مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه ۴۶-۳۵

کنترل پیش‌بین هیبریدی سیستم سه مخزن غیرخطی مبتنی بر مدل تکه‌ای آفین به فرم بسته پیشنهادی

محمد بیطرفان[۱]، امین رمضانی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران m.bitarafan@modares.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران ramezani@modares.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷ ویرایش اول: ۱۴۰۰/۱۱/۳۰ ویرایش دوم: ۱۴۰۱/۰۲/۰۸ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۲۱

چکیده: در این مقاله یک کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر مدل هیبرید پیشنهادی جهت کنترل ارتفاع سیال در سیستم سه مخزن دارای دینامیک‌های غیرخطی که مود عملکردی آن وابسته به مقدار لحظه‌ای حالت‌های سیستم است، طراحی شده است. استفاده از مدل هیبرید غیرخطی در کنترل پیش‌بین منجر به یک مساله برنامه‌نویسی صحیح ترکیبی غیرخطی می‌شود که حل آن بسیار پیچیده و زمان‌بر است. یکی از روش‌های حل این مساله، تقریب معادلات غیرخطی با عبارت خطی و یا تکه‌ای آفین می‌باشد. تقریب خطی اغلب خطای زیادی در محاسبه حالت‌ها و مودهای عملکردی سیستم داشته و تقریب تکه‌ای آفین خطای کمتر از تقریب خطی ایجاد می‌کند اما بار محاسباتی آن بسیار بیشتر است. در این پژوهش با هدف کاهش حجم محاسبات، یک فرم بسته برای معادلات تکه‌ای آفین سیستم سه مخزن در هر یک از مودها بدست آورده شده است. سیستم بدست آمده یک سیستم تکه‌ای آفین است که هر مود با یک عبارت تکه‌ای آفین توصیف می‌شود. کنترل پیش‌بین این سیستم یک مساله برنامه‌نویسی صحیح ترکیبی خطی است که توسط حل‌گرهای متداول قابل حل می‌باشد. به منظور ارزیابی عملکرد کنترل پیش‌بین طراحی شده و امکان استفاده از آن به صورت برخط، دنباله ورودی بهینه کنترل با استفاده از حل‌گر تجاری MOSEK در محیط MPT محاسبه و در هر زمان نمونه برداری فقط اولین عضو دنباله به سیستم سه مخزن با دینامیک‌های دقیق در Simulink/Stateflow اعمال شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کنترل‌کننده پیشنهادی ردیابی را به درستی انجام داده است و قیود روی حالت‌های سیستم نیز برآورده شده است.

کلمات کلیدی: کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل، سیستم هیبرید، سیستم سه مخزن، تقریب تکه‌ای آفین، سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی.

Hybrid model predictive control of a nonlinear three-tank system based on the proposed compact form of piecewise affine model

Mohammad Bitarafan, Amin Ramezani

Abstract: In this paper, a predictive control based on the proposed hybrid model is designed to control the fluid height in a three-tank system with nonlinear dynamics whose operating mode depends on the instantaneous amount of system states. The use of nonlinear hybrid model in predictive control leads to a problem of mixed integer nonlinear programming (MINLP) which is very complex and time consuming to solve. One way to solve this problem is to approximate nonlinear equations with linear or piecewise affine (PWA) expressions. The linear approximation often has a large error in calculating the operating modes and the system states. The PWA approximation produces less error than the linear approximation, but its computational load is much higher. In this study, with the aim of reducing the computational load, a closed form model has been obtained for the equations of the three-tank system in each of the modes. The resulting system is an PWA, each mode being described by an PWA expression. Predictive control of this system is a mixed integer linear programming problem that can be solved by conventional solvers. To evaluate the performance

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

of the proposed method and the possibility of using it online, the optimal control input sequence is calculated using MOSEK commercial solver in MPT toolbox, and at any sampling time only the first member of the sequence is applied to the precise modeled three-tank system in the Simulink/Stateflow environment. The simulation results indicate that the proposed controller performs the tracking efficiently and the constraints on the system states are also satisfied.

Keywords: Model predictive control (MPC), Hybrid system, Three-tank system, Piecewise affine (PWA) approximation, Mixed logical dynamical system (MLD).

۱- مقدمه

توسعه روش‌هایی برای به دست آوردن مدل سیستم‌های صنعتی که رفتار واقعی آن را توصیف کند جزء حوزه‌های مورد توجه محققین بوده است. یکی از رویکردهای متداول برای مدل‌سازی سیستم‌ها که رفتار غیرخطی آن‌ها شدید نباشد، نگه داشتن آن نزدیک نقطه کار و استفاده از مدل خطی است. اما به دست آوردن مدل یک سیستم صنعتی دارای تعدادی زیرسیستم با نقاط کار و مودهای عملکردی مختلف که علاوه بر متغیرهای پیوسته، متغیرهای گسسته نیز دارد کار دشواری بود تا این که مفهوم سیستم‌های هیبرید در اوائل دهه ۹۰ میلادی معرفی گردید [۷]. سیستم هیبرید یک سیستم دینامیکی دارای متغیرهای پیوسته، متغیرهای گسسته و رخدادها بوده که شامل چندین مود و معادله دینامیکی است و هر معادله رفتار سیستم را در نقاط عملکردی معین توصیف می‌کند. انتقال بین مودهای عملکردی بر اساس قواعد منطقی یا برآورده شدن قیود بر روی کمیت‌های ورودی و حالت سیستم مشخص می‌شود. سیستم سه مخزن دارای تداخل، نمونه ای از یک سیستم پیچیده چند ورودی و چند خروجی دارای دینامیک‌های غیرخطی و رفتار هیبرید است [۴] و [۱۶].

کنترل سیستم‌های هیبرید به دلیل ارتباط دینامیک‌های پیوسته و دینامیک‌های گسسته با منطق، با استفاده از روش‌های کنترل کلاسیک به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست. استفاده از رویکرد طراحی ابتکاری[۱] مانند الگوریتم ژنتیک به دلیل نیاز به آزمون و خطای فراوان، زمان‌بر بوده و منجر به پاسخ زیربهینه می‌شود و اغلب برای در نظر گرفتن پیچیدگی مساله کنترل هیبریدی نامناسب است [۲۷]. رویکرد دیگر، استفاده از کنترل بهینه است که می‌تواند در مقایسه با رویکردهای ابتکاری به طور قابل توجهی باعث کاهش اکتشاف‌ها و کارایی بهتر تحت شرایط بهینه واقعی شود[۵]. ولی این روش در برابر اغتشاش‌ها و عدم تطابق مدل مقاوم نبوده و نمی‌توان از آن به عنوان یک استراتژی کنترل برخط[۲] استفاده کرد. برای نمونه رویکرد LQR که مبتنی بر مفهوم بهینه بودن است، تنها برای یک مدل خطی شده محلی طراحی می‌شود و نمی‌توان قیود را در آن وارد کرد [۹].

رویکرد دیگر، حل مساله کنترل بهینه با استفاده از استراتژی کنترل افق پیش‌رونده[۳] یا کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل[۴] است که در هر دوره نمونه برداری، یک دنباله از مقادیر کنترل آینده را از طریق یک بهینه‌سازی برخط که خطای ردیابی را کمینه و قیود برآورده شود را محاسبه می‌کند؛ ولی فقط اولین مقدار این دنباله بهینه به سیستم اعمال می‌شود. رویکرد کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل به دلیل توانایی در نظر گرفتن قیود خطی و منطقی روی متغیرهای پیوسته و گسسته حالت، ورودی، خروجی و همچنین متغیرهای کمکی، به طور گسترده‌ای در سیستم‌های هیبرید مورد استفاده قرار گرفته است و کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل هیبرید[۵] نامیده می‌شود [۶].

روش‌های مختلفی برای توصیف سیستم‌های هیبرید توسعه داده شده است که از میان آن‌ها دستگاه معادلات تکه‌ای آفین[۶] زمان گسسته و سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی[۷] زمان گسسته که مناسب برای طراحی کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل می‌باشد، بیشتر مورد توجه قرار گرفته است [۳]، [۷]، [۱۷] و [۲۳]. معادلات تکه‌ای آفین که اولین بار توسط مرجع [۲۴] پیشنهاد شد ساده ترین روش مدل‌سازی سیستم‌های هیبرید بوده و می‌تواند بسیاری از فرآیندهای فیزیکی با مقدار کم غیرخطی‌گری ایستا[۸] را مدل کند و می‌تواند دینامیک‌های غیرخطی را در نقاط کار مختلف با چند خطی سازی تقریب بزند [۲۵]. اگر سیستم دینامیکی در فضای ورودی-حالت دارای دینامیک‌های آفین در تعدادی ناحیه چندوجهی[۹] بوده و تغییر مود سیستم تنها به متغیر حالت در زمان حال وابسته باشد، این سیستم معادلات تکه‌ای آفین نامیده می‌شود [۱۷].

اولین بار سیستم سه مخزن توسط مرجع [۱۲] به عنوان یک سیستم مطالعاتی مرجع جهت تشخیص عیب مبتنی بر رویتگر و پیکربندی مجدد کنترل معرفی شد. نویسندگان در مرجع [۴] سیستم سه مخزن را برای یک حالت خاص از وضعیت شیرها به صورت غیر هیبرید در نظر گرفته‌اند و برای آن یک رویکرد کنترل پیشنهاد داده‌اند. پژوهشگران مرجع [۸] برای سیستم یک شبیه‌ساز پیشنهاد کرده‌اند که قابلیت شبیه‌سازی سیستم در یک سناریوی خاص را دارد. مرجع [۲] سیستم سه مخزن هیبرید را با استفاده از ده متغیر کمکی پیوسته و باینری جدید به فرم سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی تبدیل نموده و برای آن یک کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل طراحی نموده است. البته به دلیل آن که دینامیک سیستم سه مخزن غیرخطی است و مدل‌سازی به فرم سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی نیاز به معادلات خطی

[1] Heuristic
[2] Online
[3] Receding horizon control (RHC)
[4] Model predictive control (MPC)
[5] Hybrid MPC
[6] Piecewise affine (PWA) system
[7] Mixed logical dynamical (MLD) system
[8] Static nonlinearities
[9] Polyhedron

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

دارد، مراجع [۲] و [۱۹] عبارت غیرخطی را در بازه تغییرات حالت‌های سیستم با یک خط مستقیم تقریب زده‌اند؛ البته آن‌ها کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر مدل را بر روی تقریب خطی مدل اعمال کرده‌اند که با رفتار سیستم واقعی متفاوت است. نویسندگان مرجع [۲۱] دینامیک‌های غیرخطی سیستم سه مخزن هیبرید را با معادلات تکه‌ای آفین تقریب زده‌اند و مساله را با استفاده از ۵۴ متغیر کمکی پیوسته و باینری جدید تعریف نموده‌اند که حل مساله را بسیار زمان‌بر می‌کند.

کار اصلی توسعه داده شده در این پژوهش پیشنهاد یک فرم بسته مدل تقریبی تکه‌ای آفین برای معادلات غیرخطی سیستم سه مخزن هیبرید دارای تداخل است که دینامیک‌های غیرخطی در مودهای عملکردی مختلف دارد. مدل تکه‌ای آفین پیشنهادی دقت تقریب عبارت‌های غیرخطی را نسبت به تقریب خطی افزایش و حجم محاسبات را نسبت به مدل‌های تکه‌ای آفین دیگر کاهش می‌دهد.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش ۲ مقدمات ریاضی مورد نیاز بیان، سیستم سه مخزن هیبرید توصیف و معادلات آن بیان می‌شود، در بخش ۳ معادلات سیستم تکه‌ای آفین به فرم بسته پیشنهادی بدست آورده شده و ساختار مساله کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل هیبرید ارائه می‌شود. در بخش ۴ نتایج پیاده سازی کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل بر روی سیستم سه مخزن نشان داده می‌شود.

۲- مقدمات ریاضی مورد نیاز و بیان مساله

۲-۱- دستگاه معادلات تکه‌ای آفین

ساختار معادلات تکه‌ای آفین به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i u(k) + f_i \\ y(k) &= C_i x(k) + D_i u(k) + g_i \\ &\text{for} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_i \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $C_i \in \mathbb{R}^{p\times n}$، $D_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$، $f_i \in \mathbb{R}^n$ و $g_i \in \mathbb{R}^p$ ماتریس‌ها و بردارهای ثابت هستند. $x \in \mathcal{X}$، $u \in \mathcal{U}$ و $y \in \mathcal{Y}$ به ترتیب حالت‌ها، ورودی‌ها و خروجی‌های پیوسته و/یا گسسته در زمان $k \in \mathbb{Z}$ است. $\mathcal{D}_i$ یک چندوجهی روی فضای ورودی-حالت $\mathcal{X}\times\mathcal{U}$، اندیس $i \in \{1,\dots,s\}$ متناظر با یک دینامیک (مود) سیستم معادلات تکه‌ای آفین و s تعداد تمام دینامیک‌ها در فضای چندوجهی ورودی-حالت است [۳] و [۹].

نکته ۱: می‌توان $\mathcal{D}_i$ را با قیود روی متغیرهای حالت و ورودی به صورت $\mathcal{D}_i^x x(k) + \mathcal{D}_i^u u(k) \le \mathcal{D}_i^c$ نوشت که نشان می‌دهد دینامیک i در بخشی از فضای ورودی- حالت که قیود برآورده می‌شود برقرار است [۴].

نکته ۲: اگر بتوان تمام فضای ورودی-حالت به نحوی افراز نمود که $\mathcal{D} = \cup_{i=1}^{s} \mathcal{D}_i$، $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \varnothing, \forall i \ne j$ و $\mathcal{D}_i \ne 0, \forall i$ برآورده شود، سیستم تکه‌ای آفین خوش‌رفتار[1] نامیده می‌شود [۴] و می‌توان معادلات را به سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی تبدیل نمود [۱۰].

۲-۲- سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی

ساختار سیستم زمان گسسته دینامیکی منطقی ترکیبی به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + B_2 \delta(k) + B_3 z(k) \\ y(k) &= Cx(k) + D_1 u(k) + D_2 \delta(k) + D_3 z(k) \\ E_2 \delta(k) &+ E_3 z(k) \le E_1 u(k) + E_4 x(k) + E_5 \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن A، $\{B_j\}_{j=1}^{3}$، C، $\{D_j\}_{j=1}^{3}$ و $\{E_j\}_{j=1}^{5}$ ماتریس‌های ثابت، $z(k)$ متغیرهای پیوسته کمکی، $\delta(k)$ متغیرهای باینری کمکی هستند [۳].

نکته ۳: با بازنویسی روابط منطقی سیستم تکه‌ای آفین به صورت نامساوی‌های خطی صحیح ترکیبی[2]، می‌توان آن را به فرم سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی معادل نوشت که منجر به تبدیل بخش منطقی سیستم به عدد صحیح ۰ یا ۱ می‌شود.

۲-۳- تبدیل روابط پیوسته منطقی ترکیبی به نامعادلات عددی ترکیبی

ایده اصلی به کار رفته در حل مساله کنترل بهینه هیبرید، تبدیل مساله به برنامه‌نویسی صحیح ترکیبی[3] با استفاده از تبدیل روابط پیوسته منطقی ترکیبی به نامعادلات عددی ترکیبی است. بدین منظور از دو لم زیر بهره برده شده است.

لم ۱: تابع خطی $f(x)$ را در نظر بگیرید که $M \in \mathbb{R}$ و $m \in \mathbb{R}$ به ترتیب حد بالا و حد پایین تابع در ناحیه اعتبار $x \in \mathcal{X}$ باشد. اگر بخواهیم نامعادله $f(x) \le 0$ را با یک متغیر باینری δ به صورت گزاره منطقی $[f(x) \le 0] \Leftrightarrow [\delta = 1]$ نشان دهیم، این گزاره برقرار است اگر و تنها اگر نامعادلات زیر برقرار باشد که در آن ε کوچکترین عدد ممکن در پردازنده یا دقت ماشین است [۱۳].

$$\begin{aligned} f(x) &\le M(1-\delta) \\ f(x) &\ge \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta \end{aligned}$$

لم ۲: حاصل‌ضرب متغیر باینری و تابع پیوسته $\delta f(x)$ را می‌توان با تعریف متغیر کمکی پیوسته $z \triangleq \delta f(x)$ به نامعادلات خطی زیر تبدیل نمود [۱۳]

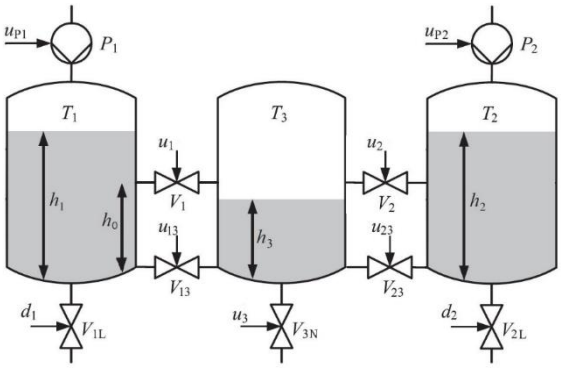
[1] Well-posed
[2] Mixed-integer linear inequality
[3] Mixed integer programing

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

$$z \le M\delta$$
$$z \ge m\delta$$
$$z \le f(x) - m(1-\delta)$$
$$z \ge f(x) - M(1-\delta)$$

۲-۴- بیان مساله

سیستم سه مخزن دارای تداخل نمونه ای از یک سیستم پیچیده چند ورودی و چند خروجی غیرخطی هیبرید است. فرآیند کنترل سطح سیال در یک سیستم چند مخزن به طور گسترده ای به عنوان یک مساله مطالعاتی چند متغیره برای شناسایی سیستم، کنترل تحمل‌پذیر عیب و سایر مقاصد کنترل استفاده شده است. این سیستم دارای یک دینامیک غیرخطی وابسته به مقدار حالت‌ها و ورودی‌ها، پیچیدگی زیاد و کوپلینگ شدید است.



شکل ۱: سیستم سه مخزن دارای تداخل [۱۷]

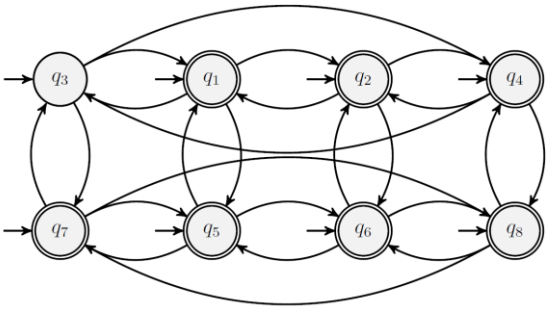
سیستم از اتصال سه مخزن استوانه ای مشابه با سطح مقطع برابر تشکیل شده است. جریان آب بین مخزن‌ها و خروجی از آن‌ها می‌تواند توسط شیرهای برقی V_1، V_2، V_{13} ، V_{23} و V_{3n} که دو وضعیت کاملا باز یا کاملا بسته دارند، کنترل شود. ارتفاع مخزن‌ها به طور پیوسته اندازه‌گیری می‌شود. پارامترهای سیستم مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱: مقادیر و بازه تغییر پارامترها [۱۷]

متغیر	مقدار	توصیف
c	3.6×10^{-5} m^2	ضریب انتقال شیرها
A	0.0154 m^2	سطح مقطع مخزن‌ها
h_0	0.3 m	ارتفاع شیرهای بالا
h_{max}	0.62 m	بیشینه ارتفاع مخزن‌ها
Q_{max}	10^{-4} m^{3}s^{-1}	بیشینه دبی پمپ‌ها
g	9.81 ms^{-2}	شتاب جاذبه
h_i	$\in \mathbb{R}$	ارتفاع سیال مخزن i-ام
q	$\in \{1,2,\dots,8\}$	مود عملکردی
u_i, u_{ij}	$\in \{0,1\}$	وضعیت خاموش/روشن شیرها
Q_{Pi}	$\in [0, Q_{max}]$	دبی پمپ‌ها
d_i	$\in \{0,1\}$	وضعیت شیرهای نشتی

سیستم هم دارای ورودی‌های پیوسته و هم ورودی‌های گسسته است. ورودی‌های پیوسته، جریان ورودی پمپ‌ها است که می‌تواند از صفر تا $Q_{\max}$ به طور پیوسته تغییر کند. ورودی‌های گسسته، موقعیت شیرهای خاموش/روشن است (۱ و ۰ به ترتیب برای وضعیت باز و بسته). شیرهای V_{1L} و V_{2L} شیرهای نشتی مخزن‌های ۱ و ۲ است که با d_i کنترل می‌شود و شیر V_{3n} شیر خروجی از مخزن ۳ است که با u_3 کنترل می‌شود. در این مقاله بدون از دست رفتن کلّیت، به منظور کاهش حجم محاسبات، فرض می‌شود شیرهای V_{1L} و V_{2L} در طی فرآیند بسته و شیر V_{3n} کاملا باز است.

اگر موقعیت شیرها ثابت باقی بماند دینامیک‌های پیوسته به طور خودگردان[1] بین مودهای گسسته $q(t) \in \{1,2,\dots,8\}$ بسته به سطح ارتفاع سیال مخزن‌ها نسبت به ارتفاع h_0 مطابق جدول ۲ سوئیچ می‌کنند. همان طور که در جدول ۲ نشان داده شده است، حالت‌های گسسته به حالت‌های پیوسته وابسته هستند. اتوماتای شکل ۲ رفتار گسسته سیستم را نشان می‌دهد که هر نود یک مود عملکردی گسسته را نشان می‌دهد و به دلیل خودگردان بودن سیستم سوئیچی، گراف مکانی[2] و مجموعه ناوردای[3] آن به طور ذاتی از رفتار سوئیچی سیستم به دست می‌آید. به دلیل آن که انتقال بین مودها معین است و متغیرهای پیوسته پرش[4] ندارد، در اتوماتای شکل ۲ به ترتیب گارد[5] و نگاشت بازنشانده[6] در نظر گرفته نشده است.



شکل ۲: اتوماتای سیستم سه مخزن

با فرض آن که پمپ‌ها با سیگنال‌های نرمال شده u_{pi} کنترل شوند، بردار حالت و ورودی سیستم به ترتیب $x(t) = [h_1, h_2, h_3]'$ و $u(t) = [u_{p1}, u_{p2}, u_1, u_2, u_{13}, u_{23}]'$ است.

جدول ۲: مودهای گسسته سیستم سه مخزن

$q(t)$	$h_1(t)$	$h_2(t)$	$h_3(t)$
1	$< h_0$	$< h_0$	$< h_0$
2	$\ge h_0$	$< h_0$	$< h_0$
3	$< h_0$	$< h_0$	$\ge h_0$
4	$\ge h_0$	$< h_0$	$\ge h_0$
5	$< h_0$	$\ge h_0$	$< h_0$
6	$\ge h_0$	$\ge h_0$	$< h_0$
7	$< h_0$	$\ge h_0$	$\ge h_0$
8	$\ge h_0$	$\ge h_0$	$\ge h_0$

[1] Autonomous
[2] Location graph
[3] Invariant set
[4] Jump
[5] Guard
[6] Reset mapping

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

با استفاده از قانون بقای جرم که بیان می‌کند تغییر حجم آب در یک مخزن حاصل تفاضل مجموع جریان‌های ورودی و جریان‌های خروجی از مخزن است، معادلات حالت گسسته سیستم به فرم زیر به دست می‌آید:

$$h_1(t+1)=h_1(t)+\frac{T_s}{A}(Q_{p_1}-Q_{13}^{V_1}-Q_{13}^{V_{13}}-Q_{1L}) \quad (۳)$$

$$h_2(t+1)=h_2(t)+\frac{T_s}{A}(Q_{p_2}-Q_{23}^{V_2}-Q_{23}^{V_{23}}-Q_{2L}) \quad (۴)$$

$$h_3(t+1)=h_3(t)+\frac{T_s}{A}(Q_{13}^{V_1}+Q_{13}^{V_{13}}+Q_{23}^{V_2}+Q_{23}^{V_{23}}-Q_{3N}) \quad (۵)$$

به طور کلی جریان آب بین دو مخزن به صورت رابطه ۶ محاسبه می‌شود.

$$Q_{ij}^{V_l}(t)=c\,\mathrm{sgn}(h_i(t)-h_j(t))\sqrt{2g\left|h_i(t)-h_j(t)\right|}u_l(t) \quad (۶)$$

که در آن $Q_{ij}^{V_l}(t)$ جریان آب از مخزن i به مخزن j از مسیر لوله با شیر V_l و c ثابت جریان شیرها، g ثابت شتاب جاذبه و $u_l(t)$ ورودی باینری بوده و موقعیت شیر V_l (صفر وقتی شیر بسته است و ۱ وقتی شیر باز) است.

با استفاده از قاعده توریچلی جریان آب شیرها در سیستم سه مخزن از روابط زیر به دست می‌آید (مرجع [۱۹]):

$$Q_{i3}^{V_{i3}}(t)=c\,\mathrm{sgn}(h_i-h_3)\sqrt{2g\,|\,h_i-h_3\,|}\,u_{i3} \quad (۷)$$

$$Q_{i3}^{V_{i3}}(t)=\begin{cases}0 & ,h_i<h_0,\ h_3<h_0\\ c\,\mathrm{sgn}(h_i-h_0)\sqrt{2g\,|\,h_i-h_0\,|}\,u_i & ,h_i\ge h_0,\ h_3<h_0\\ c\,\mathrm{sgn}(h_3-h_0)\sqrt{2g\,|\,h_3-h_0\,|}\,u_i & ,h_i<h_0,\ h_3\ge h_0\\ c\,\mathrm{sgn}(h_i-h_3)\sqrt{2g\,|\,h_i-h_3\,|}\,u_i & ,h_i\ge h_0,\ h_3\ge h_0\end{cases}$$
$$=c\,\mathrm{sgn}(\max\{h_i,h_0\}-\max\{h_3,h_0\})\times\sqrt{2g(\max\{h_i,h_0\}-\max\{h_3,h_0\})}u_i \quad (۸)$$

$$Q_N^{V_3}(t)=c\sqrt{2gh_3}\,u_3 \quad (۹)$$

$$Q_{iL}(t)=c\sqrt{2gh_i}\,d_i,\ \text{with } i=1,2 \quad (۱۰)$$

اگر معادلات دیفرانسیلی و جبری (۳) تا (۵) و (۷) تا (۱۰) با مدل اتوماتای گسسته شکل ۲ مرتبط شوند یک اتوماتای هیبرید بدست می‌آید. همان طور که در رابطه (۶) مشاهده می‌شود جریان سیال بین دو مخزن از شیرهای بالا به ارتفاع سیال دو مخزن نسبت به هم وابسته است.

دو رویکرد کلی برای حل این دستگاه معادلات وجود دارد، یک رویکرد خطی سازی مدل غیرخطی حول نقطه کار مورد نظر است؛ اما مدل خطی شده تنها وقتی صحیح است که دستگاه نزدیک نقطه خطی سازی کار کند که کاربرد عملی محدودی دارد [۱۸]، [۲۰]، [۲۲] و [۲۸]. رویکرد دیگر، استفاده از مفهوم سیستم‌های هیبرید و خطی سازی مدل غیرخطی حول چندین نقطه کار است که در تمام ناحیه عملکردی سیستم معتبر است [۲]، [۴]، [۱۹] و [۲۱]. از نقطه نظر ریاضی این تقریب متناظر با سیستم تکه‌ای آفین شامل تعدادی دینامیک آفین با نواحی اعتبار آن‌ها است.

نکته ٤: در مقایسه با تقریب سیستم غیرخطی با یک خط در یک نقطه کار، مدل‌های تکه‌ای آفین صحت تقریب بالاتری داشته و نسبت به مدل غیرخطی آسان‌تر می‌توان تجزیه و تحلیل کنترل انجام داد. می‌توان برای تقریب دقیق‌تر عبارت غیرخطی، از تقریب تکه‌ای آفین استفاده نمود؛ هر چه تعداد نواحی بالاتر باشد دقت بیشتر می‌شود اما بار محاسباتی مساله برنامه‌نویسی صحیح ترکیبی ناشی از آن به صورت نمایی زیاد می‌شود.

۳- توصیف هیبرید فرآیند

معادلات سیستم سه مخزن (۷) الی (۱۰) دارای عبارت‌های غیرخطی به فرم $\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ و $\sqrt{x}$ است که نشان می‌دهد مقدار جریان متناسب با ریشه دوم سطح مخزن است. در مرجع‌های [۲] و [۱۹] عبارت غیرخطی با استفاده با یک خط مستقیم به صورت kx تقریب زده شده است. همان طور که از شکل ۳-الف مشخص است این تقریب می‌تواند خطای زیادی در اندازه‌گیری مقدار واقعی ایجاد کند. بنابراین مطابق نکته ۴، با توجه به بازه تغییرات و نمودار، بهترین نوع تقریب عبارت غیرخطی $\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ در سه ناحیه انتخاب شده و رابطه آن به صورت زیر می‌شود: (با فرض $x_{\min}=-x_{\max}$)

$$\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}\simeq\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x_{max}/n}+\sqrt{x_{max}}}x-\dfrac{\sqrt{x_{max}}}{1+\sqrt{n}} & ,\mathcal{R}_1\\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{x_{max}}}x & ,\mathcal{R}_2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x_{max}/n}+\sqrt{x_{max}}}x+\dfrac{\sqrt{x_{max}}}{1+\sqrt{n}} & ,\mathcal{R}_3\end{cases}$$
$$\mathcal{R}_1:-x_{\max}\le x<-\frac{x_{\max}}{n}$$
$$\mathcal{R}_2:-\frac{x_{\max}}{n}\le x\le\frac{x_{max}}{n}$$
$$\mathcal{R}_3:\frac{x_{max}}{n}<x\le x \quad (۱۱)$$

که درآن $n\ge 1$، $n\in\mathbb{R}$ یک پارامتر طراحی بوده و باید به نحوی انتخاب شود که خطای میانگین مربعات[1] تقریب که از رابطه زیر محاسبه می‌شود، کمینه و بیشترین دقت ممکن به دست آید.

$$\mathrm{MSE}=\frac{1}{n}\sum(f(x_i)-\hat{f}(x_i))^2 \quad (۱۲)$$

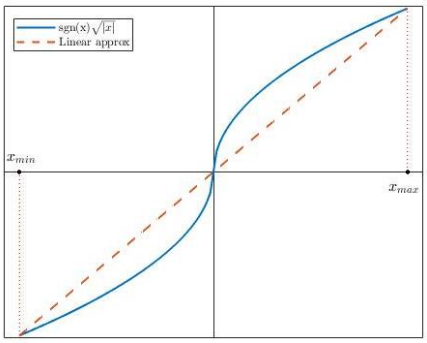
به طور مشابه می‌توان برای تقریب عبارت $\sqrt{x}$ از دو قسمت رابطه (۱۱) استفاده نمود.

[1] Mean squared error (MSE)

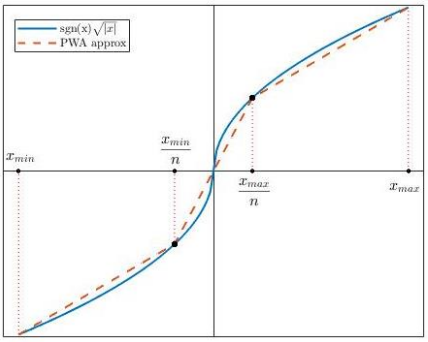
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

با توجه به معادله ترم غیرخطی و مقدار $h_{\max} = 0.62$، عدد $n = 5$ به عنوان مقدار بهینه انتخاب می‌شود. با در نظر گرفتن $n = 5$، استفاده از مقدار خطای میانگین مربعات در تقریب تکه‌ای آفین پیشنهادی در سه ناحیه، بسیار کمتر از حالت تقریب خطی می‌شود.

تقریب عبارت‌های غیرخطی دینامیک‌های سیستم با معادلات تکه‌ای آفین خطای مدل‌سازی را نسبت به تقریب خطی پیشنهاد شده در مراجع [۲] و [۱۹] به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. از طرف دیگر تقریب عبارت‌های غیرخطی با عبارت تکه‌ای آفین سه بخشی، حجم محاسبات را نسبت به تقریب خطی بسیار افزایش می‌دهد.



(الف) تقریب خطی



(ب) تقریب تکه‌ای آفین

شکل ۳: تقریب عبارت غیرخطی

در مرجع [۲۱]، با جایگذاری تقریب PWA مشابه رابطه (۱۱) به جای عبارت‌های $\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ و $\sqrt{x}$ در روابط (۷) تا (۹) مقدار تقریبی جریان‌ها در سیستم به صورت زیر به دست آورده شده است:

$$Q_{i3}^{V_{i3}}(t) \simeq \begin{cases} [k_2(h_i - h_3) - k_3]u_{i3} & , -h_{max} \le h_i - h_3 < -\dfrac{h_{max}}{n} \\ k_1(h_i - h_3)u_{i3} & , -\dfrac{h_{max}}{n} \le h_i - h_3 \le \dfrac{h_{max}}{n} \\ [k_2(h_i - h_3) + k_3]u_{i3} & , \dfrac{h_{max}}{n} < h_i - h_3 \le h_{max} \end{cases} \quad (۱۳)$$

$$Q_{i3}^{V_i}(t) \simeq \begin{cases} 0 & , \Omega_{i1} \\ [\bar{k}_2(h_i - h_0) - \bar{k}_3]u_i & , \Omega_{i2} \\ \bar{k}_1(h_i - h_0)u_i & , \Omega_{i3} \\ [\bar{k}_2(h_i - h_0) + \bar{k}_3]u_i & , \Omega_{i4} \\ [\bar{k}_2(h_3 - h_0) - \bar{k}_3]u_i & , \Omega_{i5} \\ \bar{k}_1(h_3 - h_0)u_i & , \Omega_{i6} \\ [\bar{k}_2(h_3 - h_0) + \bar{k}_3]u_i & , \Omega_{i7} \\ [k_2(h_i - h_3) - k_3]u_i & , \Omega_{i8} \\ k_1(h_i - h_3)u_i & , \Omega_{i9} \\ [k_2(h_i - h_3) + k_3]u_i & , \Omega_{i10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega_{i1} : h_i < h_0, h_3 < h_0 \\
&\Omega_{i2} : h_i \ge h_0, h_3 < h_0, -(h_{max} - h_0) \le h_i - h_0 < -\frac{h_{max} - h_0}{n} \\
&\Omega_{i3} : h_i \ge h_0, h_3 < h_0, -\frac{h_{max} - h_0}{n} \le h_i - h_0 \le \frac{h_{max} - h_0}{n} \\
&\Omega_{i4} : h_i \ge h_0, h_3 < h_0, \frac{h_{max} - h_0}{n} < h_i - h_0 \le h_{max} - h_0 \\
&\Omega_{i5} : h_i < h_0, h_3 \ge h_0, -(h_{max} - h_0) \le h_3 - h_0 < -\frac{h_{max} - h_0}{n} \\
&\Omega_{i6} : h_i < h_0, h_3 \ge h_0, -\frac{h_{max} - h_0}{n} \le h_3 - h_0 \le \frac{h_{max} - h_0}{n} \\
&\Omega_{i7} : h_i < h_0, h_3 \ge h_0, \frac{h_{max} - h_0}{n} < h_3 - h_0 \le h_{max} - h_0 \\
&\Omega_{i8} : h_i \ge h_0, h_3 \ge h_0, -h_{max} \le h_i - h_3 < -\frac{h_{max}}{n} \\
&\Omega_{i9} : h_i \ge h_0, h_3 \ge h_0, -\frac{h_{max}}{n} \le h_i - h_3 \le \frac{h_{max}}{n} \\
&\Omega_{i10} : h_i \ge h_0, h_3 \ge h_0, \frac{h_{max}}{n} < h_i - h_3 \le h_{max}
\end{aligned} \quad (۱۴)$$

$$Q_{N3}(t) \simeq \begin{cases} k_1 h_3 u_3 & , 0 \le h_3 \le \dfrac{h_{max}}{n} \\ (k_2 h_3 + k_3)u_3 & , \dfrac{h_{max}}{n} < h_3 \le h_{max} \end{cases} \quad (۱۵)$$

که در آن $Q_{i3}^{V_{i3}}(t)$ و $Q_{i3}^{V_i}(t)$ به ترتیب دبی جریان آب بین مخزن i-ام ($i\epsilon\{1,2\}$) و مخزن سوم از شیر پایینی و شیر بالایی بوده و $Q_{N3}(t)$ دبی آب خروجی از مخزن سوم است. در روابط (۱۳) الی (۱۵) پارامترهای k_1، k_2، k_3، $\bar{k}_1$، $\bar{k}_2$ و $\bar{k}_3$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$k_1 = \frac{c\sqrt{2gn}}{\sqrt{h_{max}}}$$

$$k_2 = \frac{c\sqrt{2g}}{\sqrt{h_{max}/n} + \sqrt{h_{max}}}$$

$$k_3 = \frac{c\sqrt{2gh_{max}}}{1 + \sqrt{n}}$$

$$\bar{k}_1 = \frac{c\sqrt{2gn}}{\sqrt{h_{max} - h_0}}$$

$$\bar{k}_2 = \frac{c\sqrt{2g}}{\sqrt{(h_{max} - h_0)/n} + \sqrt{h_{max} - h_0}}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

$$\bar{k}_3 = \frac{c\sqrt{2g(h_{max}-h_0)}}{1+\sqrt{n}}$$

در مراجع [۲] و [۱۹] جهت تقریب خطی عبارت‌های غیرخطی، متغیرهای کمکی باینری و پیوسته مطابق روابط (۱۶) تا (۱۹) را جهت تعریف معادلات سیستم هیبرید به صورت خطی تعریف کرده‌اند. (مطابق لم۱ و لم۲)

$$(\delta_{0i}=1) \leftrightarrow (h_i \geq h_0),\ i=1,2,3 \qquad (۱۶)$$

δ_{0i} در رابطه (۱۶) یک متغیر باینری کمکی است که نشان می‌دهد چه زمانی ارتفاع آب مخزن i–ام از شیر بالایی فراتر می‌رود. وقتی ارتفاع آب مخزن i–ام از h_0 بیشتر شود، مقدار آن یک و در غیر این صورت صفر می‌شود.

$$z_{0i} \triangleq (h_i - h_0)\delta_{0i} \qquad ,\ i=1,2,3 \qquad (۱۷)$$

z_{0i} در رابطه (۱۷) یک متغیر کمکی پیوسته را نشان می‌دهد که در صورت بیشتر بودن ارتفاع آب مخزن i–ام از h_0، مقدار $h_i - h_0$ و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

$$z_i \triangleq (z_{0i} - z_{03})u_i \qquad ,\ i=1,2 \qquad (۱۸)$$

z_i در رابطه (۱۸) یک متغیر کمکی پیوسته است که اگر شیر بالایی بین دو مخزن مجاور روشن باشد، اختلاف ارتفاع دو مخزن و در غیر این صورت صفر می‌شود.

$$z_{i3} \triangleq (h_i - h_0)u_{i3} \qquad ,\ i=1,2 \qquad (۱۹)$$

z_{i3} در رابطه (۱۹) یک متغیر کمکی پیوسته است که اگر شیر پایینی بین دو مخزن مجاور روشن باشد، اختلاف ارتفاع دو مخزن و در غیر این صورت صفر می‌شود.

در مراجع [۲] و [۱۹] رابطه‌های غیرخطی (۳) تا (۵) بدون در نظر گرفتن دبی نشتی مخزن‌ها، به صورت خطی زیر تقریب زده شده است

$$h_1(t+1) = h_1(t) + \frac{T_s}{A}(Q_{p_1} - K_1 z_1(t) - K_{13} z_{13}(t)) \qquad (۲۰)$$

$$h_2(t+1) = h_2(t) + \frac{T_s}{A}(Q_{p_2} - K_2 z_2(t) - K_{23} z_{23}(t)) \qquad (۲۱)$$

$$h_3(t+1) = h_3(t) + \frac{T_s}{A}(K_1 z_1(t) + K_{13} z_{13}(t) + K_2 z_2(t) + K_{23} z_{23}(t) - K_{3N} z_{3N}(t)) \qquad (۲۲)$$

که در آن $K_1 = K_2 = k_1|_{n=1}$ و $K_{13} = K_{23} = K_{3N} = \bar{k}_1|_{n=1}$ محاسبه می‌شود.

از مقایسه دستگاه روابط تقریب PWA متداول (۱۳) تا (۱۵) با دستگاه روابط تقریب خطی (۱۶) الی (۲۲) مشاهده می‌شود که تعداد معادلات حالت خطی ۱۳ معادله و درتقریب PWA متداول ۲۸ معادله است.

یکی از رویکردهای حل مساله های برنامه‌نویسی صحیح ترکیبی، استفاده از روش شاخه و کران است و در آن بر اساس مقدار دهی یکی از متغیرهای باینری در هر مرحله به درخت جستجو[1] می‌رسد. تعداد گره‌های درخت یا همان تعداد مساله‌های برنامه‌نویسی، به صورت نمایی به تعداد متغیرهای باینری وابسته است. بنابراین هرچه تعداد متغیرهای باینری کمتر باشد تعداد مساله های برنامه‌نویسی (QP) که باید حل شود کاهش می یابد و حجم محاسبات کمتر می شود.

مرجع [۲۱]، به منظور تعیین نواحی اعتبار هر یک از روابط (۱۳) الی (۱۵) یک متغیر باینری کمکی تعریف و آن‌ها را در پیوست مقاله (کد hysdel) ارائه نموده است. در این مقاله به جای آن که همانند مرجع [۲۱] برای تبدیل هر عبارت منطقی به نامعادله عددی ترکیبی یک متغیر باینری کمکی جدید تعریف شود، فرم بسته‌ای برای معادلات جریان بین مخزن‌های مجاور بدست آورده شده است. این کار باعث می‌شود با تعریف متغیرهای باینری کمتری نسبت به مرجع [۲۱] بتوان روابط مساله را بازنویسی نمود. مدل پیشنهادی قابلیت پیاده سازی با یک کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر مدل هیبریدی و حل به وسیله حل‌گرهای تجاری را دارد.

با توجه به قیود مرزی متفاوت برقراری زیرسیستم‌ها در رابطه (۱۴)، قیودی که مشابه به هم با استفاده از متغیرهای کمکی باینری α_i رابطه (۲۳) و متغیرهای کمکی پیوسته z_i^{max} رابطه (۲۴) دسته بندی شده است.

$$(\alpha_i = 1) \leftrightarrow (\delta_{0i} + \delta_{03} \leq 1),\ i=1,2 \qquad (۲۳)$$

$$z_i^{max} = h_{max} - \alpha_i h_0 = \begin{cases} h_{max} - h_0 & ,\alpha_i = 1 \\ h_{max} & ,\alpha_i = 0 \end{cases} \qquad (۲۴)$$

اکنون تمامی قیود مرزی متفاوت رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت گزاره‌های سمت راست رابطه (۲۵) نوشت و برقراری هر کدام را با متغیرهای کمکی باینری $\beta_{i,_}$ نشان داد.

$$\begin{aligned} &(\beta_{i,1}=1) \leftrightarrow -z_i^{max} \leq z_{0i} - z_{03} < -\frac{z_i^{max}}{n} \\ &(\beta_{i,2}=1) \leftrightarrow -\frac{z_i^{max}}{n} \leq z_{0i} - z_{03} \leq \frac{z_i^{max}}{n} \\ &(\beta_{i,3}=1) \leftrightarrow \frac{z_i^{max}}{n} < z_{0i} - z_{03} \leq z_i^{max} \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

با استفاده از متغیرهای کمکی (۱۶) تا (۱۹) و (۲۳) تا (۲۵)، می‌توان جریان بین مخزن‌ها را با روابط تکه‌ای آفین به فرم بسته (۲۶) و (۲۷) بیان نمود.

$$Q_{i3}^{V_i}(t) \simeq \begin{cases} \left(\bar{k}_2\alpha_i + k_2(1-\alpha_i)\right)z_i - \\ \ldots\left(\bar{k}_3\alpha_i + k_3(1-\alpha_i)\right)u_i & ,\beta_{i,1}=1 \\ \left(\bar{k}_1\alpha_i + k_1(1-\alpha_i)\right)z_i & ,\beta_{i,2}=1 \\ \left(\bar{k}_2\alpha_i + k_2(1-\alpha_i)\right)z_i + \\ \ldots\left(\bar{k}_3\alpha_i + k_3(1-\alpha_i)\right)u_i & ,\beta_{i,3}=1 \end{cases} \qquad (۲۶)$$

[1] Search tree

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

$$Q_{i3}^{V_{i3}}(t) \simeq \begin{cases} k_2 z_{i3} - k_3 u_{i3} & , -h_{max} \le h_i - h_3 < -\dfrac{h_{max}}{n} \\ k_1 z_{i3} & , -\dfrac{h_{max}}{n} \le h_i - h_3 \le \dfrac{h_{max}}{n} \\ k_2 z_{i3} + k_3 u_{i3} & , \dfrac{h_{max}}{n} < h_i - h_3 \le h_{max} \end{cases} \quad (۲۷)$$

که در آن $Q_{i3}^{V_i}(t)$ و $Q_{i3}^{V_{i3}}(t)$ به ترتیب دبی جریان آب بین مخزن i-ام ($i\epsilon\{1,2\}$) و مخزن سوم از شیر بالا و شیر پایین می‌باشد.

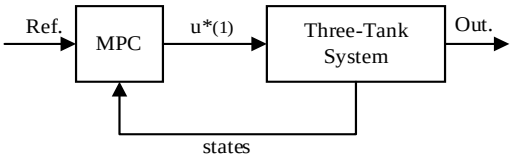
با توجه به سیستم سه مخزن که هدف کنترلی آن تنظیم سطح سیال مخزن سوم در یک مقدار مطلوب است، مساله کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل به صورت ردیابی مرجع نوشته می‌شود. اگر مساله کنترل پیش‌بین سیستم سه مخزن پاسخ شدنی داشته باشد به معنی باقی ماندن حالت‌های سیستم در بازه مجاز $[0,h_{\max}]$ بوده و پایداری سیستم را نتیجه می‌دهد. همچنین برای ردیابی بدون انحراف[1] مساله به فرم تغییرات سیگنال ورودی بازنویسی می‌شود. فرم کلی مساله ردیابی خروجی بدون انحراف یک سیستم دینامیکی هیبرید با ساختار سیستم تکه‌ای آفین به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min_{\{u,\delta,z\}_0^{N-1}} \quad & \sum_{i=0}^{N-1} \left\| Q_y\left(y(k+i\,|\,k) - y_{ref}(k)\right)\right\|_p + \\ & \ldots \left\| R\Delta u(k+i)\right\|_p \\ s.t.: & \\ & \text{PWA} \quad \text{dynamics} \\ & u_{\min} \le u(k) \le u_{\max} \ , k = 0,1,\ldots,N_u - 1 \\ & \Delta u_{\min} \le u(k) - u(k-1) \le \Delta u_{\max} \\ & \qquad , k = 0,1,\ldots,N_u - 1 \\ & \Delta u(k) = 0 \ , k = N_u,\ldots,N-1 \\ & x_{\min} \le x(k) \le x_{\max} \\ & y_{\min} \le y(k) \le y_{\max} \\ & x(k) = x(t) \end{aligned} \quad (۲۸)$$

که در آن k زمان اندازه‌گیری گسسته، $u(k+i)$ ورودی‌های آینده سیستم، $y(k+i\,|\,k)$ خروجی پیش‌بینی شده آینده مدل در زمان k، $Q_y > 0$ ماتریس (قطری) ضریب وزنی ردیابی خروجی مرجع، $R \ge 0$ ماتریس (قطری) ضریب وزنی تغییرات سیگنال ورودی، N افق پیش‌بینی، N_u افق کنترل، u ورودی‌های پیوسته و باینری سیستم، δ ورودی‌های کمکی باینری، z ورودی‌های کمکی پیوسته، p نرم است.

نکته ۵: در رابطه (۲۸) متغیرهای N، N_u، Q_y و R پارامترهای طراحی کنترل پیش‌بین می‌باشند. هرچه N بزرگتر باشد تعداد متغیرهای تصمیم بیشتر و در نتیجه تغییرات لحظه‌ای کنترل‌کننده کمتر است؛ هرچه N_u بزرگتر باشد تعداد متغیرهای ورودی آزاد بیشتر و در نتیجه کنترل پویاتر[2] (امکان تغییر سریع‌تر کنترل‌کننده) است؛ هرچه عنصر قطری ضریب وزنی بزرگتر باشد اهمیت بیشتری برای تنظیم متغیر مربوط به آن در نظر گرفته می‌شود.

همان طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، مساله کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل به صورت حلقه بسته با سیستم سه مخزن عمل می‌کند.



شکل ۴: کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر مدل حلقه بسته

نکته ٦: در حل مساله کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل هیبرید تکه‌ای آفین، تعداد متغیرهای باینری بهینه‌سازی از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$L = (N-1)(m_l + r_l + n_l) \quad (۲۹)$$

که در آن N افق پیش‌بینی، m_l تعداد ورودی‌های باینری، r_l تعداد متغیرهای کمکی باینری و n_l تعداد حالت‌های باینری سیستم است. بیشینه تعداد دنباله ممکن در حالتی که قیدی در نظر گرفته نشود برابر $m_p 2^L$ است که m_p تعداد زیرناحیه‌های ممکن در لحظه k می‌باشد [۲۶]. بیشترین تعداد زیرناحیه‌های ممکن متناسب با تعداد قیود در افراز فضای ورودی–حالت سیستم است.

در جدول۳، مشخصات روش‌های مدل‌سازی مختلف در حل سیستم سه مخزن ارائه شده است. در سیستم سه مخزن تمام حالت‌ها پیوسته بوده ($n_l=0$) و سیستم دارای چهار شیر خاموش/روشن ($m_l=4$) است. تعداد زیرناحیه‌های ممکن در سیستم سه مخزن با استفاده از کد برنامه‌نویسی نوشته شده بدست می‌آید و در حالت تقریب خطی برابر ۸ زیرناحیه بوده و در تقریب PWA با حذف زیرناحیه‌های پوچ برابر ۴۸ عدد می‌باشد.

همان طور که در جدول۳ مشاهده می‌شود در تقریب خطی از تعداد متغیرهای کمکی کمتری نسبت به هر دو تقریب PWA استفاده شده و در نتیجه بار محاسباتی که متناسب با دنباله‌های ممکن در حل مساله می‌باشد، در تقریب خطی کمتر است. استفاده از تقریب خطی (شکل۳-الف) منجر به ایجاد خطا (MSE=2.05) در تعیین مود عملکردی واقعی سیستم می‌شود. راه حل کاهش خطا، استفاده از تقریب PWA با کمترین تعداد ناحیه لازم (شکل۳-ب) است (MSE=0.17). در تقریب PWA متداول (مرجع [۲۱]) برای نشان دادن هر زیربخش از فضای حالت یک متغیر کمکی استفاده نموده (رابطه ۱۱) که باعث پیچیدگی روابط شده و از نظر بار محاسباتی، حل مساله را بسیار زمان‌بر می‌کند. در تقریب PWA پیشنهادی، به جای استفاده از رابطه ۱۱، با تعریف چند متغیر کمکی، فرم بسته معادل (رابطه ۲۰) بدست آورده شده است. فرم بسته پیشنهادی، بار محاسباتی را نسبت به تقریب PWA پیشنهاد شده مرجع [۲۱] بسیار کاهش داده است.

[1] Offset-free tracking

[2] More aggressive controller

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

جدول ۳: مقایسه بار محاسباتی روش‌های مدل‌سازی

روش مدل‌سازی دینامیک‌های غیرخطی	تعداد متغیرهای کمکی باینری (r_l) *	تعداد متغیرهای کمکی پیوسته **	تعداد زیرناحیه‌های ممکن (m_p)	میانگین مربعات خطای تقریب (MSE) ***	بیشترین تعداد دنباله ممکن در حل مساله کنترل (با فرض N=3)
تقریب خطی [۲] و [۱۹]	۳	۷	۸	۲٫۰۵	۸×۲^{۱۴}
تقریب تکه‌ای آفین متداول [۲۱]	۳۰	۲۴	۴۸	۰٫۱۷	۴۸×۲^{۶۸}
تقریب تکه‌ای آفین پیشنهادی	۱۱	۹	۴۸	۰٫۱۷	۴۸×۳^{۳۰}

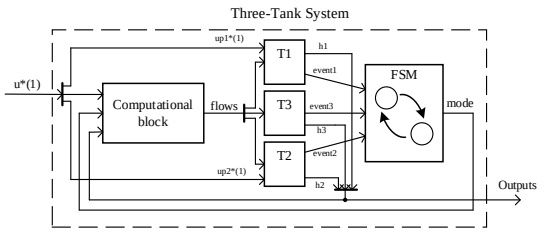
* تعداد متغیرهای کمکی باینری: در تقریب خطی، از رابطه (۱۶) محاسبه شده و برابر ۳ می‌شود؛ در کد برنامه‌نویسی مرجع [۲۱] مربوط به تقریب PWA متداول ۳۰ متغیر کمکی باینری مربوط به هر زیرناحیه تعریف شده است؛ در این مقاله جهت تعریف سیستم PWA به فرم بسته از متغیرهای کمکی باینری روابط (۱۶)، (۲۳) و (۲۵) استفاده شده و برابر ۱۱ عدد می‌باشد.

** تعداد متغیرهای کمکی پیوسته: در تقریب خطی، از روابط (۱۷) تا (۱۹) محاسبه شده و برابر ۷ می‌شود؛ در کد برنامه‌نویسی مرجع [۲۱] مربوط به تقریب PWA متداول ۲۴ متغیر کمکی پیوسته تعریف شده است؛ در این مقاله جهت تعریف سیستم PWA به فرم بسته پیشنهادی علاوه بر روابط (۱۷) تا (۱۹) از متغیرهای کمکی پیوسته رابطه (۲۴) استفاده شده و در مجموع برابر ۹ عدد می‌باشد.

*** مقدار MSE با استفاده از کد برنامه‌نویسی نوشته شده محاسبه می‌شود.

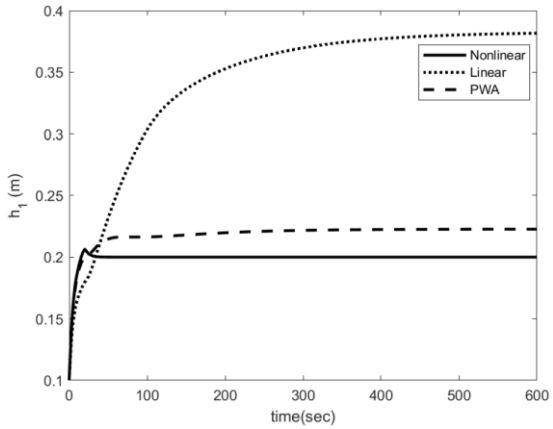
٤- نتایج شبیه‌سازی

به منظور ارزیابی عملکرد کنترل پیش‌بین طراحی شده و امکان پیاده‌سازی آن به صورت برخط، سیستم سه مخزن دارای تداخل در Simulink/Stateflow به طور دقیق شبیه‌سازی شده (شکل ۵) و قوانین کنترل پیش‌بین طراحی شده در محیط MPT و استفاده از حل‌گر تجاری MOSEK پیاده‌سازی می‌شود. در هر زمان نمونه برداری فقط اولین عضو دنباله بهینه به سیستم سه مخزن اعمال شده و خروجی سیستم محاسبه می‌شود و دو مرتبه در زمان نمونه برداری بعدی این مراحل تکرار می شود.

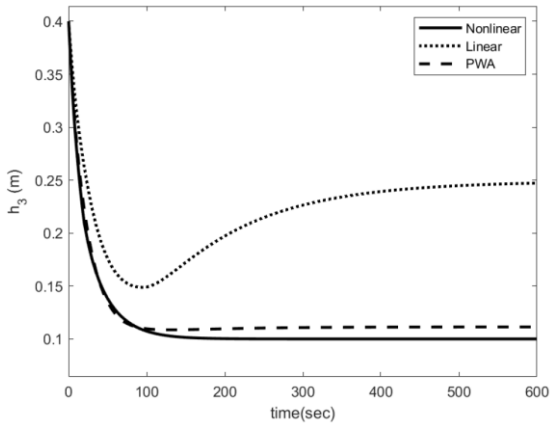


شکل ۵: شماتیک مدل سازی سیستم سه مخزن در سیمولینک

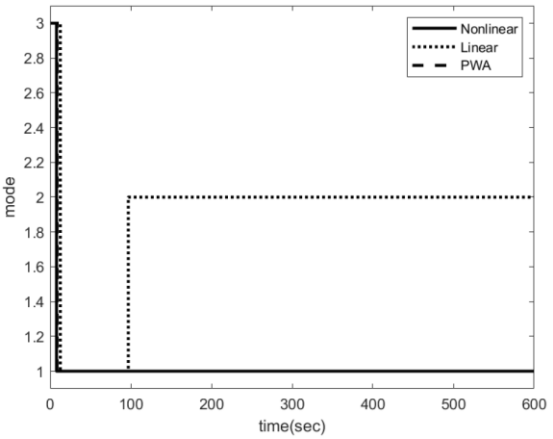
بدین منظور ابتدا خطای ناشی از مدل‌های تقریبی نسبت به مدل واقعی سیستم نشان داده می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌شود شیرهای ارتباطی مخزن دوم و مخزن سوم یعنی V_2 و V_{23} طی فرایند بسته بماند و یک ورودی یکسان به هر سه مدل غیرخطی، مدل تقریب خطی و مدل تقریب تکه‌ای آفین وارد شود. نتایج شبیه‌سازی در شکل ۶ نشان داده شده است.



(الف) ارتفاع مخزن اول



(ب) ارتفاع مخزن سوم



(ج) مود عملکردی

شکل ۶: مقایسه رفتار سیستم با دینامیک غیرخطی، تقریب خطی و تقریب تکه‌ای آفین

همان طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، تقریب سیستم غیرخطی با تکه‌ای آفین در سه ناحیه منجر به خطای بسیار کمتری نسبت به تقریب

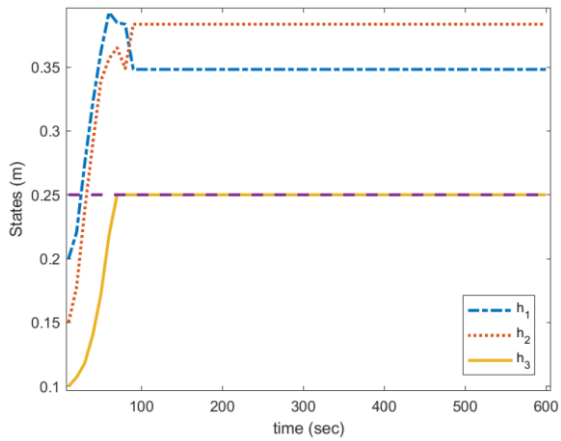
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

خطی در تعیین ارتفاع مخزن‌ها و دبی سیال خروجی می‌شود. همان طور که در شکل ۶-ج نشان داده شده است، خطای زیاد ناشی از تقریب خطی منجر به تعیین اشتباه مود عملکردی سیستم می‌شود اما در تقریب تکه‌ای آفین این مشکل وجود ندارد.

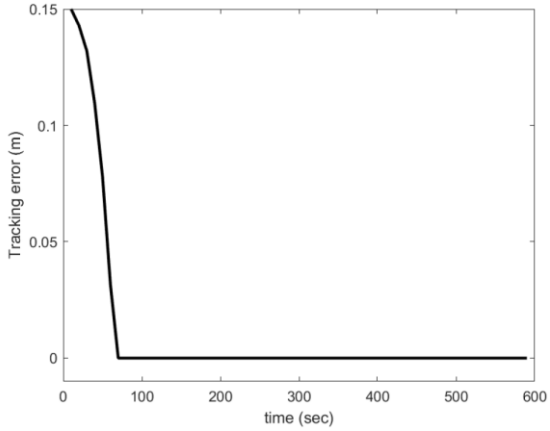
در ادامه سیستم با دو هدف کنترلی متفاوت شبیه‌سازی شده است. در هر دو حالت مقدار اولیه سیال درون مخازن برابر $h_1(0)=0.2$، $h_2(0)=0.15$ و $h_3(0)=0.1$ در نظر گرفته شده است. تابع هزینه، به صورت نرم مرتبه دوم در نظر گرفته شده است. ضرایب وزنی تابع هزینه و افق پیش‌بینی متناسب با مساله کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل و با ملاحظات همگرایی و بار محاسبات انتخاب می‌شود. کمترین مقدار ممکن افق پیش‌بینی برابر $N=3$ انتخاب شده است. همچنین به منظور کاهش بار محاسباتی، مودهای دسترس ناپذیر حذف شده و افق کنترل برابر $N_u=2$ در نظر گرفته شده است.

هدف اول: هدف پایدارسازی حالت‌های سیستم و تامین جریان خروجی ثابت با تنظیم سطح سیال مخزن ۳ در مقدار مشخص با کنترل جریان پمپ‌ها و موقعیت شیرهای خاموش/روشن است. ضرایب وزنی به صورت $R=10^{-3}I_6$ و $Q_y=10$ انتخاب شده و نتایج شبیه‌سازی در شکل ۷ نشان داده شده است.

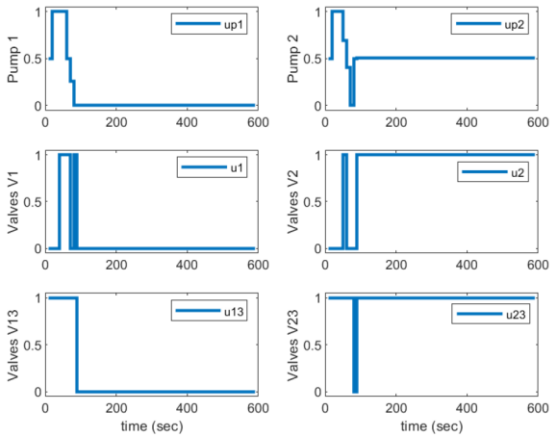
همان طور که در نتایج شبیه‌سازی شکل ۷ مشاهده می‌شود، کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل پیشنهادی پایداری حالت‌های سیستم را برآورده و دبی مطلوب خروجی را در مقدار ثابت تنظیم نموده است. خطای ردیابی در کمتر از ۱۰ دوره نمونه‌برداری صفر شده است. با توجه به اینکه سیستم قیدی بر روی سطح سیال مخزن‌های ۱ و ۲ ندارد، ورودی کنترلی با کمترین هزینه به سیستم اعمال شده است و یا به عبارت دیگر سیستم پس از حالت گذار، پمپ ۲ و شیرهای V_2 و V_{23} را بسته و تنها از طریق پمپ ۱ و باز نگه داشتن شیرهای V_1 و V_{13} سطح مخزن ۳ را تنظیم می‌کند.



(الف) حالت‌های سیستم



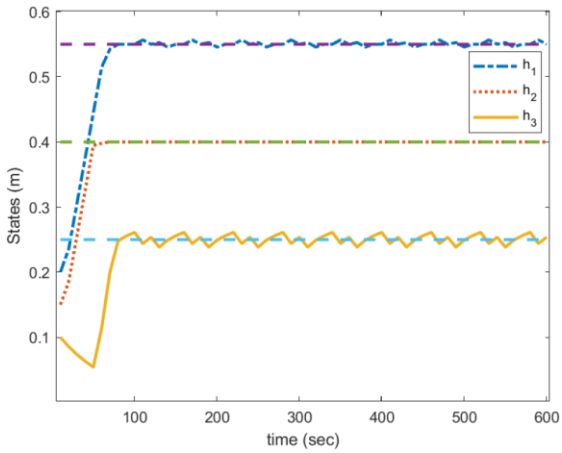
(ب) خطای ردیابی



(ج) ورودی‌های بهینه سیستم

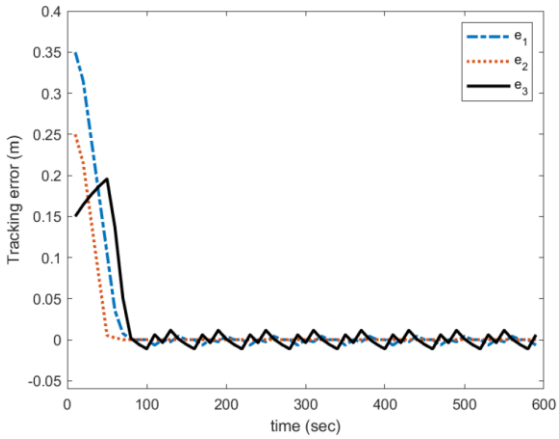
شکل ۷: نتایج شبیه‌سازی با هدف تنظیم دبی خروجی

هدف دوم: هدف پایدارسازی حالت‌های سیستم و تنظیم سطح سیال هر سه مخزن در مقادیر مشخص با کنترل جریان پمپ‌ها و موقعیت شیرهای خاموش/روشن است. ضرایب وزنی به صورت $R=10^{-3}I_6$ و $Q_y=10I_3$ انتخاب شده و نتایج شبیه‌سازی در شکل ۸ نشان داده شده است.

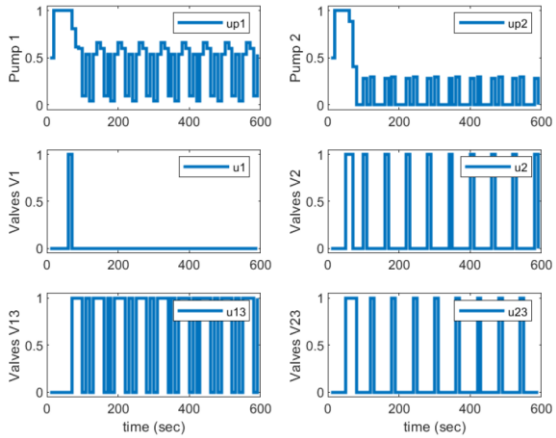


(الف) حالت‌ها و خروجی‌های سیستم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]



(ب) خطای ردیابی



(ج) ورودی‌های بهینه سیستم

شکل ۸: نتایج شبیه‌سازی با هدف تنظیم سطح سه مخزن

همان طور که در نتایج شبیه‌سازی شکل ۷ مشاهده می‌شود، کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل پیشنهادی پایداری حالت‌های سیستم را برآورده و سطح سیال مخزن‌ها را در مقدار مطلوب تنظیم نموده است. خطای ردیابی در کمتر از ۱۰ دوره نمونه‌برداری نزدیک صفر شده است. در این حالت با توجه به هدف تنظیم هم زمان سطح سیال مخزن‌ها و تفاوت آن با نقطه تعادل سیستم، پمپ‌های ۱ و ۲ و شیرهای V_{13} و V_{23} به طور لحظه‌ای باز و بسته می‌شوند.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم سه مخزن به صورت یک سیستم هیبرید در نظر گرفته و برای کنترل آن از کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل هیبرید به عنوان یک روش کنترل کارآمد سیستم‌های هیبرید استفاده شده است. به منظور آن که بتوان کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل را به سیستم اعمال نمود، سیستم باید به فرم سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی و یا سیستم تکه‌ای آفین تبدیل شود. با توجه به غیرخطی بودن دینامیک مخزن‌ها، عبارت غیرخطی با استفاده از روش تقریب تکه‌ای آفین در سه ناحیه به نحوی که خطای میانگین مربعات تقریب در کل بازه تغییرات کمینه شود بدست آورده می‌شود. با تعریف متغیرهای کمکی باینری و پیوسته، می‌توان معادلات تکه‌ای آفین را به سیستم دینامیکی منطقی ترکیبی تبدیل نمود. اما برای کاهش بار محاسباتی باید تا حد امکان متغیرهای کمکی کمتری استفاده کرد به همین منظور معادلات تکه‌ای آفین وابسته به مود را به فرم بسته تبدیل کرده و سپس مدل سیستم تکه‌ای آفین که هر مود آن با یک عبارت تکه‌ای آفین توصیف می‌شود را به دست آوردیم. برای بررسی صحت عملکرد کنترل‌کننده، کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل طراحی شده را به سیستم سه مخزن با معادلات دقیق که در Simulink/Stateflow مدل‌سازی شده اعمال کردیم. همان طور که در نتایج شبیه‌سازی نشان داده شده است، کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل تکه‌ای آفین پیشنهادی پایداری حالت‌های سیستم و تنظیم خروجی سیستم را برآورده نموده است.

مراجع

[1] Andersen ED and Andersen KD (2000) The mosek interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm. In: High performance optimization. Springer, pp. 197–232.

[2] Bemporad A, Mignone D and Morari M (1999) Moving horizon estimation for hybrid systems and fault detection. In: Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251), volume 4. IEEE, pp. 2471–2475.

[3] Bemporad A and Morari M (1999) Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. Automatica 35(3): 407–427.

[4] Blanke M, Kinnaert M, Lunze J, Staroswiecki M and Schr¨oder J (2006) Diagnosis and fault-tolerant control, volume 2. Springer.

[5] B¨ohme TJ and Frank B (2017) Hybrid systems, optimal control and hybrid vehicles. Cham, CH: Springer International.

[6] Camacho EF and Alba CB (2013) Model predictive control. Springer science & business media.

[7] Camacho EF, Ram´ırez DR, Lim´on D, De La Pe˜na DM and Alamo T (2010) Model predictive control techniques for hybrid systems. Annual reviews in control 34(1): 21–31.

[8] Farias AO, Queiroz GAC, Bessa IV, Medeiros RLP, Cordeiro LC and Palhares RM (2018) Sim3tanks: a benchmark model simulator for process control and monitoring. IEEE Access 6: 62234–62254.

[9] Geyer T (2005) Low complexity model predictive control in power electronics and power systems. Cuvillier Verlag.

[10] Hariprasad K and Bhartiya S (2016) A computationally efficient robust tube based mpc for linear switched systems. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 19: 60–76.

[11] Heemels WP, De Schutter B and Bemporad A (2001) Equivalence of hybrid dynamical models. Automatica 37(7): 1085–1091.

[12] Heiming B and Lunze J (1999) Definition of the three-tank benchmark problem for controller reconfiguration. In: 1999 European Control Conference (ECC). IEEE, pp. 4030–4034.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]

and synthesis problems. IEEE transactions on control systems technology 12(2): 235–249.

[28] Yang H, Jiang B and Cocquempot V (2010) Fault tolerant control and hybrid systems. In: Fault Tolerant Control Design for Hybrid Systems. Springer, pp. 1–9.

[13] Ingole, D., Drgoˇna, J., and Kvasnica, M. (2017) Offset-free hybrid model predictive control of bispectral index in anesthesia. In: 2017 21st International Conference on Process Control (PC), IEEE, pp. 422–427.

[14] Kvasnica M, Grieder P and Baoti´c M (2004a) Multi-Parametric Toolbox (MPT). URL http://control.ee.ethz.ch/˜MPT/.

[15] Kvasnica M, Grieder P, Baoti´c M and Morari M (2004b) Multiparametric toolbox (MPT). In: International workshop on hybrid systems: Computation and control. Springer, pp. 448–462.

[16] Lazar M (2006) Model predictive control of hybrid systems: stability and robustness. PhD Thesis, Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven DOI: 10.6100/IR612103.

[17] Lunze J and Lamnabhi-Lagarrigue F (2009) Handbook of hybrid systems control: theory, tools, applications. Cambridge University Press.

[18] Mattone R and De Luca A (2006) Nonlinear fault detection and isolation in a three-tank heating system. IEEE Transactions on Control Systems Technology 14(6): 1158–1166.

[19] Mignone D (2002) Control and estimation of hybrid systems with mathematical optimization. PhD Thesis, ETH Zurich.

[20] Nandola NN and Bhartiya S (2008) A multiple model approach for predictive control of nonlinear hybrid systems. Journal of process control 18(2): 131–148.

[21] Sarailoo M, Rezaie B and Rahmani Z (2014) Fuzzy predictive control of three-tank system based on a modeling framework of hybrid systems. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering 228(6): 369–384.

[22] Sathishkumar K, Kirubakaran V and Radhakrishnan T (2018) Real time modeling and control of three tank hybrid system, Chemical Product and Process Modeling 13(1).

[23] Siavash, M., Sheikholeslam, F., Askari, J., & Hajshirmohammadi, S. (2015). Asynchronous control and stabilization of linear switched systems with unstabilizable subsystems by average dwell time approach, Journal of Control, vol. 9, no. 2, pp. 59–69.

[24] Sontag E (1981) Nonlinear regulation: The piecewise linear approach. IEEE Transactions on automatic control 26(2): 346–358.

[25] Sz˝ucs A, Kvasnica M and Fikar M (2012) Optimal piecewise affine approximations of nonlinear functions obtained from measurements. IFAC Proceedings Volumes 45(9): 160–165.

[26] Thomas J, Dumur D, Buisson J and Gu´eguen H (2006) Model predictive control for hybrid systems under a state partition based mld approach (spmld). In: Informatics in Control, Automation and Robotics I. Springer, pp. 217–224.

[27] Torrisi FD and Bemporad A (2004) Hysdel-a tool for generating computational hybrid models for analysis

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.4.0]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.35]