مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۷، شماره ۱، بهار ۱۴۰۲، صفحه ۴۹- ۳۵

طراحی یک کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر برای یک سیستم مرتبه کسری غیرخطی

حمید دهقانی فیروزآبادی[۱]، علی اکبرزاده کلات[۲]

[۱] دانشجوی دکتری کنترل، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شاهرود، Hamid_firouzabadi@shahroodut.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و رباتیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شاهرود ، akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۰۲ ویرایش اول: ۱۴۰۱/۰۹/۰۹ ویرایش دوم: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷ ویرایش سوم: ۱۴۰۲/۰۱/۱۵ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۱

چکیده: در این مقاله یک کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر برای یک کلاس از سیستم‌های غیر خطی مرتبه کسری ارائه می‌گردد. ابتدا با در نظر گرفتن یک سیستم مرتبه کسری پایدار که به عنوان مدل مرجع شناخته می‌شود، کنترل‌کننده به گونه‌ای طراحی می‌گردد که سیستم حلقه‌بسته، حالت‌های سیستم مرجع را تعقیب کند. با توجه به غیرقابل اندازه‌گیری بودن تعدادی از حالت‌های سیستم مرتبه کسری، طراحی کنترل‌کننده، مبتنی بر رؤیتگر انجام می‌گیرد. رؤیتگر پیشنهادی در این تحقیق با استفاده از رویکرد تئوری مقدار میانگین مشتقی، دینامیک خطای غیرخطی رؤیتگر را به دینامیک خطی و متغیر با پارامتر تبدیل می‌کند به طوری که تحلیل پایداری آن با استفاده از تابع لیاپانوف و نامساوی ماتریسی خطی به راحتی انجام می‌گیرد. در ادامه تحلیل پایداری کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر نیز با استفاده از قضیه لیاپانوف انجام می‌گیرد. در خاتمه برای نشان دادن کارآیی و مؤثر بودن کنترل‌کننده پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی دو سیستم مرتبه کسری غیرخطی با در نظر گرفتن کنترل کننده طراحی شده نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی: سیستم مرتبه کسری، نامساوی ماتریسی خطی، تئوری مقدار میانگین مشتقی، رؤیتگر، قضیه لیاپانوف.

Observer-based controller design for a nonlinear fractional order system

Hamid Dehghani Firouzabadi, Ali Akbarzadeh Kalat

Abstract: In this paper, an observer-based controller is introduced for a class of nonlinear fractional order systems. First of all, considering a stable linear fractional order system known as the reference model, the controller is designed so that the closed loop system tracks the states of the reference system. In most systems, some states are unmeasurable or unreachable, so the controller must be designed based on the observer. The observer has been suggested in this research, using the well-known differential mean value theorem approach, converts the nonlinear error dynamics of the observer into linear and parameters-varying, so that the stability analysis is done simply using the Lyapunov quadratic function and linear matrix inequality. The stability analysis of the observer-based controller is also performed using the Lyapunov theorem in the following section. Finally, the efficiency and effectiveness of the proposed controller are shown through the simulation results of two nonlinear fractional order systems.

Keywords: Fractional-order system, Linear matrix inequality, Differential mean value theorem, Observer, Lyapunov theory.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

۱- مقدمه

مطالعه و تحقیق در مورد سیستم‌های کنترل مرتبه کسری و توصیف تعدادی از سیستم‌های بین رشته‌ای با استفاده از این سیستم‌ها به یک موضوع جذاب بین محققان و پژوهشگران تبدیل شده است [۱ و ۲]. مدلسازی این سیستم‌ها توسط دینامیک مرتبه کسری با دقت بالاتری نسبت به دینامیک مرتبه صحیح انجام می‌گیرد. از جمله این سیستم‌ها می‌توان به سیستم‌های آشوبناک [۳]، بازارهای مالی و بیولوژیکی [۴]،سیستم‌های چند عامله[۱] [۵] و ... اشاره نمود.

طراحی کنترل‌کننده و تحلیل پایداری آن از مسائل اولیه در تمامی سسیستم‌های کنترل مرتبه صحیح و کسری می‌باشد. به طوریکه تاکنون مقالات زیادی در این زمینه تدوین گردیده است [۶-۹]. از آنجایی که مشتقات مرتبه کسری غیرمحلی هستند و هسته‌های تکین ضعیفی[۲] دارند، تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه کسری پیچیده‌تر از سیستم‌های مرتبه صحیح است. با این حال توجه به پایداری سیستم‌های مرتبه کسری روز به روز افزون‌تر می‌گردد. تاکنون روش‌های زیادی برای اثبات پایداری سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی توسط محققان پیشنهاد شده است. از جمله مراجعی که به این موضوع پرداخته است، [۱۰] می‌باشد. در این مرجع یک مدل خطی‌سازی شده[۳] و روش پایدارسازی بر اساس کنترل مود لغزشی[۴] برای همزمان‌سازی[۵] سیستم‌های آشوبناک[۶] ارائه گردیده است. علاوه بر آن نویسندگان مراجع [۱۱ و ۱۲] توانستند با استفاده از روش پایداری میتگ لفلر[۷]، پایداری سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی را تضمین نمایند. همچنین در [۱۳] برای تضمین پایداری یک سیستم مرتبه کسری غیرخطی همسان[۸]، علاوه بر شرط کافی نامساوی ماتریسی خطی ، شرط لازم دیگری نیز پیشنهاد شده است. یکی از ابزارهای شناخته شده و بنیادی برای تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی روش لیاپانوف می‌باشد. این روش اگرچه مورد استقبال وسیعی از پژوهشگران قرار گرفته است [۱۴-۱۶] اما نحوه ساخت توابع مستقیم لیاپانوف همچنان یک مسأله باز می‌باشد. همچنین از رویکرد تلفیق روش لیاپانوف با نامساوی ماتریسی خطی نیز برای تحلیل پایداری سیستم‌ها بهره‌گیری شده است [۱۷-۱۹].

عملکرد حلقه بسته خوب را می توان با استفاده از کنترل فیدبک حالت به دست آورد. اما مسأله طراحی کنترل کننده فیدبک حالت نیازمند در دسترس بودن تمامی حالت‌های سیستم می‌باشد. با این وجود در بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی بدلایل فنی یا اقتصادی برخی از حالت‌های سیستم قابل اندازه‌گیری نیستند و آنچه طراح می‌داند ورودی و خروجی سیستم می‌باشند. همچنین خروجی سیستم نیز می‌تواند حاوی نویز باشد. در این حالت رؤیتگر حالت و روش کنترلی مبتنی بر رؤیتگر حالت به تدریج به عنوان یک ابزار خوب برای کنترل سیستم‌های مرتبه کسری حلقه بسته بسط داده شدند. به عنوان مثال در [۲۰] دو رویکرد کنترل مقاوم مبتنی بر رؤیتگر و کنترل فیدبک خروجی استاتیک برای سیستم‌های نامعین خطی مرتبه کسری با مرتبه همسان کسری $0 < \alpha < 1$ و $1 < \alpha < 2$ بسط داده شده است. همچنین کنترل مقاوم مبتنی بر رؤیتگر برای سیستم‌های مرتبه کسری در چندین پژوهش از جمله [۲۱ و ۲۲] ارائه گردیده است. از میان پژوهشهای جدید انجام گرفته می‌توان به [۲۳] اشاره نمود به طوری‌که یک کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر برای سیستم‌های مرتبه کسری از نوع خنثی[۹] با استفاده از روش لیاپانوف همراه با قانون کنترل فیدبک حالت طراحی شده است. همچنین با استفاده از معیار پایدارسازی از منظر نامساوی‌های ماتریسی غیرخطی وجود کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر استنتاج گردیده است. برای حل نامساوی‌های ماتریسی غیرخطی گفته شده و تبدیل آن‌ها به نامساوی‌های ماتریسی خطی نیز از الگوریتم تکرار استفاده شده است.

موضوع طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر همچنان جزء موضوعات باز در علم کنترل هم از لحاظ تئوری و هم از لحاظ عملی می‌باشد. در این مقاله طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر حالت برای کلاسی از سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی از نوع مستوی[۱۰] انجام می‌گیرد. کنترل نسبتا ساده سیستم‌های مستوی موجب استفاده گسترده این سیستم‌ها در صنعت شده و کنترل‌کننده‌های گوناگونی تاکنون برای این سیستم‌ها ارائه گردیده است [۲۴ و ۲۵]. برای پیش‌بینی حالت‌های سیستم غیرخطی و طراحی رؤیتگر از رویکرد قضیه مقدار میانگین مشتقی[۱۱] استفاده می‌شود. با استفاده از روش مقدار میانگین مشتقی می‌توان دینامیک غیرخطی خطای رؤیتگر را به دینامیک خطی پارامتر متغیر[۱۲] تبدیل نمود. در حالت خطی تحلیل پایداری سیستم به کمک روش لیاپانوف بسیار ساده شده و در نهایت تحلیل پایداری، منجر به یک شرط کافی برای پایداری سیستم در قالب یک نامساوی ماتریسی خطی می‌گردد. با حل این نامساوی ماتریسی، بهره رؤیتگر بدست می‌آید. در طراحی کنترل‌کننده از یک سیستم خطی پایدار مرتبه کسری به عنوان سیستم مرجع استفاده می‌گردد و طراحی کنترل‌کننده به گونه‌ای انجام می‌گیرد تا حالت‌های سیستم حلقه بسته، حالت‌های سیستم مرجع را تعقیب نمایند. در این روش برای طراحی کنترل‌کننده از تخمین حالت‌های سیستم استفاده گردیده و همچنین هیچگونه محدودیتی بر روی بخش غیرخطی سیستم ($\boldsymbol{f(X)}$) وجود ندارد. در این پژوهش از یک ورودی جبران‌ساز برای جبران خطای تخمین استفاده می‌گردد و پارامتر آن به صورت برخط تنظیم می‌شود. در نهایت نیز، پایداری سیستم حلقه بسته و همگرایی حالت‌های سیستم کنترلی به مقدار مطلوب با استفاده از قضیه لیاپانوف اثبات می‌شود.

از جمله مزایای روش کنترلی به کار رفته در این مقاله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

[1] Multi agent systems
[2] weakly singular kernels
[3] Linearized model
[4] Sliding Mode Control
[5] Syncronization
[6] Chaos Systems
[7] Mittag-Leffler stability
[8] Commensurate
[9] Fractional-order neutral-type
[10] Affine
[11] Differential Mean Value Theorem (DMVT)
[12] Linear Parameter-Varying (LPV)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

- تضمین ردیابی حالت‌های مدل مرجع به صورت مجانبی توسط حالت‌های سیستم غیرخطی حلقه بسته.
- دستیابی به حالت‌های سیستم مرتبه کسری غیرخطی از طریق طراحی یک رؤیتگر برای سیستم مورد نظر با استفاده از رویکرد تئوری مقدار میانگین مشتقی و بهره‌گیری از قضیه لیاپانوف و نامساوی ماتریسی جهت اثبات پایداری آن و به دست آوردن بهره رؤیتگر.
- طراحی کنترل‌کننده با استفاده از تخمین حالت‌های به دست آمده از رؤیتگر و قابلیت تعقیب حالت‌های یک سیستم مرجع
- مقاوم بودن کنترل‌کننده پیشنهادی نسبت به خطای تخمین با اضافه کردن ترم جبران‌ساز به آن

ادامه مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲، تعاریف پایه، مفروضات و بیان مسأله طراحی کنترل‌کننده ارائه شده است. رؤیتگر پیشنهاد شده و اثبات پایداری آن در بخش ۳ بیان شده است. بخش ۴ به طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر و تحلیل پایداری آن اختصاص یافته است. مثال‌های شبیه سازی عددی که اثربخشی و کارآیی کنترل‌کننده را نشان می دهد در بخش ۵ آورده شده‌اند. در نهایت، بخش ۶ با نتیجه‌گیری به پایان می‌رسد.

۲- تعاریف پایه، مفروضات و بیان مسأله

در این بخش ابتدا به بیان مقدمات و تعاریف پایه حسابان مرتبه کسری پرداخته می‌شود.

تعریف ۱: مشتق مرتبه کسری کپوتو با مرتبه $q \in \mathbb{R}^+$ از تابع $\Lambda(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۲۶]:

$$ {}_a^cD_t^q\Lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_a^t \frac{\Lambda^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}}d\tau \qquad n-1<q<n \tag{۱}$$

به طوری که تابع $\Gamma(.)$ به صورت $\Gamma(\tau)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\tau-1}dt$ تعریف می‌گردد.

در حالت خاص اگر $0<q<1$ باشد:

$$ {}_a^cD_t^q\Lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_a^t (t-\tau)^{-q}\Lambda^{(1)}(\tau)\,d\tau \tag{۲}$$

قضیه ۱ [27 و28]: (پایداری لیاپانوف در سیستم‌های مرتبه کسری) سیستم دینامیکی مرتبه کسری زیر مفروض است:

$$D^q\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \tag{۳}$$

در این سیستم $\boldsymbol{\xi}=[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n]^T\in R^n$ بردار حالت، $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}): R^n\to R^n$ تابع غیر خطی هموار به صورت برداری می‌باشد. همچنین مرتبه سیستم کسری با $q\in(0,1]$ بیان می‌گردد. در صورتی که تابع $V(\boldsymbol{\xi})>0$ بتوان یافت به طوریکه برای کل بازه زمانی $t\geq 0$ ، $D^qV(\boldsymbol{\xi})<0$ باشد، می‌توان گفت سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۳) پایدار مجانبی است.

قضیه ۲ [۲۹]: فرض کنید $\boldsymbol{\xi}(t)\in\mathbb{R}^n$، بردار تابع مشتق‌پذیر بوده و $q\in(0,1], t\geq t_0$ باشد. در اینصورت نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{2}D^q(\boldsymbol{\xi}^T(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}(t)) \leq \boldsymbol{\xi}^T(t)\boldsymbol{P}\left(D^q\boldsymbol{\xi}(t)\right) \tag{۴}$$

که در آن $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس ثابت معین مثبت متقارن می‌باشد.

نمادگذاری:

در سرتاسر این مقاله از نمادگذاری و اصطلاحات فنی زیر استفاده می‌گردد:

۱. مجموعه محدب[1] $\{\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\theta}\}\in R^n$، که با عبارت $Conv(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\theta})$ نشان داده می‌شود به صورت $Conv(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\theta})=\{\lambda\boldsymbol{\xi}+(1-\lambda)\boldsymbol{\theta},\ 0\leq\lambda\leq 1\}$ تعریف می‌گردد.

۲. بردار $\boldsymbol{\zeta}_n(i)=(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)^T\in R^n, n\geq 1, i=1,\dots,n$ به عنوان بردار پایه کانونیکی شناخته می‌شود.

لم ۱ [۳۰-۳۳]: (روش DMVT) فرض کنید $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ و $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}):\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\to\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ بطوریکه $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ بر روی $Conv(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای $i=1,\dots,m$، بردارهای ثابت $\boldsymbol{w_1},\dots,\boldsymbol{w_m}\in Conv(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{w_i}\neq\boldsymbol{x},\boldsymbol{w_i}\neq\boldsymbol{y}$ وجود دارند بطوریکه رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i,j=1}^{m,n}\boldsymbol{\zeta}_m(i)\boldsymbol{\zeta}_n^T(j)\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial z_i}(\boldsymbol{w}_i)\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{۵}$$

$\boldsymbol{\zeta}_m(\boldsymbol{i})$ بردار پایه کانونیکی در $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ می‌باشد.

در فرمول زیر یک کلاس مستوی از سیستم‌های دینامیکی مرتبه کسری غیرخطی به شکل فضای حالت بیان شده است:

$$\begin{cases} D^q\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}\end{cases} \tag{۶}$$

که در آن، $\boldsymbol{\xi}=[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n]^T\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ بردار حالت، $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^p$ بردار متغیرهای خروجی قابل اندازه‌گیری سیستم، $\boldsymbol{C}$ ماتریس با ابعاد مناسب، $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})\in\mathbb{R}^n$ بردار تابع غیرخطی، معلوم و مشتق‌پذیر بوده و $\boldsymbol{\Sigma}\in R^{n\times m}$ ماتریس ثابت معلوم می‌باشد. سیستم مرتبه کسری غیرخطی (۶) از نوع همسان فرض می‌شود به طوری که مرتبه سیستم عبارتست از: $[q_1,q_2,\dots,q_n]=q\in(0,1]$.

[1] Convex hull

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

مسأله کنترلی شامل یافتن سیگنال کنترلی $\boldsymbol{u}$ به گونه‌ای است که حالت $\boldsymbol{\xi}$، تراژکتوری مطلوب مدل مرجع زیر یا به عبارت دیگر $\boldsymbol{\xi}_d = [\xi_{d1}, \xi_{d2}, \dots, \xi_{dn}]^T$ را تعقیب کند.

$$D^q \boldsymbol{\xi}_d = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\xi}_d + \mathbf{B}_d \boldsymbol{r} \tag{۷}$$

در معادله (۷) ماتریس‌های $\boldsymbol{A}_d$ و $\boldsymbol{B}_d$ ماتریس‌های معلوم ثابت هستند. $\boldsymbol{r}$ هم ورودی مدل مرجع می‌باشد. خطای ردیابی حالت‌های سیستم اصلی نسبت به سیستم مرجع به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d \tag{۸}$$

در صورتی که تمامی حالت‌های سیستم غیرخطی ($\boldsymbol{\xi}$) و همچنین ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})$ معلوم بوده و $D^q \boldsymbol{\xi}_d$ نیز در دسترس باشد، سیگنال کنترل زیر می‌تواند همگرایی مجانبی خطای تعقیب $\boldsymbol{\Xi}$ مربوط به سیستم (۶) به صفر را تضمین نماید:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Sigma}^{\dagger}(-\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{B}_d r + \mathbf{A}_d \boldsymbol{\xi}) \tag{۹}$$

ماتریس شبه معکوس $\boldsymbol{\Sigma}^{\dagger}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

تعریف ۲: با فرض اینکه $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ یک ماتریس با رنک کامل باشد، ماتریس شبه معکوس $\boldsymbol{D}^{\dagger} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\boldsymbol{D}^{\dagger} = \begin{cases} \boldsymbol{D}^T(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^T)^{-1}, & n < m \\ \boldsymbol{D}^{-1}, & n = m \\ (\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}^T, & n > m \end{cases} \tag{۱۰}$$

۳- طراحی رؤیتگر و تحلیل پایداری آن

از آنجایی که در اغلب موارد بردار حالت $\boldsymbol{\xi}$ در دسترس نمی‌باشد سیگنال کنترلی (۹) نیز قابل دستیابی نمی‌باشد. بنابراین ابتدا در این بخش یک رؤیتگر برای تخمین بردار حالت $\boldsymbol{\xi}$ برای سیستم غیرخطی(۶) پیشنهاد می‌گردد. سپس برای تحلیل پایداری رؤیتگر پیشنهادی از روش تئوری مقدار میانگین مشتقی و قضیه لیاپانوف استفاده می‌گردد. ویژگی روش تئوری مقدار میانگین مشتقی، تبدیل دینامیک غیرخطی خطای رؤیتگر به یک سیستم خطی با پارامترهای متغیر می‌باشد. با این کار اثبات همگرایی مجانبی خطای رؤیتگر پیشنهادی به صفر با استفاده از تابع لیاپانوف خطی امکان‌پذیر می‌باشد که کاری ساده می‌باشد. تجزیه و تحلیل پایداری دینامیک خطای خطی شده رؤیتگر، منجر به یک مسأله نامساوی ماتریسی خطی می‌شود. یافتن یک حل برای مسأله نامساوی ماتریسی خطی منجر به دستیابی به ماتریس یا بردار بهره رؤیتگر می‌گردد. قبل از پرداختن به مسأله طراحی رؤیتگر، فرضیات زیر معرفی می‌گردند.

فرض ۱: ماتریس ژاکوبین مربوط به $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})$ شرایط زیر را برآورده می‌نمایند:

$$\underline{\lambda}_{ij} \le \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\xi}(t))}{\partial \xi_j(t)} = \lambda_{ij} \le \overline{\lambda}_{ij}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in R^n \quad and \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{۱۱}$$

در معادله بالا $\boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\xi})$، i امین سطر بردار تابع $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})$ می‌باشد. همچنین $\underline{\lambda}_{ij}$ ، $\overline{\lambda}_{ij}$ به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\underline{\lambda}_{ij} = \min_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\right), \quad \overline{\lambda}_{ij} = \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\right) \tag{۱۲}$$

رؤیتگر پیشنهادی برای سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۶) به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} D^q \hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{\xi}} \end{cases} \tag{۱۳}$$

که در آن، تخمین حالت $\boldsymbol{\xi}$ با $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ نشان داده می‌شود. هدف از این بخش تعیین بردار یا ماتریس بهره $\boldsymbol{L}$ است به طوری که خطای مشاهده یعنی $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}$ به صورت مجانبی به صفر همگرا شود.

دینامیک خطای رؤیتگر را می‌توان با توجه به تعریف خطای $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ و معادلات (۶) و (۱۳) به صورت زیر نوشت:

$$D^q \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \left[\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\boldsymbol{\xi}})\right] - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \tag{۱۴}$$

در اینجا، برخی از مقدمات قبل از آغاز بررسی پایداری رؤیتگر پیشنهادی ارائه می‌شود. ابتدا، بر اساس فرض ۱، مجموعه $D_{n,n}$ به صورت زیر معرفی می‌شود [۳۰ و ۳۱]:

$$D_{n,n} = \{\lambda = (\lambda_{11},\dots,\lambda_{1n},\dots,\lambda_{nn}):\ \underline{\lambda}_{ij} \le \lambda_{ij} \le \overline{\lambda}_{ij},\ i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n\} \tag{۱۵}$$

مجموعه $D_{n,n}$ ، مجموعه محدب با $2^{(n^2)}$ رأس می‌باشد. این رئوس به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\mathcal{V}_{D_{n,n}} = \{\alpha = \{\alpha_{11},\dots,\alpha_{1n},\dots,\alpha_{nn}\}: \alpha_{ij} \in \{\underline{\lambda}_{ij}, \overline{\lambda}_{ij}\}\} \tag{۱۶}$$

با توجه به $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})$ در معادله (۶) و همچنین (۱۱)، (۱۲) و (۱۶) ماتریس $\boldsymbol{A}(\alpha)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد [۳۰ و ۳۱].

$$\boldsymbol{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \alpha_{ij} \in \{\underline{\lambda}_{ij}, \overline{\lambda}_{ij}\};\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n \tag{۱۷}$$

عنصر غیرخطی در معادله دینامیکی خطای رؤیتگر (۱۴) با استفاده از روش تئوری مقدار میانگین مشتقی(۵) به صورت زیر قابل نوشتن است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_n(i)\boldsymbol{\zeta}_n^T(j)\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_i}{\partial \xi_j}\big(\boldsymbol{\xi}(t)\big)\right)\big(\boldsymbol{\xi}(t) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(t)\big) \quad (۱۸)$$

در معادله بالا، $\boldsymbol{\zeta}_n(i)$، قبلا در نمادگذاری شماره ۲ معرفی گردیده است. همچنین $\boldsymbol{v}_i(t) \in Conv(\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ می‌باشد.

با استفاده از (۱۸) دینامیک خطای رؤیتگر یا به عبارت دیگر (۱۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$D^q\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_i}{\partial \xi_j}\big(\boldsymbol{\xi}(t)\big)\,\boldsymbol{\zeta}_n(i)\boldsymbol{\zeta}_n^T(j)\right)\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{LC}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad (۱۹)$$

با استفاده از نمادهای زیر

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_i}{\partial \xi_j}\big(\boldsymbol{\xi}(t)\big) \;\Rightarrow\; \lambda(t) = \big(\lambda_{11}(t), \dots, \lambda_{1n}(t), \dots, \lambda_{nn}(t)\big) \quad (۲۰)$$

دینامیک خطای (۱۹) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$D^q\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \big(\boldsymbol{A}(\lambda(t)) - \boldsymbol{LC}\big)\tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad (۲۱)$$

به طوریکه در معادله (۲۱) داریم.

$$\boldsymbol{A}(\lambda(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(t) & \cdots & \lambda_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1}(t) & \cdots & \lambda_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (۲۲)$$

دینامیک خطای (۲۱) یک سیستم خطی تغییرپذیر با پارامتر (LPV) می‌باشد. در حقیقت با استفاده از تئوری مقدار میانگین مشتقی دینامیک خطای غیرخطی رؤیتگر به یک سیستم خطی تغییرپذیر با پارامتر تبدیل شد.

قضیه ۳: سیستم دینامیکی (۶) و رؤیتگر (۱۳) را در نظر می‌گیریم. برای هر ماتریس $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > 0$، $\boldsymbol{R}$ و همچنین $\boldsymbol{A}(\alpha)$ که در معادله (۱۷) تعریف شده است، خطای رؤیتگر $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ به ازاء $\alpha \in \mathcal{V}_{D_{n,n}}$ به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌گردد اگر LMI زیر برآورده گردد.

$$\boldsymbol{A}^T(\alpha)\boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}(\alpha) - \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{C} < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{D_{n,n}} \quad (۲۳)$$

ماتریس $\boldsymbol{L}$ با توجه به $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{R}^T$ بدست می‌آید.

اثبات.

تابع لیاپانوف به صورت زیر انتخاب می‌گردد.

$$V(t) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(t)\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) \quad (۲۴)$$

که در آن $\boldsymbol{P}$ یک ماتریس معین مثبت متقارن می‌باشد. با مشتق مرتبه کسری گرفتن از تابع لیاپانوف انتخابی (۲۴) نسبت به زمان و با توجه به (۴) داریم:

$$D^qV(t) \le 2\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(t)\boldsymbol{P}\left(D^q\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)\right) \quad (۲۵)$$

سمت راست نامساوی (۲۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$2\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(t)\boldsymbol{P}\left(D^q\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)\right) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(t)\boldsymbol{P}\left(D^q\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)\right) + \left(D^q\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)\right)^T\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) \quad (۲۶)$$

با جایگزین کردن (۲۱) در سمت راست معادله (۲۶) داریم:

$$2\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(t)\boldsymbol{P}\left(D^q\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)\right) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T\Big[\big(\boldsymbol{A}(\lambda(t)) - \boldsymbol{LC}\big)^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{A}(\lambda(t)) - \boldsymbol{LC}\big)\Big]\tilde{\boldsymbol{\xi}}$$

بنابراین با توجه به نامساوی (۲۵)، می‌توان نوشت:

$$D^qV(t) \le \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T\underbrace{\Big[\big(\boldsymbol{A}(\lambda(t)) - \boldsymbol{LC}\big)^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{A}(\lambda(t)) - \boldsymbol{LC}\big)\Big]}_{\boldsymbol{S}(\gamma(t))}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad (۲۷)$$

بر اساس فرض ۱ و رابطه (۲۰)، پارامتر λ_{ij} برای هر i و j محدود می‌باشد. بنابراین $\lambda(t)$ در یک دامنه محدود قرار می‌گیرد. در رابطه (۲۷) تابع ماتریسی $\boldsymbol{S}(.)$ نسبت به $\lambda(t)$ مستوی است. بنابراین با استفاده از اصل محدب بودن [۳۴] اگر بوسیله ماتریس $\boldsymbol{A}(\alpha)$، تابع ماتریسی $\boldsymbol{S}(.)$ در رئوس $\mathcal{V}_{D_{n,n}}$ (همانند(۱۶)) برآورده گردد می‌توان نتیجه گرفت برای تمام مقادیر $\lambda(t)$ ، تابع ماتریسی $\boldsymbol{S}(.)$ در دامنه محدود $D_{n,n}$ (همانند (۱۵)) قرار می‌گیرد. بنابراین با توجه به (۲۷) می‌توان نتیجه گرفت:

$$D^qV(t) \le \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T\underbrace{\big[(\boldsymbol{A}(\alpha) - \boldsymbol{LC})^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}(\alpha) - \boldsymbol{LC})\big]}_{\boldsymbol{S}(\alpha)}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad (۲۸)$$

بنابراین با توجه به (۲۸) می‌توان مشاهده کرد که اگر (۲۳) برآورده گردد، می‌توان گفت:

$$D^qV(t) < 0$$

و این به معنی پایداری مجانبی رؤیتگر و همگرایی خطای آن ($\tilde{\boldsymbol{\xi}}$) به صفر می‌باشد و اثبات تکمیل می‌گردد.

توضیح ۱: روش پیشنهادی را می‌توان با ایجاد یک تغییر ناچیز در روش اثبات، برای کلاس مستوی عمومی سیستم‌های دینامیکی مرتبه صحیح غیرخطی اعمال کرد.

٤- طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر پیشنهادی

سیستم مرتبه کسری مستوی (۶) را در نظر می‌گیریم. با فرض در نظر گرفتن تخمین حالت سیستم، به عبارت دیگر $\hat{\boldsymbol{\xi}}$، قانون کنترلی (۹) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Sigma}^{\dagger}(-\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \mathbf{B}_d r + \boldsymbol{A}_d\hat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{u}_s) \quad (۲۹)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

$\boldsymbol{u}_s \in \mathbb{R}^n$ سیگنال کمکی جهت جبران خطای تخمین می‌باشد که باید به شکل مناسبی انتخاب گردد.

معادله خطای سیستم با حالت تخمین زده شده نسبت به سیستم مرجع به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\tilde{\Xi} = \hat{\xi} - \xi_d \tag{۳۰}$$

با نوشتن دینامیک خطای $\tilde{\Xi}$ و جایگذاری معادله (۲۹) در آن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} D^q\tilde{\Xi} = {} & \boldsymbol{A}_d\tilde{\Xi} + \boldsymbol{\Lambda}(\xi) + \boldsymbol{\Sigma u} - \mathbf{A}_d\xi - \\ & \mathbf{B}_d r = \mathbf{A}_d\tilde{\Xi} + \boldsymbol{\Lambda}(\xi) + \boldsymbol{\Sigma\Sigma}^{\dagger}\big(-\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\xi}) + \\ & \mathbf{B}_d r + \mathbf{A}_d\hat{\xi} + \boldsymbol{u}_s\big) - \mathbf{A}_d\xi - \mathbf{B}_d r \end{aligned} \tag{۳۱}$$

با بازنویسی معادله (۳۱) داریم:

$$\begin{aligned} D^q\tilde{\Xi} = {} & \boldsymbol{A}_d\tilde{\Xi} + \boldsymbol{\Lambda}(\xi) + \boldsymbol{I}\big(-\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\xi}) + \\ & \mathbf{B}_d r + \mathbf{A}_d\hat{\xi} + \boldsymbol{u}_s\big) - \mathbf{A}_d\xi - \mathbf{B}_d r \Rightarrow \\ & D^q\tilde{\Xi} = \boldsymbol{A}_d\tilde{\Xi} + \big[\boldsymbol{\Lambda}(\xi) - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\xi})\big] + \\ & \boldsymbol{A}_d\big(\hat{\xi} - \xi\big) + \boldsymbol{u}_s \end{aligned} \tag{۳۲}$$

در اینجا دینامیک خطای حالت‌های رؤیتگر نسبت به حالت‌های سیستم اصلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\tilde{\Xi} = \xi - \hat{\xi} \tag{۳۳}$$

با در نظر گرفتن معادله (۳۳)، دینامیک خطای (۳۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} D^q\tilde{\Xi} = {} & \boldsymbol{A}_d\tilde{\Xi} + \big[\boldsymbol{\Lambda}(\xi) - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\xi})\big] + \boldsymbol{u}_s \\ & - \boldsymbol{A}_d\tilde{\Xi} \end{aligned} \tag{۳۴}$$

با توجه به معادلات خطای قید شده در (۸) و (۳۰) داریم

$$\Xi - \hat{\Xi} = \xi - \hat{\xi} = \tilde{\Xi} \tag{۳۵}$$

با در نظر گرفتن(۳۵)، معادله (۳۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} D^q\hat{\Xi} + D^q\tilde{\Xi} = {} & \boldsymbol{A}_d\tilde{\Xi} + \big[\boldsymbol{\Lambda}(\xi) - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\xi})\big] \\ & + \boldsymbol{u}_s \end{aligned} \tag{۳۶}$$

با فرض $\boldsymbol{\omega_1} = \big[\boldsymbol{\Lambda}(\xi) - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\xi})\big]$ معادله (۳۶) به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} D^q\hat{\Xi} &= \boldsymbol{A}_d\hat{\Xi} + \boldsymbol{\omega_1} + D^q\tilde{\Xi} + \boldsymbol{u}_s \\ &= \boldsymbol{A}_d\hat{\Xi} + \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u}_s \end{aligned} \tag{۳۷}$$

که در آن $\boldsymbol{\omega} = D^q\tilde{\Xi} + \boldsymbol{\omega}_1$ است.

قضیه ۴: سیستم (۶) مفروض است. قانون کنترل (۲۹) و سیگنال جبرانی کمکی زیر پایداری سیستم (۶) را تضمین نموده و

$$\boldsymbol{u}_s = -l\tanh\big(\boldsymbol{P}\hat{\Xi}(t)\big) \tag{۳۸}$$

خطای تعقیب به نزدیکی صفر میل می نماید اگر قانون تطبیق پارامتر زیر برقرار باشد:

$$D^q l = \gamma_l\big\|\hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\big\| \tag{۳۹}$$

که در آن ماتریس $\boldsymbol{P} > \mathbf{0}$، معادله لیاپانوف زیر را برای برخی از ماتریس‌های معین مثبت $\boldsymbol{Q}$ برآورده می‌نماید.

$$(\mathbf{A}_d)^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^T(\mathbf{A}_d) = -\boldsymbol{Q} \tag{۴۰}$$

اثبات.

تابع کاندید لیاپانوف به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$V(t) = \frac{1}{2}\hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\hat{\Xi}(t) + \frac{1}{2\gamma_l}\tilde{l}^2 \tag{۴۱}$$

در معادله (۴۱)، $\tilde{l} \triangleq l_m - l$ به گونه‌ای که پارامتر l تخمینی از یک ثابت مثبت نامعلوم l_m بوده و γ_l یک ثابت مثبت باشد.

مشتق کسری معادله (۴۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} & D^qV(t) \le \tfrac{1}{2}\hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\left(D^q\hat{\Xi}(t)\right) + \\ & \tfrac{1}{2}\left(D^q\hat{\Xi}(t)\right)^T\boldsymbol{P}\hat{\Xi}(t) - \tfrac{1}{\gamma_l}\tilde{l}(D^q l) = \\ & \tfrac{1}{2}\hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\big[\mathbf{A}_d\hat{\Xi}(t) + \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u}_s\big] + \\ & \tfrac{1}{2}\big[\mathbf{A}_d\hat{\Xi}(t) + \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u}_s\big]^T\boldsymbol{P}\hat{\Xi}(t) - \\ & \tfrac{1}{\gamma_l}\tilde{l}(D^q l) = \tfrac{1}{2}\hat{\Xi}^T(t)[(\mathbf{A}_d)^T\boldsymbol{P} + \\ & \boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{A}_d)]\hat{\Xi}(t) + \hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u}_s) - \\ & \tfrac{1}{\gamma_l}\tilde{l}(D^q l) \end{aligned} \tag{۴۲}$$

معادله (۴۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} D^qV(t) \le {} & \tfrac{1}{2}\hat{\Xi}^T(t)[(\mathbf{A}_d)^T\boldsymbol{P} + \\ & \boldsymbol{P}^T(\mathbf{A}_d)]\hat{\Xi}(t) + \hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u}_s) - \\ & \frac{1}{\gamma_l}\tilde{l}(D^q l) \end{aligned} \tag{۴۳}$$

از (۴۰) و (۴۳) داریم:

$$\begin{aligned} D^qV(t) \le {} & -\frac{1}{2}\hat{\Xi}^T(t)\boldsymbol{Q}\hat{\Xi}(t) \\ & + \hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u}_s) \\ & - \frac{1}{\gamma_l}\tilde{l}(D^q l) \end{aligned} \tag{۴۴}$$

با فرض $\|\boldsymbol{\omega}\| \le l_m$ اسکالر $\hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\omega}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\omega} &\le \big\|\hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\big\|\|\boldsymbol{\omega}\| \\ &\le l_m\big\|\hat{\Xi}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{P}\big\| \end{aligned} \tag{۴۵}$$

با استفاده از (۴۴)، (۴۵) و با توجه به تعریف $\boldsymbol{u}_s$ در (۳۸) و همچنین رابطه (۳۹) و نامساوی زیر[۳۵] : $|x| - x\tanh(x) \le \mu_0$ که در آن $\mu_0 \approx 0.2785$، می‌توان نوشت:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

$$D^q V(t) \le -\frac{1}{2}\hat{\Xi}^T(t)\boldsymbol{Q}\hat{\Xi}(t) + l\left\|\hat{\Xi}^T(t)\boldsymbol{P}\right\| - l\hat{\Xi}^T(t)\boldsymbol{P}\tanh\left(\boldsymbol{P}\hat{\Xi}(t)\right) \le -\frac{1}{2}\hat{\Xi}^T(t)\boldsymbol{Q}\hat{\Xi}(t) + l\mu_0 \quad (۴۶)$$

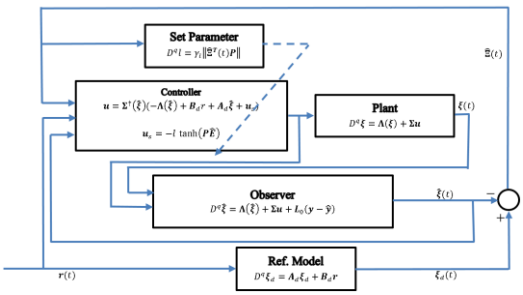
حال با توجه به اینکه $\lambda_{min}(\boldsymbol{Q})\left\|\hat{\Xi}\right\|^2 \le \hat{\Xi}^T(t)\boldsymbol{Q}\hat{\Xi}(t)$ ، که در آن $\lambda_{min}(\boldsymbol{Q})$ مقدار ویژه کمینه $\boldsymbol{Q}$ است، رابطه (۴۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D^q V(t) \le -\lambda_{min}(\boldsymbol{Q})\left\|\hat{\Xi}\right\|^2 + l\mu_0 \quad (۴۷)$$

این بدین معنی است که تا زمانیکه $\left\|\hat{\Xi}\right\| > \sqrt{\frac{l\mu_0}{\lambda_{min}(\boldsymbol{Q})}}$ می‌توان گفت $D^q V(t) < 0$. این نشان می‌دهد که خطای $\hat{\Xi}$ در داخل ناحیه‌ای به شعاع $r_{\hat{\Xi}} = \left\{\hat{\Xi} \mid \left\|\hat{\Xi}\right\| \le \sqrt{\frac{l\mu_0}{\lambda_{min}(\boldsymbol{Q})}}\right\}$ کراندار می‌ماند، در حقیقت $\hat{\Xi}$ به طور یکنواخت کراندار به مقدار نهایی[1] می‌باشد.

از طرفی با توجه به $\Xi = \hat{\Xi} - \tilde{\Xi}$ و پایداری رؤیتگر ($\tilde{\Xi} \longrightarrow \mathbf{0},\ t \longrightarrow +\infty$) می‌توان گفت خطای Ξ نیزدر داخل دایره با شعاع $r_{\Xi} = r_{\hat{\Xi}}$ کراندار می‌ماند و Ξ نیز به طور یکنواخت کراندار به مقدار نهایی می‌گردد.

ساختار سیستم کنترل مبتنی بر رؤیتگر پیشنهادی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. ساختار سیستم کنترل مبتنی بر رؤیتگر

۵- شبیه‌سازی

دو مثال مختلف در این بخش برای نشان دادن درستی و سودمندی روش طراحی پیشنهادی ارائه می‌گردد. برای نشان دادن اعتبار طرح پیشنهادی، شبیه‌سازی‌های عددی از طریق محیط‌های Matlab و Simulink انجام شده‌اند.

مثال اول.

مثال اول یک سیستم مالی از مرتبه کسری می‌باشد [۳۶-۳۸]. دینامیک سیستم به صورت معادلات فضای حالت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} D^q\xi_1(t) = \xi_3(t) + (\xi_2(t) - a)\xi_1(t) + u_1(t) \\ D^q\xi_2(t) = 1 - \mathrm{b}\xi_2(t) - \xi_1^3(t) + u_2(t) \\ D^q\xi_3(t) = -\xi_1(t) - c\xi_3(t) \end{cases} \quad (۴۸)$$

که در آن $(a, b, c) = (2.5,\ 2, 1.5)$ و $q = 0.8$ می‌باشد.

معادله (۴۸) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{cases} D^q\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\Sigma u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C\xi} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -a\xi_1(t) + \xi_1(t)\xi_2(t) + \xi_3(t) \\ -\xi_1^3(t) - \mathrm{b}\xi_2(t) + 1 \\ -\xi_1(t) - c\xi_3(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴۹)$$
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

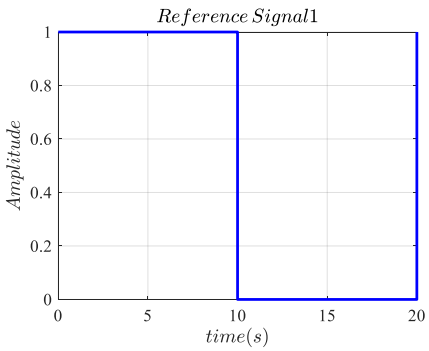
سیستم مدل مرجع در این شبیه‌سازی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$D^q\boldsymbol{\xi_d}(t) = \mathbf{A_d}\boldsymbol{\xi_d} + \mathbf{B_d}r$$
$$\mathbf{A_d} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & -3.0 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad (۵۰)$$
$$\mathbf{B_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ورودی سیستم مرجع همانند شکل ۲ شامل دو ورودی می‌باشد. هر دو ورودی به صورت مربعی با دامنه واحد و دوره تناوب ۱۰ ثانیه می‌باشد. ورودی دوم نسبت به ورودی اول با تأخیر ۴ ثانیه‌ای اعمال می گردد. با انتخاب ماتریس $\boldsymbol{Q} = 40 \times I_{3\times3}$ و حل معادله ریکاتی $(\boldsymbol{A_d})^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{A_d}) = -\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{Q} > \mathbf{0}$ ماتریس معین مثبت متقارن $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 20.0 & -10.0 & 0 \\ -10.0 & 13.33 & 0 \\ 0 & 0 & 20.0 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید. ماتریس بهره رؤیتگر با حل نامساوی ماتریسی خطی (۲۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

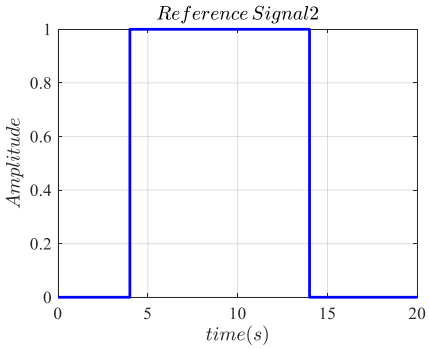
$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 28.5315 & -0.4237 \\ -0.7287 & 25.7227 \\ -0.8721 & -0.0036 \end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

شرایط اولیه به ترتیب برای سیستم مالی، رؤیتگر، مدل مرجع و ورودی جبران‌ساز به صورت $\boldsymbol{\xi}(0) = [2 \quad 2 \quad 3]^T$ ، $\hat{\boldsymbol{\xi}}(0) = [1 \quad 1 \quad 2]^T$ ، $\boldsymbol{\xi_d}(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ و $l(0) = 0$ انتخاب می گردند



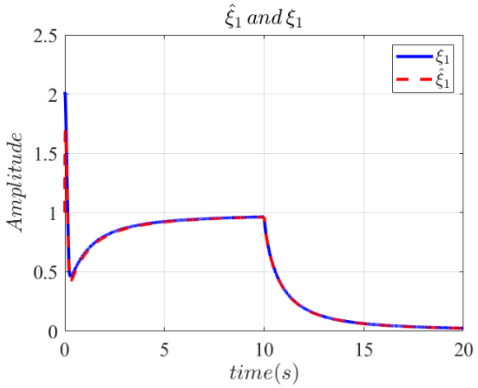
[1] Uniformly Ultimately Bounded (UUB)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

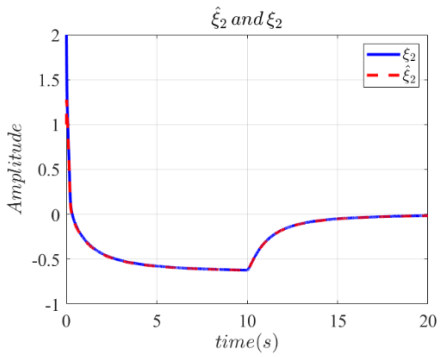


شکل۲. نمودارهای سیگنال‌های مرجع ورودی سیستم مالی

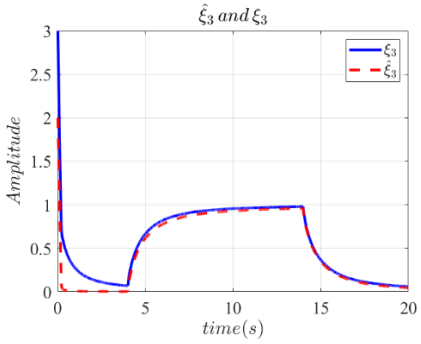
عملکرد سیستم رؤیتگر در نمودارهای شکل ۳ دیده می‌شود. مطابق این شکل‌ها رؤیتگر به خوبی توانسته است حالت‌های سیستم را تخمین بزند.



(الف)



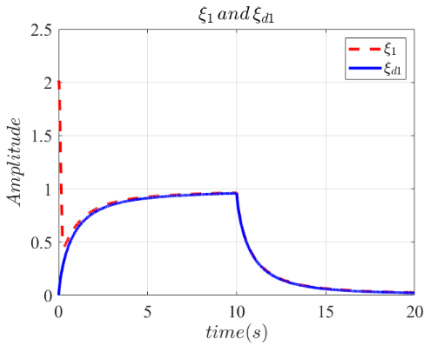
(ب)



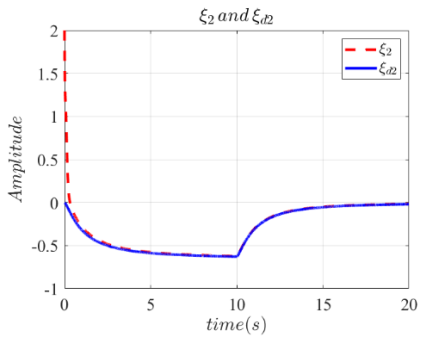
(ج)

شکل ۳. تخمین حالت‌های سیستم مالی توسط رؤیتگر (الف، ب و ج)

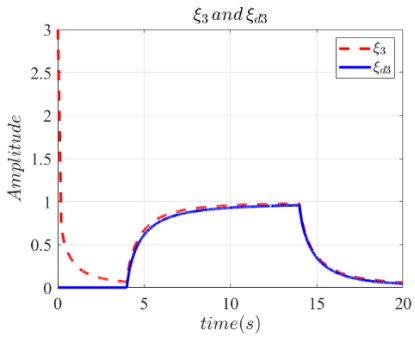
همانطور که در نمودارهای شکل ۴ (الف، ب و ج) مشاهده می‌گردد هر سه حالت سیستم گفته شده به حالت‌های سیستم مرجع همگرا شده‌اند.



(الف)



(ب)



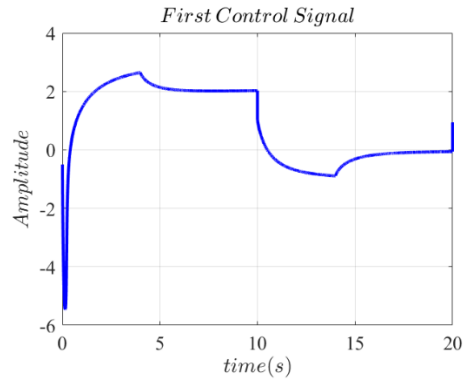
(ج)

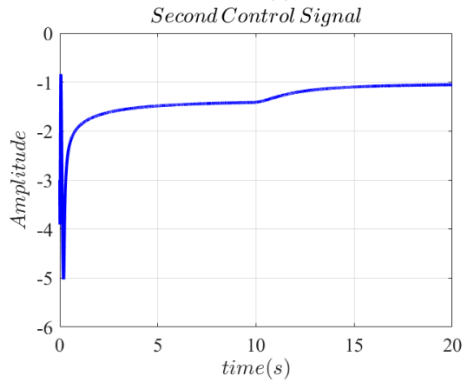
شکل ۴. منحنی‌های همگرایی حالت‌های سیستم مالی به سیستم مرجع (الف، ب و ج)

نمودارهای سیگنال‌های کنترلی نیز در شکل ۵ نشان داده شده اند. این نمودارها نشان می‌دهند که ورودی‌های کنترلی پس از همگرا شدن سیستم اصلی به سیستم مرجع، مناسب و محدود می باشند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

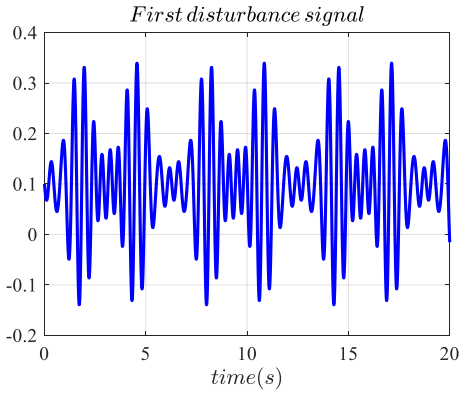
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

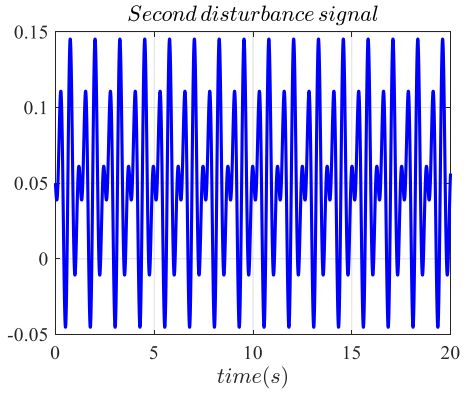




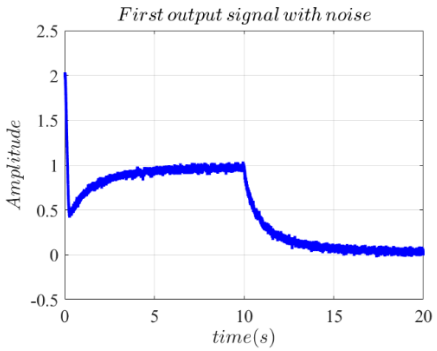
شکل ۵: نمودارهای ورودی‌های کنترلی سیستم مالی

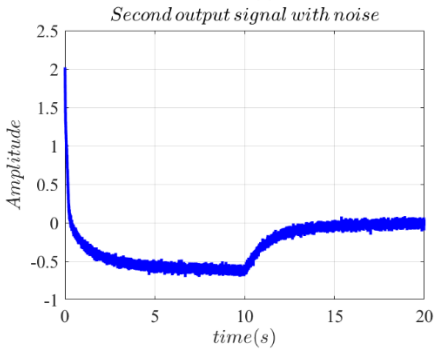
حال کارآیی روش ارائه شده در حضور نویز، اغتشاش و عدم قطعیت بررسی می‌گردد. برای این منظور فرض می‌شود ورودی‌های اغتشاش اعمال شده به کانال‌های اول و دوم سیستم (۴۸) مطابق نمودارهای شکل ۶ بوده و کانال سوم فاقد ورودی اغتشاش باشد. خروجی سیستم همانگونه که در شکل‌های ۷ نشان داده شده است، در کانال y_1 حاوی نویز اندازه گیری با میانگین صفر و انحراف معیار ۰.۰۲ و در کانال y_2 نیز شامل نویز با میانگین صفر و انحراف معیار ۰.۰۳ می‌باشد. همچنین پارامتر a (ضریب ξ_1 در معادله اول) از مقدار ۲.۵ به ۳ تغییر یافته است.





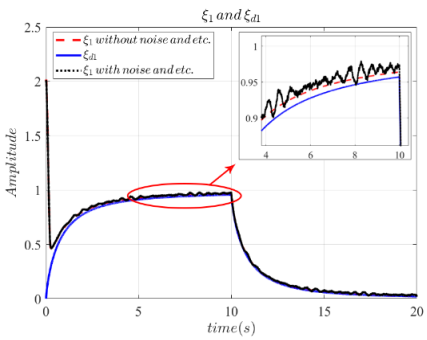
شکل ۶: نمودارهای اغتشاش ورودی در کانال‌های ۱ و ۲





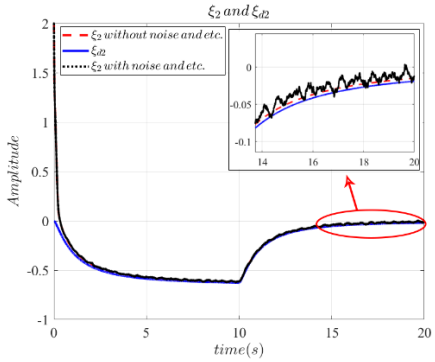
شکل ۷: نمودارهای خروجی‌های سیستم مالی در حضور نویز اندازه‌گیری

نمودارهای شکل ۸، مقایسه همگرایی حالت‌های سیستم اصلی به سیستم مرجع در حضور و بدون حضور نویز، اغتشاش و عدم قطعیت را نشان می‌دهند که نشان دهنده کارآیی کنترل‌کننده می‌باشد.

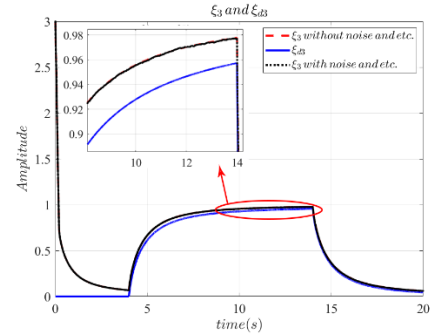


(الف)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]



(ب)



(ج)

شکل ۸ مقایسه منحنی‌های همگرایی حالت‌های سیستم مالی به سیستم مرجع در حضور و عدم حضور اغتشاش ورودی، نویز اندازه‌گیری و عدم قطعیت مدل سیستم (الف، ب و ج)

مثال ۲.

سیستم غیر خطی از نوع مرتبه کسری یک بازوی روبات مفصلی انعطاف‌پذیر[1] که در [۳۹] معرفی شده است در نظر گرفته می‌شود. معادلات فضای حالت مرتبه کسری غیرخطی این سیستم به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$D^q\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\xi_2\\ -48.6\xi_1-1.25\xi_2+48.6\xi_3\\ \xi_4\\ 19.5\xi_1-19.5\xi_3-3.33\sin\xi_3\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 21.6\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}u \qquad (۵۲)$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}$$

که در آن $q=0.8$ و سیگنال ورودی سیستم مرجع $r=\sin t$ انتخاب می‌گردد. نمودار این سیگنال ورودی در شکل ۹ نشان داده شده است.

سیستم مرجع در این شبیه‌سازی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$D^q\boldsymbol{\xi_d}(t)=\mathbf{A_d}\boldsymbol{\xi_d}+\mathbf{B_d}r$$

$$\mathbf{A_d}=\begin{bmatrix}7.6747&6.1352&6.5461&-5.9516\\27.0190&10.0021&14.4778&-12.8857\\-1.4617&-1.3214&-4.2947&1.2299\\52.6030&26.8158&29.4299&-29.3821\end{bmatrix},\quad \mathbf{B_d}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad (۵۳)$$

$\boldsymbol{Q}=$ با انتخاب

$$\begin{bmatrix}2.8947&-0.4737&0.2632&-0.6842\\1.1579&2.2105&-0.8947&-0.4737\\1.5263&0.3684&0.6842&-0.5789\\2.2632&-1.3158&0.8421&0.2105\end{bmatrix}$$

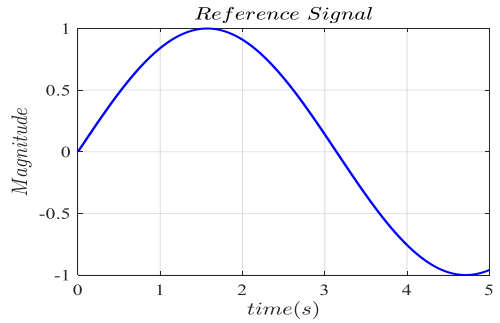
و حل معادله ریکاتی $(\mathbf{A}_d)^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^T(\mathbf{A}_d)=-\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{Q}>\mathbf{0}$ ماتریس معین مثبت متقارن $\boldsymbol{P}$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2.7518&5.8080&-0.0153&9.7678\\6.1896&15.2888&-0.1755&24.6617\\0.6783&1.4372&0.1356&2.4774\\10.9126&25.8193&0.0569&42.8209\end{bmatrix}$$

برای یافتن ماتریس‌های بهره رؤیتگر می‌توان نامساوی‌های ماتریسی خطی (۲۳) را حل نمود. از حل این نامساوی، ماتریس بهره به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0.5&-43.9402\\-3.9285&0.2852\\0.8840&46.2829\\0.0362&18.3162\end{bmatrix} \qquad (۵۴)$$

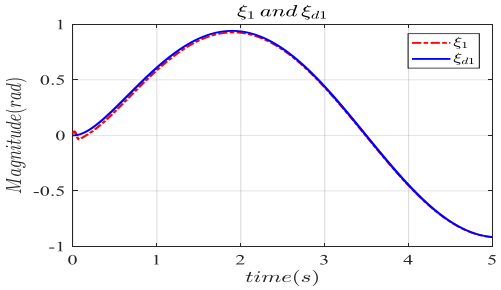
شرایط اولیه به ترتیب برای سیستم بازوی روبات، رؤیتگر، سیستم مرجع و متغیر l به صورت $\boldsymbol{\xi}(0)=[1\quad 1\quad 1\quad 1]^T*\frac{\pi}{180}$، $\hat{\boldsymbol{\xi}}(0)=[3\quad 3\quad 3\quad 3]^T*\frac{\pi}{180}$، $\boldsymbol{\xi_d}(0)=[0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$ و $l(0)=0$ در نظر گرفته می‌شوند. شبیه‌سازی در محیط سیمولینک متلب و با استفاده از تولباکس FOMCON انجام می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی گویای همگرایی خوب حالت‌های سیستم بازوی روبات انعطاف‌پذیر با حالت‌های سیستم مرجع می‌باشد. نمودارهای (الف تا د) در شکل ۱۰ نشان‌دهنده این موضوع می‌باشد.



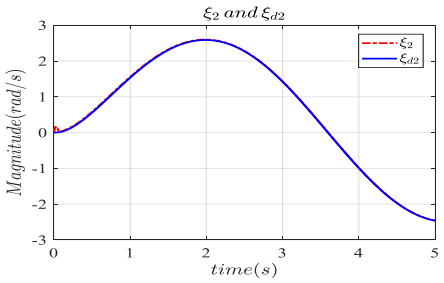
شکل۹. نمودار سیگنال مرجع ورودی به سیستم بازوی روبات انعطاف‌پذیر

[1] The flexible joint robot manipulator

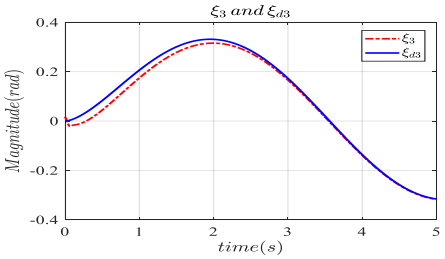
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]



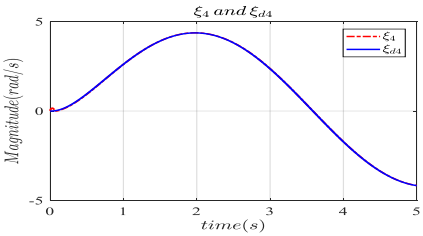
(الف)



(ب)



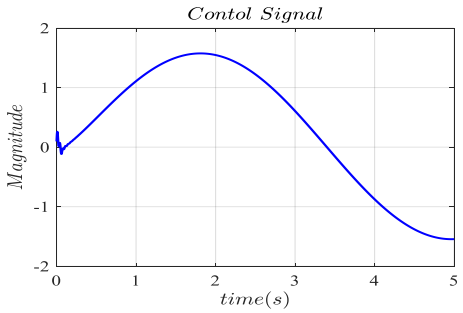
(ج)



(د)

شکل ۱۰. منحنی‌های همگرایی حالت‌های سیستم بازوی روبات انعطاف‌پذیر به سیستم مرجع (الف تا د)

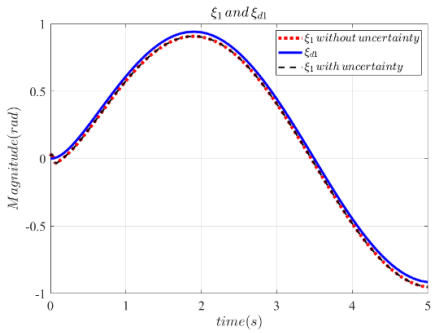
محدود بودن ورودی کنترلی شرط بسیار مهم در طراحی یک کنترل کننده می‌باشد. این مهم در شکل ۱۱ به تصویر کشیده شده است.



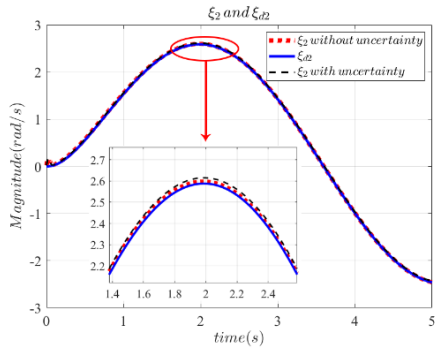
شکل ۱۱. نمودار سیگنال کنترل سیستم بازوی روبات انعطاف‌پذیر

برای بررسی میزان حساسیت روش ارائه شده به تغییر پارامترهای سیستم (۵۲) فرض می‌شود ضریب ξ_1 در معادله دوم از 48.6- به 50- و ضریب ξ_3 در معادله چهارم از 19.5- به 17- تغییر یابد.

با در نظر گرفتن شرایط اولیه به صورت پیش‌فرض‌های سابق، شبیه‌سازی نشان می‌دهد علی‌رغم عدم قطعیت گفته شده در پارامترهای مدل نامی سیستم، روش ارائه شده کارآیی خوبی دارد. نمودارهای رسم شده در شکل ۱۲ مقایسه همگرایی بین حالت‌های سیستم اصلی و سیستم مرجع را در دو حالت با عدم قطعیت و بدون عدم قطعیت مدل نشان می‌دهند.



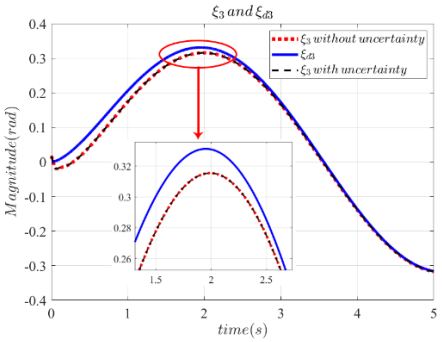
(الف)



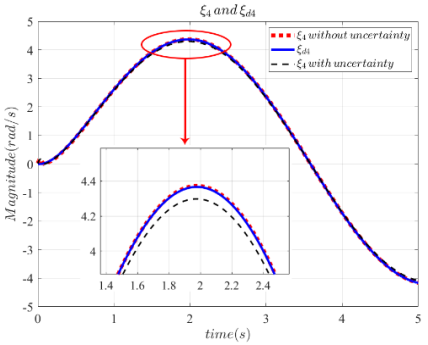
(ب)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]



(ج)



(د)

شکل ۱۲. منحنی‌های همگرایی حالت‌های سیستم بازوی روبات انعطاف‌پذیر به سیستم مرجع (الف تا د)

حال به مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با روش‌های موجود می‌پردازیم. در اینجا با در نظر گرفتن روش موجود در [۴۰]، به بررسی دو روش پرداخته می‌شود.

مطابق [۴۰] معادله دینامیکی سیستم غیرخطی مرتبه کسری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} D^q \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} \end{cases} \quad (۵۵)$$

که در آن، $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ بردار حالت، $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m}$ بردار ورودی و $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{p}$ بردار متغیرهای خروجی قابل اندازه‌گیری سیستم، $\boldsymbol{C}$ ماتریس با ابعاد مناسب، $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{n}$ بردار تابع غیرخطی، معلوم و مشتق‌پذیر می‌باشد. تابع $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi})$ لیپ‌شیتز در $\boldsymbol{\xi}$ و با ثابت لیپ‌شیتز γ می‌باشد به گونه‌ای که:

$$\|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{u})\| < \gamma \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \quad (۵۶)$$

یک رؤیت‌گر مرتبه کسری غیرخطی به صورت زیر برای سیستم (۵۵) ارائه می‌شود:

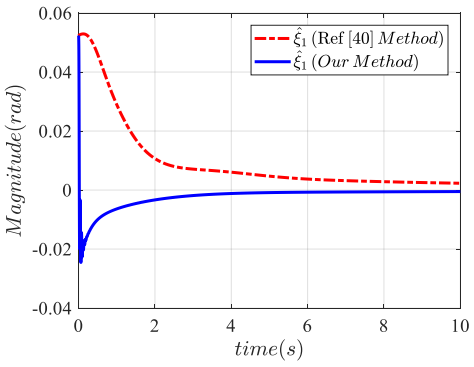
$$\begin{cases} D^q \hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \mathbf{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\phi}(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{\xi}} \end{cases} \quad (۵۷)$$

همچنین ورودی کنترلی سیستم (۵۵) به صورت $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{\xi}}$ در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای که ماتریس $\boldsymbol{K}$ بهره فیدبک حالت می‌باشد. مطابق [۴۰] در صورت وجود عدد حقیقی مثبت ε_1 و ثابت اسکالر مثبت β، با حل پذیر بودن نامساوی ماتریسی زیر ضرایب $\boldsymbol{L}$ و $\boldsymbol{K}$ بدست آمده و علاوه بر پایدار بودن رؤیت‌گر و کنترل‌کننده، حالت‌های تخمین زده شده به حالت‌های واقعی همگرا می‌گردند.

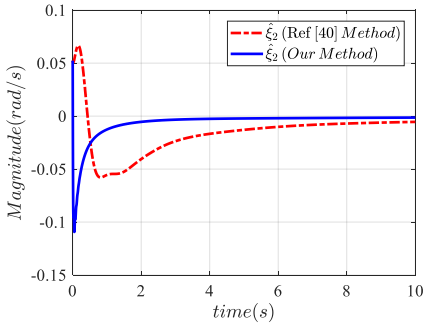
$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\theta})^T & -\boldsymbol{BK} \\ -\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{B}^T & (\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{\theta})^T \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۸)$$

که در آن $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}$، $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$ و $\theta = {\varepsilon_1}^{-1}\gamma + \beta$ می‌باشد.

در اینجا نتایج شبیه‌سازی مثال دوم برای هر دو روش در نمودارهای شکل ۱۳ و ۱۴ دیده می‌شود. نمودارهای شکل ۱۳، نمایانگر مقایسه حالت‌های رؤیتگر و نمودارهای شکل ۱۴، نشان‌دهنده مقایسه حالت‌های واقعی سیستم (۵۲) برای روش حاضر و روش مرجع [۴۰] می‌باشد. مطابق با این نتایج کارآیی روش حاضر به خوبی دیده می‌شود. علاوه بر این در روش حاضر هیچگونه شرطی روی تابع غیرخطی $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\xi})$ وجود ندارد.



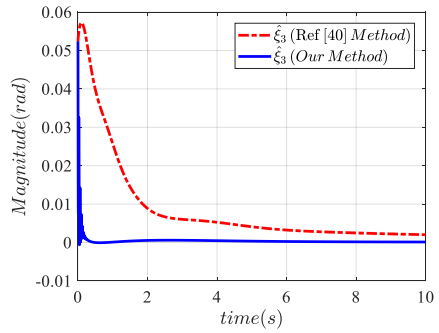
(الف)



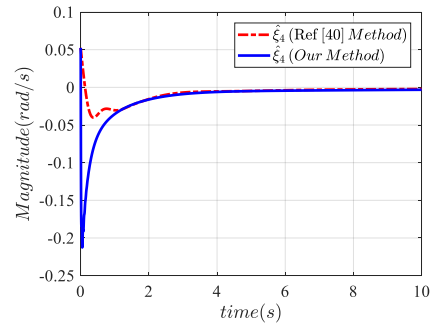
(ب)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

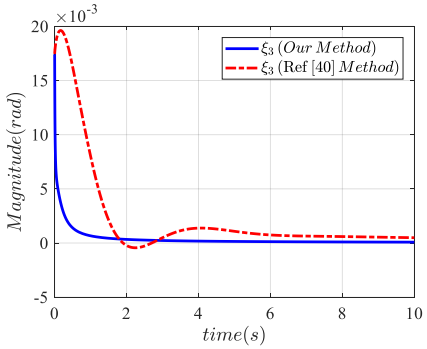


(ج)

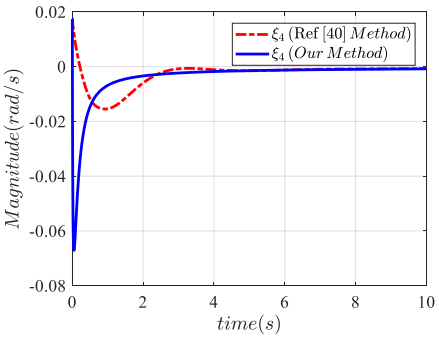


(د)

شکل ۱۳. مقایسه نمودارهای حالت‌های تخمین زده شده توسط رؤیت‌گر برای بازوی روبات از دو روش گفته شده



(ج)

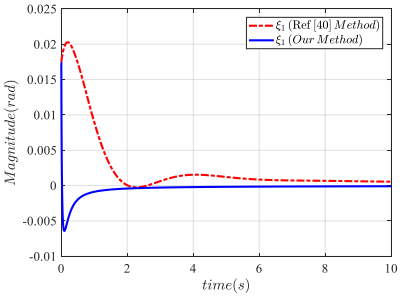


(د)

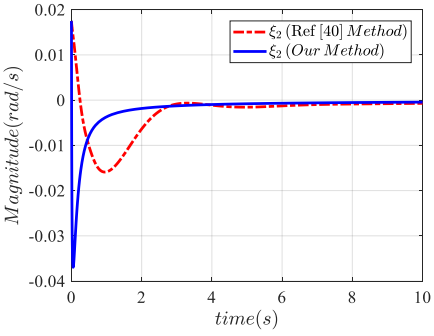
شکل ۱۴. مقایسه نمودارهای حالت‌های تخمین زده شده توسط رؤیت‌گر برای بازوی روبات از دو روش گفته شده

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیتگر برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی از نوع مستوی و چند ورودی/چندخروجی طراحی شده است. کنترل‌کننده به گونه‌ای طراحی شده که سیستم حلقه‌بسته، حالت‌های یک سیستم مرجع پایدار را تعقیب کند. برای پیش‌بینی حالت‌های سیستم غیرخطی و طراحی رؤیتگر از رویکرد تئوری مقدار میانگین مشتقی استفاده شده و با یافتن شرط کافی برای پیدا کردن بهره‌های رؤیتگر از طریق یک نامساوی ماتریسی خطی و حل آن، رؤیتگر طراحی گردیده است. به منظور تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته و همگرایی حالت‌های سیستم به حالت‌های سیستم مرجع از قضیه لیاپانوف اثبات شده است. در نهایت، با استفاده از شبیه‌سازی عددی کارآیی و مفید بودن کنترل کننده مورد نظر علاوه بر سیستم نامی برای سیستم دارای عدم قطعیت مدل و در حضور اغتشاش ورودی و همچنین نویز اندازه‌گیری نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

مراجع

[1]I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[2]R. Hilfer, Application of Fractional Calculus in Physics, World Science Publishing, Singapore, 2000.

[3]A. Boulkroune, A. Bouzerbia and T. Bouden, 2016, "Projective synchronization of two different fractional-order chaotic systems via adaptive fuzzy control", Neural Computing and Applications, vol. 27, no. 5, pp. 1349-1360.

[4]N. Laskin, 2000, "Fractional market dynamics", Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 287, no. 3-4, pp. 482-492.

[5]X. Yin, D. Yue and S. Hu, 2013, "Consensus of fractional Order heterogeneous multi-agent systems", IET Control Theory and Applications, vol.7, no. 2, pp. 314-322.

[6]J.G. Lu, G. Chen, 2009, "Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: An LMI approach", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 54, no. 6, pp. 1294–1299.

[7]Y. Chen, Y. Wei, X. Zhou, Y. Wang, 2017, "Stability for nonlinear fractional order systems: an indirect approach", Nonlinear Dynamics. vol. 89, no. 2, pp. 1011–1018.

[8]Z. Song, K. Sun, S. Ling, 2017, "Stabilization and synchronization for a mechanical system via adaptive sliding mode control". ISA Transaction, vol. 68, pp. 353-366.

[9]N. Goléa, A. Goléa, K. Barra, T. Bouktir, 2008, "Observer-based adaptive control of robot manipulators: Fuzzy systems approach", Applied Soft Computing, vol. 8, no. 1, pp. 778–787.

[10]M.P.Aghababa, 2012," Robust stabilization and synchronization of a class of fractional- order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol.17, pp. 2670–2681.

[11] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, 2010, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability", Computers and Mathematics with Applications, vol. 59, no. 5, pp. 1810–1821.

[12] J. Yu, H. Hu, S. Zhou, X. Lin, 2013, "Generalized Mittag-Leffler stability of multi-variables fractional order nonlinear systems", Automatica, vol. 49, no. 6, pp. 1798–1803.

[13] C. Farges, M. Moze, J. Sabatier, 2010, "Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems", Automatica, vol. 46, pp. 1730–1734.

[14]J.C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, A. Oustalo up, 2011, "A Lyapunov approach to the stability of fractional differentiel equations", Signl Processing, vol. 91 no. 3, pp. 437-445.

[15 D.Y. Chen, R.F. Zhang, X.Z. Liu, X.Y. Ma, 2014, "Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, pp. 4105-4121.

[16] M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A. Gallegos, R. Castro-Linares, 2015, "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 22, no. 1–3, pp. 650–659.

[17] S. Ibrir, M. Bettayeb, 2015, "New sufficient conditions for observer-based control of fractional-order uncertain systems", Automatica, vol. 59, pp. 216-223.

[18] A. Mohammadzadeh, S. Ghaemi, 2018, "Robust synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time-varying delay", Nonlinear Dynamics, vol. 93, pp. 1809-1821.

[19] T. Liu, F.Wang,W. Lu, X.Wang, 2019, "Global stabilization for a class of nonlinear fractional-order systems, International Journal of Modeling, "Simulation and Scientific Computing, vol. 10, pp. 1-10.

[20] Y. H. Lan, Y. Zhou, 2011, "Lmi-based robust control of fractional-order uncertain linear systems", Computers and Mathematics with Applications, vol. 62, no.3, pp. 1460–1471.

[21] Y. H. Lan, H. X. Huang, Y.Zhou, 2012, "Observer-based robust control of $\alpha\ (1 < \alpha < 2)$ fractional-order uncertain systems: a linear matrix inequality approach", IET Control Theory Application. vol. 6, pp. 229-234.

[22] E. A. Boroujeni, H. R. Momeni, 2012, "Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems", Signal Processing.vol. 92, pp. 2365–2370,.

[23] Z.S. Aghayan, A. Alfi, T. Machado, 2021, "Observer-based control approach for fractional-order delay systems of neutral type with saturating actuator". Mathematical Methods in Applied Science, vol. 44, no. 11, pp. 8554–8564.

[24] H. F. Ghavidel, A. A Kalat, 2017, "Observer-based robust composite adaptive fuzzy control by uncertainty estimation for a class of nonlinear systems", Neurocomputing, vol. 230, pp.100–109.

[25] H. F. Ghavidel, A. A Kalat, 2018, "Observer-based hybrid adaptive fuzzy control for affine and nonaffine uncertain nonlinear systems", Neural

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]

Computing and Applications, vol. 30, pp. 1187–1202.

[26] D. Valério, J.J. Trujillo, M. Rivero, J.T. Machado, D. Baleanu, 2013, "Fractional calculus: a survey of useful formulas". The European Physical Journal Special Topics, vol. 222, no. 8, pp. 1827-46.

[27] D. Chen, R. Zhang, X. Liu, X. Ma, 2014, "Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, pp. 4105-4121.

[28] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, J. Gallegos, 2014, "Lyapunov functions for fractional order systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, pp. 2951–7.

[29] M-A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J.A. Gallegos, R. Castro-Linares, 2014, "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation vol. 22, no. 1-3, pp. 650–659.

[30] V. Sharma, V. Agrawal, B. Sharma, R. Nath, 2016, "Unknown input nonlinear observer design for continuous and discrete time systems with input recovery scheme". Nonlinear Dynamics vol. 85, no. 1, pp. 645-658.

[31] V. Sharma, M. Shukla, B.B. Sharma, 2018, "Unknown input observer design for a class of fractional order nonlinear systems", Chaos, Soliton and Fractal, vol. 115, pp. 96-107.

[32] A. Zemouche, M. Boutayeb, 2009, "A unified H_∞ adaptive observer synthesis method for a class of systems with both Lipschitz and monotone nonlinearities", System and Control Letter, vol. 58, pp. 282- 288.

[33] A. Zemouche, M. Boutayeb, G.I. Bara, 2005, "Observer design for nonlinear systems. An approach based on the differential mean value theorem". Proc CDC-ECC'05, 44th IEEE Conference on IEEE, pp.6353–6358.

[34] S. Boyd, L. Vandenberghe, 2001, "Convex optimization with engineering applications", in: Lecture Notes, Stanford University, Stanford.

[35] M. M. Polycarpous, P. A. Ioannouq, 1996, " A Robust Adaptive Nonlinear Control Design", Automarica, vol. 32, pp. 423–427.

[36] I. Petras, D. Bednarova, 2011 , "Control of fractional-order nonlinear systems: a review", Acta Mechanica et Automatica, vol.5, no.2, pp. 96-100.

[37] S. Dadras, H.R. Momeni, 2010, "Control of a fractional-order economical systems via sliding mode" , Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 389, pp. 2434–2442.

[38] M. Bettayeb, S. Djennoune, 2016, "Design of sliding mode controllers for nonlinear fractional-order systems via diffusive representation", Nonlinear Dynamics. vol. 84, pp. 593–605.

[39] A. Zemouche and M. Boutayeb, 2013, "On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems," Automatica, vol. 49, pp. 585-591.

[40] E. A. Boroujeni, H. R. Momeni, 2012, "Observer Based Control of a Class of Nonlinear Fractional Order Systems using LMI", World Academy of Science, Engineering and Technology, vol. 6 (1), pp. 81-84.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.61186/joc.17.1.35]