید:

$$\begin{cases} |s\rangle \leftarrow G|s\rangle \\ K = K + 1 \end{cases}$$

گام سوم:  $|s\rangle$  در پایه استاندارد  $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$  اندازه گیری شود. پس از این اندازه گیری حالت ناشناخته  $|\omega\rangle$  با احتمالی بیشتر از  $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$  بدست می آید.

مثال 1- فرض کنید که سیستم شامل  $N = 8 = 2^3$  حالت باشد و حالتی که ما به دنبال آن هستیم،  $|w\rangle = |011\rangle$  است. برای توصیف سیستم،  $n = 3$  کیوبیت نیاز است [29]:

$$|x\rangle = \alpha_0 |000\rangle + \alpha_1 |001\rangle + \alpha_2 |010\rangle + \alpha_3 |011\rangle + \alpha_4 |100\rangle + \alpha_5 |101\rangle + \alpha_6 |110\rangle + \alpha_7 |111\rangle$$

که  $\alpha_i$  ها دامنه  $i$ -امین حالت می باشند. الگوریتم گرور با سیستم آغاز شده از حالت صفر شروع می شود. عملگر هادامارد وقتی که روی حالت  $|000\rangle$  عمل می کند برهم نهی یکنواختی از تمام حالات را به ما می دهد. به عبارتی دیگر:

$$|s\rangle = H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

$$n = 3 \rightarrow |s\rangle = H^{\otimes 3} |0\rangle^{\otimes 3}$$

$$\rightarrow |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (|000\rangle + |001\rangle + \dots + |111\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{x=0}^7 |x\rangle$$

که  $\otimes$  بیانگر ضرب تانسوری<sup>3</sup> می باشد. با توجه به این که  $N = 8$  است، پس تعداد تکرار لازم برابر با  $\left\lceil \frac{\pi\sqrt{8}}{4} \right\rceil = 2$  می باشد. تصویر اندازه دامنه حالت ها، روش مفیدی برای تجسم بهتر نحوه کار این الگوریتم است. از آنجا که دامنه ها در طول اجرای الگوریتم گرور حقیقی باقی می مانند، ممکن است که به صورت خطوط عمود بر محورهایی که طول آنها

$O(\sqrt{N})$  قابل انجام است و به طور حدی، سریع ترین الگوریتم قابل پیاده سازی برای جستجوی پایگاه داده نامرتب روی یک کامپیوتر کوانتومی است. الگوریتم های کوانتومی معمولاً افزایش سرعتی نمایی نسبت به الگوریتم های کلاسیک دارند. برای درک شهودی بیشتر، ابتدا یک تعبیر هندسی مبتنی بر شکل (1) در نظر گرفته می شود. فرض کنید پایگاه داده نامرتبی دارای  $N = 2^n$  عنصر است که در آن  $n$  تعداد کیوبیت های هدف است. هدف این است که عنصر مشخصی مثل  $|w\rangle$  در این پایگاه داده مورد جستجو قرار گیرد.  $|s\rangle$  را حالت برهم نهی یکنواختی از تمام حالت های موجود در پایگاه داده در نظر می گیریم:

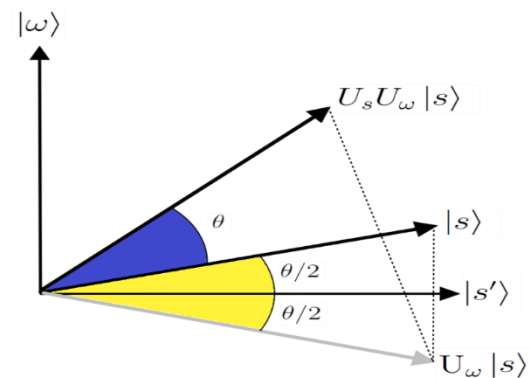
$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|0\rangle + |1\rangle + \dots + |w\rangle + \dots + |N-1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} |w\rangle + \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |s'\rangle \quad (12)$$

هم چنین عملگرهای  $U_s$  و  $U_w$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$U_s = 2|s\rangle\langle s| - I, \quad U_w = I - 2|w\rangle\langle w| \quad (13)$$

که  $|s'\rangle$  برهم نهی یکنواختی از حالت های پایه به جز حالت هدف  $|w\rangle$  است.  $|s'\rangle$  و  $|w\rangle$  مجموعه کامل از بردارهای پایه ای هستند و از این رو بر هم متعامد هستند. توجه شود که در این جا  $I$  ماتریس همانی می باشد.

در شکل (1)، زاویه بین حالت اولیه  $|s\rangle$  و حالت  $|s'\rangle$ ،  $\frac{\theta}{2}$  است. حال ابتدا عملگر اوراکل  $U_w$  روی حالت  $|s\rangle$  عمل می کند که حالت  $|s\rangle$  را با زاویه  $\frac{\theta}{2}$  حول حالت  $|s'\rangle$  انعکاس می دهد و روی دیگر حالت ها به عنوان همانی عمل می کند. اکنون عملگر  $U_s$  ماتریس انعکاس داده شده  $|s\rangle$  را با زاویه  $\theta$  می چرخاند. عملگر  $G$  که به صورت  $G := U_s U_w$  تعریف می شود و عملگر گرور نامیده می شود، حالت اولیه  $|s\rangle$  را در یک دنباله تکراری می چرخاند تا به حالت هدف  $|w\rangle$  برسد. حال به منظور درک بهتر، الگوریتم جستجوی گرور در زیر ارائه شده است [27].



شکل 1: بیان هندسی از الگوریتم جستجوی گرور

<sup>3</sup> Tensor product

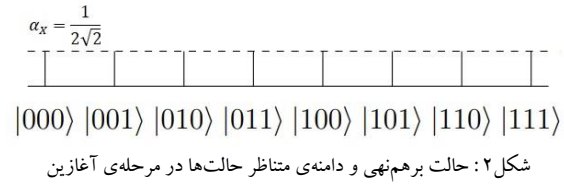
<sup>1</sup> Oracle

<sup>2</sup> Hadamard

متناسب با دامنه ای که آن ها نشان می دهند، تجسم شوند. حالت برهم نهی از اولین تبدیل هادامارد در شکل (۲) نمایش داده شده است.

$$|x\rangle = \frac{-1}{8\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{11}{8\sqrt{2}}|011\rangle$$

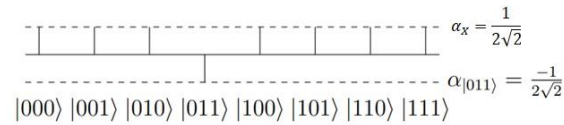
اکنون سیستم را مشاهده می کنیم. احتمال آن که حالت بیانگر جواب درست باشد، برابر است با  $\left|\frac{11}{8\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{121}{128}$  که می توان گفت با احتمالی تقریباً برابر با ۰/۹۴۵۳ به جواب دست پیدا کرده ایم. در شکل (۴)، مثال (۱) شبیه سازی شده است. همان طور که پیش تر گفته شد، بعد از دو تکرار الگوریتم گرور، با احتمال ۰/۹۴۵۳ به حالت مطلوب همگرا می شود. در این جا الگوریتم گرور برای ۵۰ تکرار پیاده سازی شده است. شاید در تکرار ششم با احتمال ۰/۹۹۹۸ انتقال حالت صورت بگیرد اما، همانطور که شکل (۴) نشان می دهد، در حالت کلی افزایش تعداد تکرار الگوریتم گرور، تضمینی برای افزایش احتمال انتقال حالت نیست.



**تکرار اول:** در هر تکرار اولین قدم فراخوانی تابع اوراکل  $(U_w = I - 2|w\rangle\langle w|)$  است. جستجوی اوراکل دامنه حالت  $|w\rangle$  را منفی می کند.

$$|x\rangle = U_w |w\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + \dots - |011\rangle + \dots + |111\rangle)$$

که تصویر اندازه آن به صورت زیر است:

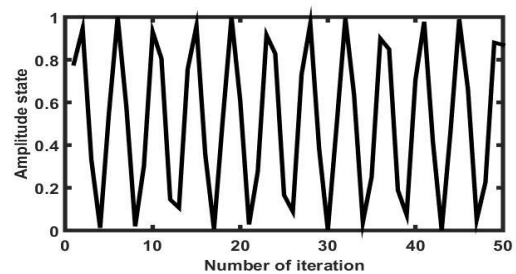


شکل ۳: حالت برهم نهی و دامنه ی متناظر حالت ها در تکرار اول

اکنون تبدیل انتشار  $U_s = 2|s\rangle\langle s| - I$  اجرا می شود:

$$|x\rangle = U_s |x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle$$

در این مرحله احتمال متناظر با حالت  $|011\rangle$  برابر ۰/۷۸۱۲ می باشد و تکرار اول خاتمه پیدا می کند.



شکل ۴. دامنه حالت مثال (۱)

**تکرار دوم:** ورودی اولیه ما:

$$|x\rangle = U_s |x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle$$

می باشد. اگر در روندی مشابه با تکرار اول، ابتدا تابع اوراکل را فراخوانی کنیم و بعد تبدیل انتشار را انجام دهیم، در نهایت بدست می آوریم:

### ۵- طراحی کنترل کننده کوانتومی ترکیبی

همان گونه که قبلا عنوان شد، هدف کنترل کوانتومی در این مقاله، هدایت سیستم کوانتومی از حالت اولیه  $|\psi_0\rangle$  به حالت هدف  $|\psi_f\rangle$  مبتنی بر طراحی یک سری قوانین کنترلی می باشد. در این جا فرض بر این است که سیستم کوانتومی مورد نظر، کنترل پذیر حالت ویژه قوی می باشد. پس هر حالت هدفی مثل  $|\psi_f\rangle$  که در نظر گرفته شود حداقل به مجموعه قابل دسترسی از یکی از حالت های ویژه  $|\psi_i^e\rangle, i = 1, 2, \dots, n$  تعلق دارد، به عبارتی دیگر:

$$if : |\psi_f\rangle \in S_C^{n-1} \rightarrow \exists k, s, t \quad |\psi_f\rangle \in R_i \left( |\psi_k^e\rangle \right)$$

حال فرض کنید که قصد داریم یک سیستم کنترل پذیر حالت ویژه قوی را از حالت اولیه  $|\psi_0\rangle$  به حالت نهایی  $|\psi_f\rangle$  انتقال دهیم. دو حالت ممکن وجود دارد. در حالت اول، فرض می شود حالت هدف در مجموعه قابل دسترس از حالت ابتدایی قرار دارد، پس با استفاده از کنترل لیاپانوف این انتقال حالت صورت می گیرد. در حالت دوم، حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار ندارد، برای این حالت چون فرض بر این است که سیستم مدنظر کنترل پذیر حالت ویژه قوی است پس قطعاً حالت هدف در مجموعه قابل دسترس از یکی از حالت های ویژه همپلتونی آزاد، مثلاً  $|\psi_k^e\rangle$ ، قرار دارد. در این حالت برای انتقال حالت اولیه به  $|\psi_k^e\rangle$  از الگوریتم گرور و اندازه گیری در پایه یکای متعامد استفاده می شود. به بیانی دیگر، با استفاده از الگوریتم گرور پس از جستجو و یافتن  $|\psi_k^e\rangle$  با اندازه گیری در پایه یکا متعامد حالت اولیه  $|\psi_0\rangle$  به حالت  $|\psi_k^e\rangle$  انتقال داده می شود و سپس با استفاده از کنترل لیاپانوف، انتقال حالت از  $|\psi_k^e\rangle$  به حالت هدف  $|\psi_f\rangle$  انجام می گیرد. بنابراین طبق قضیه زیر، قاعده کنترل پیشنهادی ارائه می گردد.

**الگوریتم کنترل کننده کوانتومی ترکیبی**

**گام اول:** حالت اولیه  $|\psi_0\rangle$ ، حالت هدف  $|\psi_f\rangle$  و ضریب اطمینان  $\alpha$  را تعیین کنید.

**گام دوم:** قاعده‌های کنترل لیاپانوف ارائه شده در رابطه (۱۶) را در نظر بگیرید.

**گام سوم:** تحول حالت از  $|\psi_0\rangle$  به  $|\psi_f\rangle$  با توجه به کنترل انتخاب شده در گام دوم را در پایه یکا متعامد اندازه گیری کنید و آن را با  $P_f$  نشان دهید.

**گام چهارم:** اگر  $P_f > \alpha$ ، آنگاه با احتمال قابل قبولی انتقال حالت صورت گرفته و الگوریتم خاتمه می‌یابد، در غیر این صورت به گام پنجم بروید.

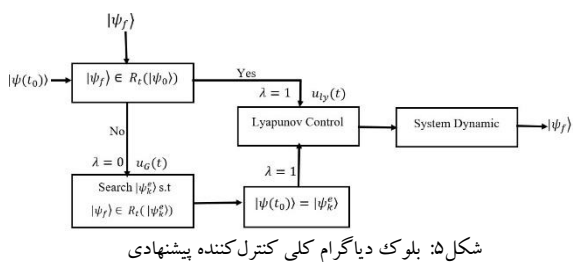
**گام پنجم:** بردارهای حالت ویژه همیلتونی آزاد را محاسبه کنید و آن‌ها را با  $|\psi_1^e\rangle, |\psi_2^e\rangle, \dots, |\psi_n^e\rangle$  نمایش دهید.

**گام ششم:** احتمال تحول از هر کدام از حالت ویژه‌های  $H_0$  به  $|\psi_f\rangle$  را با استفاده از کنترل کننده گام دوم بدست آورید.

**گام هفتم:** بردار ویژه همیلتونی  $H_0$  با ماکزیمم احتمال انتقال حالت که احتمال انتقال حالت از آن به حالت  $|\psi_f\rangle$  بزرگتر از  $\alpha$  می‌باشد را انتخاب کنید و آن را با  $|\psi_k^e\rangle$  مشخص کنید.

**گام هشتم:** برای انتقال حالت از  $|\psi_0\rangle$  به حالت  $|\psi_k^e\rangle$  در رابطه (۱۶) قرار دهید  $\lambda = 0$  و گام سوم را اجرا کنید.

**گام نهم:** برای انتقال حالت  $|\psi_k^e\rangle$  به حالت نهایی  $|\psi_f\rangle$  در رابطه (۱۶) قرار دهید  $\lambda = 1$  و کنترل کننده (۱۸) را اجرا کنید.



شکل ۵: بلوک دیاگرام کلی کنترل کننده پیشنهادی

در شکل (۵)، بلوک دیاگرام کلی کنترل پیشنهادی طراحی شده است.

**۶- مثال شبیه سازی شده**

**مثال ۲-** فرض کنید که یک سیستم کوانتومی چهار سطحی با همیلتونی درونی  $H_0$  و خارجی  $H_1$  را داریم که به صورت زیر می‌باشند [۱۲]:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای این مثال الگوریتم ترکیبی که در بخش قبل عنوان شد به صورت کامل پیاده سازی می‌شود.

**قضیه ۱-** سیستم (۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید که مقدار حقیقی  $K_k > 0$  و تابع  $f_k$  به گونه‌ای است که  $f_k(x_k)x_k \geq 0$  و همچنین  $f_k(x_k)x_k = 0$  اگر و فقط اگر  $x_k = 0$ . آنگاه کنترل کننده ترکیبی  $u(t)$  به صورت:

$$u(t) = \lambda u_{dy}(t) + (1 - \lambda) u_G(t) \quad (16)$$

که در آن:

$$u_{dy}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t), \dots, u_r(t))^T \quad (17)$$

$$u_k(t) = K_k f_k \left( \mathfrak{I} \left[ e^{i\langle \psi(t) | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi(t) \rangle \right] \right), k = 1, \dots, r \quad (18)$$

$$u_G = U_s U_w = (2|s\rangle\langle s| - I)(I - 2|w\rangle\langle w|) \quad (19)$$

$$\begin{cases} \lambda = 1, & \text{if } |\psi_f\rangle \in R_t(|\psi(t_0)\rangle), t > 0 \\ \lambda = 0, & \text{if } |\psi_f\rangle \notin (|\psi(t_0)\rangle), t > 0 \end{cases} \quad (20)$$

پایداری مجانبی سیستم را تضمین می‌کند.

**اثبات:** اگر در رابطه (۱۶)،  $\lambda = 0$  آنگاه  $u(t) = u_G(t)$  که فرآیند کنترل منجر به اجرای الگوریتم جستجوی بهینه گرور و اندازه گیری می‌شود که پایداری آن در [۳۰] نشان داده شده است. برای حالت  $\lambda = 1$   $u(t) = u_{dy}(t)$  تابع لیاپانوف مثبتی بر فاصله حالت (۵) را در نظر بگیرید. با مشتق گیری از  $V_1$  و استفاده از معادله (۲)، خواهیم داشت:

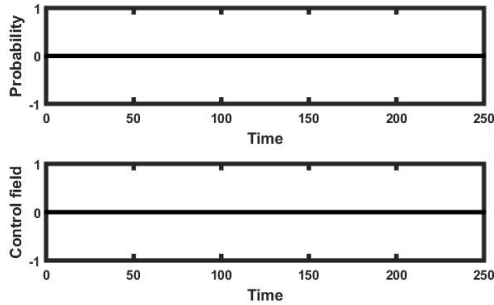
$$\dot{V}_1 = -\sum_{k=1}^r u_k \left| \langle \psi | \psi_f \rangle \right| \mathfrak{I} \left[ e^{i\langle \psi | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \quad (21)$$

که در آن  $\mathfrak{I}$  بیانگر قسمت موهومی  $\langle \psi_f | H_k | \psi \rangle e^{i\langle \psi | \psi_f \rangle}$  می‌باشد. حال طبق رابطه (۱۸) قوانین کنترل متناظر همیلتونی  $H_k$  عبارتند از:

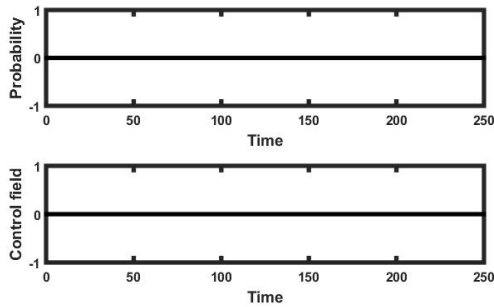
$$u_k = K_k f_k \left( \mathfrak{I} \left[ e^{i\langle \psi | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \right) \quad (22)$$

چون  $\lambda = 1$ ، لذا حالت هدف در دسترس حالت اولیه انتخابی است و  $\langle \psi_0 | \psi_f \rangle \neq 0$ . بنابراین برای هر  $t > 0$ ،  $\langle \psi(t) | \psi_f \rangle \neq 0$ . [۱۴]. جایگذاری  $u_k$  در (۲۱) تضمین می‌کند که  $\dot{V}_1 < 0$  و در حالتی که  $\langle \psi | \psi_f \rangle = |\psi\rangle = |\psi_f\rangle$  داریم  $\langle \psi | \psi_f \rangle = 0$  بنابراین  $\dot{V}_1 = 0$  و قضیه اثبات می‌شود.

حال می‌توان کنترل کوانتومی ترکیبی پیشنهادی را با استفاده از الگوریتم زیر که شامل ۹ گام است، پیاده سازی نمود.



شکل ۷: نمودار احتمال انتقال حالت از  $[1, 0, 0, 0]^T$  به  $[0, 0, 0, 1]^T$  و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.



شکل ۸: نمودار احتمال انتقال حالت از  $[0, 1, 0, 0]^T$  به  $[0, 0, 0, 1]^T$  و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

**گام هفتم:** با توجه به شکل (۱۰)، بیشترین احتمال انتقال حالت،  $P_f = 0.9999 > 0.95$  می‌باشد که متناظر با حالت ویژه سوم از همیلتونی آزاد می‌باشد، پس:

$$|\psi_k^e\rangle = |\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T \quad (29)$$

**گام هشتم و نهم:** برای انتقال حالت از  $|\psi_0\rangle$  به  $|\psi_3^e\rangle$  رابطه (۱۶) قرار دهید  $\lambda = 0$  و برای انتقال حالت از  $|\psi_3^e\rangle$  به  $|\psi_f\rangle$  از طریق قانون کنترل در رابطه (۱۶) قرار دهید  $\lambda = 1$ .

اکنون باید تمرکز روی این مسئله باشد که سیستم از حالت اولیه  $\frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$  با استفاده از عملگر گروور به حالت  $[0, 0, 1, 0]^T$  انتقال داده شود. بنابراین در این قسمت دیگر حالت هدف  $|\psi_k^e\rangle$  می‌باشد. می‌خواهیم از الگوریتم جستجوی گروور استفاده کنیم. از این که:

$$|\psi_k^e\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad N = 2^2 = 4$$

و هم چنین با توجه به روابط موجود در الگوریتم جستجوی گروور داریم:

$$U_s U_w = \frac{N-4}{N}|s\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}}|w\rangle$$

پس با قرار دادن مقدار  $N$  در رابطه‌ی فوق درمی‌یابیم که فقط با یک بار تکرار الگوریتم جستجوی گروور به حالت هدف دست می‌یابیم.

**گام اول:** حالت اولیه  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}[1, 1, 1, 1]^T$ ، حالت هدف  $|\psi_f\rangle = [0, 0, 0, 1]^T$  و  $\alpha = 0.95$  را در نظر بگیرید.

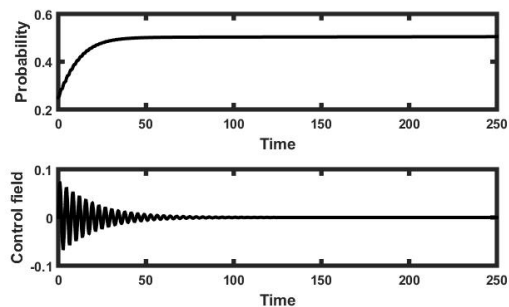
**گام دوم:** طبق رابطه‌های (۵) و (۱۶)، تابع لیاپانوف و قانون کنترل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} V_1(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \langle \psi_f | \psi(t) \rangle^2 \right) \\ u_k(t) = K_k \left( \Im \left[ e^{i\langle \psi | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \right) \end{cases} \quad (23)$$

که در آن  $|\psi\rangle$  حالت کنترلی،  $|\psi_f\rangle$  حالت هدف مطلوب،  $\langle \psi_f | \psi \rangle$  بیانگر زاویه عبارت مختلط  $\langle \psi_f | \psi \rangle$  است و  $K_k$  یک ثابت حقیقی مثبت و برای تنظیم دامنه کنترل استفاده می‌شود. در این مثال چون فقط از یک میدان کنترلی استفاده می‌شود به جای  $K_k$  از نماد  $K$  استفاده شده است.

**گام سوم:** احتمال تحول حالت از  $|\psi_0\rangle$  به  $|\psi_f\rangle$  برحسب قانون کنترلی (۱۸) برای پارامترهای زیر محاسبه می‌شود که  $T$  زمان نهایی و  $\Delta t$  طول گام زمانی می‌باشد.

$$K = 0.15, T = 250, \Delta t = 0.01$$



شکل ۹: نمودار احتمال انتقال حالت از  $\frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$  به  $[0, 0, 0, 1]^T$  و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

**گام چهارم:** حداکثر احتمال تحول حالت از  $|\psi_0\rangle$  به  $|\psi_f\rangle$  یعنی  $P_f$  برابر با  $0.5046$  می‌باشد. پس باید به گام پنجم بروید.

**گام پنجم:** بردارهای حالت ویژه همیلتونی آزاد یعنی  $H_0$  به صورت زیر می‌باشند:

$$|\psi_1^e\rangle = [1, 0, 0, 0]^T, |\psi_2^e\rangle = [0, 1, 0, 0]^T$$

$$|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T, |\psi_4^e\rangle = [0, 0, 0, 1]^T$$

**گام ششم:** احتمال تحول حالت را از هر کدام از بردار ویژه‌های  $H_0$  به حالت هدف یعنی  $|\psi_f\rangle$  شبیه‌سازی شده است و در شکل‌های (۷)، (۸) و (۱۰) نشان داده شده است.



## ۲- نتیجه گیری

با توجه به اهمیت و کاربردهای سیستم‌های کنترل کوانتومی در علوم مختلف و این که بعضی از سیستم‌ها کاملاً کنترل پذیر نیستند، در این مقاله با تمرکز بر روی سیستم‌های کنترل پذیر حالت ویژه قوی، به طراحی یک کنترل کننده ترکیبی مبتنی بر کنترل کننده‌های لیاپانوفی و الگوریتم جستجوی گرور کوانتومی برای این گونه سیستم‌ها پرداخته شده است. مسئله‌ی دسترسی پذیری حالت هدف در کنترل سیستم‌های کنترل پذیر حالت ویژه قوی از چالش‌های طراحی این گونه کنترل کننده‌ها می‌باشد. روش جستجوی بهینه گرور کوانتومی با هدف جستجوی حالت ویژه‌ای که حالت هدف در دسترس آن قرار دارد به عنوان یک بخش از استراتژی کنترلی کنترل کننده طراحی شده در این مقاله به کار گرفته شده است. روش ارائه شده با توجه به بهینه و پایدار بودن الگوریتم گرور و تضمین پایداری در روش لیاپانوف منجر به طراحی یک قاعده کنترل برای سیستم‌های کنترل پذیر حالت ویژه قوی به صورت بهینه شده است که بایک قضیه و یک الگوریتم در این مقاله پشتیبانی تحلیلی و پیاده‌سازی شده است.

## مراجع

- [1] C. G. Almudever, N. Khammassi, L. Hutin, M. Vinet, M. Babaie, F. Sebastiano, E. Charbon, K. Bertels, "Towards a scalable quantum computer", 13th International Conference on Design & Technology of Integrated Systems In Nanoscale Era (DTIS), 1-1, 2018.
- [2] K. Kumar, N. A Sharma, R. Prasad, A. Deo, T. Khorshed, "A survey on quantum computing with main focus on the methods of implementation and commercialization gaps", IEEE, pp. 1-7, 2015.
- [3] S. Chegini, M. Yarahmadi, "Design of an adaptive sliding mode controller based on quantum neural network", Modars Mechanical Engineering, vol.17, no. 1, pp. 305- 310, 2017.
- [4] آ. ارجمندزاده، م. یاراحمدی، "طراحی یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی در ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی"، مجله کنترل، جلد ۱۴، شماره ۱، صص ۶۵-۷۱، ۱۳۹۹.
- [5] ح. رستمی، ب. رضایی، "کنترل حالت سیستم کوانتومی با استفاده از کنترل کننده‌ی فازی"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۶، شماره ۹، صص ۱۲۴-۱۳۴، ۱۳۹۵.
- [6] C. P. Koch, "Controlling open quantum systems: Tools, achievements, and limitations", Journal of Physics Condensed Matter, vol.28, n.21, 2016.
- [7] K. Sugisaki, S. Nakazawa, K. Toyota, K. Sato, D. Shiomi, T. Takui, "Quantum chemistry on quantum computers: quantum simulations of the time evolution of wave functions under the S2 operator and determination of the spin quantum number S", Physical Chemistry Chemical Physics, 2019 doi: 10.1039/ c9cp02546d.

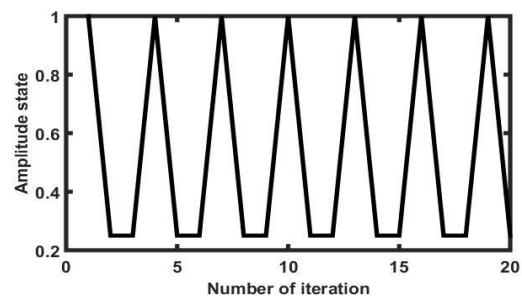
$$|s\rangle = |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |w\rangle = |\psi_k^e\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_s = 2|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I_4, U_w = I_4 - 2|\psi_k^e\rangle\langle\psi_k^e|$$

$$U_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, U_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

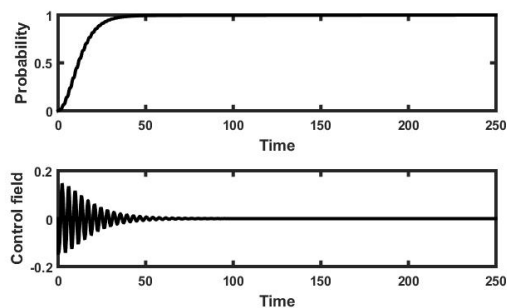
$$G|s\rangle = G|\psi_0\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همان طور که قبلاً گفته شد فقط با یک بار اعمال عملگر گرور، حالت  $|\psi_0\rangle$  با احتمال یک به حالت  $|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T$  انتقال داده می‌شود. در شکل (۹) الگوریتم گرور برای ۲۰ تکرار پیاده‌سازی شده است.



شکل ۹: دامنه حالت مثال (۲)

حال بعد از انتقال حالت  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$  به حالت  $|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T$  با استفاده از الگوریتم گرور، کنترل لیاپانوف اعمال می‌شود و حالت  $|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T$  را به حالت هدف  $|\psi_f\rangle = [0, 0, 0, 1]^T$  منتقل می‌کند (شکل (۱۰)).



شکل ۱۰: نمودار احتمال انتقال حالت از  $[0, 0, 1, 0]^T$  به  $[0, 0, 0, 1]^T$  و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

همان گونه که ملاحظه می‌شود سیستم با یک تلاش کنترلی محدود و با احتمالی نزدیک به یک بعد از ۵۰ واحد زمانی انتقال حالت را از  $|\psi_3^e\rangle$  به  $|\psi_f\rangle$  ممکن می‌کند.

- [22] Y. Manin, "Computable and Non computable", Sov. Radio, 13- 15, 1980.
- [23] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring", Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science Press, pp.124- 134, 1994, doi:10.1109/sfcs.1994.365700.
- [24] G. Bassard, "Searching a quantum phone book", Science, .vol 275, Issue 5300, .pp627- 628, 1997.
- [25] D. Dao- Yi, C. Chun- Lin, C. Zong- Hai, Z. Chen, "Quantum Mechanics Helps in Learning for More Intelligent Robots", Chinese Physics Letters, vol.23, n. 7, pp. 1691–1694, 2006, doi:10.1088/0256-307x/23/7/010.
- [26] Grover L. K, 1996, "A fast quantum mechanical algorithm for database search", Proceedings, 28<sup>th</sup> Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp.212-219, 2006.
- [27] J. S. Lomonaco, "Grover's quantum search algorithm", Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, pp 1- 12, 2000.
- [28] C. B. Zhang, D.Y. Dong, Z. H. Chen, "Control of non-controllable quantum systems: a quantum control algorithm based on Grover iteration", Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, vol. 7, n.10, pp. 313- 317, 2005.
- [29] E. Strubell, "An Introduction to Quantum Algorithms", COS498 – Chawathe Spring, 2011.
- [30] K.V. Gubaidullina, S.A. Chivilikhin, "Stability of Grover's algorithm in respect to perturbations in quantum circuit", Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, vol.8, n. 2, pp. 243–246, 2017.
- [8] G. M. Huang, T.J. Tarn, J.W. Clark, "On the controllability of quantum mechanical systems", Journal of Mathematical Physic.vol , 24, Issue11, 1983.
- [9] S. G. Schirmer, H. Fu A.I ,Solomon, "Complete controllability of finite level quantum systems", Journal of Physics A: Mathematical and General, vol.34, no. 8, .pp1-14, 2001.
- [10] G. Turinici, H. Rabitz, 2001, "Quantum wave function controllability", Chemical Physics .vol 267, Issues 1–3, pp. 1-9, 2001.
- [11] S. Grivopoulos, B. Bamieh, "Lyapunov-based control of quantum systems", in Proc. 42<sup>nd</sup> IEEE Conf. Decision and Control, Hawaii, vol.1, .pp434-438, 2003.
- [12] S. Kuang, S. Cong, "Lyapunov control methods of closed quantum systems", Automatica, vol. 44, pp. 98-108, 2008.
- [13] W. Yang, J. Sun, "Lyapunov Control of Quantum Systems with Impulsive Control Fields", The Scientific World Journal, 1–7, 2013, doi:10.1155/2013/814080.
- [14] C. Shuang, S. KUANG, "Quantum Control Strategy Based on State Distance", ACTA AUTOMATICA SINICA, vol.33, no.1, 2007, doi: 10.1360/aas-007-0028.
- [15] S.C. Hou, M.A. Khan, X. X. Yi, D. Dong, R. Petersen Ian, "Optimal Lyapunov-based quantum control for quantum systems", Physical Review A, vol.86, 2012.
- [۱۶] ز. صاحبی، م. یاراحمدی، "طراحی کنترل کننده ترکیبی تطبیقی هوشمند با استفاده از شبکه‌های عصبی موجکی کوانتومی برای ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته‌ی متناهی"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۸، شماره ۰۲، صص ۱۷۹–۱۸۸، ۱۳۹۷.
- [17] R. Orus, S. Mugel.E , Lizaso, "Quantum computing for finance: Overview and prospects", Reviews in Physics, vol. 4, 2019, doi: 10.1016/j.revip.2019.100028.
- [18] S. Imre, F. Balaz, "Quantum computing and communications", An Engineering Approach Wiley. Chichester. ۲۰۰۵ ,
- [19] .PBeniof, "The computer as a physical system a microscopic Quantum Mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines", Journal of Statistical Physics.vol , 22, pp.563– 591, 1980.
- [20] D. Deutsch, "the Church-Turing principle and the universal quantum computer", Proceedings of the Royal Society A, 400, 1818, pp.97- 117, 1985.
- [21] P. Feynman Richard, "Simulating physics with computers", International Journal of Theoretical Physics, vol.21.pp , 467- 488, 1982.