مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه ۵۸-۴۷

ارائه یک رویتگر بهینه جدید جهت پیش‌بینی متغیرهای حالت در دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی بر مبنای رویکرد تقریب

سعید کاشفی[۱]، مجید حاجتی پور[۲]

[۱] دانشجوی مقطع دکتری، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه کاشان،کاشان، ایران s.kashefi@grad.kashanu.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران hajatipour@kashanu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۰۱ ویرایش: ۱۴۰۱/۰۵/۰۴ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۲۲

چکیده: در این مقاله یک رویتگر بهینه برای سیستم‌های غیرخطی بر مبنای رویکرد جدید ارائه می‌گردد. در این رویکرد برای دستیابی به تخمین آتی حالت‌های سیستم، ابتدا بسط سری تیلور حالت‌های سیستم در یک افق پیش بینی با مرتبه دلخواه بدست آمده و سپس یک حل تحلیلی مبتنی بر حل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش‌بینی توسعه می‌یابد که یک فرم حلقه بسته رویتگر بهینه را ارائه می‌دهد. در رویتگر پیشنهادی، بهره رویتگر بصورت بهینه از میان تمامی بهره‌هایی که ازحل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش‌بین بدست آمده و پایداری را برآورده می‌کنند، انتخاب می‌گردد. در نهایت نتایج شبیه سازی کارایی روش پیشنهادی در تخمین حالت‌ها را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: سیستم غیرخطی، رویتگر بهینه، پیش‌بینی حالت، تحلیل پایداری.

New Optimal Observer Design Based on State Prediction for a Class of Non-linear Systems Through Approximation

Saeed Kashefi, Majid Hajatipour

Abstract: This paper deals with the optimal state observer of non-linear systems based on a new strategy. Despite the development of state prediction in linear systems, state prediction for non-linear systems is still challenging. In this paper, to obtain a future estimation of the system states, initially Taylor series expansion of states in their receding horizons was achieved to any specified order and then an analytic solution was developed for the prediction error problem, which resulted in a closed-form for non-linear optimal observer. In the proposed observer, the observer gain was optimally chosen among gains obtained from the analytic solution of the prediction error problem and satisfied the stability condition. Finally, the qualitative simulation results showed the effectiveness of the proposed method in the state observation.

Keywords: Nonlinear system, Optimal observer, State prediction, Stability analysis.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

۱- مقدمه

بدلیل کاربرد وسیع تخمین متغیرهای حالت در سیستم‌ها، طراحی رویتگرها در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرارگرفته است. تعیین بهره رویتگر یکی از بخش‌های مهم روند تخمین حالت سیستم‌ها است که در مطالعات قبلی نیز مورد توجه بوده است. اولین رویتگر توسط لیونبرگر ارائه شد که در آن بهره رویتگر بر مبنای پایداری خطای تخمین تنظیم گردید [۱-۳]. در ادامه یک رویتگر حالت شبه-لیونبرگر برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی که درآن دینامیک غیرخطی معلوم و لیپ‌شیتز است، توسط تائو [۴] ارائه شد. این رویتگر در ادامه از منظر نوع سیستم، پایداری وکاربرد در [۵و۶] توسعه یافت. در همه این رویتگرها نیز انتخاب بهره رویتگر مبتنی برآورده شدن پایداری دینامیک خطای تخمین است. در برخی دیگر از رویتگرها مانند رویتگرهای مود لغزشی [۷و۸] و بهره بالا [۹-۱۱] نیز بهره رویتگر براساس پایداری دینامیک خطا در حضور نامعینی‌ها واغتشاشات تعیین شده است. با این وجود در تمامی این رویتگرهای اشاره شده، هیچگونه رویکرد بهینه‌سازی برای انتخاب بهره رویتگر وجود ندارد.

در بررسی رویتگرهای بهینه، خانواده فیلترکالمن و تخمین‌گر های افق متحرک (MHE[1]) بخوبی شناخته شده‌اند. در این دسته از تخمین‌گرها، بهره براساس بهینه‌سازی تابع هزینه تعریف شده تنظیم می‌گردد. به عنوان مثال در تخمین‌گرهای افق متحرک، تخمین به حل بَرخط[2] مسئله بهینه‌سازی افق محدود، پنجره تخمین تعریف شده در حضور قیود، نویز و اغتشاش بستگی دارد [۱۵-۱۲]. اگرچه رویتگرهای بهینه مانند افق متحرک می‌توانند تاحدی در برابر نویز واغتشاش مقاوم باشند، اما دارای برخی مشکلات و چالش‌ها در حالت پیاده سازی هستند. بطورکلی در این نوع از رویتگرها، بهینه‌سازی به صورت بَرخط بوده و می‌تواند در حالت پیاده‌سازی به‌دلیل وجود بعضی محدودیت‌ها، غیر محدب گردد [۱۶و۱۷] و در نتیجه ممکن است سبب گرفتاری در کمینه‌های محلی و به عبارتی، دور شدن از شرایط بهینه شود.

علاوه براین، بهینه‌سازی بَرخط به عملیات محاسباتی سنگینی نیازمند است که در حالت پیاده‌سازی، این مسئله مستلزم محاسبات سریع ودر عین حال زمان نمونه برداری خیلی کوتاه می‌باشد و این موضوع می‌تواند یک چالش برای سیستم‌های با دینامیک سریع محسوب شود. با این وجود، در برخی از مطالعات به صورت محدود سعی بر غلبه بر این دشواری با استفاده از روش تقریب برای بهینه سازی بُرون خط[3]، در تخمین‌گرهای افق متحرک شده است [۱۷-۱۹]. در [۱۷] یک ایده با هدف شناسایی بُرون خط رابطه بین توالی داده‌های اندازه‌گیری (ورودی/خروجی) و حالت اولیه متناظر آنها، در ابتدای پنجره متحرک ارائه شده و در ادامه در [۱۸] پیاده سازی این ایده با استفاده از ویژگی تقریبگری شبکه‌های عصبی انجام شده است.

در مورد سایر رویتگرهای بهینه، برخی مطالعات محدود در زمینه تخمین بهینه متغیرهای حالت انجام شده است [۲۳-۲۰]. تخمین بهینه برمبنای کمینه‌سازی خطای تخمین حالت برای سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان با نرخ همگرایی دلخواه و بصورت بُرون خط در [۲۰] به شکل رویتگر مرتبه کامل[4] و در [۲۱] به شکل رویتگر مرتبه‌کاهش یافته[5] ارائه شده است. علاوه براین، مرجع [۲۲] یک رویتگر بهینه بر مبنای کمینه‌سازی خطای تخمین خروجی سیستم (نه تمامی حالت‌های سیستم) و مبتنی بر حل بُرون خط مسئله بهینه‌سازی ارائه می‌کند و سپس با حل بَرخط مسئله بهینه‌سازی و تقریب تِرم بهینه رویتگر با استفاده از ایده برنامه ریزی پویا[6]، این رویتگر بهینه ارائه می‌شود. همچنین در [۲۳] برای سیستم‌های غیرخطی، نامعینی مدل با استفاده از بهینه سازی بَرخط به روش بیزین[7] تخمین زده می‌شود و جهت افزایش نرخ همگرایی خطای تخمین حالت، بهره رویتگر ارائه می‌گردد.

با این وجود در تمامی این روش‌ها صرفنظر از خطی یا غیرخطی بودن سیستم و عدم وجود تمامی حالت‌ها در تابع هزینه، کمینه‌سازی خطای تخمین در زمان فعلی بدون رویکرد پیش‌بینی انجام شده است. از طرف دیگر در مورد پیش‌بینی حالت‌های یک سیستم غیرخطی به‌صورت بهینه مطالعات قابل توجهی وجود ندارد. در این رابطه پژوهش‌هایی در استفاده از الگوریتم پیش‌بینی برای تخمین حالت های سیستم‌های دارای تاخیر ورودی نیز وجود دارد که ایده آن به منظور اجتناب از بکاربردن تِرم انتگرال‌گیر در کنترل‌کننده‌ها، اولین بار توسط [۲۴] ارائه و توسط [۲۵و ۲۶] در حالت وجود تاخیر بزرگتر توسعه داده شد. در این ایده از زنجیره‌ای از رویتگرها استفاده می‌شود تا هر یک از آنها کسری از تاخیر سیستم را پیش‌بینی‌کنند. این روش به عنوان پیش‌بینی‌کننده‌های متوالی[8] شناخته می‌شود که توسط تعدادی دیگر از پژوهشگران نیز به آن پرداخته شده است [۲۷-۳۱].

با وجود این موارد محدود، برای توسعه رویتگر بهینه در سیستم‌های غیر-خطی، یک رویکرد مناسب می‌تواند تقریب دینامیک متغیر با زمان با مرتبه دلخواه باشدکه در این مقاله به آن پرداخته می‌شود. در این روش، حالت‌های سیستم و تخمین آنها از طریق بکارگیری بسط سری تیلور با مرتبه دلخواه در جهت افزایش دقت تخمین، تقریب زده می‌شوند. اگرچه تقریب حالت‌های یک سیستم ممکن است، ارائه تحلیل پایداری سیستم را پیچیده‌ترکند، اما می‌تواند نگرش مستقیمی از رفتار وعملکرد دینامیک غیرخطی سیستم فراهم نماید و رفتار گذرای سیستم اصلی را به‌طور موثرتری بیان و ارائه شود.

علاوه براین، همانطوریکه اشاره شد، درمورد پیش‌بینی حالت‌های یک سیستم غیرخطی به‌صورت بهینه، با افق‌های پیش‌بینی قابل انتخاب که می‌تواند به طور موثری کیفیت تخمین را بهبود بخشد، مطالعات

[1] Moving Horizon Estimator
[2] On-line
[3] Off-line
[4] Full-order observer
[5] Reduced-order observer
[6] Approximate dynamic programming
[7] Bayesian
[8] Sequential predictors

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

قابل‌توجهی وجود ندارد. در این راستا، در این مقاله با استفاده از روش تقریب متغیرهای حالت، تخمین حالت‌های سیستم در افق‌های پیش‌بینی و با استفاده بسط سری تیلور تا مرتبه دلخواه، تقریب زده می‌شود. سپس یک حل تحلیلی مبتنی بر حل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش بینی متغیرهای حالت، توسعه می یابد که بر اساس آن یک فُرم حلقه بسته برای رویتگر بهینه ارائه می‌گردد. انتخاب دلخواه مرتبه بسط سری تیلور در این مقاله، بیانگر آنست که با دقت دلخواه می‌توان به حل بهینه مسئله پیش بینی نزدیک شد.

نکات برجسته تحقیق ارائه شده در این مقاله را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

الف) استفاده از الگوریتم بهینه سازی مبتنی برحل مسئله پیش‌بین برای طراحی رویتگر بهینه و انتخاب قاعده‌مند بهره رویتگر

ب) امکان انتخاب افق‌های پیش بینی مختلف در تخمین حالت‌ها که بر اساس آن، بهره رویتگر بهینه ، پایداری و سرعت همگرایی تخمین تحت تأثیر قرار می‌گیرند. با توجه به تحلیل‌ها وهمچنین نتایج شبیه‌سازی، ویژگی کمینه سازی خطای پیش‌بینی حالت‌ها در این روش، به طور موثر کیفیت تخمین را بهبود می‌بخشد. در حالی که در رویتگرهای بهینه مرسوم، تخمین فقط با بهینه سازی تخمین در زمان فعلی به دست می‌آید.

ج) تضمین پایداری مجانبی رویتگر بهینه پیشنهادی، مستقل از رویکرد طراحی کنترل‌کننده فراهم می‌شود. به عبارت دیگر، بهره رویتگر پیشنهادی از میان بهره‌هایی که شرط پایداری را برآورده می‌کنند، بدون اینکه تحت تأثیر نوع کنترل‌کننده قرار گیرد، به‌طور بهینه انتخاب می‌شود.

د) از آنجایکه مسائل بهینه‌سازی غیرخطی بَرخط عموماً غیر محدب هستند، رویکرد تحلیلی بُرون خط ارائه‌شده در این مقاله، می‌تواند بر دسته‌ای از مشکلات پیش روی مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب غلبه کند.

در این مقاله یک رویتگر بهینه جدید مبتنی بر پیش بینی ارائه گردید که طبق آنچه که در ویژگی های این روش بیان شد، برخی از مشکلات پژوهش‌های قبلی را ندارد. اما از طرفی این روش نیز به مانند سایر روش‌های موجود دارای محدودیت‌هایی است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به نرمال و تک ورودی- تک خروجی بودن مدل سیستم غیرخطی اشاره کرد. علاوه برآن وجود برخی فرضیات در طراحی رویتگر پیشنهادی اگرچه محدویت جدی ایجاد نمی‌کند، اما برآورده شدن آنها از شرایط مسئله است.

ساختار مقاله به این شرح است که در بخش۲، مدل‌سازی ریاضی و معادلات سیستم ارائه شده ودر بخش۳، رویتگر بهینه و تحلیل پایداری آن توسعه می‌یابد. سپس کارایی روش پیشنهادی با چند مثال شبیه‌سازی در بخش۴ نشان داده می‌شود.

۲- مدل‌سازی و معادلات سیستم

در این تحقیق معادلات سیستم غیرخطی تک ورودی- تک خروجی بصورت زیراست.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t) \\ \dot{x}_n(t) = x_1^{[n]}(t) &= f(\boldsymbol{x},u,t) \;\; 1 \le i \le n-1 \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $u \in R$ و $y \in R$ به‌ترتیب حالت‌ها، ورودی و خروجی سیستم هستند. همچنین f تابع غیرخطی متغیر با زمان بصورت $f: \boldsymbol{R}^n \times R \times R^+ \to R$ و معلوم است

می‌توان معادلات سیستم (۱) را بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\big(f(\boldsymbol{x},u,t)\big) \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = [c_1, \dots, c_n] \tag{۳}$$

فرض۱. سیستم غیرخطی(۱) رویت پذیر است.

فرض۲. تابع غیرخطی $f(\boldsymbol{x},u,t)$ درسیستم (۱) تا مرتبه دلخواه نسبت به زمان مشتق پذیر است.

فرض۳. تابع $f(\boldsymbol{x},u,t)$ شرط لیپ‌شیتز را نسبت به $\boldsymbol{x}$ برآورده می‌کند. یعنی برای تمامی $\boldsymbol{x}$ و $\hat{\boldsymbol{x}}$ها یک عدد ثابت مثبت α وجود دارد بطوریکه:

$$|f(\boldsymbol{x},u,t) - f(\hat{\boldsymbol{x}},u,t)| \le \alpha \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| \tag{۴}$$

۳- طراحی رویتگر بهینه

در ابتدا متغیر حالت $\boldsymbol{x_i(t)}$ در یک افق پیش بینی با سری تیلور تا مرتبه $\boldsymbol{r \ge n}$ تقریب زده می‌شود.

$$\begin{aligned} x_i(t+\tau) &\cong x_i(t) + \tau \dot{x}_i(t) + \dots + \frac{\tau^r}{r!} x_i^{[r]}(t) \\ T_1 &\le \tau \le T_2, r \ge n \end{aligned} \tag{۵}$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} x_i(t+\tau) &\cong \boldsymbol{\vartheta}^T \boldsymbol{X}_i(t), \boldsymbol{\vartheta} \\ &= \left[1, \tau, \dots, \frac{\tau^r}{r!}\right]^T \end{aligned} \tag{۶}$$

و

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_i(t) &= \left[x_i(t), x_i^{[1]}(t), \dots, x_i^{[r]}(t)\right]^T \\ &= \begin{bmatrix} x_i(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t), \\ f(\boldsymbol{x},u,t), \dots, z_{i+r-n-1}\big(\boldsymbol{x}, u, \dots, u^{[i+r-n-1]}, t\big) \end{bmatrix}^T, \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \tag{۷}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

که در آن

$$\begin{aligned} z_0(\boldsymbol{x},u,t) &= f(\boldsymbol{x},u,t) \\ z_1(\boldsymbol{x},u,\dot{u},t) &= f^{[1]}(\boldsymbol{x},u,t) \\ &= \frac{\partial f(\boldsymbol{x},u,t)}{\partial x}\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f(\boldsymbol{x},u,t)}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial f(\boldsymbol{x},u,t)}{\partial t}, \\ z_2(\boldsymbol{x},u,\dot{u},\ddot{u},t) &= f^{[2]}(\boldsymbol{x},u,t) \\ &\vdots \\ ,z_{r-n}(\boldsymbol{x},u,\dots,u^{[r-n]},t) &= f^{[r-n]}(\boldsymbol{x},u,t) \\ &\vdots \\ z_{r-1}(\boldsymbol{x},u,\dots,u^{[r-1]},t) &= f^{[r-1]}(\boldsymbol{x},u,t) \end{aligned} \tag{۸}$$

براساس روابط فوق معادلات دینامیک رویتگر پیشنهادی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}(u_o(t)) \\ \hat{y}(t) &= \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن $u_o(t)$ ترم اصلی رویتگر بهینه بوده که در ادامه بدست می‌آید. از طرفی دینامیک خطای تخمین با استفاده از روابط (۲) و(۹) بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(t) + \boldsymbol{B}(f(\boldsymbol{x},u,t) - u_o) \\ e_y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(t) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن $\boldsymbol{E}(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]^{\boldsymbol{T}}$، $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ و $i = 1, \dots, n$ خطای تخمین هر حالت است.

به‌منظور تعیین $u_o(t)$، مشابه رابطه (۵) پیش‌بینی تخمین حالت $\hat{x}_i(t)$ در افق آتی با استفاده از بسط سری تیلور بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t+\tau) &\cong \hat{x}_i(t) + \tau\dot{\hat{x}}_i(t) + \cdots + \frac{\tau^r}{r!}\hat{x}_i^{[r]}(t) \\ T_1 \le \tau &\le T_2, r \ge n \end{aligned} \tag{۱۱}$$

یا به عبارت دیگر

$$\hat{x}_i(t+\tau) \cong \boldsymbol{\vartheta}^T\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t) \tag{۱۲}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{X}}_i(t) &\cong \left[\hat{x}_i(t), \hat{x}_i^{[1]}(t), \dots, \hat{x}_i^{[r]}(t)\right]^T \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x}_i(t), \hat{x}_{i+1}(t), \dots, \hat{x}_n(t), \\ u_o(t), \dots, u_o^{[i+r-n-1]}(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{۱۳}$$

از طرفی پیش‌بینی خطای تخمین حالت ها به شکل برداری بصورت زیر قابل بیان است:

$$\boldsymbol{E}(t+\tau) = [e_1(t+\tau), e_2(t+\tau), \dots, e_n(t+\tau)]^T \tag{۱۴}$$

براساس روابط (۶) و (۱۲)، این پیش‌بینی خطای تخمین را می‌توان این‌چنین بیان نمود:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}(t+\tau) = \\ &[x_1(t+\tau) - \hat{x}_1(t+\tau), \\ &x_2(t+\tau) - \hat{x}_2(t+\tau), \dots, \\ &x_n(t+\tau) - \hat{x}_n(t+\tau)]^T \\ \cong &[\left(\boldsymbol{X}_1(t) - \widehat{\boldsymbol{X}}_1(t)\right), \left(\boldsymbol{X}_2(t) - \widehat{\boldsymbol{X}}_2(t)\right), \dots, \\ &\left(\boldsymbol{X}_n(t) - \widehat{\boldsymbol{X}}_n(t)\right)]^T\boldsymbol{\vartheta} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

هدف اصلی، یافتن $u_o(t)$ به عنوان بخشی از رویتگر پیشنهادی است، بطوریکه پیش‌بینی خطای تخمین حالت‌های سیستم طبق تابع هزینه زیر کمینه گردد.

$$J = \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{E}^T(t+\tau)\boldsymbol{E}(t+\tau)d\tau \tag{۱۶}$$

که در آن T_1 و T_2 به ترتیب زمان‌های پیش‌بینی بالا و پایین هستند.

قضیه ۱. سیستم غیرخطی (۱) و تابع هزینه (۱۶) را در نظر بگیرید. برمبنای پیش بینی خطای تخمین تعریف شده در (۱۴)، سیگنال $u_o(t)$ در رویتگر پیشنهادی (۹) که تابع هزینه (۱۶) را کمینه می‌کند، بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$u_o(t) = f(\boldsymbol{x},u,t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t) \tag{۱۷}$$

که در آن $\boldsymbol{K} = [k_1, \dots, k_n]$ و در ادامه تعیین می‌گردد.

اثبات. با استفاده از رابطه (۱۵)، تابع هزینه (۱۶) را می‌توان بصورت زیر تقریب زد.

$$\begin{aligned} J &\cong \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_1}^{T_2}\left(\boldsymbol{X}_i(t) - \widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}^T(\boldsymbol{X}_i(t) \\ &\quad - \widehat{\boldsymbol{X}}_i(t))d\tau \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{X}_i(t) - \widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}^T\,d\tau\,(\boldsymbol{X}_i(t) \\ &\quad - \widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{X}_i(t) - \widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{X}_i(t) - \widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right) \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که طبق رابطه (۶) داریم:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}^T\,d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} T_2 - T_1 & \dots & \dfrac{T_2^{r+1} - T_1^{r+1}}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{T_2^{r+1} - T_1^{r+1}}{(r+1)!} & \dots & \dfrac{T_2^{2r+1} - T_1^{2r+1}}{r!\,r!\,(2r+1)} \end{bmatrix}, \tag{۱۹}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} \in R^{r+1}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

آنگاه شرط لازم برای بهینه سازی عبارتست از

$$\frac{\partial J}{\partial u_o}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T}{\partial u_o}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)=0 \tag{۲۰}$$

برای حل رابطه (۲۰)، با استفاده از روابط (۷)، (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right]\\&=\Big[e_i(t),e_{i+1}(t),\dots,e_n(t),f(\boldsymbol{x},u,t)\\&-u_o(t),\dots,z_{i+r-n-1}\left(\boldsymbol{x},u,t,\dots,u^{[i+r-n-1]}\right)\\&-u_o^{[i+r-n-1]}(t)\Big]^T\\&=[\overline{\boldsymbol{E}}_i,\boldsymbol{H}_i]^T\end{aligned} \tag{۲۱}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&\overline{\boldsymbol{E}}_i=[e_i,\dots,e_n]^T,\\&,\overline{\boldsymbol{E}}_i\in R^{(n+1-i)},i=1,\dots,n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}_i=\Big[f(\boldsymbol{x},u,t)\\&-u_o(t),\dots,z_{i+r-n-1}\left(\boldsymbol{x},u,\dots,u^{[i+r-n-1]}\right)\\&-u_o^{[i+r-n-1]}(t)\Big]^T,\\&i=1,\dots,n\ ,\ \boldsymbol{H}_i\in R^{r-n+i}\end{aligned} \tag{۲۲}$$

لذا براساس (۲۱) و (۲۲)، رابطه (۲۰) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}&\left[0_{1\times r}\quad,\left(\frac{\partial H_1}{\partial u_0}\right)^T\right]\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{X}_1(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_1(t)\right)+\cdots\\&+\left[0_{1\times 1}\quad,\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_n}{\partial u_0}\right)_{r\times 1}^T\right]\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{X}_n(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_n(t)\right)\\&=\left[0_{1\times r}\quad,\left(\frac{\partial H_1}{\partial u_0}\right)^T\right]\boldsymbol{\Lambda}\begin{bmatrix}\overline{E}_1\\H_1\end{bmatrix}+\cdots\\&+\left[0_{1\times 1}\quad,\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_n}{\partial u_0}\right)_{r\times 1}^T\right]\boldsymbol{\Lambda}\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{E}}_n\\\boldsymbol{H}_n\end{bmatrix}=0\end{aligned} \tag{۲۳}$$

و در نتیجه رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\left[\Lambda_{r+1,1},\dots,\Lambda_{r+1,r+1}\right]\begin{bmatrix}\overline{E}_1\\H_1\end{bmatrix}+\cdots\\&+\left[\Lambda_{2,1},\dots,\Lambda_{2,r+1}\right]\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{E}}_n\\\boldsymbol{H}_n\end{bmatrix}=0\end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن $\Lambda_{i,j}$ بیانگر المان سطر i ام و ستون j ام ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ است. با ساده سازی رابطه (۲۴) داریم:

$$\begin{aligned}&\gamma_r\left(z_{r-1}\left(\boldsymbol{x},u,\dots,u^{[r-1]}\right)-u_o^{[r-1]}(t)\right)+\cdots\\&+\gamma_1(f(\boldsymbol{x},u,t)-u_o(t))\\&=\sum_{i=1}^{n}\overline{k}_ie_i(t)=\ \overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}(t)\end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن γ_i و $\overline{\boldsymbol{K}}=\left[\overline{k}_1,\overline{k}_2,\dots,\overline{k}_n\right]$ معلوم و برمبنای ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ تعیین می‌گردند.

$$u_o(t)=f(\boldsymbol{x},u,t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t) \tag{۲۶}$$

حال برای محاسبه صحیح بردار $\boldsymbol{K}$ از آنجاکه مشتق‌های زمانی عبارت $f(\boldsymbol{x},u,t)$ تا مرتبه $r-1$ در رابطه (۸) مشخص شده‌اند، داریم:

$$\begin{aligned}u_o(t)&=f(\boldsymbol{x},u,t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t)\\\dot{u}_o(t)&=z_1(\boldsymbol{x},u,\dot{u},t)+\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{E}}(t)\\&\vdots\\u_o^{[r-1]}&=z_{r-1}\left(\boldsymbol{x},u,\dots,u^{[r-1]},t\right)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{[r-1]}\end{aligned} \tag{۲۷}$$

سپس با توجه به $u_o(t)$ در رابطه (۲۷)، رابطه دینامیک خطا در (۱۰) را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(t)+\boldsymbol{B}\left(-\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t)\right)=\boldsymbol{A}_{c1}\boldsymbol{E}\\e_y(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(t)\end{aligned} \tag{۲۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_{c1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\&=\begin{bmatrix}0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\\-k_1&-k_2&\dots&-k_n\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۲۹}$$

با استفاده از رابطه (۲۸) مشتقات خطای $\boldsymbol{E}$ بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}(t)&=\boldsymbol{A}_{c1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{t})\\\boldsymbol{E}^{[2]}(t)&=\boldsymbol{A}_{c1}^{(2)}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{t})\\&\vdots\\\boldsymbol{E}^{[\boldsymbol{r-1}]}(t)&=\boldsymbol{A}_{c1}^{(\boldsymbol{r-1})}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{t})\end{aligned} \tag{۳۰}$$

از جایگذاری (۳۰) در (۲۷) واستفاده از حاصل رابطه (۲۷) در (۲۵) رابطه ماتریسی زیر بدست می‌آید که از حل آن به سادگی بردار $\boldsymbol{K}$ حاصل شده و اثبات کامل می‌گردد.

$$\gamma_r\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_{c1}^{(r-1)}+\cdots+\gamma_1\boldsymbol{K}+\overline{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{0} \tag{۳۱}$$

لذا براساس نتیجه قضیه۱ یعنی رابطه (۲۶)، دینامیک رویتگر پیشنهادی (۹) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\left(f(\boldsymbol{x},u,t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t)\right)\\\hat{y}(t)&=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{۳۲}$$

از آنجا که در این رویتگر، از سیگنال های $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{E}$ استفاده شده است، لذا این رویتگر تحقق پذیر نیست. در ادامه برای تحقق پذیر نمودن رویتگر پیشنهادی، سیگنال جدید $\hat{u}_o(t)$ تعریف شده به صورت زیر، به‌جای سیگنال $u_o(t)$، بکار گرفته می‌شود:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

$$\hat{u}_o(t) = f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t) + \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{E}}(t) \tag{۳۳}$$

و همچنین در پایان این مقاله نشان داده خواهد شد که $\lim_{t\to\infty} \hat{u}_o(t) = u_o(t)$.

بر این اساس، دینامیک رویتگر بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\hat{x}(t) + \boldsymbol{B}\left(f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t) + \boldsymbol{K}\,\hat{\boldsymbol{E}}(t)\right) \\ \hat{y}(t) &= \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned} \tag{۳۴}$$

با استفاده از رابطه (۲) و(۳۴)، دینامیک خطای تخمین بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}(t) = \boldsymbol{A_{c1}}\boldsymbol{E}(t) + \boldsymbol{B}(f(\boldsymbol{x}, u, t) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t) \\ + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{E}}(t)) \end{aligned} \tag{۳۵}$$

در ادامه در این مقاله، خطای تخمین $\boldsymbol{E}$ توسط رویتگر زیر تخمین زده می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{E}}}(t) = \boldsymbol{A}_{c1}\hat{\boldsymbol{E}}(t) + \boldsymbol{L}_o\left(e_y(t) - \hat{e}_y(t)\right) \\ + (\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_2^{-1})^T e_y(t) \end{aligned} \tag{۳۶}$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{t})$ و $\boldsymbol{e_y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{t})$ است. بردار $\boldsymbol{L_o} \in \boldsymbol{R^n}$ و ماتریس $\boldsymbol{P_2} \in \boldsymbol{R^n}$ نیز از برآورده شدن و حل معادله فرض۵ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}(t) = \boldsymbol{A}_{c2}\tilde{\boldsymbol{E}}(t) + \boldsymbol{B}(f(\boldsymbol{x}, u, t) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t) \\ + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{E}}(t)) - \left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)^T e_y(t) \\ \boldsymbol{A}_{c2} = \boldsymbol{A}_{c1} - \boldsymbol{L}_0\boldsymbol{C} \end{aligned} \tag{۳۷}$$

فرض ٤. برای هر عدد مثبت ε_1 و ε_2 ماتریس های معین مثبت $\boldsymbol{Q}_1$ و $\boldsymbol{P}_1$ وجود دارد، بطوریکه روابط زیر برقرار باشند.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{c1}^T\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_{c1} + \varepsilon_1\boldsymbol{C}^2 + (\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2})\alpha^2\boldsymbol{I} = -\boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T \end{aligned} \tag{۳۸}$$

فرض ۵. برای هر عدد مثبت ε_2 ماتریس‌های معین مثبت $\boldsymbol{Q}_2$ و $\boldsymbol{P}_2$ وجود دارد، بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{c2}^T\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_{c2} + \varepsilon_2(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})^T + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ = -\boldsymbol{Q}_2 \end{aligned} \tag{۳۹}$$

توضیح ۱. از آنجا که مرتبه بسط سری تیلور r و زمان‌های پیش‌بینی T_1 و T_2 قابلیت انتخاب دارند و تغییر آنها منجر به $\boldsymbol{K}$ و $\boldsymbol{A}_{c1}$ متفاوت می گردد، لذا با انتخاب مناسب این پارامترها و همچنین ماتریس‌های معین مثبت $\boldsymbol{Q}_1$ و $\boldsymbol{Q}_2$، پارامترهای ε_1،ε_2 و بهره رویتگر خطا $\boldsymbol{L}_0$ که در $\boldsymbol{A}_{c2}$ ظاهر می‌شود، فرض‌های ۴ و۵ می‌توانند برآورده شوند. جهت توضیحات بیشتر در مورد نحوه انتخاب این پارامترها به توضیح ۳ و الگوریتم ۱ مراجعه نمایید.

قضیه۲. رویتگر بهینه (۳۴) وهمچنین روابط (۳۵) الی (۳۷) را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن فرض‌های ۱ الی ۵، دینامیک خطای تخمین پایدار مجانبی است.

اثبات. برای اثبات پایداری با استفاده از معادلات خطای تخمین (۳۵) و (۳۷) تابع لیاپانف زیر در نظرگرفته می‌شود.

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{E}}^T\boldsymbol{P}_2\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{۴۰}$$

که در آن $\boldsymbol{P}_1$ و $\boldsymbol{P}_2$ ماتریسهای معین مثبت تعریف شده در فرض ۴ و ۵ است. اکنون با مشتق‌گیری زمانی از تابع لیاپانف (۴۰) می‌توان نوشت: با جایگذاری رابطه (۳۵) و (۳۷) در رابطه (۴۱) رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{V} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{E}}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\dot{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}^T\boldsymbol{P}_2\tilde{\boldsymbol{E}} \\ + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{E}}^T\boldsymbol{P}_2\dot{\tilde{\boldsymbol{E}}} \end{aligned} \tag{۴۱}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{A}_c^T\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_c^T)\boldsymbol{E} + \\ \frac{1}{2}\left(f(\boldsymbol{x}, u, t) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t)\right)(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{E} + \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\left(f(\boldsymbol{x}, u, t) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t)\right) + \\ \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{E}}^T(\boldsymbol{A}_{c1}^T\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_{c1}^T)\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{E}}^T\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{E}} + \\ \frac{1}{2}\left(f(\boldsymbol{x}, u, t) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t)\right)(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})^T\tilde{\boldsymbol{E}} + \\ \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{E}}^T\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\left(f(\boldsymbol{x}, u, t) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t)\right) - \\ \left(\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)\boldsymbol{P}_2\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{۴۲}$$

لازم به توضیح است که در (۴۲) از رابطه زیر استفاده شده است.

$$\begin{aligned} \left((\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_2^{-1})^T\, e_y\right)^T = ((\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_2^{-1})^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{E})^T \\ = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_2^{-1} = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_2^{-1} \end{aligned} \tag{۴۳}$$

لذا دو عبارت آخر رابطه (۴۲) حذف می‌شوند. همچنین می دانیم برای هر ماتریس $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$ و هر عدد مثبت ε، نامساوی زیر برقرار است [۳۲].

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{X} \le \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} + \varepsilon\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} \tag{۴۴}$$

حال با قرار دادن $\boldsymbol{X} = f(\boldsymbol{x}, u, t) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, u, t)$ و $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{E}$ و با استفاده از فرض‌های ۳ و ۴ نامساوی زیر بدست می‌آید.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

$$\begin{aligned}&\left(f(\boldsymbol{x},u,t)-f(\hat{\boldsymbol{x}},u,t)\right)^T(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{E}+\\&\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\left(f(\boldsymbol{x},u,t)-f(\hat{\boldsymbol{x}},u,t)\right)\\&\le\frac{1}{\varepsilon_1}|f(\boldsymbol{x},u,t)-f(\hat{\boldsymbol{x}},u,t)|^2\\&\qquad+\varepsilon_1\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{E}\\&\le\frac{1}{\varepsilon_1}\alpha^2\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}+\varepsilon_1\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}\end{aligned}\tag{۴۵}$$

بطور مشابه برای عبارت مشابه دیگر در رابطه (۴۲) و با استفاده از فرض۳ داریم:

$$\begin{aligned}&\left(f(\boldsymbol{x},u,t)-f(\hat{\boldsymbol{x}},u,t)\right)^T(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})^T\tilde{\boldsymbol{E}}+\\&\tilde{E}^T\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\left(f(\boldsymbol{x},u,t)-f(\hat{\boldsymbol{x}},u,t)\right)\\&\le\frac{1}{\varepsilon_2}\alpha^2\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}+\varepsilon_2\tilde{\boldsymbol{E}}^T(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})^T\tilde{\boldsymbol{E}}\end{aligned}\tag{۴۶}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۴۵) و (۴۶) در (۴۲) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}\le\boldsymbol{E}^T\Big(&\boldsymbol{A}_{c1}^T\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_{c1}+\varepsilon_1\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\\&+(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2})\alpha^2\boldsymbol{I}\Big)\boldsymbol{E}+\\&\tilde{\boldsymbol{E}}^T(\boldsymbol{A}_{c2}^T\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_{c2}+\varepsilon_2(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B})^T\\&+\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\tilde{\boldsymbol{E}}\end{aligned}\tag{۴۷}$$

و در نهایت طبق فرض‌های ۴ و ۵، نامساوی زیر نتیجه می‌شود.

$$\dot{V}\le-\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{E}-\tilde{\boldsymbol{E}}^T\boldsymbol{Q}_2\tilde{\boldsymbol{E}}\tag{۴۸}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای $\boldsymbol{E}$ و $\tilde{\boldsymbol{E}}$ پایدار مجانبی هستند. از این‌رو اثبات کامل است.

توضیح۲. در قضیه۲، همگرایی مجانبی خطای تخمین حالت و خطای تخمین خطا به سمت صفر اثبات گردید. لذا برای تمامی $t\ge0$ طبق فرض۳ و روابط (۲۶) و (۳۳) داریم.

$$\begin{aligned}|u_o(t)-\hat{u}_o(t)|\le\alpha\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|\\+\|\boldsymbol{K}\|\|\boldsymbol{E}(t)-\hat{\boldsymbol{E}}(t)\|\end{aligned}\tag{۴۹}$$

در نتیجه عبارت پیش‌بین رویتگر پیشنهادی، یعنی $\hat{u}_o(t)$ در (۳۳) بطور مجانبی به مقدار بهینه خود در رابطه (۲۶) میل می کند و یا به عبارتی

$$\lim_{t\to\infty}\hat{u}_o(t)=u_o(t)\tag{۵۰}$$

توضیح۳. در جمع‌بندی روند طراحی رویتگر بهینه پیشنهادی، ابتدا ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ طبق پارامتر های افق پیش‌بینی T_1 و T_2 و مرتبه بسط سری تیلور r محاسبه می‌گردد. سپس بر مبنای رابطه (۳۱) بردار $\boldsymbol{K}$ بصورت بُرون‌خط و بدون نیاز به بهینه‌سازی بَرخط بدست می‌آید. ازآنجا که بردار $\boldsymbol{K}$ از الگوریتم بهینه‌سازی حاصل می‌شود، لذا بایستی فرض۴ را بررسی و بهره مناسب $\boldsymbol{K}$ را از میان بهره‌هایی که این شرط را برآورده می‌کنند، انتخاب کرد و در نتیجه رویتگر حالت بهینه بصورت رابطه (۳۴) ارائه می گردد. سپس در ادامه، فرض ۵ بررسی و معادله آن با استفاده از بردار بهره $\boldsymbol{K}$ بدست آمده از مرحله قبل حل می‌شود، که در نتیجه بردار $\boldsymbol{L_0}$ و ماتریس $\boldsymbol{P_2}$ انتخاب و رویتگر خطا بصورت رابطه (۳۶) ارائه می‌گردد. این رویتگر در تکمیل رویتگر حالت (۳۴) به آن در انجام تخمین حالت‌های سیستم کمک می‌کند. علاوه بر این با توجه به برآورده شدن همزمان شروط ۴ و ۵، پایداری مجانبی خطای تخمین نیز تضمین می‌گردد. الگوریتم۱، روند طراحی رویتگر بهینه پیشنهادی را بیان می‌کند.

الگوریتم ۱. روند طراحی رویتگر بهینه پیشنهادی

گام ۱. مرتبه مناسب بسط سری تیلور r و زمان های پیش‌بینی T_2,T_1 را انتخاب کنید.

گام ۲. ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ را از معادله (۱۹) محاسبه کنید.

گام ۳. معادله (۳۱) را برای بدست آوردن بردار بهره $\boldsymbol{K}$ حل کنید.

گام ٤. معادله (۳۸) را با انتخاب ماتریس $\boldsymbol{Q}_1$ مثبت مناسب بررسی کنید.

گام ٥. ماتریس $\boldsymbol{Q}_2$ معین مثبت و $\boldsymbol{L}_o$ مناسب را برای برآورده شدن (۳۹) انتخاب کنید.

گام ٦. معادله (۳۹) را برای یافتن ماتریس $\boldsymbol{P}_2$ معین مثبت متقارن حل کنید.

گام ۷. بررسی کنید که آیا $\boldsymbol{P}_2$ معین مثبت متقارن است یا خیر. اگر خیر، به گام ۱ بروید، گام‌های ۱-۶ را تکرار کنید. در غیر این صورت به گام بعد بروید.

گام ۸. $\boldsymbol{K}$ بردار بهره بهینه برای رویتگر پیشنهادی در (۳۴) است.

٤- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش برای ارزیابی رویتگر بهینه طراحی شده، به شبیه‌سازی چند مثال و تحلیل نتایج آن پرداخته می‌شود.

مثال۱. دینامیک سیستم یک ربات تک بازو با معادلات زیر در نظر بگیرید [۳۳].

$$M\ddot{q}+\frac{1}{2}mglsinq=u\tag{۵۱}$$

که در آن m و l به ترتیب جرم و طول بازو است. g ثابت گرانش، u ورودی گشتاور، و M ممان اینرسی است. با انتخاب $x_1=q,x_2=\dot{q}$ معادلات فضای حالت آن بصورت زیر قابل توصیف است.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u-mglsinx_1)/M\\y=x_1+x_2\end{aligned}\tag{۵۲}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

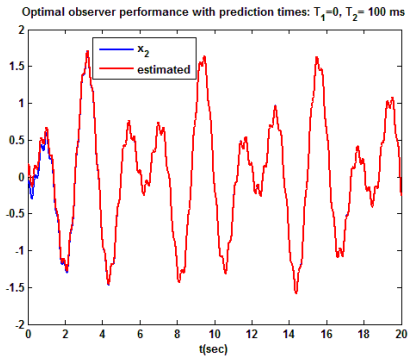
شرایط اولیه سیستم و رویتگر به ترتیب بصورت $\boldsymbol{x}(0) = [0.1, -0.1]^T$ و $\hat{\boldsymbol{x}}(0) = [0,0]^T$ و همچنین پارامترهای سیستم درشبیه سازی بصورت $M = 0.1,\ m = 1, l = 1$, و $g = 9.8$ در واحد SI در نظرگرفته می‌شوند. ورودی کنترلی نیز $u = sin2t + cos20t$ است.

با استفاده از روند طراحی در الگوریتم۱ به ازای زمان‌های پیش بینی $T_1 = 0,\ T_2 = 100ms$ و مرتبه بسط تیلور $r = 2$ بهره رویتگر بصورت $\boldsymbol{K} = [400, 26.67]$ بدست می‌آید. علاوه براین، بهره رویتگر خطا $\boldsymbol{L}_0 = [1,100]^T$، در فرض۵ ماتریس‌های معین مثبت بصورت $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$، $\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} 7500 & 5510 \\ 1776.7 & 1766.7 \end{bmatrix}$ و $\varepsilon_2 = 5$ انتخاب می‌گردد. فرض۴ نیز به ازای $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 421.67 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 785 & 0 \\ 0 & 36.35 \end{bmatrix}$ و $\varepsilon_1 = 5, \alpha = 5$ برقرار است. شکل۱ نتایج شبیه سازی رویتگر پیشنهادی را نشان می‌دهد. همانطورکه از نمودار شکل۱ مشاهده می‌شود، عملکرد رویتگر پیشنهادی مناسب و همگرایی حالت‌های رویتگر به حالت‌های واقعی سیستم بخوبی انجام می‌گیرد.

به منظور بررسی تاثیر انتخاب زمان‌های پیش بینی مختلف T_1, T_2 در عملکرد رویتگر پیشنهادی، خطای تخمین حالت‌ها به ازای زمان‌های پیش‌بینی مختلف در شکل۲ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود با کاهش زمان بالای پیش‌بینی سرعت، همگرایی سیگنال خطا بیشتر می‌شود. جهت بررسی بیشتر عملکرد رویتگر، از شاخص تحلیل عمبکرد خطا ISE با رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$ISE = \int_0^{t_f} \boldsymbol{e}^2(t)dt \qquad (۵۳)$$

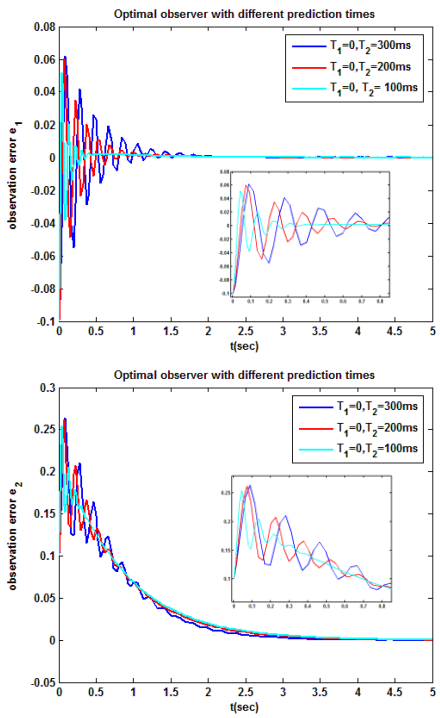
که در آن t_f زمان کُل شبیه سازی است. نتایج عددی این شاخص عملکرد به ازای زمان‌های پیش بینی متفاوت بصورت جدول۱ است. مشاهده می‌شود با کاهش زمان بالای پیش بینی این شاخص عملکرد که بیانگر میزان خطای تخمین در کُل شبیه‌سازی است، کاهش می‌یابد.



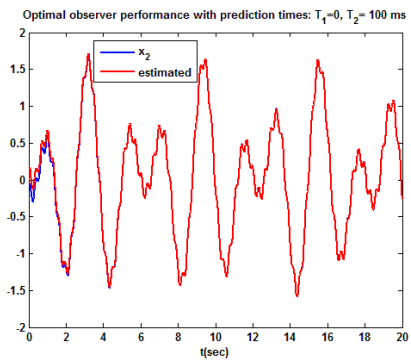
شکل۱ : مسیر حالت سیستم ربات تک بازو و تخمین آن توسط رویتگر بهینه پیشنهادی

جدول ۱: شاخص عملکرد ISE برای رویتگر بهینه پیشنهادی به ازای زمان پیش‌بینی مختلف

ISE	زمان پیش بینی بالا و پایین		
	$T_1 = 0,$ $T_2 = 300ms$	$T_1 = 0,$ $T_2 = 200ms$	$T_1 = 0,$ $T_2 = 100ms$
$\int_0^{t_f} e_1^2(t)\mathrm{dt}$	0.00081	0.00054	0.00023
$\int_0^{t_f} e_2^2(t)\mathrm{dt}$	0.02131	0.02080	0.02038



شکل۲: خطای تخمین حالت سیستم ربات تک بازو توسط رویتگر بهینه پیشنهادی به ازای زمان‌های پیش بینی مختلف



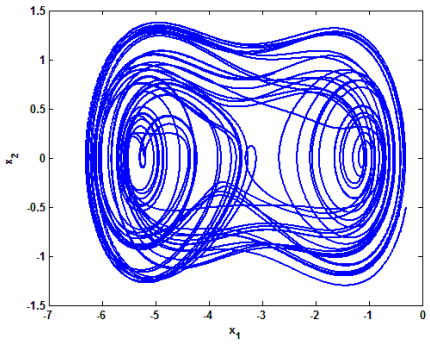
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

مثال ۲. معادلات فضای حالت سیستم پاندول آشوبناک را بصورت زیر در نظر بگیرید [۳۴].

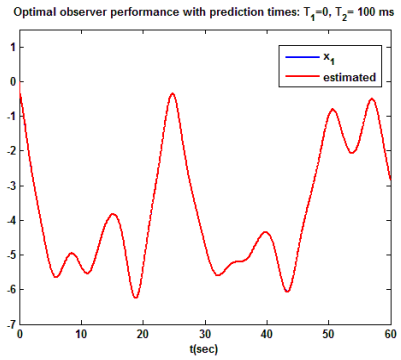
$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(-sinx_1-\alpha x_1 - \delta x_2+f(t))$$
$$y=x_1+x_2 \qquad (۵۴)$$

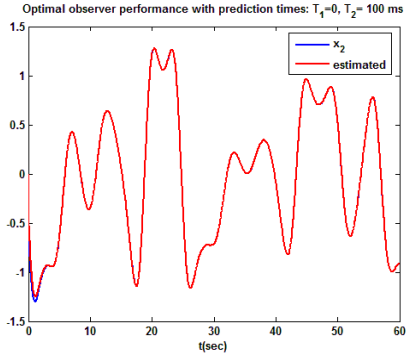
که در آن $f(t)=(\alpha-\omega^2)a_1\cos(\omega t)-\delta\omega a_1\sin(\omega t)+\sin(a_1\cos(\omega t)+a_0)+\alpha a_0$ و پارامترهای آن بصورت $\alpha=0.5, a_1=0.3, \delta=0.12, \omega=0.75, a_0=-3$ می‌باشند.

در شکل۳، نمودار صفحه فاز و رفتار آشوبناک این سیستم به مدت ۵۰۰ ثانیه نشان داده شده است. با توجه به الگوریتم۱، در رویتگر طراحی‌شده زمان‌های پیش بینی $T_1=0,\ T_2=100ms$، مرتبه بسط سری تیلور $r=2$، بهره رویتگر بصورت $\boldsymbol{K}=[400,26.67]$، بهره رویتگر خطا $\boldsymbol{L}_o=[1,100]^T$، ماتریس‌های معین مثبت در فرض۵ بصورت $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1000 & 10\\ 10 & 10\end{bmatrix}$، $\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}7500 & 5510\\ 1776.7 & 1766.7\end{bmatrix}$ و $\varepsilon_2=5$ انتخاب می‌شوند. شرایط اولیه سیستم و رویتگر به ترتیب بصورت $\boldsymbol{x}(0)=[-0.3,-0.5]^T$ و $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=[0,0]^T$ هستند. علاوه براین فرض۴ نیز به ازای $P_1=\begin{bmatrix}422.67 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}784.75 & 0\\ 0 & 36.09\end{bmatrix}$ و $\varepsilon_1=4, \alpha=5$ برآورده می‌گردد.



شکل۳: رفتار آشوبناک سیستم پاندول آشوبناک (صفحه فاز)

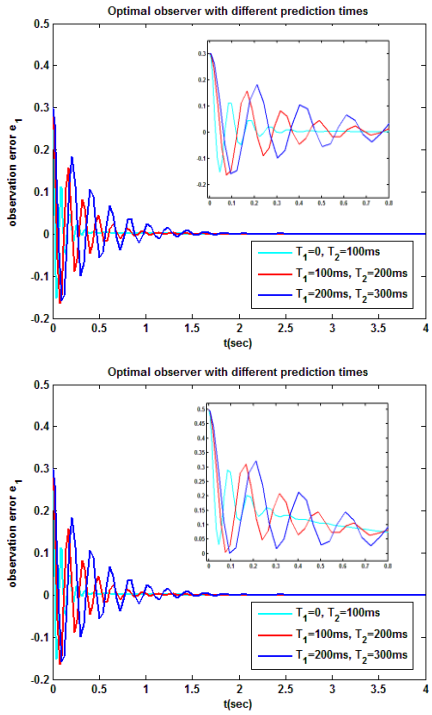




شکل ۴: مسیر حالت سیستم پاندول آشوبناک و تخمین آن توسط رویتگر بهینه پیشنهادی

شکل۴ نتایج شبیه سازی رویتگر پیشنهادی را نشان می‌دهد. همانطوریکه مشاهده می‌شود، عملکرد رویتگر پیشنهادی و همگرایی حالت‌های رویتگر به حالت‌های واقعی سیستم بخوبی انجام می‌گیرد. همچنین در شکل۵ به منظور بررسی تاثیر زمان‌های بالا و پایین متفاوت اما با طول بازه زمان پیش بینی یکسان، سیگنال خطای تخمین رویتگر پیشنهادی، به ازای زمان‌های پیش‌بینی مختلف $T_1,\ T_2$ با فاصله زمانی یکسان یعنی $T_1-T_2=100ms$ نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود با کاهش زمان‌های بالا و پایین پیش‌بینی، مشابه نتایج مثال قبلی سرعت همگرایی سیگنال خطا بیشتر می‌شود. مشابه مثال قبل نتایج عددی شاخص عملکرد ISE به ازای زمان‌های پیش بینی متفاوت بصورت جدول۲ آمده است. مشاهده می‌شود با افزایش زمان‌های پیش‌بینی، این شاخص عملکرد که بیانگر میزان خطای تخمین در کل شبیه‌سازی است، افزایش می‌یابد.



شکل۵: خطای تخمین حالت سیستم پاندول آشوبناک توسط رویتگر بهینه پیشنهادی به ازای زمان‌های پیش بینی مختلف

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

جدول ۲: شاخص عملکرد ISE برای رویتگر بهینه پیشنهادی به ازای زمان پیش بینی مختلف

ISE	زمان پیش بینی بالا و پایین		
	$T_1 = 200ms,$ $T_2 = 300ms$	$T_1 = 100ms,$ $T_2 = 200ms$	$T_1 = 0,$ $T_2 = 100ms$
$\int_0^{t_f} e_1^2(t)\mathrm{dt}$	0.00788	0.00513	0.00213
$\int_0^{t_f} e_2^2(t)\mathrm{dt}$	0.02503	0.02249	0.01964

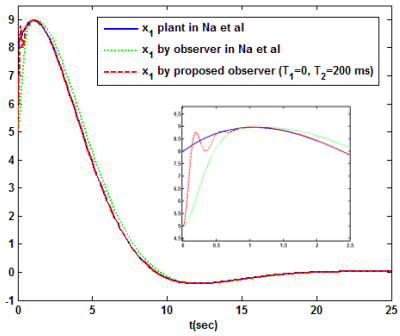
مثال ۳. سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید. [۲۲]

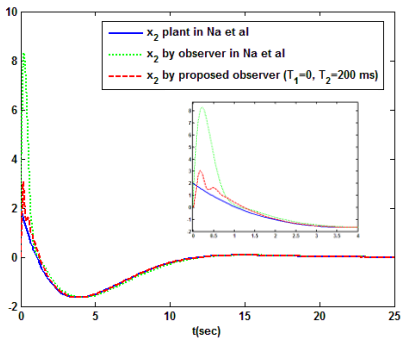
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -0.56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{۵۵}$$

در این مثال، نتایج به‌دست‌آمده توسط رویتگر پیشنهادی با رویتگر بهینه ارائه شده توسط مرجع [۲۲] مقایسه شده است. در شبیه سازی رویتگر [۲۲]، تنظیم پارامترها از همان مرجع گرفته شده است. از سوی دیگر، پارامترهای تنظیم رویتگر پیشنهادی بر اساس روند طراحی ارائه شده در الگوریتم۱، تنظیم می‌شوند.

در شبیه‌سازی انجام شده، شرایط اولیه سیستم و رویتگر به ترتیب $x(0) = [8,2]^T$ و $\hat{x}(0) = [5,0]^T$ ، مرتبه سری تیلور $r = 2$ ، زمان‌های پیش بینی $T_1 = 0, T_2 = 200ms$، بردار بهره رویتگر $K = [100, 13.35]^{\mathrm{T}}$ و بردار بهره رویتگر خطا $\boldsymbol{L}_o = [1,10]^T$ در نظر گرفته شده‌اند. علاوه براین ماتریس‌های معین مثبت $\boldsymbol{P}_2$ و $\boldsymbol{Q}_2$ در فرض۵ بصورت $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix}500 & 10\\ 10 & 10\end{bmatrix}$، $\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix}2100 & 1110\\ 243.5 & 233.5\end{bmatrix}$ و $\varepsilon_2 = 1$ هستند. فرض۴ نیز به ازای $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix}111.35 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix}184.5 & 0\\ 0 & 9.2\end{bmatrix}$ و $\varepsilon_1 = 2, \alpha = 3$ برقرار است.

نتایج شبیه سازی هر دو رویتگر در شکل۶ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، نرخ همگرایی تخمین حالت‌ها به حالت‌های واقعی در رویتگر پیشنهادی بیشتر بوده و در نتیجه خطای تخمین نیز کمتر است. بنابراین رویتگر پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به رویتگر مرجع [۲۲] دارد.





شکل ۶:: نتایج مقایسه ای رویتگر پیشنهادی و رویتگر ارائه شده در [۲۲] (Na et al)

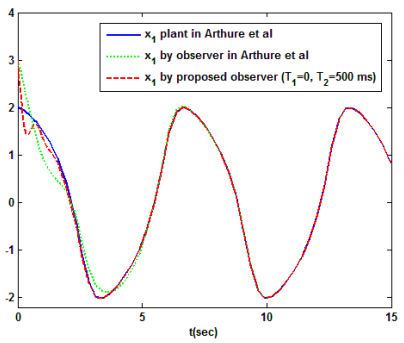
مثال ٤. سیستم غیرخطی موسوم به نوسان‌ساز وندرپول را در نظر بگیرید. [۳۵]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\{-x_1 + x_2 - x_1^2 x_2\} \qquad y = x_1 + x_2 \tag{۵۶}$$

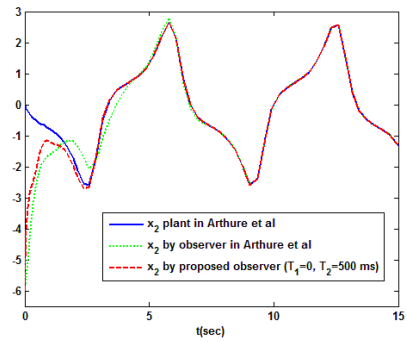
در این مثال، برای بررسی مقایسه‌ای، نتایج رویتگر پیشنهادی با رویتگر غیرخطی ارائه شده در مرجع [۳۵] برای سیستم نوسان‌ساز وندرپول مقایسه شده است. در شبیه‌سازی پارامترهای رویتگر پیشنهادی بر اساس روند طراحی ارائه‌شده در الگوریتم۱ و پارامترهای رویتگر [۳۵]، از همان مرجع گرفته می‌شوند. در شبیه‌سازی انجام شده، شرایط اولیه سیستم و رویتگر به ترتیب $x(0) = [2,0]^T$ و $\hat{x}(0) = [3,-6]^{\mathrm{T}}$ ، مرتبه سری تیلور $r = 2$ ، زمان های پیش بینی $T_1 = 0, T_2 = 500ms$ و بردار بهره رویتگر $K = [16.11, 5.36]^T$ می‌باشند.

فرض۴ به ازای $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix}18.47 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix}23.89 & 0\\ 0 & 0.39\end{bmatrix}$ و $\alpha = 2$ ، $\varepsilon_1 = 3$ برقرار است. علاوه براین در فرض۵، بهره رویتگر خطا $\boldsymbol{L}_o = [1,5]^T$، ماتریس‌های معین مثبت $\boldsymbol{P}_2$ و $\boldsymbol{Q}_2$ بصورت $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix}1000 & 10\\ 10 & 10\end{bmatrix}$، $\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix}2161.1 & 171.1\\ 63.6 & 53.6\end{bmatrix}$ و $\varepsilon_2 = 1$ در نظر گرفته شده‌اند.

همانطوریکه نتایج شبیه‌سازی در شکل۷ نشان می‌دهد، رویتگر پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به رویتگر مرجع [۳۵] دارد. زیرا همگرایی حالت های رویتگر به حالت های واقعی در رویتگر پیشنهادی بیشتر بوده و در نتیجه خطای تخمین نیز کمتر است.



[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]



شکل ۷: مسیر حالت سیستم واندرپل ، نتایج مقایسه ای رویتگر پیشنهادی و رویتگر ارائه شده در [۳۵] (Arthure et al)

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید در طراحی رویتگر بهینه برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی متغیر با زمان معرفی گردید. در ابتدا، خطای پیش‌بینی با استفاده از بسط سری تیلور با مرتبه دلخواه که تقریب مناسبی از رفتار سیستم غیرخطی را نتیجه می‌دهد، تقریب زده می‌شود. این بدان معناست که هیچ محدودیتی در مرتبه بسط سری تیلور وجود ندارد و بنابراین از نظر تئوری راه حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله می‌تواند با هر دقت مشخصی به مسئله پیش‌بینی نزدیک شود. سپس، تابع هزینه شامل خطای پیش‌بینی به صورت تحلیلی کمینه‌سازی شده و منجر به ارائه بهره بهینه رویتگر پیشنهادی می‌شود

علاوه براین، در این رویتگر پیشنهادی، پایداری مجانبی خطای تخمین اثبات شد و همچنین بر خلاف برخی مطالعات مرتبط اخیر، طراحی رویتگر بهینه پیشنهادی تحت تأثیر نوع و شرایط کنترل‌کننده سیستم قرار نمی‌گیرد. ازآنجا که در این رویکرد نیازی به بهینه‌سازی بَرخط نیست، پیاده سازی رویتگر پیشنهادی حتی برای سیستم های با دینامیک سریع نیز به سادگی قابل انجام است. علاوه براین، زمان‌های مختلف پیش‌بینی منجر به بهره‌های رویتگر مختلفی می‌شودکه نرخ‌های هم‌گرایی خطای تخمین مختلفی نیز ارائه می‌دهد. به این ترتیب، بهره رویتگر را می‌توان از میان بهره‌های متناظر با سرعت همگرایی مطلوب انتخاب کرد. کارایی این رویکرد از طریق شبیه‌سازی و مقایسه با دیگر تحقیقات نشان داده شد.

مراجع

[1] Luenberger, D.G., 1964, “Observing the state of a linear system”, IEEE Transactions on Military Electronics, 8(2), 74-80.

[2] Luenberger, D.G., 1966, “Observers for multivariable systems”, IEEE Transaction on Automatic Control, 11(2), 190-197.

[3] Luenberger, D.G., 1971, “An introduction to observers”, IEEE Transaction on Automatic Control, 16(6), 596-602.

[4] Thau, F.E., 1973, “Observing the state of non-linear dynamic systems”, International Journal of Control, 17, 471-479.

[5] Kou, S.R., Elliot, D.L. and Tarn, T.J., 1975, “Exponential observers for non-linear dynamic systems”, Information and Control, 29, 204-216.

[6] Zheng, G., Boutat, D. and Wang, H., 2017, **“**A non-linear Luenberger-like observer for non-linear singular systems**”,** Automatica, 86, 11-17.

[7] Hajatipour, M. and Farrokhi, M., 2010, “Chattering free with noise reduction in sliding mode observers using frequency domain analysis”, Journal of Process Control 20(8), 912- 921.

[8] Modarres, A.A. and Momeni, H.R., 2010, “A New Sliding Mode Observer Design for Linear System with Unknown Input and Time-varying Delay”, Journal of Control, 4(4), 24-31. (In Persian)

[9] Ahrens, J.H. and Khalil, K.H., 2009, **“**High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach”, Automatica, 45(4), 936-943.

[10] Khalil, H.K., 2017, **“**High-gain observers in feedback control: Application to permanent magnet synchronous motors**”,** IEEE Control System, 37(3), 25-41.

[11] Adil, A., Hamaz, A., N’Doye, I., Zemouche, A., Laleg-Kirati, T.-M. and Bedouhene, F., “On high-gain observer design for nonlinear systems with delayed output measurements”, Automatica, 141, 2022,110281.

[12] Moraal, PE. and Grizzle, J.W., 1995, **“**Observer design for non-linear systems with discrete-time measurement”, IEEE Transaction on Automatic Control, 40(3), 395–404.

[13] Rao, C.V., Rawlings, J.B. and Mayne, D.Q., 2003, **“**Constrained state estimation for non-linear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximation**”,** IEEE Transaction on Automatic Control, 48(2), 246–258.

[14] Kühl, P., Diehl, M., Kraus, T., Schlöder, J.P. and Bock, H.G., 2011, **“**A real-time algorithm for moving horizon state and parameter estimation**”,** Computer and Chemical Engineering, 35, 71–83.

[15] Alessandri, A., Baglietto, M. and Battistelli, G., 2003, **“**Receding horizon estimation for discrete time linear systems**”,** IEEE Transaction on Automatic Control, 48(3), 473-478.

[16] Almir, M., 2007, **“**Non-linear Moving Horizon Observers: Theory and Real-Time Implementation. In: Besançon G Non-linear Observers and Applications**”,** Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, Heidelberg, 139-179.

[17] Almir, M., 2013, **“**A new identification framework for off-Line computation of moving-horizon

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]

state observer", International Journal of Robust and Nonlinear Control.

[30] Sanz, R., García, P., Fridman E. and P. Albertos P., 2018 "Robust Predictive Extended State Observer for a Class of Nonlinear Systems with Time-Varying Input Delay", Journal of control, 93(2), 1-18.

[31] Zhu, Y., Fridman E., 2021, Sub-predictors for network-based control under uncertain large delays. Automatica 123, 109350.

[32] Koshkouei, A.J. and Zinober, A.S.I., 2004, "Sliding mode state observation for non-linear systems", International Journal of Control, 77(2), 118-127.

[33] Young, H.K., Frank, L.L. and Chaouki, T.A., 1997, **"**A dynamic recurrent neural-network-based adaptive observer for a class of nonlinear systems**",** Automatica, 33(8), 1539-1543.

[34] Ruiqi, W. and Zhujun, J., 2004, **"**Chaos control of chaotic pendulum system**",** Chaos, Solitons and Fractals, 21, 201-207.

[35] Arthur, J.K. and Mingqing, X., **"**Non-linear observer design in the SIEGEL domain**",** SIAM Journal on Control and Optimization, 41(3), 2002, 932–953.

observers**",** IEEE Transaction on Automatic Control, 58(6), 1877–1882.

[18] Alessandri, A., Baglietto, M. and Battistelli, G., 2008, **"**Moving-horizon state estimation for non-linear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes**",** Automatica. 44(7), 1753–1765.

[19] Alessandri, A., Baglietto, M., Battistelli, G. and Gaggero, M., 2011, **"**Moving-horizon state estimation for non-linear systems using neural networks**",** IEEE Transaction on Neural Networks, 22(5), 768–780.

[20] Ramar, K. and Gourishankar, V., 1976, "Optimal observers with specified eigenvalues", International Journal of Control, 27(2), 239-244.

[21] Chou, Fu.I. and Cheng, M.Y., 2019, "Optimal design of reduced-order observers with specified eigenvalues and performance measurement of minimizing estimation errors using evolutionary optimization", Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 38(2), 728–739.

[22] Na, J., Herrmann, G. and Vamvoudakis, K., "Adaptive optimal observer design via approximate dynamic programming", In: American Control Conference IEEE, Seattle, USA, 24-26 May 2017, 3288-3293. Washington: IEEE.

[23] Chakrabarty, A. and Benosman, M., 2021, "Safe learning-based observers for unknown nonlinear systems using Bayesian optimization", Automatica, 133, 109760.

[24] Besan¸con, G., Georges, D. and Benayache, Z., 2007, "Asymptotic state prediction for continuous-time systems with delayed input and application to control", In: Control conference (ecc), European, 2007, 1786–1791.

[25] Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F. and Karimadini, M., 2013, "Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors", International Journal of Control, 86 (4), 599–609.

[26] Najafi, M., Sheikholeslam, F., Wang, Q.G. and Hosseinnia, S., 2014, "Robust H∞ control of single input-delay systems based on sequential sub-predictors", IET Control Theory and Applications, 8 (13), 1175–1184.

[27] Ahmed-Ali, T., Cherrier, E. and Lamnabhi-Lagarrigue, F. 2012, "Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems", IEEE Transactions on Automatic Control, 57 (1), 221–226.

[28] Mazenc, F. and Malisoff, M., 2016 "New prediction approach for stabilizing time-varying systems under time-varying input delay. In Decision and control (CDC) ", In: IEEE 55th conference, 3178–3182.

[29] Sanz, R., Garcia, P., Fridman, E. and Albertos, P., 2018, "Rejection of mismatched disturbances for systems with input delay via a predictive extended

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.3.5.1]
[DOI: 10.52547/joc.16.3.47]