مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه ۳۴-۲۵

طراحی یک کنترل‌کننده‌ی ترکیبی کوانتومی برای سیستم‌های کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی

طاهره عزیزپور[۱]، مجید یاراحمدی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، لرستان، ایران azizpor.tahereh@gmail.com
[۲] دانشیار، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، لرستان، ایران yarahmadi.m@lu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۱ ویرایش: ۱۴۰۱/۰۱/۱۲ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸

چکیده: در این مقاله یک کنترل‌کننده ترکیبی کوانتومی جدید برای کنترل یک سیستم کوانتومی کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی طراحی می‌شود. برای این منظور، اگر حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار داشته باشد، از یک کنترل‌کننده کوانتومی لیاپانوفی[۱] برای انتقال حالت استفاده می‌شود در غیر این صورت، با استفاده از یک قاعده کنترل ترکیبی مبتنی بر الگوریتم گرور[۲]، حالت اولیه را به یک حالت واسط دیگر که حالت هدف در دسترس آن باشد، انتقال می‌دهیم و سپس با استفاده از یک کنترل‌کننده کوانتومی لیاپانوفی، حالت واسط را به حالت هدف انتقال می‌دهیم. برای این منظور یک قضیه ارائه و اثبات شده است و یک الگوریتم جدید، با هدف پیاده‌سازی روش پیشنهادی، طراحی شده است. مثال شبیه‌سازی شده کارآیی و مزیت روش ارائه شده را به خوبی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: کنترل‌ترکیبی، انتقال، کنترل‌کننده‌ی کوانتومی، الگوریتم گرور، کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی.

Designing a hybrid quantum controller for strongly eigenstate controllable systems

Tahereh Azizipour, Majid Yarahmadi

Abstract: In this paper, a new quantum hybrid controller for controlling the strongly eigenstate controllable systems, is designed. For this purpose, a Lyapunov control law is implemented when the target state is in reachable set of the initial state. On the other hand, if the target state is not in the reachable set of the given initial state, based on Grover algorithm, a new interface state that the target state is in its reachable set, will be found and the given initial state is transferred to the new interface state. Then, the new interface state is transferred to the target state, based on a designed Lyapunov control law. A theorem and a new algorithm, for implementing the presented method, is designed. Finally, a simulated example illustrates the applications and advantages of presented method.

Keywords: Hybrid Control, State Transformation, Quantum Controller, Grover Algorithm, Strongly eigenstate controllable.

[1] Lyapunov
[2] Grover's algorithm

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

۱- مقدمه

با وجود پیشرفت‌های عظیمی که در دهه‌های گذشته صورت گرفته است، اما باز هم کامپیوترهای کلاسیک دارای محدودیت ذاتی هستند که نمی‌توانند بر آن‌ها غلبه کنند. ایده‌کامپیوتر کوانتومی[۱] اولین بار در سال ۱۹۸۱ توسط برنده جایزه نوبل، ریچارد فاینمن[1] مطرح شد، وی اظهار داشت که شبیه‌سازی دقیق و علمی سیستم‌های مکانیک کوانتومی در یک کامپیوتر کلاسیک غیرممکن است، اما نوع جدیدی از ماشین‌های ساخته شده از عناصر مکانیکی که از قوانین مکانیکی کوانتومی پیروی می کنند، ممکن است روزی شبیه‌سازی‌های دقیق سیستم‌های کوانتومی را انجام دهند. امروزه در آستانه انقلابی در فناوری قرار داریم. این انقلاب ورود به تجاری‌سازی فناوری کوانتومی[2] است[۲]. یک کار حیاتی برای گسترش فناوری کوانتومی، گسترش پایه‌های نظری کنترل سیستم‌های کوانتومی است. بنابراین نیاز به ورود مهندسین کنترل و ریاضی‌دانان در این زمینه احساس می‌شود. در نظریه کنترل کوانتومی، کنترل‌پذیری سیستم‌های کوانتومی یک بحث اساسی است و مرتبط با رشته‌های مختلف علمی است که چگونگی رفتار سیستم‌های دینامیکی را دسته‌بندی می‌کند. منظور از کنترل یک پدیده، دخالت در رفتار آن است، به‌طوری‌که، نتایج مطلوب حاصل گردد. این عمل به این صورت انجام می‌گردد که هدف مورد نظر برای یک سیستم یا همان هدف مطلوب به عنوان مرجع در نظر گرفته می‌شود. هنگامی‌که یک یا چند تا از خروجی‌های سیستم باید برای رسیدن به مقدار مطلوب عمل نمایند، کنترل‌کننده با دستکاری ورودی‌ها، سیستم را ناچار به رسیدن به مقدار مطلوب می‌نماید. یک قانون کنترل(قاعده ورودی سیستم) یک تابعی است که در معادلات توصیف کننده دینامیک سیستم ظاهر می‌شود. هدف اصلی در کنترل کوانتومی، یافتن مسیرهایی به منظور مدیریت‌کردن ساختار تحول سیستم‌هایی است که برحسب قوانین مکانیک کوانتومی تحول می‌یابند. به عنوان نمونه در [۳] برای کنترل سیستم‌های غیرخطی نامعین، یک کنترل‌کننده‌ی مقاوم تطبیقی هوشمند کوانتومی طراحی شده است. در این نوع کنترل‌کننده، سطح لغزشی همه فرکانس‌های مدل نشده را فیلتر می‌کند و برای غلبه بر نامعینی‌های ساختاری در توابع غیرخطی موجود در دینامیک سیستم از شبکه‌های عصبی کوانتومی استفاده می‌شود. در [۴] یک فرآیند کنترل یادگیر مبتنی بر یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی به منظور ردیابی مسیر در سیستم‌های کوانتومی بسته ارائه شده است. هم‌چنین در [۵] یک کنترل‌کننده مبتنی بر سیستم‌های فازی برای هدایت و نگهداری حالت یک سیستم کوانتومی نمونه در ناحیه‌ای از پیش تعریف شده، در حضور نامعینی‌های کراندار در همیلتونین سیستم، ارائه شده است. توانایی کنترل کردن سیستم‌های کوانتومی باز در فیزیک کوانتومی[۶]، شیمی کوانتومی[۷] و محاسبات کوانتومی کاربردهای چشمگیری دارد. به طور کلی، سیستم‌های کوانتومی را به دو دسته تقسیم‌بندی می‌کنند: سیستم‌های کوانتومی بسته[3] و سیستم‌های کوانتومی باز[4]. یک سیستم کوانتومی بسته دارای تحول یکانی است که دینامیک آن از طریق معادله‌ی شرودینگر[5] یا معادله‌ی لیویل[6] بیان می‌شود. اما تحول یک سیستم باز به علت فعل و انفعالاتی که با محیط دارد، یکانی نیست و از معادله‌ی شرودینگر ساده تبعیت نمی‌کند. در دنیای واقعی پیرامون ما اکثر سیستم‌ها از این نوع هستند. در دو دهه گذشته، موضوع کنترل‌پذیری سیستم‌های کوانتومی توسط بسیاری از محققان در زمینه‌های مختلف مورد مطالعه قرار داده شده است. هوانگ و همکارانش[7] کنترل‌پذیری سیستم‌های مکانیک کوانتومی را با استفاده از نظریه‌ی تحلیلی دامنه‌ی نیلسون[8]، گروه لی و جبر لی[9] بررسی کردند[۸]. شرمر[10]، شرایط کافی برای کنترل‌پذیری کامل سیستم‌های کوانتومی N سطحی، فقط با یک پالس را ارائه نمود[۹]. نتایج نظری هدایت یک تابع موج دلخواه سیستم کوانتومی تحت میدان خارجی وابسته به زمان توسط ترنسی[11] و ربیتز[12] در [۱۰] ارائه شد. استفاده از روش کنترل بر اساس لیاپانوف [۱۳,۱۲,۱۱] که پایداری سیستم را با طراحی میدان‌های کنترلی ترکیب می‌کند یک فرآیند مناسب و کارا محسوب می‌شود. به عنوان مثال می‌توان توابع لیاپانوف براساس فاصله‌ی حالت [۱۴,۱۲]، متوسط مشاهده‌پذیر [۱۲] و خطای حالت [۱۲] را ذکر کرد. در این روش برای پایداری سیستم کنترل یک تابع لیاپانوف پیشنهاد می‌شود و قانون‌های کنترلی از شرایط حاکم بر تابع لیاپانوف و با هدف حفظ پایداری استخراج می‌شوند. در کنترل لیاپانوف، ایده اصلی، پیدا کردن میدان‌های کنترلی است که وقتی که زمان به سمت بینهایت میل می‌کند، تابع لیاپانوف به مینیمم خودش برسد. دانگ[13] و همکاران در[۱۵] میدان‌های کنترل بهینه‌ای را طراحی کردند که تابع لیاپانوف را سریع‌تر کاهش می‌داد. در[۱۶] یک کنترل‌کننده ترکیبی تطبیقی هوشمند برای ردیابی یک مسیر دینامیک در سیستم‌های کوانتومی بسته متناهی براساس تئوری پایداری لیاپانوف ارائه شده است. اخیرا ظهور کامپیوترهای کوانتومی در مقیاس کوچک، نظر ریاضیدانان و مهندسان را بخصوص در حوزه الگوریتم‌های کاربردی به خود جلب کرده است[۱۷]. در حقیقت با وجود این‌که محاسبات کوانتومی[۱۸] از زمان بنیوف[14] [۱۹] وجود داشته است اما دوویچ[15] [۲۰]، فاینمن [۲۱] و مانین[16] [۲۲] پیشنهاد کردند که یک کامپیوتر کوانتومی این قابلیت را دارد که وظایفی را انجام دهد که دور از دسترس کامپیوترهای کلاسیک است. احتمالاً مشهورترین

[1] Feynman
[2] Quantum Technology Commercialization
[3] Close Quantum System
[4] Open Quantum Systems
[5] Schrödinger equation
[6] Sturm-Liouville Equation
[7] Huang et al
[8] Nelson's Analytic Domain Theory
[9] Lie- Algebra
[10] Schirmer
[11] Gabrial Turinici
[12] Rabitz
[13] Dong
[14] Benioff
[15] Deutsch
[16] Manin

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

تحول در محاسبات کوانتومی، انتشار الگوریتم کوانتومی توسط پیتر شور[1] [۲۳] در سال ۱۹۹۷ که برای تجزیه عددها به عوامل اول در زمان چندجمله‌ای[2] می‌باشد. الگوریتم شور یک کشف بزرگ بود. امروزه در حوزه‌های علوم و مهندسی، الگوریتم‌های جستجو از اهمیت بالایی برخوردار هستند. به عنوان مثال جستجو یک نام با استفاده از یک شماره تلفن [۲۴] جستجوی مسیر بهینه برای یک ربات [۲۵]. برای جستجو، الگوریتم‌های جستجوی بسیاری وجود دارد. به طور کلی می‌توان گفت که الگوریتم جستجو در علوم کامپیوتر به الگوریتمی اطلاق می‌شود که هدف آن یافتن یک داده با خواص مشخص از بین مجموعه‌ای از داده‌هاست. حال این داده‌ها می‌توانند در یک پایگاه داده ثبت شده باشند یا این که فضای مورد جستجو به صورت انتزاعی توسط رابطه ریاضی بیان می‌شود. جستجو انواع مختلفی دارد که عبارت است از جستجو در پایگاه داده نامرتب[3]، جستجوی خطی[4]، جستجو به منظور مرتب‌سازی داده [5] و... . یکی از مشهورترین الگوریتم‌های جستجوی کوانتومی، الگوریتم گرور[6][۲۷,۲۶] است. این الگوریتم در $O(\sqrt{N})$ مرحله به جستجوی یک عنصر از N عنصر پایگاه داده و در $O(\sqrt{M/N})$ مرحله به جستجو M عنصر از میان N پایگاه داده نامرتب می‌پردازد[۲۷]. این الگوریتم از الگوریتم‌های متعارف کلاسیکی که در $O(N)$ مرحله به جواب می‌رسد، سریع‌تر است. اگرچه نشان داده شده است که بسیاری از سیستم‌های کوانتومی مورد نظر کاملا کنترل‌پذیر هستند، اما سیستم‌های نیز وجود دارند که به طور جزئی کنترل‌پذیر می‌باشند یا این که در کل کنترل‌پذیر نیستند. در روش کنترل لیاپانوفی اگر حالت هدف در دسترس حالت اولیه نباشد، فرآیند کنترل با شکست مواجه خواهد شد. به همین دلیل کنترل‌کننده‌های طراحی شده با این روش با فرض در دسترس بودن حال هدف طراحی شده‌اند. برای غلبه بر این چالش، در این مقاله، یک کنترل‌کننده ترکیبی کوانتومی برای کنترل سیستم‌های کوانتومی کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی ارائه شده است. برای این منظور، یک کنترل کوانتومی ترکیبی مبتنی بر روش کنترل لیاپانوف و الگوریتم جستجوی کوانتومی گرور ارائه خواهد شد. در این روش، هنگامی که حالت هدف در مجموعه قابل دسترس[7] حالت اولیه قرار داشته باشد، از یک کنترل‌کننده کوانتومی لیاپانوفی برای انتقال حالت استفاده می‌شود. در غیر این صورت، اگر حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه نباشد با استفاده از الگوریتم گرور حالت اولیه را به یک حالت اولیه دیگر که حالت هدف در دسترس آن باشد، انتقال می‌دهیم و سپس با استفاده از یک کنترل‌کننده کوانتومی لیاپانوفی، حالت اولیه جدید را به حالت هدف انتقال می‌دهیم. این مقاله در هفت بخش تهیه و تنظیم شده است. در بخش دوم، به بیان مسأله پرداخته شده است. در بخش سوم، طراحی قاعده‌های کنترل‌کننده کوانتومی لیاپانوفی ارائه شده است. در بخش چهارم به معرفی، بیان الگوریتم گرور کوانتومی و حل یک مثال از آن پرداخته شده است. با هدف پشتیبانی نظری، در بخش پنجم، یک قضیه بیان و اثبات شده است و همچنین برای سهولت در پیاده‌سازی روش پیشنهادی، یک الگوریتم جدید ترکیبی مبتنی بر کنترل لیاپانوفی و الگوریتم جستجوی گرور ارائه گردیده است. در بخش ششم با شبیه‌سازی یک مثال، کاربردها و مزیت‌های روش پیشنهادی بیان شده است و نتیجه‌گیری در بخش هفتم این مقاله عنوان شده است.

۲- بیان مسأله

یک سیستم مکانیک کوانتومی بسته با معادله شرودینگر زیر بیان می‌شود[۱۲]:

$$i\hbar\left|\dot{\psi}(t)\right\rangle = H\left|\psi(t)\right\rangle, \qquad \left|\psi(t_0)\right\rangle = \left|\psi_0\right\rangle \tag{۱}$$

که در آن H و $\hbar$ به ترتیب بیانگر همیلتونی سیستم و ثابت پلانک هستند. $\left|\psi(t)\right\rangle$ به عنوان بردار حالت سیستم عضو فضای هیلبرت H تعریف شده تحت تعریف ضرب داخلی بردارها می‌باشد. برای راحتی کار ثابت پلانک برابر با یک در نظر گرفته می‌شود. با جداسازی همیلتونی سیستم کوانتومی(۱) به یک قسمت ثابت نسبت به زمان و یک قسمت متغیر با زمان، معادله(۱) به صورت زیر توصیف می‌شود[۱۲]:

$$\begin{cases} i\hbar\left|\dot{\psi}(t)\right\rangle = (H_0 + H_I)\left|\psi(t)\right\rangle = (H_0 + \sum_{k=1}^{r} u_k(t)H_k)\left|\psi(t)\right\rangle \\ \left|\psi(t_0)\right\rangle = \left|\psi_0\right\rangle \end{cases} \tag{۲}$$

که در آن H_0 را همیلتونی درونی سیستم می‌نامند و H_I بیانگر همیلتونی برهم‌کنشی بین سیستم و میدان‌های کنترل خارجی u_k است و آن را همیلتونی خارجی گویند. هدف کنترل کوانتومی در این مقاله، هدایت سیستم کوانتومی از حالت ابتدایی $\left|\psi_0\right\rangle$ به حالت هدف $\left|\psi_f\right\rangle$ مبتنی بر طراحی یک سری قوانین کنترلی می‌باشد. در کنترل سیستم‌های کوانتومی، بدون کاستن از کلّیت مسئله، حالت هدف معمولاً یک حالت ویژه‌ای از همیلتونی درونی سیستم در نظر گرفته می‌شود، بنابراین، باید در شرط زیر صدق کند[۱۲]:

$$H_0\left|\psi_f\right\rangle = \lambda_f\left|\psi_f\right\rangle \tag{۳}$$

که λ_f مقدار ویژه H_0 متناظر با $\left|\psi_f\right\rangle$ است.

تعریف ۱- کره واحد مختلط $S_{\mathbb{C}}^{n-1}$ به صورت زیر تعریف می‌شود[۲۸]:

$$S_{\mathbb{C}}^{n-1} = \left\{ \begin{array}{l} (x_0 + iy_0)\left|0\right\rangle + \ldots + (x_{n-1} + iy_{n-1})\left|n-1\right\rangle \\ \sum_{j=0}^{n-1}\left|x_j + iy_j\right|^2 = 1,\ x_j,\ y_j \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \tag{۴}$$

که در آن $\{\left|0\right\rangle, \left|1\right\rangle, \ldots, \left|n-1\right\rangle\}$ بردارهای حالت پایه متناظر با فضای حالت سیستم(۲) هستند $i=\sqrt{-1}$ می‌باشد.

[1] Peter Shore
[2] Polynomial time
[3] Unstraucted Database Search
[4] Linear Search
[5] Sorting Search
[6] Grover Algorithm
[7] Reachable set

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

تعریف۲- اگر به ازای هر دو حالت داده شده $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_d\rangle$ یک بازه زمانی [0,T] و همیلتونی خارجی H_I وجود داشته باشد به طوری که با حرکت از $|\psi_0\rangle$ تحت تاثیر H_I به $|\psi(T)\rangle = |\psi_d\rangle$ برسیم، آنگاه سیستم (۲) را کنترل‌پذیر می‌گوییم[۲۸].

تعریف۳-اگر دو حالت $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_d\rangle$ داده شده باشند و یک مجموعه کنترل مجاز $U=\{u_k(t), k=1,2,...,r\}$ وجود داشته باشد به طوری که جواب معادله(۲) در زمان t با حالت اولیه $|\psi_0\rangle$، برابر با $|\psi_d\rangle$ باشد، آنگاه گوییم که حالت $|\psi_d\rangle$ در زمان t از $|\psi_0\rangle$ قابل دسترس است[۲۸].

تذکر۱- مجموعه قابل دسترس از $|\psi\rangle$ در زمان t، به عبارت معادل مجموعه نقاط در $S_{\mathbb{C}}^{n-1}$ قابل دسترسی در زمان t، با $\mathrm{R}_t(|\psi\rangle)$ نشان داده می‌شود. علاوه بر این مجموعه قابل دسترس $|\psi\rangle$ برای همه زمان‌های مثبت $t>0$ را با $\mathrm{R}(|\psi\rangle) = \cup_{t>0}\mathrm{R}_t(|\psi\rangle)$ نشان می‌دهند.

تعریف٤- اگر $|\psi_1^e\rangle, |\psi_2^e\rangle, ..., |\psi_n^e\rangle$، n حالت ویژه همیلتونی درونی H_0 باشند و برای هر $t>0$، $\cup_{i=1}^{n} R_t\left(|\psi_i^e\rangle\right) = S_{\mathbb{C}}^{n-1}$ آنگاه سیستم(۲) را کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی می‌نامند[۲۸].

اگر در یک سیستم کنترل، حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار بگیرد با استفاده از یک کنترل‌کننده کوانتومی لیاپانوفی حالت اولیه به حالت هدف انتقال می‌یابد. در غیر این صورت، کنترل‌کننده مذکور امکان انتقال حالت را ندارد. در این مقاله، یک کنترل‌کننده ترکیبی کوانتومی برای غلبه بر این چالش طراحی شده است.

۳- کنترل‌کننده‌های لیاپانوفی

در روش طراحی کنترل لیاپانوفی، قوانین کنترل مبتنی بر مشتق مرتبه اول زمانی نیمه معین منفی تابع لیاپانوف طراحی می‌شوند. به طور کلی‌تر، توابع لیاپانوف مختلف منجر به طراحی‌های مختلف قوانین کنترل و اثرات مختلف کنترلی می‌شود. سه نوع تابع لیاپانوف به شرح زیر وجود دارد[۱۴,۱۲]:

الف- تابع لیاپانوف مبتنی بر فاصله‌ی حالت و کنترل‌کننده‌ی متناظر آن:

مفاهیم زیادی برای بیان فاصله بین دو حالت وجود دارد. در این‌جا ما فاصله هیلبرت اشمیت[1] بین حالت کنترل شده $|\psi\rangle$ و حالت مطلوب $|\psi_f\rangle$ را به عنوان تابع لیاپانوف در نظر می‌گیریم. به عبارتی دیگر:

$$V_1(t) = \frac{1}{2}\left(1-\left|\langle\psi_f|\psi(t)\rangle\right|^2\right) \qquad (۵)$$

که در آن $\left|\langle\psi_f|\psi(t)\rangle\right|^2$ بیانگر احتمال تحول از $|\psi\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ می‌باشد.

همانگونه که در قضیه قانون۱ نشان داده شده است، کنترل متناظر همیلتونی H_k به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$u_k = K_k f_k\left(\Im\left[e^{i\angle\langle\psi|\psi_f\rangle}\langle\psi_f|H_k|\psi\rangle\right]\right) \qquad (۶)$$

که در آن $\angle\langle\psi|\psi_f\rangle$ بیانگر زاویه عبارت مختلط $\langle\psi|\psi_f\rangle$ است، $\Im$ بیانگر قسمت موهومی آرگومان خود بوده و $K_k>0$ و برای تنظیم دامنه کنترل انتخاب می‌شود.

ب- تابع لیاپانوف مبتنی بر متوسط مشاهده‌پذیر و کنترل‌کننده متناظر آن:

$$V_2(t) = \langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle, \quad u_k(t) = -K_k f_k\left(i\langle\psi(t)|[H_k,P]|\psi(t)\rangle\right) \qquad (۷)$$

که درآن، P یک عملگر هرمیتی نیمه معین مثبت فرض شده است و $K_k>0$ و برای تنظیم دامنه کنترل درنظر گرفته شده است.

ج- تابع لیاپانوف مبتنی بر خطای حالت و کنترل‌کننده‌ی متناظر آن:

$$V_3(t) = \frac{1}{2}\langle\psi-\psi_f|\psi-\psi_f\rangle$$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda_f + \omega = K_0 f_0\left(\Im\langle\psi_f|\psi\rangle\right) \\ u_k = K_k f_k\left(\Im\langle\psi_f|H_k|\psi\rangle\right), \quad k=1,2,...,r \end{cases} \qquad (۸)$$

λ_f مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه $|\psi_f\rangle$ از همیلتونی آزاد H_0 است و ω نیز یک میدان کنترل اسکالر حقیقی مقدار می‌باشد.

تعریف۵- حالتی مثل $|\psi\rangle$ را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i|i\rangle \qquad (۹)$$

که $|i\rangle$ بردار حالت پایه متناظر با فضای حالت سیستم(۲) می‌باشد و α_i ثابت حقیقی مقدار است. رابطه (۹) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i|i\rangle, \quad \alpha_i = \langle i|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1}\langle i|\psi\rangle|i\rangle \qquad (۱۰)$$

آنگاه متوسط حالت $|\psi\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i|i\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\langle i|\psi\rangle|i\rangle \qquad (۱۱)$$

٤- الگوریتم جستجوی گرور کوانتومی

الگوریتم گرور یک الگوریتم جستجوی کوانتومی برای جستجو در یک پایگاه داده نامرتب دارای N عضو، در زمان $O(\sqrt{N})$ و در فضای ذخیره‌سازی $O(log(N))$ است. گرور این الگوریتم را در سال ۱۹۹۶ مطرح کرد. بر روی یک کامپیوتر کلاسیک، جستجو در یک پایگاه داده نامرتب نمی‌تواند در زمان کمتر از زمان خطی یا $O(N)$ صورت پذیرد، یعنی جستجو با بررسی تک تک ورودی‌ها انجام می‌گیرد. الگوریتم گرور بیان می‌کند که روی یک کامپیوتر کوانتومی این عمل با پیچیدگی زمان

[1] Hilbert Schmidt

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

$O(\sqrt{N})$ قابل انجام است و به‌طور حدی، سریع‌ترین الگوریتم قابل پیاده‌سازی برای جستجوی پایگاه داده نامرتب روی یک کامپیوتر کوانتومی است. الگوریتم‌های کوانتومی معمولاً افزایش سرعتی نمایی نسبت به الگوریتم‌های کلاسیک دارند. برای درک شهودی بیشتر، ابتدا یک تعبیرهندسی مبتنی بر شکل(۱) درنظر گرفته می‌شود. فرض کنید پایگاه داده نامرتبی دارای $N=2^n$ عنصر است که در آن n تعداد کیوبیت‌های هدف است. هدف این است که عنصر مشخصی مثل $|w\rangle$ در این پایگاه داده مورد جستجو قرار گیرد. $|s\rangle$ را حالت برهم‌نهی یکنواختی از تمام حالت‌های موجود در پایگاه داده در نظر می‌گیریم:

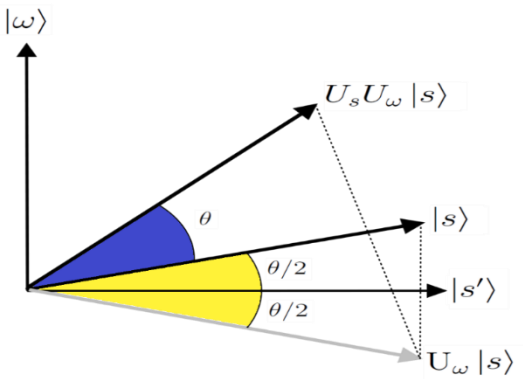
$$|s\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(|0\rangle+|1\rangle+\ldots+|w\rangle+\ldots+|N-1\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}|w\rangle+\frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}|s'\rangle \quad (۱۲)$$

هم‌چنین عملگرهای U_s و U_w به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U_s=2|s\rangle\langle s|-I,\quad U_w=I-2|w\rangle\langle w| \quad (۱۳)$$

که $|s'\rangle$ برهم‌نهی یکنواختی از حالت‌های پایه به جز حالت هدف $|w\rangle$ است. $|s'\rangle$ و $|w\rangle$ مجموعه کامل از بردارهای پایه‌ای هستند و از این رو بر هم متعامد هستند. توجه شود که در این جا I ماتریس همانی می‌باشد.

در شکل(۱)، زاویه بین حالت اولیه $|s\rangle$ و حالت $|s'\rangle$، $\frac{\theta}{2}$ است. حال ابتدا عملگر اوراکل[1] U_w روی حالت $|s\rangle$ عمل می‌کند که حالت $|s\rangle$ را با زاویه $\frac{\theta}{2}$ حول حالت $|s'\rangle$ انعکاس می‌دهد و روی دیگر حالت‌ها به عنوان همانی عمل می‌کند. اکنون عملگر U_s ماتریس انعکاس داده شده $|s\rangle$ را با زاویه θ می‌چرخاند. عملگر G که به صورت $G:=U_sU_w$ تعریف می‌شود و عملگر گرور نامیده می‌شود، حالت اولیه $|s\rangle$ را در یک دنباله تکراری می‌چرخاند تا به حالت هدف $|w\rangle$ برسد. حال به منظور درک بهتر، الگوریتم جستجوی گرور در زیر ارائه شده است [۲۷].



شکل۱: بیان هندسی از الگوریتم جستجوی گرور

الگوریتم گرور

گام اول: اگر H عملگر هادامارد[2] باشد یعنی:

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

قرار دهید:

$$|s\rangle\leftarrow H|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}|j\rangle \quad (۱۴)$$

گام دوم: تا زمانی که

$$K=\left[\frac{\pi\sqrt{N}}{4\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)}\right]\approx\left[\frac{\pi\sqrt{N}}{4}\right] \quad (۱۵)$$

مراحل زیر را تکرار کنید:

$$\begin{cases}|s\rangle\leftarrow G|s\rangle\\ K=K+1\end{cases}$$

گام سوم: $|s\rangle$ در پایه‌ی استاندارد $\{|0\rangle,|1\rangle,\ldots,|N-1\rangle\}$ اندازه‌گیری شود. پس از این اندازه‌گیری حالت ناشناخته‌ی $|\omega\rangle$ با احتمالی بیشتر از $\left(1-\frac{1}{N}\right)$ بدست می‌آید.

مثال ۱- فرض کنید که سیستم شامل $N=8=2^3$ حالت باشد و حالتی که ما به دنبال آن هستیم، $|w\rangle=|011\rangle$ است. برای توصیف سیستم، $n=3$ کیوبیت نیاز است[۲۹]:

$$|x\rangle=\alpha_0|000\rangle+\alpha_1|001\rangle+\alpha_2|010\rangle+\alpha_3|011\rangle$$
$$+\alpha_4|100\rangle+\alpha_5|101\rangle+\alpha_6|110\rangle+\alpha_7|111\rangle$$

که α_iها دامنه $i-$ امین حالت می‌باشند. الگوریتم گرور با سیستم آغاز شده از حالت صفر شروع می‌شود. عملگر هادامارد وقتی که روی حالت $|000\rangle$ عمل می‌کند برهم‌نهی یکنواختی از تمام حالات را به ما می‌دهد. به عبارتی دیگر:

$$|s\rangle=H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle$$

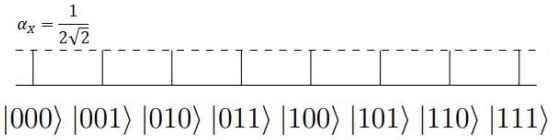
$$n=3\rightarrow|s\rangle=H^{\otimes 3}|0\rangle^{\otimes 3}$$
$$\rightarrow|s\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(|000\rangle+|001\rangle+\ldots+|111\rangle\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{x=0}^{7}|x\rangle$$

که $\otimes$ بیانگر ضرب تانسوری[3] می‌باشد. با توجه به این‌که $N=8$ است، پس تعداد تکرار لازم برابر با $\left[\frac{\pi\sqrt{8}}{4}\right]=2$ می‌باشد. تصویر اندازه دامنه حالت‌ها، روش مفیدی برای تجسم بهتر نحوه کار این الگوریتم است. از آن‌جا که دامنه‌ها در طول اجرای الگوریتم گرور حقیقی باقی می‌مانند، ممکن است که به صورت خطوط عمود بر محورهایی که طول آن‌ها

[1] Oracle
[2] Hadamard
[3] Tensor product

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

متناسب با دامنه‌ای که آن‌ها نشان می‌دهند، تجسم شوند. حالت برهم نهی از اولین تبدیل هادامارد در شکل(۲) نمایش داده شده است.

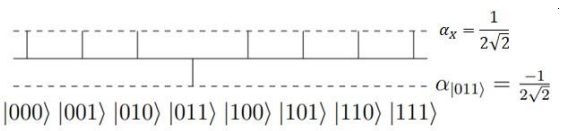


شکل۲: حالت برهم‌نهی و دامنه‌ی متناظر حالت‌ها در مرحله‌ی آغازین

تکرار اول: در هر تکرار اولین قدم فراخوانی تابع اوراکل $\left(U_w = I - 2|w\rangle\langle w|\right)$ است. جستجوی اوراکل دامنه حالت $|w\rangle$ را منفی می‌کند.

$$|x\rangle = U_w\,|w\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |001\rangle + \ldots - |011\rangle + \ldots + |111\rangle\right)$$

که تصویر اندازه آن به صورت زیر است:

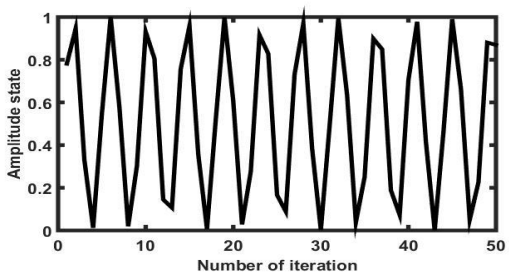


شکل۳: حالت برهم‌نهی و دامنه‌ی متناظر حالت‌ها در تکرار اول

اکنون تبدیل انتشار $U_s = 2|s\rangle\langle s| - I$ اجرا می‌شود:

$$|x\rangle = U_s\,|x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{5}{4\sqrt{2}}\,|011\rangle$$

در این مرحله احتمال متناظر با حالت $|011\rangle$ برابر ۰/۷۸۱۲ می‌باشد و تکرار اول خاتمه پیدا می‌کند.



شکل ۴. دامنه حالت مثال (۱)

تکرار دوم: ورودی اولیه ما:

$$|x\rangle = U_s\,|x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{5}{4\sqrt{2}}\,|011\rangle$$

می‌باشد. اگر در روندی مشابه با تکرار اول، ابتدا تابع اوراکل را فراخوانی کنیم و بعد تبدیل انتشار را انجام دهیم، در نهایت بدست می‌آوریم:

$$|x\rangle = \frac{-1}{8\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{11}{8\sqrt{2}}|011\rangle$$

اکنون سیستم را مشاهده می‌کنیم. احتمال آن‌که حالت بیانگر جواب درست باشد، برابر است با $\left|\frac{11}{8\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{121}{128}$ که می‌توان گفت با احتمالی تقریبا برابر با ۰/۹۴۵۳ به جواب دست پیدا کرده‌ایم. در شکل(۴)، مثال(۱) شبیه‌سازی شده است. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، بعد از دو تکرار الگوریتم گرور، با احتمال۰/۹۴۵۳ به حالت مطلوب همگرا می‌شود. در این‌جا الگوریتم گرور برای ۵۰ تکرار پیاده‌سازی شده است. شاید در تکرار ششم با احتمال۰/۹۹۹۸ انتقال حالت صورت بگیرد اما، همانطور که شکل(۴) نشان می‌دهد، در حالت کلی افزایش تعداد تکرار الگوریتم گرور، تضمینی برای افزایش احتمال انتقال حالت نیست.

۵- طراحی کنترل‌کننده کوانتومی ترکیبی

همان گونه که قبلا عنوان شد، هدف کنترل کوانتومی در این مقاله، هدایت سیستم کوانتومی از حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ به حالت هدف $|\psi_f\rangle$ مبتنی بر طراحی یک سری قوانین کنترلی می‌باشد. در این جا فرض بر این است که سیستم کوانتومی مورد نظر، کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی می‌باشد. پس هر حالت هدفی مثل $|\psi_f\rangle$ که درنظر گرفته شود حداقل به مجموعه قابل دسترسی از یکی از حالت‌های ویژه $|\psi_i^e\rangle, i = 1, 2, \ldots, n$ تعلق دارد، به عبارتی دیگر:

$$if: \quad |\psi_f\rangle \in S_{\mathbb{C}}^{n-1} \rightarrow \exists k,\ s.t\,|\psi_f\rangle \in R_t\left(|\psi_k^e\rangle\right)$$

حال فرض کنید که قصد داریم یک سیستم کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی را از حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ به حالت نهایی $|\psi_f\rangle$ انتقال دهیم. دو حالت ممکن وجود دارد. در حالت اول، فرض می‌شود حالت هدف در مجموعه قابل دسترس از حالت ابتدایی قرار دارد، پس با استفاده از کنترل لیاپانوف این انتقال حالت صورت می‌گیرد. در حالت دوم، حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار ندارد، برای این حالت چون فرض بر این است که سیستم مدنظر کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی است پس قطعا حالت هدف در مجموعه قابل دسترس از یکی از حالت‌های ویژه همیلتونی آزاد، مثلاً $|\psi_k^e\rangle$، قرار دارد. در این حالت برای انتقال حالت اولیه به $|\psi_k^e\rangle$ از الگوریتم گرور و اندازه‌گیری در پایه یکای‌متعامد استفاده می‌شود. به بیانی دیگر، با استفاده از الگوریتم گرور پس از جستجو و یافتن $|\psi_k^e\rangle$ با اندازه‌گیری در پایه یکامتعامد حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ به حالت $|\psi_k^e\rangle$ انتقال داده می‌شود و سپس با استفاده از کنترل لیاپانوف، انتقال حالت از $|\psi_k^e\rangle$ به حالت هدف $|\psi_f\rangle$ انجام می‌گیرد. بنابراین طبق قضیه زیر، قاعده کنترل پیشنهادی ارائه می‌گردد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

قضیه۱- سیستم(۲) را درنظر بگیرید. فرض کنید که مقدار حقیقی $K_k > 0$ و تابع f_k به گونه‌ای است که $f_k(x_k)x_k \geq 0$ و همچنین $f_k(x_k)x_k = 0$ اگر و فقط اگر $x_k = 0$. آنگاه کنترل کننده ترکیبی $u(t)$ به صورت:

$$u(t) = \lambda u_{ly}(t) + (1-\lambda)u_G(t) \qquad (۱۶)$$

که در آن:

$$u_{ly}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t), \ldots, u_r(t))^t \qquad (۱۷)$$

$$u_k(t) = K_k f_k\left(\Im\left[e^{i\angle\langle\psi(t)|\psi_f\rangle}\langle\psi_f|H_k|\psi(t)\rangle\right]\right),\ k = 1,\ldots,r \qquad (۱۸)$$

$$u_G = U_s U_w = (2|s\rangle\langle s| - I)(I - 2|w\rangle\langle w|) \qquad (۱۹)$$

$$\begin{cases} \lambda = 1, & if\ |\psi_f\rangle \in R_t(|\psi(t_0)\rangle),\ t > 0 \\ \lambda = 0, & if\ |\psi_f\rangle \notin (|\psi(t_0)\rangle),\ t > 0 \end{cases} \qquad (۲۰)$$

پایداری مجانبی سیستم را تضمین می‌کند.

اثبات: اگر در رابطه (۱۶)، $\lambda = 0$ آنگاه $u(t) = u_G(t)$ که فرآیند کنترل منجر به اجرای الگوریتم جستجوی بهینه گرور و اندازه‌گیری می‌شود که پایداری آن در [۳۰] نشان داده شده است. برای حالت $\lambda = 1$ $u(t) = u_{ly}(t)$، تابع لیاپانوف مبتنی بر فاصله حالت(۵) را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری از V_1 و استفاده از معادله (۲)، خواهیم داشت:

$$\dot{V}_1 = -\sum_{k=1}^{r} u_k |\langle\psi|\psi_f\rangle| \Im\left[e^{i\angle\langle\psi|\psi_f\rangle}\langle\psi_f|H_k|\psi\rangle\right] \qquad (۲۱)$$

که درآن $\Im$ بیانگر قسمت موهومی $e^{i\angle\langle\psi|\psi_f\rangle}\langle\psi_f|H_k|\psi\rangle$ می‌باشد. حال طبق رابطه (۱۸) قوانین کنترل متناظر همیلتونی H_k عبارتند از:

$$u_k = K_k f_k\left(\Im\left[e^{i\angle\langle\psi|\psi_f\rangle}\langle\psi_f|H_k|\psi\rangle\right]\right) \qquad (۲۲)$$

چون $\lambda = 1$، لذا حالت هدف در دسترس حالت اولیه انتخابی است و $\langle\psi_0|\psi_f\rangle \neq 0$. بنابراین برای هر $t > 0$، $\langle\psi(t)|\psi_f\rangle \neq 0$ [۱۴]. با جایگذاری u_k در (۲۱) تضمین می‌کند که $\dot{V}_1 < 0$ و در حالتی که $|\psi_f\rangle = |\psi\rangle$ داریم $\angle\langle\psi|\psi_f\rangle = 0$ بنابراین $\dot{V}_1 = 0$ و قضیه اثبات می‌شود.

حال می‌توان کنترل کوانتومی ترکیبی پیشنهادی را با استفاده از الگوریتم زیر که شامل ۹ گام است، پیاده‌سازی نمود.

الگوریتم کنترل‌کننده‌ی کوانتومی ترکیبی

گام اول: حالت اولیه $|\psi_0\rangle$، حالت هدف $|\psi_f\rangle$ و ضریب اطمینان α را تعیین کنید.

گام دوم: قاعده‌های کنترل لیاپانوف ارائه شده در رابطه (۱۶) را در نظر بگیرید.

گام سوم: تحول حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ با توجه به کنترل انتخاب شده در گام دوم را در پایه یکا متعامد اندازه‌گیری کنید و آن‌را با P_f نشان دهید.

گام چهارم: اگر $P_f > \alpha$، آنگاه با احتمال قابل قبولی انتقال حالت صورت گرفته و الگوریتم خاتمه می‌یابد، در غیر این صورت به گام پنجم بروید.

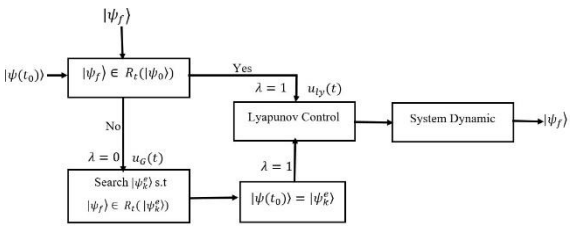
گام پنجم: بردارهای حالت ویژه همیلتونی آزاد را محاسبه کنید و آن‌ها را با $|\psi_1^e\rangle, |\psi_2^e\rangle, \ldots, |\psi_n^e\rangle$ نمایش دهید.

گام ششم: احتمال تحول از هرکدام از حالت ویژه‌های H_0 به $|\psi_f\rangle$ را با استفاده از کنترل‌کننده گام دوم بدست آورید.

گام هفتم: بردار ویژه همیلتونی H_0 با ماکزیمم احتمال انتقال حالت که احتمال انتقال حالت از آن به حالت $|\psi_f\rangle$ بزرگتر از α می‌باشد را انتخاب کنید و آن را با $|\psi_k^e\rangle$ مشخص کنید.

گام هشتم: برای انتقال حالت از $|\psi_0\rangle$ به حالت $|\psi_k^e\rangle$ در رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 0$ و گام سوم را اجرا کنید.

گام نهم: برای انتقال حالت $|\psi_k^e\rangle$ به حالت نهائی $|\psi_f\rangle$ در رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 1$ و کنترل‌کننده(۱۸) را اجرا کنید.



شکل۵: بلوک دیاگرام کلی کنترل‌کننده پیشنهادی

در شکل (۵)، بلوک دیاگرام کلی کنترل پیشنهادی طراحی شده است.

٦- مثال شبیه‌سازی شده

مثال۲- فرض کنید که یک سیستم کوانتومی چهار سطحی با همیلتونی درونی H_0 و خارجی H_1 را داریم که به صورت زیر می‌باشند[۱۲]:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای این مثال الگوریتم ترکیبی که در بخش قبل عنوان شد به صورت کامل پیاده‌سازی می‌شود.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

گام اول: حالت اولیه $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}[1,1,1,1]^t$، حالت هدف $|\psi_f\rangle = [0,0,0,1]^t$ و $\alpha = 0.95$ را در نظر بگیرید.

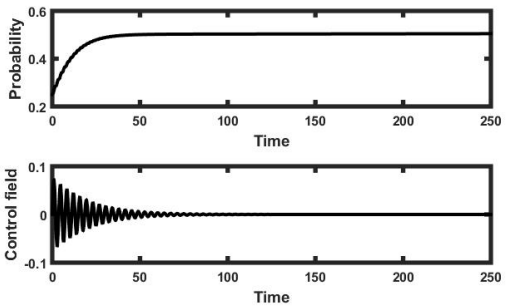
گام دوم: طبق رابطه‌های(۵) و (۱۶)، تابع لیاپانوف و قانون کنترل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} V_1(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \left|\langle \psi_f | \psi(t)\rangle\right|^2\right) \\ u_k(t) = K_k\left(\Im\left[e^{i\angle\langle\psi|\psi_f\rangle}\langle\psi_f|H_k|\psi\rangle\right]\right) \end{cases} \quad (۲۳)$$

که در آن $|\psi\rangle$ حالت کنترلی، $|\psi_f\rangle$ حالت هدف مطلوب، $\angle(\langle\psi_f|\psi\rangle)$ بیانگر زاویه عبارت مختلط $\langle\psi_f|\psi\rangle$ است و K_k یک ثابت حقیقی مثبت و برای تنظیم دامنه کنترل استفاده می‌شود. در این مثال چون فقط از یک میدان کنترلی استفاده می‌شود به جای K_k از نماد K استفاده شده است.

گام سوم: احتمال تحول حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ برحسب قانون کنترلی (۱۸) برای پارامترهای زیر محاسبه می‌شود که T زمان نهایی و Δt طول گام زمانی می‌باشد.

$$K = 0.15,\ T = 250,\ \Delta t = 0.01$$



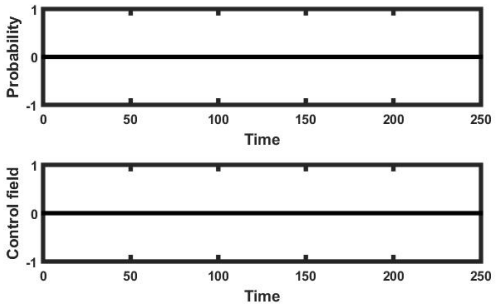
شکل۶: نمودار احتمال انتقال حالت از $\frac{1}{2}[1,1,1,1]^t$ به $[0,0,0,1]^t$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

گام چهارم: حداکثر احتمال تحول حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ یعنی، P_f برابر با ۰/۵۰۴۶ می‌باشد. پس باید به گام پنجم بروید.

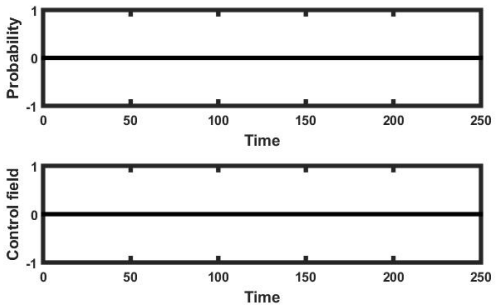
گام پنجم: بردارهای حالت ویژه همیلتونی آزاد یعنی H_0 به صورت زیر می‌باشند:

$$|\psi_1^e\rangle = [1,0,0,0]^t, |\psi_2^e\rangle = [0,1,0,0]^t$$
$$|\psi_3^e\rangle = [0,0,1,0]^t, |\psi_4^e\rangle = [0,0,0,1]^t$$

گام ششم: احتمال تحول حالت را از هر کدام از بردار ویژه‌های H_0 به حالت هدف یعنی $|\psi_f\rangle$ شبیه‌سازی شده است و در شکل‌های(۷)، (۸) و (۱۰) نشان داده شده است.



شکل۷: نمودار احتمال انتقال حالت از $[1,0,0,0]^t$ به $[0,0,0,1]^t$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.



شکل۸: نمودار احتمال انتقال حالت از $[0,1,0,0]^t$ به $[0,0,0,1]^t$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

گام هفتم: با توجه به شکل(۱۰)، بیشترین احتمال انتقال حالت، $P_f = 0.9999 > 0.95$ می‌باشد که متناظر با حالت ویژه سوم از همیلتونی آزاد می‌باشد، پس:

$$|\psi_k^e\rangle = |\psi_3^e\rangle = [0,0,1,0]^t \quad (۲۹)$$

گام هشتم و نهم: برای انتقال حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_3^e\rangle$ رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 0$ و برای انتقال حالت از $|\psi_3^e\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ از طریق قانون کنترل در رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 1$.

اکنون باید تمرکز روی این مسئله باشد که سیستم از حالت اولیه $\frac{1}{2}[1,1,1,1]^t$ با استفاده از عملگر گرور به حالت $[0,0,1,0]^t$ انتقال داده شود. بنابراین در این قسمت دیگر حالت هدف $|\psi_k^e\rangle$ می‌باشد. می‌خواهیم از الگوریتم جستجوی گرور استفاده کنیم. از این‌که:

$$|\psi_k^e\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad N = 2^2 = 4$$

و هم‌چنین با توجه به روابط موجود در الگوریتم جستجوی گرور داریم:

$$U_s U_w = \frac{N-4}{N}|s\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}}|w\rangle$$

پس با قرار دادن مقدار N در رابطه‌ی فوق درمی‌یابیم که فقط با یک بار تکرار الگوریتم جستجوی گرور به حالت هدف دست‌می‌یابیم.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

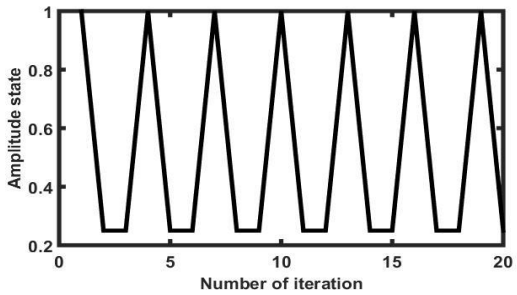
$$|s\rangle = |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad |w\rangle = |\psi_k^e\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$U_s = 2|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I_4, U_w = I_4 - 2|\psi_k^e\rangle\langle\psi_k^e|$$

$$U_s = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}, U_w = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, G = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

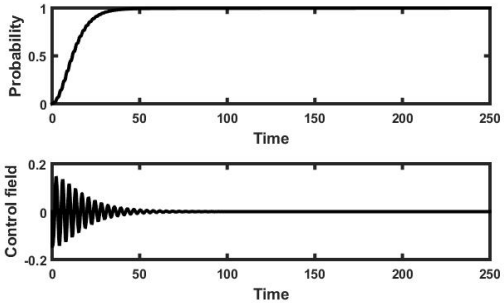
$$G|s\rangle = G|\psi_0\rangle = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

همان طور که قبلاً گفته شد فقط با یک بار اعمال عملگر گرور، حالت $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}[1,1,1,1]^t$ با احتمال یک به حالت $|\psi_3^e\rangle = [0,0,1,0]^t$ انتقال داده می‌شود. درشکل(۹) الگوریتم گرور برای ۲۰ تکرار پیاده‌سازی شده است.



شکل۹: دامنه حالت مثال(۲)

حال بعد از انتقال حالت $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}[1,1,1,1]^t$ به حالت $|\psi_3^e\rangle = [0,0,1,0]^t$ با استفاده از الگوریتم گرور، کنترل لیاپانوف اعمال می‌شود و حالت $|\psi_3^e\rangle = [0,0,1,0]^t$ را به حالت هدف $|\psi_f\rangle = [0,0,0,1]^t$ منتقل می‌کند(شکل(۱۰)).



شکل۱۰: نمودار احتمال انتقال حالت از $[0,0,1,0]^t$ به $[0,0,0,1]^t$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود سیستم با یک تلاش کنترلی محدود و با احتمالی نزدیک به یک بعد از ۵۰ واحد زمانی انتقال حالت را از $|\psi_3^e\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ ممکن می‌کند.

۷- نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت و کاربردهای سیستم‌های کنترل کوانتومی در علوم مختلف و این‌که بعضی از سیستم‌ها کاملا کنترل‌پذیر نیستند، در این مقاله با تمرکز بر روی سیستم‌های کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی، به طراحی یک کنترل‌کننده ترکیبی مبتنی بر کنترل‌کننده‌های لیاپانوفی و الگوریتم جستجوی گرور کوانتومی برای این گونه سیستم‌ها پرداخته شده است. مسئله‌ی دسترسی‌پذیری حالت هدف در کنترل سیستم‌های کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی از چالش‌های طراحی این‌گونه کنترل‌کننده‌ها می‌باشد. روش جستجوی بهینه گرور کوانتومی با هدف جستجوی حالت ویژه‌ای که حالت هدف در دسترس آن قرار دارد به عنوان یک بخش از استراتژی کنترلی کنترل‌کننده طراحی شده در این مقاله به کار گرفته شده است. روش ارائه شده با توجه به بهینه و پایدار بودن الگوریتم گرور و تضمین پایداری در روش لیاپانوف منجر به طراحی یک قاعده کنترل برای سیستم‌های کنترل‌پذیر حالت ویژه قوی به صورت بهینه شده است که بایک قضیه و یک الگوریتم در این مقاله پشتیبانی تحلیلی و پیاده‌سازی شده است.

مراجع

[1] C. G. Almudever, N. Khammassi, L. Hutin, M. Vinet, M. Babaie, F. Sebastiano, E. Charbon, K. Bertels, “Towards a scalable quantum computer", 13th International Conference on Design & Technology of Integrated Systems In Nanoscale Era (DTIS), 1-1, 2018.

[2] K. Kumar, N. A Sharma, R. Prasad, A. Deo, T. Khorshed, "A survey on quantum computing with main focus on the methods of implementation and commercialization gaps", IEEE, pp. 1-7, 2015.

[3] S. Chegini, M. Yarahmadi, "Design of an adaptive sliding mode controller based on quantum neural network", Modars Mechanical Engineering, vol.17, no. 1, pp. 305- 310, 2017.

[۴] آ. ارجمندزاده، م. یاراحمدی، "طراحی یک کنترل‌کننده ژنتیکی کوانتومی در ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی"، مجله کنترل، جلد۱۴، شماره۱، ص‌ص ۶۵-۷۱، ۱۳۹۹.

[۵] ح. رستمی ،ب. رضایی، "کنترل حالت سیستم کوانتومی با استفاده از کنترل‌کننده‌ی فازی"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۶، شماره ۹، ص‌ص ۱۲۴-۱۳۴، ۱۳۹۵.

[6] C. P. Koch, "Controlling open quantum systems: Tools, achievements, and limitations", Journal of Physics Condensed Matter, vol.28, n.21, 2016.

[7] K. Sugisaki, S. Nakazawa, K. Toyota, K. Sato, D. Shiomi, T. Takui, "Quantum chemistry on quantum computers: quantum simulations of the time evolution of wave functions under the S2 operator and determination of the spin quantum number S", Physical Chemistry Chemical Physics, 2019 doi: 10.1039/ c9cp02546d.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]

[8] G. M. Huang, T.J. Tarn, J.W. Clark, "On the controllability of quantum mechanical systems", Journal of Mathematical Physic.vol , 24, Issue11, 1983.

[9] S. G. Schirmer, H. Fu A.I ,Solomon, "Complete controllability of finite level quantum systems", Journal of Physics A: Mathematical and General, vol.34, no. 8, .pp1-14, 2001.

[10] G. Turinici, H. Rabitz, 2001, "Quantum wave function controllability", Chemical Physics .vol 267, Issues 1–3, pp. 1-9, 2001.

[11] S. Grivopoulos, B. Bamieh, "Lyapunov-based control of quantum systems", in Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control, Hawaii, vol.1, .pp434-438, 2003.

[12] S. Kuang, S. Cong, "Lyapunov control methods of closed quantum systems", Automatica, vol. 44, pp. 98-108, 2008.

[13] W. Yang, J. Sun, "Lyapunov Control of Quantum Systems with Impulsive Control Fields", The Scientific World Journal, 1–7, 2013, doi:10.1155/2013/814080.

[14] C. Shuang, S. KUANG, "Quantum Control Strategy Based on State Distance", ACTA AUTOMATICA SINICA, vol.33, no.1, 2007, doi: 10.1360/aas-007-0028.

[15] S.C. Hou, M.A. Khan, X. X. Yi, D. Dong, R. Petersen Ian, "Optimal Lyapunov-based quantum control for quantum systems", Physical Review A, vol.86, 2012.

[۱۶] ز. صاحبی ، م. یاراحمدی، "طراحی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند با استفاده از شبکه‌های عصبی موجکی کوانتومی برای ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته‌ی متناهی"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۸، شماره ۰۲، ص‌ص ۱۷۹-۱۸۸، ۱۳۹۷.

[17] R. Orus, S. Mugel.E , Lizaso, "Quantum computing for finance: Overview and prospects", Reviews in Physics, vol. 4, 2019, doi: 10.1016/j.revip.2019.100028.

[18] S. Imre, F. Balaz, "Quantum computing and communications", An Engineering Approach Wiley. Chichester.۲۰۰۵ ,

[19] .PBeniof, "The computer as a physical system a microscopic Quantum Mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines", Journal of Statistical Physics.vol , 22, pp.563– 591, 1980.

[20] D. Deutsch, "the Church-Turing principle and the universal quantum computer", Proceedings of the Royal Society A, 400, 1818, pp.97- 117, 1985.

[21] P. Feynman Richard, "Simulating physics with computers", International Journal of Theoretical Physics, vol.21.pp , 467- 488, 1982.

[22] Y. Manin, "Computable and Non computable", Sov. Radio, 13- 15, 1980.

[23] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring", Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science Press, pp.124- 134, 1994, doi:10.1109/sfcs.1994.365700.

[24] G. Bassard, "Searching a quantum phone book", Science, .vol 275, Issue 5300, .pp627- 628, 1997.

[25] D. Dao- Yi, C. Chun- Lin, C. Zong- Hai, Z. Chen, "Quantum Mechanics Helps in Learning for More Intelligent Robots", Chinese Physics Letters, vol.23, n. 7, pp. 1691–1694, 2006, doi:10.1088/0256-307x/23/7/010.

[26] Grover L. K, 1996, "A fast quantum mechanical algorithm for database search", Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp.212-219, 2006.

[27] J. S. Lomonaco, "Grover's quantum search algorithm", Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,.pp 1- 12, 2000.

[28] C. B. Zhang, D.Y. Dong, Z. H. Chen, "Control of non-controllable quantum systems: a quantum control algorithm based on Grover iteration", Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, vol. 7, n.10, pp. 313- 317, 2005.

[29] E. Strubell, "An Introduction to Quantum Algorithms", COS498 – Chawathe Spring, 2011.

[30] K.V, Gubaidullina, S.A. Chivilikhin, "Stability of Grover's algorithm in respect to perturbations in quantum circuit", Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, vol.8, n. 2, pp. 243–246, 2017.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.3.9]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.25]