مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه ۲۴-۱۱

سیستم‌های هیبرید خطی ناپذیر گسسته زمان چند عاملی : طراحی کنترل بهینه بر اساس روش شبه نیوتن برای توابع هدف با هسیان علامت-نامعین

عرفان نجابت[۱]، محمدرضا همایی نژاد[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، گروه دینامیک ارتعاشات و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
Erfun.nejabat@email.kntu.ac.ir
[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک ، گروه دینامیک ارتعاشات و کنترل ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، تهران، ایران
Mrhomaeinezhad@kntu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۰۹ ویرایش: ۱۴۰۱/۰۴/۲۲ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۱۰

چکیده: در مقاله حاضر، یک گروه از سیستم‌های دینامیکی غیرخطی، خطی‌ناپذیر و هایبرید در نظر گرفته شده است. سیستم دینامیکی به فرم کلی چندعامل تعمیم یافته و بر اساس نظریه گراف، تداخل بین عوامل بازنویسی شده و نهایتا به کمک تانسور تداخل، سیستم چندعامل به فرم پیرو- پیشرو هدف طراحی کنترل‌کننده قرار می‌گیرد. در آرایش‌یافتگی سیستم متصل، بدون جهت و ساده بودن شبکه گرافی سیستم در نظر گرفته شده است. در ادامه، کنترل‌کننده غیرخطی برای هدف دنبال‌سازی مسیر مرجع ورودی و حفظ آرایش سیستم چندعامل طراحی می‌گردد. کنترل‌کننده بهینه، بر اساس الگوریتم بهینه‌سازی شبه نیوتن برای حداقل ساختن یک تابع هدف غیرخطی با ماتریس هسیان متغیر از نظر علامت، طراحی شده است. با توجه به عملکرد روش‌های بهینه‌سازی پیشین و عدم امکان همگرایی الگوریتم‌های بهینه‌سازی متداول در رابطه با تغییر علامت ماتریس هسیان، الگوریتم بهینه‌سازی شبه نیوتن با رویکرد تعمیم روش مقادیر ویژه برای کنترل‌کننده مساله طراحی و اعمال می‌گردد. پس از آن کنترل کننده برای سیستم چندعامل تعمیم یافته و بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حالت خاصی که علامت ماتریس هسیان منفی می‌باشد، آزموده شده است. در نتیجه، با توجه به کاستی‌های روش های بهینه سازی عمومی در حالتی که هسیان تابع هدف علامت نامعین دارد، نوآوری مقاله، بهره‌گیری از روش بهینه‌سازی شبه نیوتن برای توابع هدف با هسیان علامت نامعین می‌باشد. نهایتا در یک مثال عددی موارد ذکر شده پیاده سازی شده و نتایج شبیه‌سازی‌های عددی ارائه گردیده است.

کلمات کلیدی: بهینه سازی شبه نیوتن، تعمیم مقادیر ویژه، سیستم چند عامل، ماتریس هسیان متغیر، نظریه گراف.

A class of multi-agent discrete hybrid non linearizable systems: Optimal controller design based on quasi-Newton algorithm for a class of sign-undefinite hessian cost functions

Erfan Nejabat, Mohammad Reza Homaeinezhad

Abstract: In the present paper, a class of hybrid, nonlinear and non linearizable dynamic systems is considered. The noted dynamic system is generalized to a multi-agent configuration. The interaction of agents is presented based on graph theory and finally, an interaction tensor defines the multi-agent system in leader-follower consensus in order to design a desirable controller for the noted system. A general undirected, simple and connected graph topology is proposed for the system. Next, a nonlinear controller is designed for the multi-agent system to track a predefined reference trajectory and maintain the formation topology. An optimal controller, based on quasi-Newton optimization method is proposed in order to minimize a nonlinear cost function with indefinite variable sign hessian

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

matrix. The convergence of previous optimization algorithms, namely the Newton optimization algorithm, regarding to variable sign hessian matrices fails. Thus, in the present paper, a quasi-newton optimization method is proposed based on eigenvalue modification to design a controller for the system. Afterward, the controller generalized for the multi-agent system and the performance of the controller is examined in a specific scenario of indefinite, variable hessian matrix problem. Consequently, the innovation of the present paper is proposed by considering the quasi-newton optimization method in order to overcome the disadvantages of traditional optimization methods in the problem of undefined hessian cost function. An example is provided in order to illustrate aforementioned claims and declared propositions.

Keywords: Eigenvalue Modification, Graph Theory, Multi-Agent System, Quasi-Newton Optimization.

۱- مقدمه

در سالیان اخیر، استفاده از روش‌های بهینه‌سازی و ادغام روش‌های مذکور با نظریات مدرن کنترلی جهت رسیدن به روش‌های جامع برای کنترل سیستم‌های مختلف مورد توجه واقع شده است. از گذشته تا امروز، روش‌های بهینه سازی مختلفی برای این منظور طراحی و مورد بهره برداری قرار گرفته‌اند. در حالت کلی، روش‌های بهینه‌سازی در یک تقسیم‌بندی، در دو دسته روش‌های بر اساس گرادیان و روش‌های ابتکاری قرار خواهند گرفت. روش‌های عددی بهینه‌سازی که بر اساس محاسبه مشتق تابع هدف فعالیت می‌کنند در دسته اول قرار می‌گیرند، [۱]. در ادامه، به عنوان معرفی روش‌های ابتکاری می‌توان به روش بهینه‌سازی ژنتیک، روش بهینه‌سازی دسته ذرات و روش بهینه‌سازی کلونی مورچگان و مشتقات روش‌های مذکور اشاره کرد. با توجه به اهداف کنترلی مساله و دیدگاه طراح، روش‌های مذکور در هر دو دسته به مقتضی برتری‌ها و نقاط ضعف هر روش برای طراحی یک کنترل‌کننده بهینه جامع انتخاب شده و مورد استفاده قرار خواهند گرفت. از جمله این برتری‌ها می‌توان به وجود اثبات همگرایی برای روش‌های بر اساس گرادیان اشاره نمود، [۲]. با این حال گاهی اوقات محاسبات مربوط به مشتقات اول و دوم تابع هدف، عملیاتی پر هزینه از نظر محاسبات محسوب می‌گردد، [۳]. همچنین با توجه به انواع توابع هدف معرفی شده برای سیستم‌ها، امکان نقض شرط مشتق پذیری توابع هدف مذکور وجود خواهد داشت، [۴]. لذا در این صورت، روش‌های ابتکاری که به صورت مستقل بدون نیاز به محاسبه مشتقات تابع هدف فعالیت می‌کنند، در مقایسه با روش های بهینه سازی بر اساس گرادیان برتری می‌یابند. با این حال، امکان توقف الگوریتم‌های مذکور در نقاط بهینه محلی و همچنین عدم وجود اثبات همگرایی دقیق، امکان استفاده مطمئن از این روش‌ها را محدود می‌سازد.

روش‌های بهینه‌سازی بر اساس گرادیان در دو دسته کلی روش‌های جستجو خطی و روش‌های ناحیه اعتماد تقسیم بندی شده‌اند، [۵] و از جمله این روش‌ها می‌توان از روش‌های بهینه‌سازی نیوتن، گرادیان نزولی و روش‌های حداقل مربعات نام برد. در مطالعات پیشین در زمینه‌ی روش‌های جستجو خطی و ناحیه اعتماد، ابتدا در سال ۱۹۹۵، کلمن یک روش بهینه‌سازی بر اساس روش‌های ناحیه اعتماد برای سیستم گسسته زمان طراحی و پیاده‌سازی کرده است، [۶]. در این تحقیق، یک مساله بدون قید با ابعاد بزرگ در نظر گرفته شده که به وسیله برنامه ریزی پویای دیفرانسیلی و بر اساس روند روش‌های ناحیه اعتماد کنترل می‌گردد. نوع همگرایی روش به صورت همگرایی کوادراتیک بررسی شده و روش بهینه‌سازی اصلی، روش نیوتن انتخاب شده است. در تحقیق مذکور، بعد ماتریس هسیان بدون تغییر بوده و همچنین ماتریس مذکور، به صورت مثبت معین تعریف می‌گردد. نکته اصلی که باعث پیشرفت و تکامل تحقیقات در زمینه مذکور گردیده، اعمال قیود به مساله و همچنین تغییر بعد ماتریس هسیان مربوط به تابع هدف مساله می‌باشد. در ادامه سن و همکاران با بهره گیری از روش‌های نیوتن نادقیق، فعالیت پیشین کلمن را تکمیل کرده و ادامه داده اند، [۷]. دلیل اصلی استفاده از روش نیوتن نادقیق، بهره‌مندی از محاسبات سریع تر برای سیستم‌های ابعاد بزرگ با گام‌های زمانی کوتاه تر خواهد بود. با این حال تغییر علامت ماتریس هسیان در این تحقیقات پوشش داده نشده است؛ لذا در صورتی که ماتریس هسیان به صورت نامعین بوده و یا به هردلیل به صورت منفی ظاهر گردد، همگرایی روش بهینه‌سازی مذکور دستخوش تغییر خواهد شد. در دهه اخیر، در سال ۲۰۱۸، کارارو و همکاران تحقیقات خود را معطوف به روش بهینه‌سازی نیوتن تطبیقی کرده‌اند، [۸]. روش گسسته‌سازی سیستم غیرخطی به وسیله روش‌های المان محدود انجام گردیده است. اساس روش کنترلی بهینه به وسیله‌ی الگوریتم نیوتن تطبیقی بر اساس تغییر و تکامل طول گام و جهت گام بر اساس میزان خطای تخمین زده شده و خطای تکرار در هر مرحله می‌باشد. در تحقیقات مذکور، تابع هدف برای شناسایی سیستم تعریف گردیده و ذات تابع هدف سیستم جهت شناسایی، یک تابع هدف درجه دوم بر اساس خطای تخمینی می‌باشد. لذا همواره تابع هدف مثبت معین بوده و دچار تغییر علامت نخواهد بود. در ادامه، در سال ۲۰۱۸ لیویریس و همکاران با بهره‌گیری از روش گرادیان مزدوج، بهینه سازی جهت دستیابی به نقطه بهینه یک تابع هدف را مورد بررسی قرار داده‌اند، [۹]. با این حال روش گرادیان مزدوج بر پایه جهت یابی روشی موسوم به روش برویدن [۵] برای توابع هدف کوادراتیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در صورت وجود سوئیچ‌های

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

متوالی در دینامیک سیستم، احتمال عدم همگرایی صحیح برای الگوریتم مذکور وجود داشته و به همین علت، در تحقیقات اخیر در زمینه کنترل‌کننده‌های پیشبین مدل و کنترل‌کننده‌های بهینه، تحقیقات [۱۰] و [۱۱] به سمت بهینه‌سازی غیرخطی مقید سوق داده شده اند. در تحقیقات اخیر در زمینه کنترل مبتنی بر پیشبینی مدل با بهره‌گیری از روش‌های کنترل پیشبین مقاوم و کنترل پیشبین هیبرید، اساس کنترلی بهینه مبتنی بر پیشبینی مدل برای سیستم‌های غیرخطی تعمیم یافته است، [۱۲]، [۱۳]. با این حال، سیستم‌های خطی‌ناپذیر همچنان مستلزم طراحی کنترل‌کننده پیشبین مدل غیرخطی خواهند بود، [۱۴]. در تحقیقات فنگ و همکاران [۱۵]، یک مسئله دنبال سازی مسیر مورد نظر قرار گرفته و جهت یافتن نقطه بهینه، الگوریتم نیوتن نادقیق پیاده‌سازی شده است. با این حال، عموما در تحقیقات پیشین در این حوزه، سیستم‌های تک ورودی و تک خروجی به صورت تک‌عامل مورد بررسی بوده اند. لذا بعد ماتریس هسیان و همچنین بعد پایه‌های جواب بهینه در تحقیقات مذکور ثابت فرض می‌شود. در مقاله حاضر، روش جامع دنبال سازی مسیر مرجع ورودی یک سیستم غیرخطی و هیبرید خطی‌ناپذیر مورد بررسی واقع شده است. سیستم مذکور، با تابع هدف با هسیان نامعین مورد بهینه سازی قرار گرفته و دیمانسیون پایه جواب بهینه و مشتقات سیستم به واسطه‌ی چندعامل بودن سیستم، متغیر بوده است.

تحقیقات دهه اخیر بر پایه سیستم‌های چندعامل بر اساس نظریه گراف‌ها مورد توجه قرار گرفته [۱۶] و در این راستا، تشکیل سیستم‌های چندعامل با رویکرد متمرکز مورد بررسی واقع شده است، [۱۷]. در ادامه، تعمیم روش مذکور به روش غیرمتمرکز صورت پذیرفته [۱۸] و در تحقیقات پیشین انجام شده توسط هو در سال ۲۰۱۶، رویکرد غیرمتمرکز توزیع یافته برای یک سیستم چندعامل توسعه داده شده است، [۱۹].

در مقاله حاضر، کاستی‌های طراحی کنترل‌کننده‌های مدل پیشبین خطی و بهینه در رابطه با سیستم‌های غیرخطی خطی ناپذیر با سیگنال سوییچ، با روش بهینه سازی نیوتن نادقیق برای بهینه‌سازی تابع هدف غیرخطی دارای مینیمم‌های محلی چندگانه، بررسی شده است. همچنین، با توجه به وجود نقاط ضعف در روش‌های بهینه سازی بر اساس گرادیان، از جمله عدم امکان همگرایی در صورت منفی بودن نرم ماتریس هسیان و کاهش سرعت همگرایی در رابطه با توابع هدف خطی ناپذیر، نامعین بودن علامت ماتریس هسیان، مورد بررسی واقع شده است. با طراحی کنترل‌کننده بهینه بر اساس روش نیوتن نادقیق با جستجوی خطی و ناحیه اعتماد، نظریه کنترلی ارائه شده، قادر به فعالیت با وجود نرم منفی ماتریس هسیان بوده و همچنان همگرایی روش مذکور به نقطه بهینه مطلق بررسی و اثبات شده است. در نهایت، با تعمیم سیستم تک عامل به یک سیستم چند عامل بر اساس نظریه گراف و بیان تانسور تداخل، امکان افزایش دیمانسیون پایه‌های جواب بهینه در مساله مذکور بررسی شده است.

روند کلی مقاله، معرفی، بررسی و گسسته سازی یک سیستم دینامیکی غیرخطی خطی ناپذیر با وجود سیگنال سوئیچ متوالی در بخش دوم و سپس ارایه روش بهینه سازی در بخش سوم، خواهد بود. پس از آن سیستم به صورت چند عامل تعمیم یافته است. سپس، با معرفی تابع هدف مشخص دارای اکسترمم‌های محلی چندگانه با هدف دنبال سازی مسیر مرجع، امکان تغییر علامت ماتریس هسیان و همچنین، نامعین بودن آن مورد بررسی واقع شده است. در ادامه، اثبات همگرایی الگوریتم بهینه‌سازی و تعمیم آن به اثبات پایداری سیستم کنترلی فیدبک ارایه شده است. در نهایت با انجام شبیه‌سازی یک سیستم چند عامل با کنترل‌کننده غیر متمرکز، عملکرد و کیفیت دنبال کردن مسیر مطلوب ورودی و بررسی نتایج، ادعاهای فوق‌الذکر را تایید و مورد تحقیق قرار خواهد داد.

۲- استخراج و توصیف دینامیک سیستم بر اساس قواعد مکانیک نیوتنی

در این بخش، دینامیک یک جسم صلب به صورت یک درجه آزادی، طبق روابط (۱) و (۲) در نظر گرفته شده است . سیستم دینامیکی در رابطه (۱)، به عنوان یک گروه خاص از سیستم های دینامیکی خطی‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود. همچنین، برای سیستم مذکور، با توجه به مقدار تابع سوئیچ‌شونده که بر اساس تابع دلتای دیراک قابل بازنویسی می‌باشد، سیگنال سوئیچ تعریف می‌گردد. به عبارت روشن تر، در حالت کلی سیستم دارای مقادیر حالت پیوسته خواهد بود که در کنار مقادیر گسسته، حاصل از سیگنال سوئیچ فوق یک سیستم هیبرید را تشکیل خواهند داد. در بخش شبیه‌سازی، سیگنال سوئیچ برای یک سیستم دینامیکی مرجع، معرفی شده و نتایج شبیه‌سازی ارایه خواهند شد.

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}) + bu \tag{۱}$$

$$\dot{x} = \not{f}(x, u; t) \tag{۲}$$

حل عددی سیستم در روابط (۱) و (۲)، برای طراحی کنترل‌کننده بهینه بر اساس روش های تکراری بهینه سازی نیازمند گسسته‌سازی دقیق با درنظرگیری افق پیشبینی محدود خواهد بود. لذا در رابطه (۳) روش گسسته‌سازی صریح آدامز- بشفورث [۲۰] در نظر گرفته شده است. روش گسسته سازی در رابطه (۳) به روش گسسته‌سازی آدامز- بشفورث سه گامی طراحی شده و طول گام زمانی گسسته‌سازی ثابت فرض می‌گردد.

$$\begin{aligned} x(\mathrm{k}) = x(\mathrm{k}-1) &+ \frac{23\mathrm{T}}{12}\not{f}[\mathrm{x}(\mathrm{k}-1), \mathrm{u}(\mathrm{k}-1); \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}] \\ &- \frac{4\mathrm{T}}{3}\not{f}[\mathrm{x}(\mathrm{k}-2), \mathrm{u}(\mathrm{k}-2); \mathrm{t}_{\mathrm{k}-2}] \\ &+ \frac{5\mathrm{T}}{12}\not{f}[\mathrm{x}(\mathrm{k}-3), \mathrm{u}(\mathrm{k}-3); \mathrm{t}_{\mathrm{k}-3}] \end{aligned} \tag{۳}$$

در رابطه (۳)، در جملات دوم، سوم و چهارم سمت راست مساوی، به ترتیب ورودی کنترلی یک، دو و سه گام زمانی پیشتر دخیل شده اند. با توجه به دینامیک مسئله در روابط (۱) و (۲) مشاهده می‌شود که جملات شامل ورودی کنترلی دو و سه گام پیشتر، قابلیت بازنویسی به صورت بردار حالت سیستم را خواهند داشت. لذا ابتدا در رابطه (۴)، یک فرم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

صریح برای بیان سیستم گسسته سازی شده طبق رابطه (۳)، مشاهده می‌گردد که شامل مجموع جملات بردار حالت سیستم و ورودی کنترلی مراحل پیشتر خواهد بود. روابط (۳) و (۴)، بیانگر روش سه گامی آدامز-بشفورث می‌باشند و یادآوری این مهم حائز اهمیت است که، سیستم گسسته سازی شده با روش آدامز بشفورث بدون ساده‌سازی و خطی سازی ارایه شده است و لذا در صورتی که گام زمانی گسسته‌سازی به اندازه کافی کوچک باشد، دینامیک سیستم گسسته شده بر دینامیک غیر خطی واقعی، منطبق خواهد بود.

$$\begin{aligned} x(k) = x(k-1) &+ \frac{23T}{12}[f[x(k-1), \dot{x}(k-1)] \\ &+ bu(k-1)] \\ &- \frac{4T}{3}[f[x(k-2), \dot{x}(k-2)] \\ &+ bu(k-2)] \\ &+ \frac{5T}{12}[f[x(k-3), \dot{x}(k-3)] \\ &+ bu(k-3)] \end{aligned} \quad (٤)$$

در رابطه (۴)، $x(k-1), \dot{x}(k-1)$ به ترتیب بیانگر بردار سرعت و بردار مکان گسسته‌سازی شده طبق رابطه آدامز-بشفورث می‌باشند. لازم به ذکر است وجود $\dot{x}(k-1)$ به معنای مشتق زمانی بردار گسسته سازی شده نبوده و بیانگر بردار سرعت در زمان گسسته خواهد بود. در نتیجه، رابطه فوق را می‌توان به فرم کلی زیر بازنویسی نمود.

$$\begin{aligned} x(k) = f_1(x(k-1), \dot{x}(k-1)) &+ \left[\frac{23T}{12} bu(k-1)\right] \\ &- f_2(x(k-2), \dot{x}(k-2)) \\ &+ \left[-\frac{4T}{3} bu(k-2)\right] \\ &+ f_3(x(k-3), \dot{x}(k-3)) \\ &+ \left[+\frac{5T}{12} bu(k-3)\right] \end{aligned} \quad (٥)$$

در رابطه (۵)، جملات $f_i , i \in \{1,2,3\}$ به صورت روابط (۶)، (۷)، (۸) در ذیل تعریف می‌گردند.

$$\begin{aligned} f_1[x(k-1), \dot{x}(k-1)] &= x(k-1) \\ &+ \frac{23T}{12}[f[x(k-1), \dot{x}(k-1)]] \end{aligned} \quad (٦)$$

$$f_2[x(k-2), \dot{x}(k-2)] = \frac{4T}{3}[f[x(k-2), \dot{x}(k-2)]] \quad (٧)$$

$$f_3[x(k-3), \dot{x}(k-3)] = \frac{5T}{12}[f[x(k-3), \dot{x}(k-3)]] \quad (٨)$$

با جایگذاری روابط (۶)، (۷)، (۸) در رابطه (۴)، فرم کلی سیستم گسسته سازی شده در روش آدامز-بشفورث سه گامی برای سیستم در رابطه (۱)، ارائه می‌گردد.

در حالت کلی سیستم دینامیکی مطرح شده در روابط فوق، به صورت تک‌عامل بیان گردیده است. در مورد سیستم تک‌عامل، هدف دنبال سازی مسیر مرجع بر اساس یک تابع هدف بهینه خواهد بود. بنابراین تابع هدف مساله در ادامه برای حداقل ساختن سیگنال خطا طراحی می‌گردد. سیگنال خطای سیستم تک عامل به صورت فاصله نسبی لحظه‌ای عامل با مسیر مرجع ورودی تعریف گردیده و سیگنال دینامیک خطا طبق رابطه (۹) بیان می‌گردد.

$$e(k-1) \triangleq x(k-1) - x_d(k-1) \quad (٩)$$

در ادامه، با توجه به مشخص شدن دینامیک خطا برای سیستم تک‌عامل، سیستم به فرم چندعامل تعمیم یافته است. مجموعه $\mathcal{N}$ طبق رابطه (۱۰)، بیانگر تعداد عامل‌های متداخل در سیستم چند عامل می‌باشد.

$$\mathcal{N} \triangleq \{1,2,\dots,n\} \quad (١٠)$$

در حالت کلی، سیستم های چند عامل با دو رویکرد پیرو-پیشرو[1] یا بدون پیشرو بنا شده و تداخل میان عوامل سیستم در قالب نظریه گراف قابل بازنویسی می‌باشد. پیش از تعریف فرم کلی سیستم چندعامل، ابتدا کلیات مدل سازی سیستم به فرم سیستم چندعامل در نظریه گراف بحث می‌شود. در این رویکرد، هریک از عوامل مساله به عنوان یکی از راس های یک شبکه گرافی مطرح می‌شوند و ارتباط و انتقال اطلاعات از یک عامل به عامل دیگر به عنوان یال‌های شبکه گراف تعریف خواهد شد. لذا شبکه گرافی حاکم بر مساله از فرضیات زیر تبعیت می‌کند:

تعریف ۱- گراف ساده: مجموعه گراف، ساده فرض می‌شود اگر و تنها اگر، هیچ یک از راس‌های سیستم با خودشان در ارتباط نباشد لذا با فرض ε به عنوان مجموعه یال‌های شبکه گراف، $(i,i) \notin \varepsilon$.

تعریف ۲-گراف متصل: شبکه گرافی، متصل فرض می‌شود اگر و تنها اگر، بین کلیه راس‌های شبکه، حداقل یک ارتباط یک به یک وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، هیچ راس ایزوله‌ای وجود نداشته باشد.

تعریف ۳-گراف بدون جهت: شبکه گرافی، بدون جهت فرض می‌شود در صورتی که، اگر از گره **i**ام به گره **j**ام انتقال اطلاعات وجود دارد، حتما از گره **j**ام به گره **i**ام نیز انتقال اطلاعات وجود داشته باشد.

در حالت کلی، شبکه گرافی مبین مساله، به صورت یک شبکه گرافی ساده، متصل و بدون جهت تعریف شده است. برای سیستم چندعامل، ابتدا ماتریس همسایگی به فرم رابطه (۱۱)، تعریف می‌گردد.

$$\boldsymbol{G}^{A} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & w_{12}^{a} & \cdots & w_{1n}^{a} \\ w_{21}^{a} & 0 & \cdots & w_{2n}^{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1}^{a} & w_{n2}^{a} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (١١)$$

در رابطه (۱۱)، $\mathbf{G}^{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ بوده و با توجه به ساده بودن گراف، $w_{ii}^{a} = 0$ خواهد بود و با توجه به بدون جهت بودن گراف، $w_{ij}^{a} = \pm w_{ji}^{a}$. همچنین با توجه به شکل کلی ماتریس رابطه (۱۱)، ماتریس

[1] Leader-Follower

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

همسایگی شبکه گراف به صورت یک ماتریس پادمتقارن در حالت کلی یا متقارن در حالت بدون جهت، تعریف گردیده است.

پس از آن، ماتریس درجه در رابطه (۱۲)، تعریف می‌گردد. ماتریس درجه بیانگر تعداد عوامل مرتبط به عامل iام می‌باشد.

$$\boldsymbol{G}^{D} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} w_{1j}^{a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} w_{nj}^{a} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲)، $\mathbf{G}^{\mathrm{D}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ بوده و قطری با عناصر روی قطر اصلی مثبت یا صفر می‌باشد. لذا ماتریس مذکور، یک ماتریس مثبت نیمه معین می‌باشد. در نهایت ماتریس $\mathbf{G}^{\mathrm{L}}$ که بیانگر عوامل پیشرو می‌باشد در رابطه (۱۳) تعریف گردیده است.

$$\boldsymbol{G}^{L} \triangleq \begin{bmatrix} w_{1}^{L} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_{n}^{L} \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

در رابطه (۱۲)، $\mathbf{G}^{\mathrm{L}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ بوده و قطری می‌باشد. با تعریف ماتریس‌های $\mathbf{G}^{A}$، $\mathbf{G}^{\mathrm{D}}$ و $\mathbf{G}^{\mathrm{L}}$، در رابطه (۱۴) ماتریس تداخل برای شبکه گرافی تعیین گردیده است.

برای تحلیل دینامیک خطا به دو تعریف زیر نیاز داریم.

$$\boldsymbol{G} \triangleq \boldsymbol{G}^{D} - \boldsymbol{G}^{A} + \boldsymbol{G}^{L} \quad (۱۴)$$

لازم به ذکر است، رابطه (۱۴) در حالت کلی برای سیستم‌های چند عامل هم در چارچوب پیرو-پیشرو و هم بدون پیشرو برقرار خواهد بود. در صورتی که سیستم چند عامل به صورت بدون پیشرو تعریف گردد، با توجه به $\mathbf{G}^{\mathrm{L}} = [0]$ آنگاه، ماتریس تداخل به صورت رابطه (۱۵) بیان می‌گردد که این رابطه به لاپلاسین گراف معروف است.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} \triangleq \boldsymbol{G}^{D} - \boldsymbol{G}^{A} \quad (۱۵)$$

با توجه به ساده، بدون جهت و متصل بودن گراف، قضایای ۱ و ۲، برای ماتریس تداخل سیستم بیان می‌گردند.

قضیه ۱- فرض کنید، Γ یک ماتریس تداخل متناظر با شبکه گراف ساده، بدون جهت و متصل بوده که از درجه K می‌باشد. در این صورت:

الف: K یک مقدار ویژه برای ماتریس Γ است.

ب: درجه تکرار جبری مقدار ویژه K همواره برابر یا بزرگتر از یک می‌باشد.

اثبات:

الف: فرض کنید $\mathrm{v}_1 = [1,1,\dots,1]^{\mathrm{T}}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times 1}$ آنگاه، $\mathbf{G}^{\mathrm{A}}.\mathrm{v}_1 = \mathrm{K}.\mathrm{v}_1$ پس K یک مقدار ویژه برای ماتریس خواهد بود. لذا با توجه به تعریف ماتریس $\mathbf{G}^{\mathrm{D}}$ و تعریف فرم کلی $\mathbf{G}^{\mathrm{A}}$ در رابطه (۱۱)، حضور مقدار K روی کلیه عناصر قطر اصلی ماتریس مشخص می‌باشد. با توجه به پادمتقارن بودن ماتریس $\mathbf{G} - \mathbf{G}^{\mathrm{D}}$، نهایتا ماتریس $\mathbf{G}$ دارای حداقل یک مقدار ویژه K خواهد بود.

ب: در صورتی که $\mathrm{v}_2 = [\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n]^{\mathrm{T}}$ باشد که هر بردار دلخواه غیرصفری است که $\mathbf{G}^{\mathrm{A}}.\mathrm{v}_2 = \mathrm{K}.\mathrm{v}_2$ اگر در نظربگیریم $\mathrm{x}_{\max} = [\max(\mathrm{x}_1), \max(\mathrm{x}_2), \dots, \max(\mathrm{x}_n)]$ که در آن $\max(\mathrm{x}_i)$ بیانگر نرم اقلیدسی بردار حالت عامل iام می‌باشد، آنگاه داریم: $\mathrm{K}\mathrm{x}_{\max} = \mathbf{G}^{\mathrm{A}}.\mathrm{x}_{\max}$. لذا با توجه به بخش الف، v_2 ترکیب خطی از بردار ویژه متناظر با K بوده و در نتیجه درجه تکرار جبری مقدار ویژه برابر با یک خواهد بود.

قضیه ۲- با فرض متصل بودن و بدون جهت بودن گراف G، آنگاه با تعریف $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ به عنوان لاپلاسین گراف $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = \mathrm{n} - 1$ برقرار می‌باشد.

اثبات: [۲۱]

با تشکیل سیستم چندعامل طبق روابط (۱۱)، (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) و تعریف دینامیک خطا در رابطه (۹)، روابط (۱۶) و (۱۷) دینامیک خطا را برای سیستم چندعامل بیان می‌کنند.

$$Z_{ij}(k-1) \triangleq x_i(k-1) - x_j(k-1); i \in \boldsymbol{\mathcal{N}} \quad (۱۶)$$

$$Z_{i0}(k-1) \triangleq x_i^{\ell}(k-1) - x_j(k-1); i \in \mathfrak{L} \quad (۱۷)$$

رابطه (۱۶)، بیانگر فاصله نسبی دو عامل همسایه بوده که در آن $\mathrm{x}_\mathrm{i}, \mathrm{x}_\mathrm{j} \in \mathbb{R}$ خواهند بود و $\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{a}} \neq 0$ می‌باشد. رابطه (۱۶) خطای متناظر با عوامل پیرو را بیان کرده و رابطه (۱۷) خطای متناظر با عامل پیشرو را تعیین می‌کند که در آن $\mathrm{x}^{\mathrm{d}} \in \mathbb{R}$ و بیانگر مسیر مرجع ورودی برای سیستم چند عامل بوده و $\mathfrak{L}$ بیانگر مجموعه ربات‌های پیشرو مساله می‌باشد.

همانطور که بحث گردید، روابط (۱۶) و (۱۷) بر اساس پیرو یا پیشرو بودن عامل iام متفاوت هستند. در رابطه (۱۸) با تعریف جایگشت‌های لیبنیتز، روابط (۱۶) و (۱۷) مستقل از پیرو یا پیشرو بودن عوامل، در رابطه (۱۸) بازنویسی گردیده است.

$$Z_{mj}(k-1) \triangleq \varepsilon_i^a \varepsilon_j^a Z_{ij}(k-1) + sgn\left(w_i^{\ell}\right) Z_{i0}(k-1); m \in \boldsymbol{\mathcal{N}} \cup \mathfrak{L} \quad (۱۸)$$

در رابطه (۱۸)، $\varepsilon_{\mathrm{i}}^{\mathrm{a}}\varepsilon_{\mathrm{j}}^{\mathrm{a}} = \begin{cases} 1 & \text{for i} \notin \mathfrak{L} \\ 0 & \text{for i} \in \mathfrak{L} \end{cases}$ خواهد بود. به عبارت دیگر، در صورتی که عوامل iام و jام پیرو باشند، جمله اول رابطه (۱۸) مخالف صفر می‌باشد و در صورت پیشرو بودن عامل iام، جمله اول صفر و جمله دوم مخالف صفر خواهد بود.

با توجه به ماتریس تداخل سیستم چند عامل در رابطه (۱۴)، رابطه (۱۸) برای سیستم چند عامل با n عامل مجزا، یک بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ تشکیل می‌دهد. لذا رابطه (۱۹) با ضرب مستقیم، رابطه دینامیک خطا را برای سیستم چند عامل تعمیم داده است.

$$\boldsymbol{Z}(k-1) = [(\boldsymbol{G}^{D} - \boldsymbol{G}^{A} + \boldsymbol{G}^{L}) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}] Z_{ij}(k-1) - [\boldsymbol{G}^{L} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}][\boldsymbol{I}_{n\times n} \otimes x_d(k-1)] \quad (۱۹)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

نهایتا بردار جمع کننده حالت برای سیستم چند عامل به فرم رابطه (۲۰) تعریف می‌گردد که یک بردار ستونی بوده به قسمی که درایه‌های متناظر با بردار حالت هریک از عوامل سیستم چند عامل، در بردار مذکور قرار خواهند گرفت.

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}) &= \left[\mathrm{f}\left(\underline{\mathbf{x}}^1(\mathrm{k}-1)\right), \mathrm{f}\left(\underline{\mathbf{x}}^2(\mathrm{k}-1)\right), \dots, \mathrm{f}\left(\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{k}-1)\right)\right]^{\mathrm{T}} \\ &+ \frac{23\mathrm{T}}{12}\begin{bmatrix}\mathrm{b} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathrm{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{u}^1(\mathrm{k}-1)\\ \vdots\\ \mathrm{u}^{\mathrm{n}}(\mathrm{k}-1)\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (۲۰)$$

بردار جمع کننده معادلات حالت در رابطه (۲۱) قابل رویت می‌باشند.

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}-1) \triangleq \big[&\mathrm{x}^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}-1), \dot{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}-1), \mathrm{x}^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}-2), \dot{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}-2), \mathrm{x}^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}-3), \dot{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}-3)\big]; \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}\end{aligned} \quad (۲۱)$$

۳- تدوین الگوریتم کنترلی بهینه بر اساس روش شبه نیوتن برای توابع هدف با هسیان علامت-نامعین

با توجه به توضیحات طراحی کنترل‌کننده در مقدمه، کنترل کننده بهینه در بخش حاضر، بر اساس روش بهینه سازی شبه نیوتن جهت کنترل سیستم سوئیچ شونده خطی‌ناپذیر در رابطه (۱) طراحی گردیده است. در این راستا با در نظرگیری دو تابع هدف، نتایج طراحی و پیاده‌سازی کنترل‌کننده مذکوربررسی خواهد شد. با توجه به هدف اولیه مسئله بهینه‌سازی که دنبال‌سازی مسیر مرجع و حفظ آرایش‌یافتگی می‌باشد، تابع هدف اولیه طبق رابطه (۲۲) انتخاب می‌گردد.

$$J\left[\underline{\boldsymbol{X}}(k)\right] \triangleq \sum_{i=1}^{k-1} L_i\left[\underline{\boldsymbol{X}}(i)\right]; \underline{\boldsymbol{X}}(k) \in \mathbb{R}^{n\times 1}; J[\cdot]: \mathbb{R}^{n\times 1} \mapsto \mathbb{R} \quad (۲۲)$$

در رابطه (۲۲)، $\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{i}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times 1}$ و $\mathrm{J}[\cdot]: \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times 1} \mapsto \mathbb{R}$ یک تابعک کلی تعریف شده و $\mathrm{L_i}$ یک تبدیل خطی در فضای برداری $\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times 1}$ بوده و فرم کلی یک تابع هدف بهینه سازی را تشکیل می‌دهد.

در روش بهینه سازی شبه نیوتن با رویکرد جستجو خطی، مقدار بهینه در هر تکرار بر اساس رابطه (۲۳) تعیین می‌گردد.

$$\underline{\boldsymbol{X}}(k) = \underline{\boldsymbol{X}}(k-1) + \alpha(k-1)\underline{\boldsymbol{P}}(k-1) \quad (۲۳)$$

در رابطه (۲۳)، $\alpha(\mathrm{k}-1) \in \mathbb{R}$ و $\underline{\mathbf{P}}(\mathrm{k}-1) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ بوده و به ترتیب بیانگر طول گام بهینه سازی و جهت نزولی می‌باشند.

جهت دستیابی به نقطه بهینه طبق الگوریتم بهینه سازی نیوتن، شرط نزولی بودن جهت حرکت، طبق رابطه (۲۴) تعریف گردیده است.

$$\underline{\boldsymbol{P}}^T(k-1)\boldsymbol{\nabla} J\left[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1)\right] < 0 \quad (۲۴)$$

در رابطه (۲۴)، $\nabla\mathrm{J}\left[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}-1)\right] \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times 1}$ می‌باشد و $\underline{\mathbf{P}}(\mathrm{k}-1)$ بردار جهت نزولی الگوریتم خواهد بود. جهت طراحی کنترل کننده بهینه بر اساس الگوریتم بهینه سازی نیوتن، تعیین طول گام بهینه و جهت نزولی برای الگوریتم غیرقابل اجتناب می‌باشد. لذا، بر اساس الگوریتم بهینه سازی نیوتن، شرط نزولی بودن جهت، طبق رابطه (۲۵) تعریف شده که در آن $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{-1}(\mathrm{k}-1) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ یک ماتریس متقارن نامنفرد خواهد بود.

$$\underline{\boldsymbol{P}}(k-1) \triangleq -\boldsymbol{\mathcal{B}}^{-1}(k-1)\boldsymbol{\nabla} J\left[\underline{\boldsymbol{X}}(k)\right] \quad (۲۵)$$

در حالت کلی، در الگوریتم بهینه سازی نیوتن، مقدار ماتریس $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{-1}(\mathrm{k}-1)$، همواره برابر با مشتق دوم یا هسیان تابع هدف مساله بهینه سازی می‌باشد. با این حال، با توجه به امکان نامعین بودن ماتریس هسیان مساله، روش بهینه سازی نیوتن در حالت هسیان نامعین و منفی نیمه معین، امکان ادامه فعالیت را نداشته و همگرایی مساله متاثر از نامعین بودن علامت هسیان، قابل توجیه و بررسی نمی‌باشد. لذا، با توجه به تعریف الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن، انتخاب ماتریس $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{-1}(\mathrm{k}-1)$، به صورت رابطه (۲۶) انجام می‌گیرد که در آن $\nabla^2\mathrm{J}\left[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}-1)\right] \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ و $\mathbf{E}(\mathrm{k}-1) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ می‌باشند و ماتریس $\mathbf{E}(\mathrm{k}-1)$ یک ماتریس مثبت معین و ترجیحا قطری می‌باشد.

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(k-1) \triangleq \boldsymbol{\nabla}^2 J\left[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1)\right] + \boldsymbol{E}(k-1) \quad (۲۶)$$

رابطه (۲۶)، یک نگاشت همدیس بوده که بردار نامعین $\nabla^2\mathrm{J}\left[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}-1)\right]$ را به یک بردار مثبت معین می‌نگارد. لذا ماتریس $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathrm{k}-1)$ در هرتکرار، به صورت مثبت معین تعریف شده و همگرایی الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن تضمین می‌گردد. ماتریس مثبت معین $\mathbf{E}(\mathrm{k}-1)$، به روش تجزیه مقادیر منفرد، انتخاب گردیده و در رابطه (۲۷) قابل رویت می‌باشد.

$$\boldsymbol{\nabla}^2 J\left[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1)\right] = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^*; \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times m}; \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}; \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad (۲۷)$$

در رابطه (۲۷)، نماد * بیانگر اپراتور هرمیشن ماتریس خواهد بود به قسمی که $\mathrm{m} = \mathrm{rank}\nabla^2\mathrm{J}\left[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}-1)\right]$.

با توجه به تعریف رابطه (۲۶) و (۲۷)، و تعیین جهت الگوریتم بهینه سازی طبق رابطه (۲۵)، نزولی بودن جهت الگوریتم بهینه سازی، طبق علامت منفی در هسیان تابع هدف قابل مشاهده می‌باشد. با توجه به تعریف طول گام طبق شرایط ولف، نهایتا همگرایی الگوریتم بهینه سازی به نقطه کمینه، برقرار خواهد بود، [۵].

در حالت کلی ماتریس $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}$، شامل مقادیر ویژه یا مقادیر منفرد ماتریس $\nabla^2\mathrm{J}\left[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}-1)\right]$ بوده که در رابطه (۲۸) قابل رویت می‌باشد.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sigma_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sigma_m\end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

فرض ۱: با فرض $\mathbf{U} = \mathbf{V}^*$ و $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_{\mathrm{n}}\end{bmatrix}$ که در آن، λ_{i} iامین مقدار ویژه ماتریس متقارن $\nabla^2\mathrm{J}\left[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}-1)\right]$ می‌باشد، آنگاه با استفاده از تعریف مقادیر ویژه و بردار ویژه داریم:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

$$\boldsymbol{\nabla}^2 J[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1)] = \boldsymbol{Q\Sigma Q}^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{\boldsymbol{q}}_i \underline{\boldsymbol{q}}_i^T \qquad (۲۹)$$

با تعریف پارامتر اسکالر δ با شرط $|\delta| < 1$، که در هر مرحله بهینه سازی به صورت مناسب انتخاب می‌گردد (می‌تواند یک عدد ثابت درنظر گرفته شود و یا اینکه با منطق مناسبی در هر گام بهینه‌سازی تنظیم شود)، مقدار هریک از دیمانسون‌های ماتریس $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathrm{k}-1)$ بر اساس رابطه (۳۰) تعیین می‌گردد.

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(k-1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{\boldsymbol{q}}_i \underline{\boldsymbol{q}}_i^T + \boldsymbol{E}(k-1) \qquad (۳۰)$$

با توجه به تعاریف ذکر شده برای ماتریس $\mathbf{E}(\mathrm{k}-1)$، رابطه (۳۱) یک رابطه صریح، برای ماتریس مذکور ارائه می‌نماید.

$$\boldsymbol{E}(k-1) = \begin{cases} \delta \underline{\boldsymbol{q}}_j \underline{\boldsymbol{q}}_j^T & sgn(\lambda_j) \le 0 \\ 0 & sgn(\lambda_j) > 0 \end{cases} \qquad (۳۱)$$

نهایتا با استفاده از رابطه (۳۱) و جایگذاری در رابطه (۳۰)، رابطه کلی تعیین جهت نزولی الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن طبق رابطه (۳۲) به دست می‌آید.

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(k-1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{\boldsymbol{q}}_i \underline{\boldsymbol{q}}_i^T + \delta \underline{\boldsymbol{q}}_j \underline{\boldsymbol{q}}_j^T \qquad (۳۲)$$

با جایگذاری رابطه (۳۲) در رابطه (۲۵)، نهایتا جهت نزولی الگوریتم بهینه سازی طبق رابطه (۳۳) تعریف خواهد شد.

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{P}}(k-1) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \underline{\boldsymbol{q}}_i \left(\underline{\boldsymbol{q}}_i^T \boldsymbol{\nabla} J[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1)] \right) \\ - \frac{1}{\delta} \underline{\boldsymbol{q}}_j \left(\underline{\boldsymbol{q}}_j^T \boldsymbol{\nabla} J[\underline{\boldsymbol{X}}(k \\ -1)] \right) \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

با تعیین جهت نزولی الگوریتم بهینه سازی طبق روابط (۳۲) و (۳۳)، طول گام بهینه سازی $\alpha(\mathrm{k}-1)$ باید معین گردد. لذا با توجه به شرایط ولف قوی [۵]، طول گام بهینه سازی انتخاب می‌شود. طول گام انتخاب شده برای الگوریتم بهینه سازی بر اساس جستجو خطی، در هر تکرار باید در روابط (۳۴) و (۳۵) صدق کند.

$$\begin{aligned} J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)] = J[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1) + \alpha(k-1)\underline{\boldsymbol{P}}(k-1)] \\ \le J[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1) \\ + C_1 \alpha(k \\ -1) \boldsymbol{\nabla} J^T[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1)] \underline{\boldsymbol{P}}(k \\ -1)] \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} J^T[\underline{\boldsymbol{X}}(k-1) + \alpha(k-1)\underline{\boldsymbol{P}}(k-1)] \underline{\boldsymbol{P}}(k \\ -1) \\ \ge C_2 \boldsymbol{\nabla}^T J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)] \underline{\boldsymbol{P}}(k-1) \end{aligned} \qquad (۳۵)$$

که در روابط (۳۴) و (۳۵)، $0 \le \mathrm{C}_1 < \mathrm{C}_2 < 1$ می‌باشد. به عنوان یک جمع‌بندی کلی، الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن جهت طراحی کنترل‌کننده بهینه، برای یافتن مقدار کمینه تابع هدف در رابطه (۲۲)، طراحی شده و با انتخاب جهت نزولی الگوریتم، طبق روابط (۳۲) و (۳۳) و انتخاب طول گام در روابط (۳۴) و (۳۵)، الگوریتم مذکور قابلیت حداقل سازی تابع هدف با هسیان نامعین را خواهد داشت. با توجه به این که، روش بهینه سازی نیوتن در رابطه با سرعت همگرایی به نقطه بهینه، سرعتی به فرم درجه دوم دارد، همگرایی روش شبه نیوتن در ادامه بررسی خواهد شد، [۵].

قضیه ۳- اگر تابع هدف $\mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k})]$ در حالت کلی روی مجموعه باز $\mathcal{D}$ دوبار مشتق پذیر و پیوسته بوده و $\underline{\mathbf{X}}(0)$ نقطه شروع الگوریتم شبه نیوتن به گونه‌ای انتخاب گردد که $\Upsilon = \{\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}) \in \mathcal{D} : \mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k})] \le \mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}(0)]\}$ یک مجموعه فشرده باشد، آنگاه اگر معیار تجزیه تعمیم یافته به فرم کلی رابطه $\boldsymbol{\nabla}^2 \mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k}-1)] = \mathbf{U\Sigma V}^*; \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}; \mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}; \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ ارضا گردد، گرادیان $\mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k})]$ برای نقطه کمینه صفر شده و نتیجه رابطه (۳۶) به دست می‌آید، [۵]:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\nabla} J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)] = 0 \qquad (۳۶)$$

اثبات: به مرجع [۶] مراجعه شود.

قضیه ٤- تابع هدف $\mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}(\mathrm{k})]$ از فضای برداری $\mathrm{J}[\cdot]: \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times 1} \longmapsto \mathbb{R}$ به صورت دو بار پیوسته مشتق پذیر فرض شده، در این صورت اگر جهت $\underline{\mathbf{P}}(\mathrm{k}-1)$ جهت کاهشی و $\alpha(\mathrm{k}-1)$ با فرض $\alpha > 0$ محدود بوده و در شرایط ولف قوی صدق کند، در صورتی که شرط $\boldsymbol{\nabla}\mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}^*(\mathrm{k})] = 0$ برقرار باشد و ماتریس هسیان پس از تجزیه طبق الگوریتم مثبت معین به دست آید، آنگاه جهت نزولی در رابطه (۳۷) صدق می‌کند.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||\boldsymbol{\nabla} J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)] + \boldsymbol{\nabla}^2 J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)]\underline{\boldsymbol{P}}(k)||}{\|\underline{\boldsymbol{P}}(k)\|} = 0 \qquad (۳۷)$$

آنگاه:

الف: طول گام $\alpha = 1$ برای کلیه مقادیر $K > K_0$ امکان پذیر بوده

ب: با فرض $\alpha = 1$ همگرایی الگوریتم شبه نیوتن به صورت زبرخطی می‌باشد.

اثبات: اگر $\underline{\mathbf{P}}(\mathrm{k})$ طبق الگوریتم شبه نیوتن به فرم رابطه (۳۳) انتخاب گردد، الگوریتم بهینه سازی، همواره در جهت نزولی پیش خواهد رفت و با در نظرگیری طول گام مثبت در صورت قضیه (۴)، همگرایی الگوریتم در $\mathrm{k} \to \infty$ تضمین می‌گردد و نتیجتا رابطه (۳۸) برقرار می‌باشد.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||\boldsymbol{\mathcal{B}}(k) - \boldsymbol{\nabla}^2 J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)]\underline{\boldsymbol{P}}(k)||}{\|\underline{\boldsymbol{P}}(k)\|} = 0 \qquad (۳۸)$$

لذا با توجه به [۵] همگرایی زبرخطی[1] برای الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن، حتی بدون همگرایی دقیق $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathrm{k})$ به $\boldsymbol{\nabla}^2 \mathrm{J}[\underline{\mathbf{X}}^*(\mathrm{k})]$ برقرار خواهد بود. چرا که با توجه به

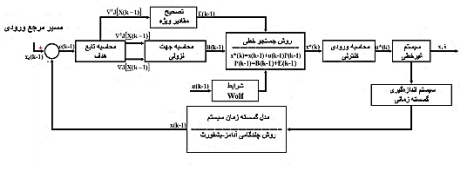
[1] Super linear

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

$$\left[\nabla J[\underline{\mathbf{X}}(k)] - \nabla J[\underline{\mathbf{X}}(k-1)]\right]^{T} \underline{\mathbf{P}}(k) \le (c_2 - 1)\nabla^{T} J[\underline{\mathbf{X}}(k-1)]\underline{\mathbf{P}}(k-1)$$ رابطه α برای مقدار

$$\left[\nabla J[\underline{\mathbf{X}}(k)] - \nabla J[\underline{\mathbf{X}}(k-1)]\right]^{T} \underline{\mathbf{P}}(k) \le \alpha(k-1)\left\|\underline{\mathbf{P}}(k-1)\right\|$$ برقرار می‌باشد و رابطه (۳۸) شرط لازم و کافی برای سرعت همگرایی زبرخطی برای الگوریتم شبه نیوتن محسوب می‌گردد.

نهایتا، معماری کنترلی حاکم بر مساله در مقاله حاضر در شکل (۱)، به صورت دیاگرام بلوکی قابل رویت می‌باشد.



شکل ۱- دیاگرام بلوکی سیستم کنترلی

٤- شبیه سازی عددی سیستم کنترل

در این قسمت تلاش می‌شود مواردی که پیشتر بحث شده با توجه به سیستم دینامیکی نمایش داده شده در رابطه (۱) بررسی گردد. ابتدا سیستم دینامیکی به فرم رابطه (۳۹) که بازنویسی رابطه (۱) است، تعریف می‌گردد. همچنین، فهرست پارامترهای شبیه سازی و مقادیر آن، در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول (۱)- پارامترهای شبیه سازی

پارامتر شبیه سازی	مقدار
μ	$1\ [\mathrm{N}\frac{\mathrm{sec}^2}{\mathrm{m}^2}]$
c	$4\ [\mathrm{N}\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{m}}]$
m	2 [kg]
g	$9.806\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\right]$
T	0.01,0.001 [sec]
$\mathbf{G}^{\mathrm{A}}$	$\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&3\\2&3&0\end{bmatrix}$
$\mathbf{G}^{\mathrm{D}}$	$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$
$\mathbf{G}^{\mathrm{L}}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
$\xi(i)$	1.10
$\zeta(i)$	-1.10
δ	0.99
فرکانس مسیر مطلوب	1 [Hz]
دامنه مسیر مطلوب	5 [m]
شرایط اولیه عوامل	$[0,4,6][m]$

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}, sgn(\dot{x})) + bu \qquad (۳۹)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله به فرم رابطه (۴۰) بیان شده که در آن، کنترل سیستم جرم و فنر و دمپر با استفاده از دمپر غیرخطی با سیگنال سوئیچ تعریف شده و با توجه به مقادیر پارامترهای سیستم، جهت دنبال سازی مسیر مرجع، مدنظر قرار می‌گیرد.

$$\ddot{x}_i = -\frac{\mu}{m}\dot{x}_i|\dot{x}_i| - \frac{c}{m}\dot{x}_i - g + \frac{1}{m}u_i; i = 1,2,3 \qquad (۴۰)$$

با توجه به جمله $-\frac{\mu}{\mathrm{m}}\dot{\mathrm{x}}_{\mathrm{i}}|\dot{\mathrm{x}}_{\mathrm{i}}|$ در رابطه (۴۰)، وجود $\mathrm{sgn}(\dot{\mathrm{x}})$، باعث به وجود آمدن یک سیگنال گسسته در سیستم پیوسته گردیده است. لذا، سیگنال سوئیچ نامعین سیستم، $\mathrm{sgn}(\dot{\mathrm{x}})$ می‌باشد. معادله دیفرانسیل در رابطه (۴۰) با تعریف متغیرهای حالت به فرم روابط زیر بازنویسی شده است.

$$x_{i,1} \triangleq x_i; x_{i,2} \triangleq \dot{x}_i \qquad (۴۱)$$

$$\dot{x}_{i,1} = x_{i,2} \qquad (۴۲)$$

$$\dot{x}_{i,2} = -\frac{\mu}{m}x_{i,2}|x_{i,2}| - \frac{c}{m}x_{i,2} - g + \frac{1}{m}u_i \qquad (۴۳)$$

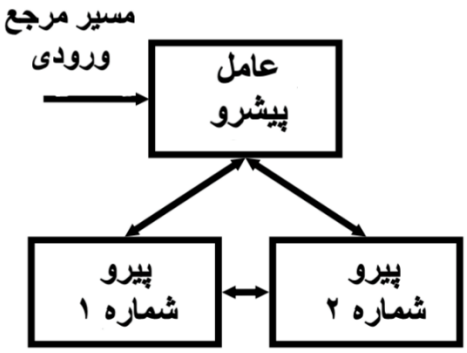
با توجه به توضیحات پیشین، به کمک روش گسسته سازی آدامز-بشفورث، سیستم دینامیکی معرفی شده در روابط (۴۲) و (۴۳) به صورت گسسته در روابط (۴۴) و (۴۵) بازنویسی می‌گردد.

$$x_{i,1}(k) = x_{i,1}(k-1) + \frac{23T}{12}x_{i,2}(k-1) - \frac{4T}{3}x_{i,2}(k-2) + \frac{5T}{12}x_{i,2}(k-3) \qquad (۴۴)$$

$$\begin{aligned} x_{i,2}(k) = x_{i,2}(k-1) &+ \frac{23T}{12}\left[-\frac{\mu}{m}x_{i,2}(k-1)|x_{i,2}(k-1)| - \frac{c}{m}x_{i,2}(k-1) - g + \frac{1}{m}u_i(k-1)\right] \\ &- \frac{4T}{3}\left[-\frac{\mu}{m}x_{i,2}(k-2)|x_{i,2}(k-2)| - \frac{c}{m}x_{i,2}(k-2) - g + \frac{1}{m}u_i(k-2)\right] \\ &+ \frac{5T}{12}\left[-\frac{\mu}{m}x_{i,2}(k-3)|x_{i,2}(k-3)| - \frac{c}{m}x_{i,2}(k-3) - g + \frac{1}{m}u_i(k-3)\right] \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

همانگونه که مشخص است، زیراندیس i، بیانگر شماره عامل مورد نظر در سیستم چندعاملی می‌باشد. شکل کلی آرایش یافتگی به صورت شکل (۲) قابل مشاهده است.



شکل۲- آرایش یافتگی سیستم چند عامل

لذا برای مشخص شدن نحوه ارتباط و تداخل عوامل در سیستم چند عاملی، تعاریف مربوط به روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) مجددا برای سیستم مورد بحث، تعریف گردیده است.

سیستم چند عامل به فرم پیرو-پیشرو بوده و دارای یک پیشرو می‌باشد. عامل $i = 1$ پیشرو آرایش‌یافتگی تعریف گردیده و شبکه گرافی به فرم متصل، بدون جهت و ساده فرض شده است.

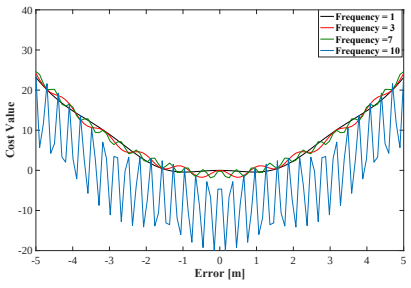
نهایتا ماتریس تداخل به فرم رابطه (۴۶)، طبق جدول ۱ ارائه می‌گردد.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad (۴۶)$$

در راستای طراحی کنترل‌کننده بهینه، تابع هدف مساله به صورت رابطه (۴۷) در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (۴۷)، تابع تبدیل با ماتریس هسیان علامت نامعین فرض شده است. علاوه بر آن وجود جملات تناوبی باعث کاهش اندازه خطا در هر تکرار به فرم هارمونیک می‌شود.

$$J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)] = \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ L_i{}^2[\underline{\boldsymbol{X}}(i)] + \xi(i)\left[sin^2[\zeta(i)L_i(\underline{\boldsymbol{X}}(i)]\right]\right\} \qquad (۴۷)$$

که در آن $\xi(i)$ و $\zeta(i)$ مقادیر متغیر و اسکالر بوده و در شکل (۳)، فرم کلی تغییرات تابع هدف بر اساس پارامترهای مذکور نمایش داده شده است.



شکل۳- تابع هدف نوسانی دارای اکسترمم های محلی چندگانه به ازاء پارامترهای مختلف

تابع هدف تعریف شده در رابطه (۴۷)، نهایتا میزان خطای اندازه‌گیری شده در آرایش‌یافتگی را حداقل خواهد نمود. با این حال، وجود ترم هارمونیک باعث غیریکنوا بودن تابع هدف می‌گردد. همانگونه که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، تابع هدف با توجه به مقادیر متغیر فرکانس در آرگومان تابع هارمونیک در رابطه (۴۷)، دارای حداقل ها و حداکثرهای محلی متغیر بوده و علامت مشتقات تابع هدف، متغیر می‌باشند.

جهت یافتن نقطه بهینه، ابتدا مشتقات اول و دوم تابع هدف مذکور محاسبه می‌گردد.

$$\nabla J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)] = 2L_i\left(\underline{\boldsymbol{X}}(k)\right) + 2\xi(i)\,\zeta(i) sin\left(\zeta(i)L_i(\underline{\boldsymbol{X}}(k))\right) cos\left(\zeta(i)L_i(\underline{\boldsymbol{X}}(k))\right) \qquad (۴۸)$$

$$\nabla^2 J[\underline{\boldsymbol{X}}(k)] = 2 + 2\xi(i)\,\zeta^2(i).cos^2\left(\zeta(i)L_i\left(\underline{\boldsymbol{X}}(k)\right)\right) - 2\xi(i)\,\zeta^2(i) sin^2\left(\zeta(i)L_i(\underline{\boldsymbol{X}}(k))\right) \qquad (۴۹)$$

نهایتا درایه‌های ماتریس هسیان آرایش یافتگی به فرم رابطه (۵۰) تعریف می‌گردد.

$$\nabla^2 J_i^j[x_i^j] = 2(1 + \xi(i)\,\zeta^2(i) cos\left(2\zeta(i)L_i(x_i^j)\right)) \qquad (۵۰)$$

در رابطه (۵۰)، x_i^j بیانگر مکان نسبی دو عامل همسایه بوده و به فرم یک تانسور مختلط مرتبه دوم پادوردا-هموردا خواهد بود.

با تعریف حد تک متغیره برای هریک از درایه‌های تانسور به فرم رابطه (۵۰)، علامت درایه‌های ماتریس هسیان در رابطه (۵۱) مشخص گردیده است.

$$\lim_{L_i(x_i^j)\to 0} \nabla^2 J_i^j[x_i^j] = 2 + 2\xi(i)\,\zeta^2(i) \qquad (۵۱)$$

در رابطه (۵۱)، با فرض $\xi > 1$ و $\zeta < -1$ رابطه (۵۲) برقرار خواهد بود.

$$\lim_{L_i(x_i^j)\to 0} \nabla^2 J_i^j\,[x_i^j] \le 0 \qquad (۵۲)$$

نهایتا، رابطه (۵۳) و (۵۴) برای جهت نزولی الگوریتم در نظر گرفته می‌شوند.

$$B_{ij}(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i q_i q^i + E_{ij}(k-1) \qquad (۵۳)$$

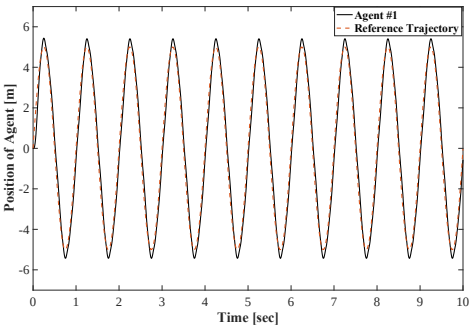
$$P_i(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_j} q_i q^i \nabla J_i^j - \frac{1}{\delta} q_j q^j \nabla J_i^j \qquad (۵۴)$$

در بخش حاضر، با توجه به نوع تابع هدف مساله، شبیه‌سازی برای سیستم تک عامل و سیستم چند عامل انجام گردیده است. با توجه به نتایج

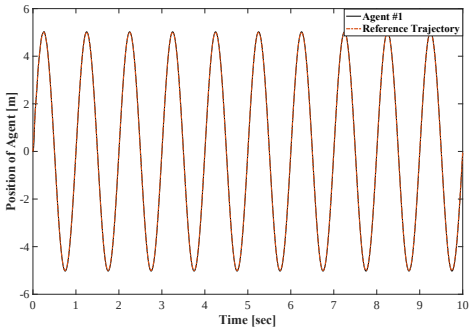
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

حاصل از الگوریتم بهینه سازی، در هر تکرار مسیر بهینه یافته شده و رفتار سیستم مدار بسته بررسی می‌شود.

در شکل (۴)، سیستم تک عامل قابل رویت بوده و مسیر مرجع ورودی برای سیستم مذکور به فرم هارمونیک در نظر گرفته شده و با زمان نمونه برداری ۰.۰۰۱ در شکل ۴-الف و با زمان نمونه برداری ۰.۰۱ در شکل ۴-ب ارائه می‌شود.



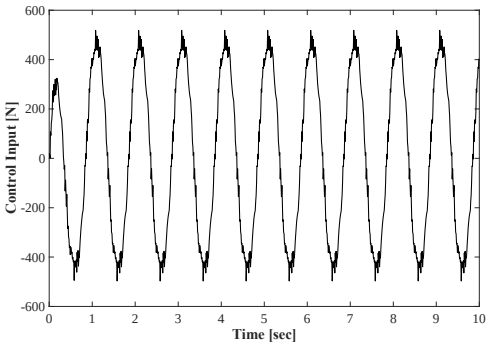
الف)



ب)

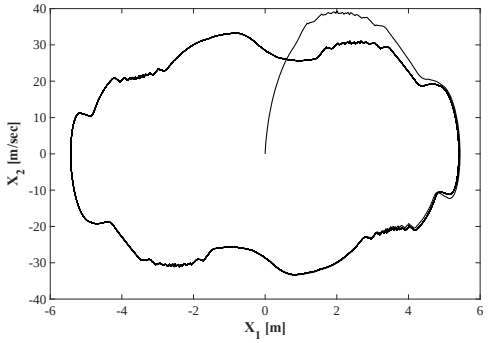
شکل۴- دنبال سازی مسیر مرجع سیستم تک عامل. الف) زمان نمونه برداری ۰/۰۰۱ ب) زمان نمونه برداری ۰/۰۱

در ادامه، با توجه به یکسان بودن دینامیک عوامل تشکیل دهنده آرایش یافتگی، ورودی کنترلی برای هر یک از عوامل یکسان خواهد بود. لذا، در شکل (۵)، نمودار ورودی کنترلی، نمایش داده شده است.



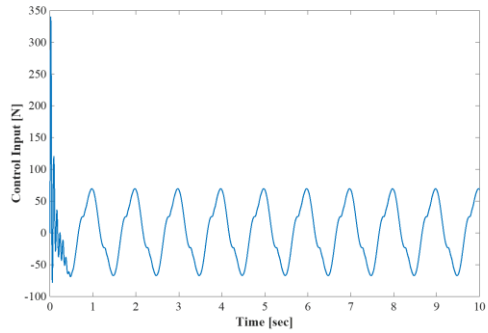
شکل۵-نمودار ورودی کنترلی

شکل (۶)، نشانگر مسیر عامل پیشرو در صفحه $x - \dot{x}$ بوده و با توجه به شکل (۶) مشاهده می گردد که تابع هدف به فرم رابطه (۴۷)، کاملا ارضا شده و وجود حرکت‌های نوسانی و هارمونیک در شکل (۶)، این مورد را تایید می نماید.

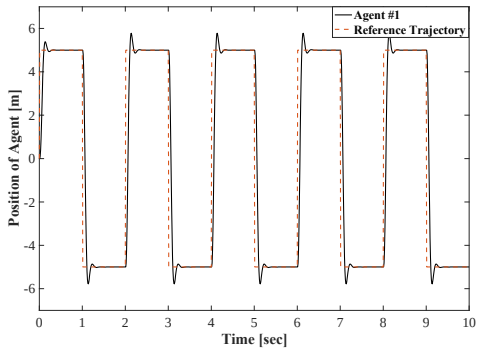


شکل۶-مسیر سیستم تک عامل در صفحه $x - \dot{x}$

جهت بررسی میزان فراجهش و زمان نشست سیستم تک عامل، شکل (۷)، دنبال سازی مسیرمرجع ورودی به فرم پالس مستطیلی را نمایش داده و ورودی کنترلی متناظر در شکل (۷-ب) ارائه می‌شود.



الف) ورودی کنترلی



ب) دنبال سازی پالس مستطیلی

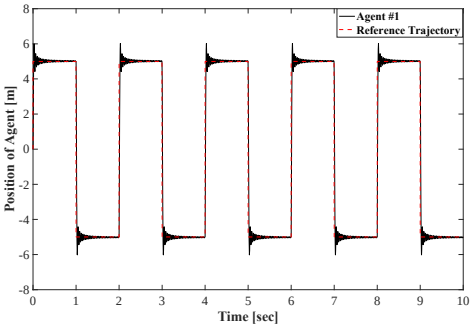
شکل۷- الف) ورودی کنترلی ب)دنبال سازی پالس مستطیلی با تابع هدف کمینه ساز خطا

در شکل (۷)، تابع هدف مساله به صورت یک تابع هدف کمینه ساز دینامیک خطا مطرح گردیده است. مجددا با فرض یکسان بودن دینامیک

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

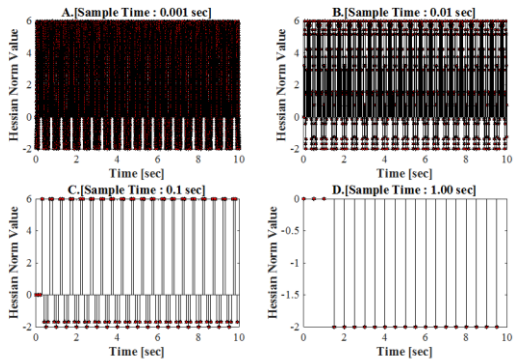
عوامل در سیستم چند عامل، میتوان نتیجه نمودار شکل (۷) را برای هریک از عوامل مساله تعمیم داد. میزان زمان نشست و زمان برخواستن برای کنترل کننده کاملا بر اساس تنظیم ضرایب کنترل کننده خواهد بود لذا رفتار سیستم در نمودار فوق را می‌توان به فرم یک کنترل کننده تناسبی بدون مشتقگیر تخمین زد. در نتیجه با افزایش ضریب کنترل کننده میزان همگرایی و دنبال سازی مسیر قابل بهبود خواهد بود.

در ادامه با درنظر گرفتن تابع هدف به فرم رابطه (۴۷)، پالس مستطیلی مجددا جهت بررسی نتیجه دنبال سازی، در شکل (۸) قابل رویت می‌باشد.



شکل۸- دنبال سازی پالس مستطیلی با تابع هدف نامعین

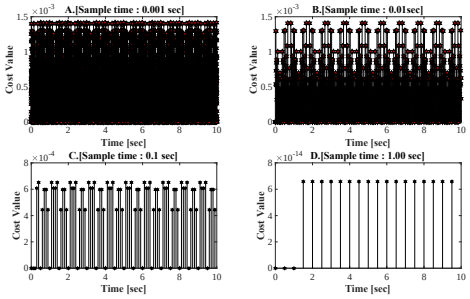
همانگونه که بحث شد، ماتریس هسیان مربوط به تابع هدف رابطه (۴۷)، به صورت نامعین از نظر علامت تعریف می‌شود. با توجه به این که روش بهینه سازی شبه نیوتن، همچنان نیاز به تعیین مقدار هسیان تابع هدف داشته، در شکل (۹)، تغییرات مقدار اندازه ماتریس هسیان، بررسی گردیده است.



شکل۹- تغییرات اندازه ماتریس هسیان در طول مدت بهینه سازی

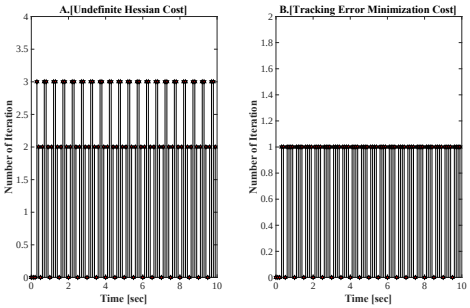
همانگونه که در شکل (۹) قابل رویت است، مقدار اندازه ماتریس هسیان بین اعداد ۶ تا ۲- تغییر می کند. این برد، برای تابعک نرم، به ازای زمان‌های نمونه برداری مختلف در شکل (۹) مشخص شده و مستقل از زمان نمونه برداری بوده است. لذا می‌توان نتیجه گرفت، تابع هدف در رابطه (۴۷)، به صورت نامعین خواهد بود همچنین این مساله قابل بررسی است که در زمان نمونه برداری ۰.۱ ثانیه، به ازای هر دو تکراری که مقدار اندازه ماتریس هسیان مثبت بوده، سه تکرار متوالی ماتریس هسیان با علامت منفی ظاهر گردیده است. این روند، به ازای بقیه مقادیر نمونه برداری نیز قابل رویت می‌باشد.

با توجه به انتخاب روش بهینه سازی شبه نیوتن، هدف نهایی، حداقل ساختن تابع هدف مساله بدون وابستگی به مثبت معین بودن هسیان، بوده است. در این راستا، در هر تکرار، مقدار تابع هدف به ازای مقدار $x^*(k)$ که مقدار بهینه تابع هدف می‌باشد محاسبه گردیده و در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود.



شکل۱۰- مقدار تابع هزینه در هر تکرار

در الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن، معیار توقف الگوریتم بر اساس مقایسه با مقدار مرجع قرار داده شده است. با توجه به این که مقدار مرجع برای توقف الگوریتم به صورت $\varepsilon_{stop} = 0.01$ قرار داده شده، کلیه مقادیر مشخص شده در شکل (۱۰) مقادیر بهینه قابل قبول بوده اند. در صورت عدم حصول مقدار مرجع، الگوریتم بهینه سازی به تکرار ادامه داده تا مقدار مرجع ارضا گردد. لذا تعداد تکرارها، از اهمیت بالایی از نظر هزینه محاسباتی و زمانی الگوریتم برخوردار خواهد بود. نتیجتا در شکل (۱۱)، تعداد تکرارهای الگوریتم بهینه سازی قابل رویت بوده و تعداد تکرارها در شکل (۱۱)، نشانگر سرعت همگرایی درجه دوم الگوریتم می‌باشد.

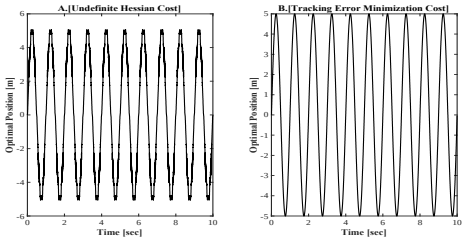


شکل۱۱- تعداد تکرارهای الگوریتم

الگوریتم بهینه سازی، پس از طی کردن تعداد محدود تکرار که در شکل (۱۱)، مشاهده می‌شود، نهایتا مقدار تابع هزینه را حداقل می‌سازد. پس از حداقل شدن تابع هدف مساله در هر گام زمانی حل سیستم مداربسته، مقدار بهینه که به صورت $x^*(k)$ تعریف می گردد، جهت دنبال سازی به

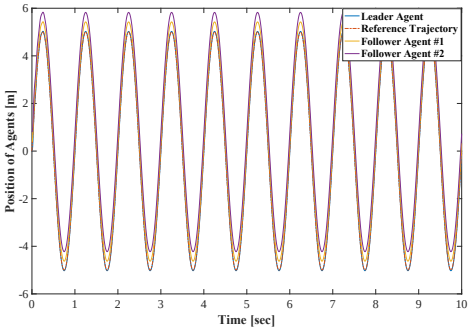
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

سیستم دینامیکی وارد می‌شود. در صورتی که مقادیر بهینه $x^*(k)$ با مقادیر لحظه‌ای مسیر مرجع ورودی برای هر عامل یکسان باشد، می‌توان نتیجه گرفت که اولا الگوریتم شبه نیوتن، عملیات بهینه سازی را فارغ از نامعین بودن علامت ماتریس هسیان، موفقیت آمیز به انجام رسانیده و ثانیا، دنبال سازی مسیر مرجع برای عوامل با ورودی کنترلی محدود امکان پذیر می‌باشد. لذا نتیجه بهینه سازی الگوریتم در شکل (۱۲) نشان داده شده است.



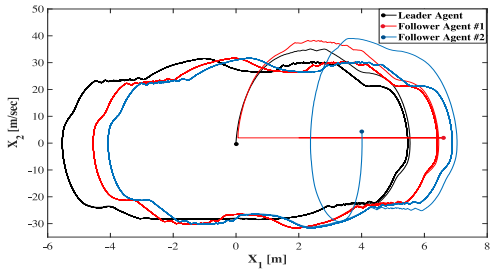
شکل۱۲- مقدار بهینه

پس از آن، در شکل (۱۳) سیستم چند عامل و نتیجه دنبال سازی مسیر مرجع قابل رویت می‌باشد.



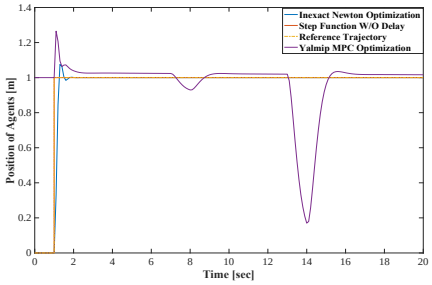
شکل ۱۳- دنبال سازی مسیر مرجع سیستم چند عامل

نهایتا در شکل (۱۴)، مسیر سیستم چند عامل با شرایط اولیه متفاوت برای هر یک از عوامل، در صفحه‌ی $x - \dot{x}$ نمایش داده شده و همچنان کاهش نوسانی خطا، مربوط به تابع هدف به فرم هارمونیک، برای سیستم چندعامل نیز قابل رویت می‌باشد.



شکل۱۴- مسیر سیستم چند عامل در صفحه $x - \dot{x}$

در پایان جهت مقایسه روش کنترلی معرفی شده با روش‌های بهینه سازی متداول، در شکل (۱۵)، مقایسه بین کنترل کننده حاضر و کنترل مدل پیشبین که بهینه سازی آن بر اساس جعبه ابزار Yalmip صورت گرفته [۲۲]، انجام پذیرفته است.



شکل۱۵- مقایسه حضور و عدم حضور الگوریتم بهینه سازی برای تابع هدف با هسیان نامعین

با توجه به شکل فوق، در نقاطی که علامت هسیان تابع هدف تغییر نموده است، واگرایی و افزایش میزان خطا نسبت به مسیر مرجع ورودی قابل رویت می‌باشد. در نتیجه، الگوریتم ارایه شده در مقاله در مسائل با تابع هدف به فرم شکل (۳)، از برتری کامل نسبت به روش‌های کلاسیک بهینه سازی برخوردار می‌باشد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک سیستم دینامیکی غیرخطی و خطی ناپذیر در نظر گرفته شده و با استفاده از روش گسسته سازی آدامز- بشفورث با گام زمانی کوتاه مورد حل قرار گرفت. پس از آن، سیستم دینامیکی مذکور بر اساس نظریه گراف به سیستم چند عامل ارتقا یافت و ماتریس آرایش‌یافتگی سیستم چند عامل در روابط بخش شبیه‌سازی نتایج ارائه گردید. هدف نهایی برای سیستم چند عامل دنبال سازی مسیر مرجع ورودی و حفظ آرایش یافتگی سیستم تعریف شده و جهت دستیابی به این مهم، کنترل کننده بهینه برای سیستم به فرم غیرمتمرکز طراحی شد. با توجه به این نکته که تابع هدف طراحی شده در مقاله حاضر، به صورت غیرخطی بوده و به علت وجود جملات هارمونیک با ضرایب متغیر، علامت ماتریس هسیان از مقادیر مثبت تا صفر و منفی تغییر می‌کند، الگوریتم بهینه سازی نیوتن امکان همگرایی نداشته لذا الگوریتم مذکور به الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن تعمیم یافته که بر اساس روش تعمیم مقادیر ویژه، امکان همگرایی را برای سیستم مداربسته ممکن ساخته و همچنین سرعت همگرایی زبر خطی و درجه دوم نیز در الگوریتم حاضر حفظ گردیده است. کنترل کننده بهینه که هسته اصلی بهینه سازی آن در مقاله حاضر بر اساس روش بهینه سازی نیوتن و شبه نیوتن انتخاب گردیده است، بر اساس حداقل سازی یک تابع هدف کلی، فرایند کنترل آرایش‌یافتگی را به انجام می‌رساند. دلیل اصلی استفاده از روش بهینه سازی شبه نیوتن، سرعت همگرایی درجه دوم الگوریتم مذکور، در حالتی که هسیان تابع هدف به صورت غیرقابل پیشبینی تغییر علامت دارد،

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

بوده است. با این حال با توجه به عدم همگرایی الگوریتم نیوتن، در حالت خاصی که تابع هدف مساله دارای مشتقات دوم نامعین می‌باشد، الگوریتم بهینه سازی شبه نیوتن تعریف و کنترل کننده بهینه بر اساس روش مذکور طراحی گردید. با توجه به نتایج شبیه سازی، نرم ماتریس هسیان مربوط به تابع هدف سیستم چند عامل، از مقادیر مثبت تا مقادیر صفر و منفی تغییر داشته به همین علت، الگوریتم شبه نیوتن مستقل از علامت ماتریس هسیان در هر تکرار بر اساس روش‌های بهینه سازی بر پایه جستجو خطی، دنبال سازی مسیر مرجع و حفظ آرایش یافتگی سیستم را تضمین کرده است.

مراجع

[1] L. Mo, H. Ho, Y. Yu, 2020, "Distributed heterogeneous multi-agent networks optimization with nonconvex velocity constraints", Journal of the Franklin Institute, vol. 357, no.11, pp. 7139-7158.

[2] T. F. Coleman, A. Liao, 2021, "An efficient trust region method for unconstrained discrete-time optimal control problems", Computational Optimization and Applications, Vol. 4, no. 8, pp. 47-66.

[3] M. A. El-Shorbagy, A. M. El-Refaey, 2021, "Hybridization of grasshopper optimization algorithm with genetic algorithm for solving system of non-linear equations", IEEE Access, vol. 08, no. 10, pp. 1121-1136.

[4] R. S. Dembo, S. C. Eisenstat, T. Steihaug,1982, "Inexact Newton methods", SIAM journal on numerical analysis, vol. 19, pp. 400-408.

[5] Jorge. Nocedal, Stephen. J. Wright, "Numerical optimization", Springer, Mathematics subject classification, Second edition, 2006.

[6] T. F. Coleman, A. Liao, 1995, "An efficient trust region method for unconstrained discrete-time optimal control problems", Computational optimization and applications, vol. 4, pp. 47-66.

[7] S. Sen, S. J. Yakowitz, 1987, "A quasi-Newton differential dynamic programming algorithm for discrete-time optimal control", Automatica, vol. 23, no. 6, pp. 749-752.

[8] T. Carraro, S. Dorsam, S. Frei, D. Schwartz, 2018, "An adaptive Newton algorithm for optimal control problem with application to optimal electrode design", Journal of Optimization theory and application, vol. 177, pp. 498-534.

[9] I. E. Livieris, V. Tampakas, P. Pintelas, 2018, "A descent hybrid conjugate gradient method based on the memoryless BFGS update" Numerical Algorithms, vol. 79, pp. 1169-1185.

[10] B. Houska, H. Jaochim Ferreau, M. Diehl, 2011, "An auto-generated real-time iteration algorithm for nonlinear MPC in the microsecond range", Automatica, vol. 47, no. 10, pp. 2279-2285.

[11] S. Gros, M. Zanon, R. Quirynen, A. bemporad, M. Diehl, 2016, "From linear to nonlinear MPC: bridging the gap via the real-time iteration", vol. 93, no. 1, pp. 62-80.

[12] P. Falugi, D. Q. Mayne, 2014, "Getting robustness against unstructured uncertainty: A Tube-based MPC approach", IEEE transaction on automatic control, vol. 59, no. 5, pp. 1290-1295.

[13] E. Nejabat, A. Nikoofard, 2021, "Switched robust model predictive based controller for UAV swarm system" IEEE, 29th Iranian conference of electrical engineering (ICEE), pp. 721-725.

[14] Z. Qiu, N, Jiang, 2021, "An ellipsoidal Newton's iteration method of nonlinear structural systems with uncertain but bounded parameters", Computer method in applied mechanics and engineering, vol. 373, no. 501, pp. 788-808.

[15] X. Feng, S. Cairano, R. Quirenen, 2020, "Inexact adjoint-based SQP algorithm for real time stochastic nonlinear MPC" IFAC, vol. 53, no. 2, pp. 6529-6535.

[16] A. Jodaei, J. Saffar-Ardabili, 2021, "Controller design for containment problem of a class of multi-agent systems with nonlinear identical dynamics and fixed directed graph", Journal of Control, vol. 14, no. 4, pp. 198-209.

[17] D. Xie, S. Xu, Y. Chu, Y. Zou, 2015, "Event-triggered average consensus for multi-agent systems with nonlinear dynamics and switching topology", Journal of the Franklin institute, vol. 352, no. 3, pp. 1080-1098.

[18] D. Yang, W. Ren, X. Liu, W. Chen, 2016, "Decentralized event-triggered consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs", Automatica, vol. 69, pp. 242-249.

[19] Zhizheng. Hou, 2016, "Modeling and formation controller design for multi-quadrotor systems with leader follower configuration", M.Sc. Thesis, Universite de Technologie de Copiegne.

[۲۰] محمدرضا همایی‌نژاد، محمد حسین سعیدی مستقیم، فرنود عرب، ۱۴۰۱، "بازشناخت الگوی نیروهای یاتاقانی محور چرخان صلب دارای نامیرایی‌های جرمی"، نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، در حال انتشار.

[21] Norman. Biggs, "Algebraic Graph Theory" Cambridge University Press, Second edition, 1993.

[22] J. Lofberg, 2004, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 284-289.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]

ضمیمه الف: جدول نماد، متغیر و اپراتورهای استفاده شده در این مقاله

جدول (الف-۱)- پارامترهای مساله

توضیح	نماد پارامتر/متغیر/اپراتور
متغیر مکان سیستم	x
دینامیک سیستم	$f(x,\dot{x})$
بهره ورودی کنترلی	b
ورودی کنترلی	u
زمان گسسته سازی	T
زمان گسسته	k
خطای تعقیب	$e(k-1)$
مسیر مطلوب	$x_d(k-1)$
مجموعه عاملها، تعداد عاملها	$\boldsymbol{\mathcal{N}}, n$
شماره عامل، مجموعه یالهای شبکه گراف	i, ε
ماتریس (تانسور) همسایگی	$\mathbf{G}^A$
درایه های ماتریس همسایگی	w_{ij}^a
ماتریس (تانسور) درجه	$\mathbf{G}^D$
ماتریس (تانسور) پیشرو	$\mathbf{G}^L$
درایه های قطری ماتریس پیشرو	w_i^L
ماتریس (تانسور) تداخل	$\mathbf{G}$
ماتریس (تانسور) لاپلاسین گراف	$\boldsymbol{\mathcal{L}}$
ماتریس لاپلاسین کلی شبکه	Γ
مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین	K
فاصله عامل i-ام و j-ام	$Z_{ij}(k-1)$
فاصله عامل i-ام ومسیر مرجع ورودی	$Z_{i0}(k-1)$
فاصله عامل i-ام از عامل پیشرو	$x_i^{\ell}(k-1)$
مجموعه رباتهای پیشرو	$\mathfrak{L}$
فاصله عوامل همسایه عامل j-ام	$Z_{mj}(k-1)$
ماتریس دلتای کرونکر	$\varepsilon_i^a \varepsilon_j^a$
اپراتور ضرب مستقیم داخلی	$\otimes$
ماتریس همانی	$\mathbf{I}_{n\times n}$
بردار فاصله عوامل سیستم چند عامل	$\mathbf{Z}(k-1)$
بردار حالت عامل i-ام	$\underline{\mathbf{x}}^i(k-1)$
ورودی کنترلی عامل i-ام	$u^i(k-1)$
بردار جامع حالت	$\underline{\mathbf{X}}(k)$
تابع هدف	$J[\underline{\mathbf{X}}(k)]$
فانکشنال تابع هدف	$L_i[\underline{\mathbf{X}}(i)]$
طول گام بهینه سازی	$\alpha(k-1)$
بردار جهت بهینه سازی	$\underline{\mathbf{P}}(k-1)$
اپراتور گرادیان	$\boldsymbol{\nabla}$
ماتریس دلخواه متقارن نامنفرد	$\boldsymbol{\mathcal{B}}(k-1)$
اپراتور گرادیان مجذور	$\boldsymbol{\nabla}^2$
ماتریس تصحیح کننده مقادیر ویژه ماتریس هسیان	$\mathbf{E}(k-1)$
تجزیه مقادیر منفرد ماتریس مجذور گرادیان تابع هدف	$\mathbf{U\Sigma V}^*$
تجزیه چولسکی ماتریس مجذور گرادیان تابع هدف	$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{\mathbf{q}}_i \underline{\mathbf{q}}_i^T$
مقدار اسکالر تصحیح کننده مقادیر ویژه ماتریس هسیان	δ
ضرایب شرایط ولف	C_1, C_2
مجموعه باز دلخواه دوبار مشتق پذیری تابع هدف	$\mathcal{D}$
مجموعه فشره دلخواه دوبار مشتق پذیری تابع هدف	Υ
بردار جامع بهینه حالت	$\underline{\mathbf{X}}^*(k)$
مقدار ویژه مرجع ماتریس هسیان	K_0
تابع علامت	sgn
موقعیت و سرعت عامل i-ام	$x_{i,1}, x_{i,2}$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.2.8]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.11]