مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۷، شماره ۱، بهار ۱۴۰۲، صفحه ۱۰۴-۹۳

کنترل مقاوم سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی نامعین با کلیدزنی غیرهمزمان در حضور اغتشاش مبتنی بر رویتگر

علی نصراللهی[۱]، علی اکبر افضلیان[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران a_nasrollahi@sbu.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران Afzalian@sbu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۰۳ ویرایش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۲ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۲۶

چکیده: این مقاله بر کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ‌شونده نامعین با کلیدزنی غیرهمزمان در حضور اغتشاش با زمان اقامت میانگین مبتنی بر رویتگر تمرکز دارد. برای این منظور در ابتدا، یک مدل مناسب برای سیستم مورد نظر معرفی می‌شود. در ادامه، با بهره‌گیری از توابع شبه لیاپانوف، حداکثر زمان مجاز عدم همزمانی، حداقل زمان اقامت میانگین و شروط لازم جهت پایداری سیستم تعیین می‌شوند. نوآوری این پژوهش در نظر گرفتن همزمان چند پارامتر نامطلوب می‌باشد که عبارتند از: کلیدزنی غیرهمزمان، نامعینی، اغتشاش و عدم دسترسی به چند متغیر. در نظر گرفتن همزمان این عوامل، پیچیدگی حل مسئله را چند برابر می‌کند. در پایان، میزان اثربخشی الگوریتم پیشنهادی از طریق پیاده‌سازی روش بر روی مدل یک جسم پرنده در محیط شبیه‌سازی متلب بررسی و نشان داده شده می‌شود.

کلمات کلیدی: زمان اقامت میانگین، سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی، فیدبک حالت، کلیدزنی غیرهمزمان.

Observer based robust control of uncertain switched linear systems with asynchronous switching in the presence of disturbance

Ali Nasrollahi, Ali Akbar Afzalian

Abstract: This paper focuses on the control of uncertain switched linear systems with asynchronous switching in the presence of disturbance using an observer with average dwell time. For this purpose, firstly, an appropriate model for the system is introduced, The maximum allowed time of non-synchronism, the minimum average dwell time and the necessary conditions for system stability are determined, using pseudo-Lyapunov functions. The novelty of this research is taking into account several undesirable parameters, i.e. asynchronous switching, uncertainty, disturbance and lack of access to several variables, simultaneously. Considering these factors together increase the complexity of the problem. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is shown through the implementation of the method on the system of a flying object in the MATLAB simulation environment.

Keywords: Average dwell time, Switched linear systems, State feedback, Asynchronous switching.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

۱- مقدمه

سیستم‌های سوئیچ‌شونده، کلاس مهمی از سیستم‌های ترکیبی دینامیکی هستند که از تعدادی زیرسیستم با دینامیک پیوسته (که حالات سیستم نامیده می‌شوند) و یک قانون (به نام قانون کلیدزنی که وظیفه آن، تنظیم عمل کلیدزنی بین حالات گسسته می‌باشد) تشکیل شده‌اند[۱]. قوانین کلیدزنی انواع مختلفی دارند که چند نمونه از آنها عبارتند از: کلیدزنی وابسته به حالت، کلیدزنی اختیاری، کلیدزنی با میانگین زمان اقامت و ...([۲-۵]). سیستم‌های سوئیچ‌شونده سابقه گسترده‌ای در علم مهندسی دارند و بسیاری از سیستم‌های جهان واقعی را می‌توان به عنوان سیستم سوئیچ‌شونده مدل کرد؛ به عنوان مثال: فرآیندهای شیمیایی، سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های قدرت و بسیاری از سیستم‌های دیگر را می‌توان به عنوان سیستم‌های سوئیچ‌شونده در نظر گرفت. دو هدف عملی وجود دارند که مطالعه روی سیستم‌های سوئیچ‌شونده را جذاب می‌کنند: ۱) جامعیت این سیستم‌ها: چرا که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی ویژگی تغییر بین ساختارهای مختلف سیستم را نشان می‌دهند و می‌توانند به صورت سیستم‌های سوئیچ‌شونده مدل‌سازی شوند. سیستم‌های سوئیچ‌شونده در طیف گسترده‌ای از کاربردها مانند سیستم‌های مکانیکی، صنعت خودرو، سیستم‌های کنترل شبکه‌ای، سیستم‌های حمل و نقل هوشمند، الکترونیک قدرت و سیستم‌های انرژی هوشمند ظاهر می‌شوند. ۲) افزایش کارایی و بهبود عملکرد: سوئیچ کردن بین کنترل‌کننده‌های چندگانه، یک مکانیزم کارآمد برای مقابله با سیستم‌هایی با عدم قطعیت بزرگ یا بسیار پیچیده فراهم می‌کند.

یک سیستم سوئیچ‌شونده به دلیل ماهیت ترکیبی آن، ویژگی‌های زیرسیستم‌های خود را به ارث نمی‌برد. مثلا، ویژگی پایداری نمایی کلی تمام زیرسیستم‌ها نمی‌تواند ویژگی پایداری یک‌سان سیستم سوییچ‌شونده را تضمین کند و گاهی اوقات، تعویض بین زیرسیستم‌های پایدار حتی ممکن است منجر به ناپایداری سیستم سوئیچ شونده شود. بنابراین، تجزیه و تحلیل سنتی و روش‌های طراحی برای سیستم‌های بدون کلیدزنی به طور مستقیم برای سیستم‌های سوئیچ‌شونده اعمال نمی‌شود.

عدم قطعیت‌ها به طور گسترده در سیستم‌های سوئیچ شونده وجود دارند و مطالعه سیستم‌های سوئیچ شونده را پیچیده‌تر می‌کنند. همچنین انتظار می‌رود که کنترل مقاوم به عنوان یک ابزار قدرتمند برای سیستم‌های غیرسوئیچ شونده نامعین، یک ابزار موثر برای مطالعه سیستم‌های سوئیچ شونده نامعین باشد.

تاکنون، عمده فعالیت‌ها بر روی سیستم‌های سوئیچ‌شونده با پارامترهای معین تمرکز داشته‌اند، که از این قبیل می‌توان مسائل پایداری و پایدارسازی را نام برد[۶, ۷]. این دسته از مسائل، عمدتا بر اساس دو خانواده از قوانین کلیدزنی می‌باشند: ۱-زمان اقامت[1] و ۲- زمان اقامت میانگین[2][۸].

در کلیدزنی DT، فاصله زمانی دو کلیدزنی متوالی باید بزرگتر از یک ثابت به اندازه کافی بزرگ باشد تا پایداری سیستم سوئیچ‌شوتده تضمین شود. در روش کلیدزنی ADT، باید میانگین زمانی یک سری از کلیدزنی‌های متوالی به اندازه کافی بزرگ باشد. این بدان معناست که امکان کلیدزنی با فواصل زمانی خیلی کوتاه وجود دارد ولی باید در نوبت‌های بعدی جبران شود. اخیرا، محافظه‌کاری روش ADT، با یک استراتژی کلیدزنی که در [۹] با عنوان زمان اقامت وابسته به حالت[3] مطرح شده است، کاهش یافته است. ویژگی این استراتژی کلیدزنی، آن است که از اطلاعات هر مود، از قبیل نرخ نمایی تابع لیاپانوف مرتبط با هر مود استفاده می‌کند.

اکثر نتایج موجود مبتنی بر این فرض هستند که تعویض بین کنترل‌کننده‌های طراحی شده دقیقا مشابه زیر سیستم‌ها است. این فرض اغلب در عمل غیر واقعی است. به طور معمول، یک کانال ارتباطی برای اتصال سیستم و کنترل‌کننده وجود دارد و بنابراین، ممکن است از نظر فیزیکی شناسایی زیرسیستم فعال و اعمال همزمان کنترل‌کننده مربوطه غیرممکن باشد. در این حالت، کنترل‌کننده دیرتر از سیستم سوئیچ می‌کند، که باعث تعویض غیر همزمان در سیستم حلقه بسته می‌شود. ممکن است کنترل‌کننده تطبیق نیافته به ناپایداری سیستم‌های سوئیچ شونده منجر شود. بنابراین، در نظر گرفتن اثرات سوئیچ غیر همزمان اهمیت زیادی دارد.

مسئله پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچ‌شونده نامعین با استفاده از کنترل مود لغزشی[4] در [۱۰] مورد توجه قرار گرفته است. در این پژوهش به صورت همزمان یک رویتگر نیز جهت تخمین حالت‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. لیو و همکارانش [۱۱] یک روش مجموع وزنی را برای طراحی یک سطح لغزش مشترک توسعه داده‌اند و این روش در [۱۲] بیشتر توسعه داده شده‌است، که در آن روش زمان توقف میانگین برای اثبات پایداری نمایی چنین سیستم‌هایی استفاده شده‌است. در [۱۳] استراتژی مدل چندگانه جهت بهبود عملکرد گذرا به سیستم‌های خطی سوئیچ‌شونده اعمال می‌شود. در [۱۴]، استراتژی MMAC سوئیچ شونده[5] پیشنهاد شد، که در آن مکانیزم کلیدزنی دو لایه ساخته شد. طرح کنترل تطبیقی چند مدل برای اولین بار در یک کلاس از سیستم‌های سوئیچ‌شونده نیز در این پژوهش معرفی شده است. یک طرح کنترل تطبیقی چند مدله سوییچ شونده برای بهبود رفتار گذرا با تنظیم مجدد پارامترهای کنترل‌کننده پیشنهاد شده‌است. در [۱۵]، طرح‌های کنترل ردیابی تطبیقی مقاوم برای سیستم‌های خطی سوئیچ‌شونده نامعین در معرض اغتشاشات مورد بررسی قرار گرفته‌است. در [۱۶]، مساله کنترل تطبیقی مبتنی بر تخمین حالت برای دسته‌ای از سیستم‌های نامعین در معرض تاخیر زمانی و اغتشاش خارجی در چارچوب مود لغزشی مورد بررسی قرار گرفته‌است . در [۱۷] و [۱۸]، با یک کنترل‌کننده انتقال بدون برخورد، به پایداری سیستم‌های خطی پایدار شده مثبت پرداخته شده است. سهم این مطالعه بهبود مقاومت کنترل‌کننده

[1] Dwell Time (DT)
[2] Average Dwell Time (ADT)
[3] Mode-Dependent Average Dwell Time (MDADT)
[4] Sliding Mode Control (SMC)
[5] Switched Multiple Model Adaptive Control (SMMAC)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

کلیدزنی در نمونه‌های کلیدزنی و همچنین تضمین عملکرد افزایش L_1 سیستم‌های مثبت است .

تمرکز این مقاله بر روی مبحث پایدارسازی سیستم‌های سوئیچ‌شونده پیوسته نامعین با کلیدزنی غیرهمزمان با استفاده از روش کنترل مقاوم مبتنی بر مشاهده‌گر در حضور اغتشاش خارجی می‌باشد. با اعمال روش پیشنهادی، یک دسته از شروط بدست می‌آیند که با برقرار بودن آنها، پایداری سیستم تضمین می‌گردد. نوآوری‌های این پژوهش در قالب زیر قابل بیان می‌باشد: اثبات پایداری سیستم سوئیچ‌شونده در حضور عوامل نامطلوب. که عبارتند از: عدم همزمانی در کلیدزنی، نامعینی، اغتشاش خارجی و عدم دسترسی به برخی متغیرها. لازم بذکر است که در نظر گرفتن ترکیب این عوامل برگرفته از یک مسئله واقعی می‌باشد. لازم بذکر است که روش کنترلی پیشنهادی در این پژوهش بسط روش ارائه شده در [۶] توسط افزودن نامعینی‌ها، اغتشاش و مشاهده‌گر می‌باشد.

ترتیب ارائه مطالب در ادامه این مقاله بدین شرح است: در بخش دوم، مدل سیستم مورد بررسی معرفی می‌گردد و در ادامه آن نیز قضایا و تعاریف مورد استفاده در این مقاله بیان می‌گردند. معرفی روش کنترلی و طراحی رویتگر به ترتیب در بخش‌های سوم و چهارم بیان شده است و در بخش پنجم نیز نتایج شبیه‌سازی ارائه گردیده‌اند. در نهایت نیز جمع‌بندی مباحث ارائه شده در بخش پایانی انجام گرفته است.

۲- سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی نامعین

در این بخش، در ابتدا مدل ریاضی سیستم مورد بررسی معرفی می‌گردد و در ادامه تعاریف و قضایایی که در بخش بعد برای اثبات پایداری روش ارائه شده مورد نیاز می‌باشند، ارائه می‌گردند.

۲-۱- مدل ریاضی سیستم مورد مطالعه

مدل سیستم سوئیچ‌شونده به فرم معادلات زیر تعریف می‌شوند.

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + d(t) \quad (۱)$$

$\sigma(t)$ سیگنال کلیدزنی زیرسیستم می‌باشد که عددی است از مجموعه $\Xi = \{1, \dots, N\}$ (N نشان‌دهنده تعداد زیرسیستم‌های یک سیستم کلیدزنی است). سیگنال کلیدزنی تعیین می‌کند که در حال حاضر کدامیک از زیرسیستم‌ها فعال می‌باشد و به تناسب آن ناظر کنترل‌کننده مناسب را توسط سیگنال کلیدزنی کنترل‌کننده($\sigma_c(t)$) فعال می‌کند. در ضمن $x(t)\epsilon R^n$ بردار حالت، $u(t)\epsilon R^m$ بردار ورودی کنترلی، $y(t)\epsilon R^l$ بردار خروجی و $d(t)\epsilon R^n$ بردار اغتشاش خارجی با کران بالای $||d(t)|| \le D$ می‌باشند.

اکنون فرض کنید ماتریس‌های سیستم و ورودی کنترلی سیستم سوئیچ‌شونده (۱) با روابط (۲) و (۳) معرفی شوند ([۱۹]).

$$A_i(q) = A_i^0 + \Delta A_i(q^0, \Delta q) \quad (۲)$$

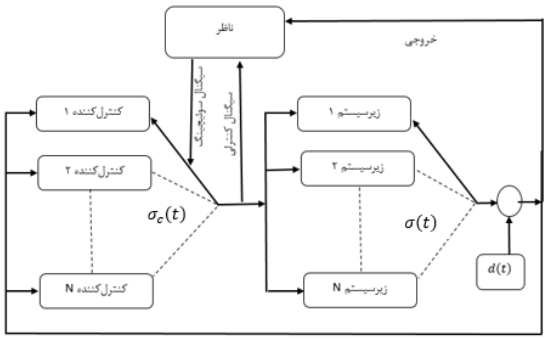
$$B_i(q) = B_i^0 + \Delta B_i(q^0, \Delta q) \quad (۳)$$

در روابط فوق $q = [q_1, q_2, \dots, q_r]$ ، $q^0 = [q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0]$ و $\Delta q = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r]$ به ترتیب بردار پارامترها، بردار مقادیر نامی پارامترها و بردار میزان نامعینی پارامترها هستند و r تعداد پارامترهای نامعین می‌باشد.

همچنین A_i^0 و B_i^0 ماتریس‌های نامی فضای حالت زیرسیستم‌ها هستند که به صورت $A_i^0 = A_i(q^0)$ و $B_i^0 = B_i(q^0)$ تعریف می‌شوند. ضمن اینکه $\Delta A_i(q^0, \Delta q)$ و $\Delta B_i(q^0, \Delta q)$ جزء نامعین ماتریس‌های A_i, B_i بوده و به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} \Delta A_i(q^0, \Delta q) = \sum_{k=1}^{r} \delta q_k E_k^i \\ \Delta B_i(q^0, \Delta q) = \sum_{k=1}^{r} \delta q_k F_k^i \end{cases} \quad (۴)$$

ماتریس‌های E_k^i و F_k^i در روابط فوق، نشان‌دهنده نحوه وابستگی ماتریس‌های فضای حالت A_i و B_i به پارامتر نامعین q_k است. در صورتیکه پارامتر مجهول q_k تاثیری در ماتریس A_i (یا B_i) نداشته باشد، E_k^i (یا F_k^i) ماتریس تهی خواهد بود. در شکل ۱ بلوک دیاگرام حلقه کنترلی رسم شده است.



شکل ۱: بلوک دیاگرام حلقه کنترلی

همانگونه که از شکل ۱ مشخص است، ناظر با مشاهده تغییر وضعیت در خروجی سیستم، ورودی کنترلی و دانشی که از سیستم دارد (مثلا ترتیب تغییر زیر سیستم‌ها مشخص است) و در برخی حالات با مشاهده تخمینی از مقدار یک سری حالات خاص، فعال شدن زیرسیستم جدید را متوجه می‌شود و در نتیجه کنترل‌کننده مناسب را فعال می‌کند. یکی از چالش‌ها دقیقا در همین نقطه است که ناظر با تاخیر کنترل‌کننده متناظر با زیرسیستم فعال را انتخاب می‌کند. یعنی در این فاصله زمانی که هنوز ناظر فعال شدن زیرسیستم جدید را تشخیص نداده است، کنترل‌کننده مربوط به زیرسیستم قبلی با زیر سیستم فعال جدید کار می‌کند. که این امر می‌تواند منجربه ناپایداری سیستم گردد. این بحث همان عدم همزمانی در کلیدزنی می‌باشد که در بسیاری از فرآیندها غیر قابل اجتناب می‌باشد و باید در روند طراحی در نظر گرفته شود.

۲-۲- قضایا و تعاریف کاربردی در کلیدزنی غیرهمزمان

در این بخش قضایا و تعاریف مورد نیاز در بخش بعد ارائه می‌گردند.

قضیه ۱ ([۶]): سیستم سوئیچ‌شونده $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$ و ثابت‌های $\alpha > 0, \beta > 0, \mu \ge 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید توابع مشتق‌پذیر پیوسته لیاپانوف $V_{\sigma(t)}: R^n \to R$ و دو تابع k_1, k_2 از کلاس k_∞ به ازای هر $\forall \sigma(t) = i \epsilon \Xi$ (Ξ مجموعه حالات کلیدزنی ممکن) وجود داشته باشند که در روابط زیر صدق کنند:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

$$k_1(\|x\|) \le V_i(x) \le k_2(\|x\|) \quad (۵)$$

$$\dot{V}_i(x) \le \begin{cases} -\alpha V_i(x) & \forall t \in T_\downarrow(t_l, t_{l+1}) \\ \beta V_i(x) & \forall t \in T_\uparrow(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (۶)$$

$$V_i(x_{t_l}) \le \mu V_j(x_{t_l}) \quad (۷)$$
$$\forall(\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in \Xi \times \Xi, i \ne j$$

($\sigma(t_l^-) = j$ یعنی قبل از لحظه کلیدزنی t_l ، زیرسیستم j فعال می‌باشد.) آنگاه سیستم پایدار مجانبی یکنواخت کلی برای هر سیگنال کلیدزنی با زمان اقامت میانگین زیر می‌باشد:

$$\frac{(\ln \mu + \tau_{max}(\alpha + \beta))}{\alpha} = \tau_a^* \le \tau_a \quad (۸)$$

در روابط فوق، $T_\downarrow$ بیانگر زمانی است که زیرسیستم و کنترل‌کننده متناظر فعال می‌باشند. $T_\uparrow$ بیانگر زمانی است که زیرسیستم و کنترل‌کننده غیر متناظر (یعنی مثلا زیرسیستم i و کنترل‌کننده j) فعال می‌باشند. τ_{max} نیز حداکثر زمان غیرهمزمانی (حداکثر اختلاف زمانی بین فعال شدن زیرسیستم و کنترل‌کننده متناسب با آن) می‌باشد. منظور از $\|.\|$، نرم اقلیدسی یا نرم ۲ برداری می‌باشد.

تعریف ۱ ([۱۵])- برای هر سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ و هر زمان $T \ge t$ اگر تعداد سوئیچ در فاصله زمانی (t, t_0) با $N_\sigma(t, t_0)$ نمایش داده شود، آنگاه بیان می‌شود سیگنال $\sigma(t)$ دارای زمان توقف میانگین τ_a خواهد بود اگر دو ثابت τ_a و N_0 وجود داشته باشد که:

$$N_\sigma(t, t_0) \le N_0 + \frac{t - t_0}{\tau_a} \quad (۹)$$

برقرار باشد. در رابطه (۹) دو عدد τ_a و N_0 به ترتیب بیانگر زمان توقف میانگین و مرز برخورد می‌باشد.

تعریف ۲- پایداری نهایی یکنواخت کلی[1] ([۱۵])- سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی تحت سیگنال سوئیچینگ پایدار $GUUS$ می‌باشد اگر یک مجموعه فشرده و محدب C وجود داشته باشد بطوریکه برای هر شرط اولیه x_0 یک مقدار محدود $T(x_0)$ وجود داشته باشد که $x(t) \in C$ برای هر $t \ge T(x_0)$.

نکته ۱ ([۱۵]): هر ماتریس مثبت معین P را می‌توان به‌صورت حاصلضرب یک ماتریس غیرتکین به‌صورت $P = H.H^T$ نوشت.

لم ۱ ([۱۵]): فرض کنید $\phi \epsilon R^g$ و $\varphi \epsilon R^s$ سیگنال‌های برداری باشند و اجازه دهید $W \epsilon R^{g \times g}$ و $V \epsilon R^{g \times s}$ ماتریس‌های ثابت هستند. بنابراین، نامساوی زیر برقرار است.

$$2\phi^T W V \varphi \le \phi^T W W^T \phi + \varphi^T V^T V \varphi \quad (۱۰)$$

۳- طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت

در این بخش روشی ارائه می‌گردد تا با استفاده از فیدبک حالت، سیستم (۱) پایدار گردد. به منظور بدست آوردن شروط مناسب جهت پایدارسازی سیستم مورد نظر، توابع لیاپانوف و معادلات سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} U_i = K_i x \\ U_j = K_j x \end{cases} \quad (۱۱)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{ii}x + d(t) = (A_i + B_i K_i)x + d(t) & \forall t \in T_\downarrow \\ \dot{x} = A_{ij}x + d(t) = (A_i + B_i K_j)x + d(t) & \forall t \in T_\uparrow \end{cases} \quad (۱۲)$$

$$\begin{cases} V_i = x^t P_i x \\ V_j = x^t P_j x \end{cases} \quad (۱۳)$$

در رابطه‌های فوق، U_i و U_j به ترتیب کنترل‌کننده i ام و j ام می‌باشند که به منظور کنترل زیرسیستم‌های i ام و j ام طراحی شده‌اند.

قضیه ۲: سیستم سوئیچ‌شونده (۱) و ثابت‌های $\alpha > 0, \beta > 0, \mu \ge 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید توابع مشتق‌پذیر پیوسته لیاپانوف $V_{\sigma(t)}: R^n \to R$ و دو تابع k_1, k_2 از کلاس k_∞ به ازای هر $\forall \sigma(t) = i \epsilon \Xi$ وجود داشته باشند که در روابط زیر صدق کنند:

$$k_1\|x\|^2 \le V_i(x) \le k_2\|x\|^2 \quad (۱۴)$$

$$\dot{V}_i(x) \le \begin{cases} -\alpha V_i(x) + \bar{\lambda} D^2 & \forall t \in T_\downarrow(t_l, t_{l+1}) \\ \beta V_i(x) + \bar{\lambda} D^2 & \forall t \in T_\uparrow(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (۱۵)$$

$$V_i(x_{t_l}) \le \mu V_j(x_{t_l}) \quad (۱۶)$$
$$\forall(\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \epsilon \Xi \times \Xi, i \ne j$$

آنگاه سیستم پایدار GUUS برای هر سیگنال کلیدزنی با زمان اقامت میانگین زیر می‌باشد:

$$\frac{(\ln \mu + \tau_{max}(\alpha + \beta))}{\alpha} = \tau_a^* \le \tau_a \quad (۱۷)$$

τ_{max} نیز حداکثر زمان غیرهمزمانی می‌باشد. D حد بالای اغتشاش می‌باشد و $\bar{\lambda}$ بزرگترین مقدار ویژه مربوط به تمامی ماتریس‌های لیاپانوف می‌باشد.

اثبات:

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۱۵) در بازه $t \epsilon [t', t_{l+1}]$، به رابطه زیر می‌رسیم. (t' زمانی است که کنترل‌کننده و زیرسیستم فعال با هم تطبیق می‌یابند و مقدار آن $t' - t_l < \tau_{max}$ خواهد بود).

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \le \frac{\bar{\lambda}D^2}{\alpha} - \frac{\bar{\lambda}D^2}{\alpha} e^{-\alpha(t-t')} - \frac{\bar{\lambda}D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t')} + \frac{\bar{\lambda}D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t')+\beta\tau_{max}} + e^{-\alpha(t-t_l)} e^{(\alpha+\beta)\tau_{max}} V_i(x_{t_l}) \quad (۱۸)$$

به منظور خلاصه‌نویسی، ترم‌هایی که دیگر در ادامه گسترش نمی‌یابند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta_1(t) = \frac{\bar{\lambda}D^2}{\alpha} - \frac{\bar{\lambda}D^2}{\alpha} e^{-\alpha(t-t')} - \frac{\bar{\lambda}D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t')} + \frac{\bar{\lambda}D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t')+\beta\tau_{max}} \quad (۱۹)$$

با توجه به رابطه (۱۹) و (۱۶)، رابطه (۱۸) به صورت زیر گسترش می‌یابد:

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \le \eta_1(t) + e^{-\alpha(t-t_l)} e^{(\alpha+\beta)\tau_{max}} \mu V_i(x_{t_l^-}) \quad (۲۰)$$

با ادامه روند انتگرال‌گیری، با فرض N_σ بار کلیدزنی به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \le \eta_{N_\sigma}(t) + e^{-\alpha(t-t_0)} e^{N_\sigma(\alpha+\beta)\tau_{max}} \mu^{N_\sigma} V_i(x_{t_0}) \quad (۲۱)$$

در رابطه فوق، $\eta_{N_\sigma}(t)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

[1] Global Uniform Ultimate Stability(GUUS)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

$$\eta_{N_\sigma}(t) = \eta_1(t) + e^{-\alpha(t-t_l)}e^{(\alpha+\beta)\tau_{max}}\mu\left(\frac{\bar{\lambda}D^2}{\alpha} - \frac{\bar{\lambda}D^2}{\alpha}e^{-\alpha(t_l-t'_{l-1})}\right) + \dots$$

t'_{l-1} زمانی است که کنترل‌کننده و زیرسیستم فعال در بازه زمانی $[t_{l-1}, t_l]$ با هم تطبیق می‌یابند.

اکنون با پیاده‌سازی رابطه کلیدزنی با زمان اقامت میانگین (رابطه (۹)) در رابطه (۲۱) و تفکیک جملات، به رابطه (۲۲) می‌رسیم:

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \le \eta_{N_\sigma}(t) + e^{N_0[(\alpha+\beta)\tau_{max}+ln(\mu)]}\cdot e^{-[\alpha-\frac{1}{\tau_a}(\alpha+\beta)\tau_{max}-\frac{1}{\tau_a}ln(\mu)](t-t_0)}V_i(x_{t_0}) \quad (۲۲)$$

بنابراین، اگر میانگین زمان اقامت کلیدزنی در رابطه (۱۷) صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت زمانیکه $t \to \infty$ میل می‌کند، مقدار $V_{\sigma(t)}(x_t)$ به مقداری کمتر از $\frac{\bar{\lambda}D^2}{\alpha}$ همگرا می‌گردد.

اکنون با تعریف تابع لیاپانوف به صورت $V_{\sigma(t)}(x_t) = x^t P_{\sigma(t)} x$ و استفاده از روابط ریاضی خواهیم داشت:

$$min(\lambda_{min}(P_i))_{i\in\Xi}.\|x\|^2 \le V_{\sigma(t)}(x_t) \le max(\lambda_{max}(P_i))_{i\in\Xi}.\|x\|^2 \quad (۲۳)$$

$$\begin{cases}\underline{\lambda} = min(\lambda_{min}(P_i))_{i\in\Xi} \\ \bar{\lambda} = max(\lambda_{max}(P_i))_{i\in\Xi}\end{cases} \rightarrow \underline{\lambda}\|x\|^2 \le V_{\sigma(t)}(x_t) \le \bar{\lambda}\|x\|^2$$

با توجه به مقدار نهایی $V_{\sigma(t)}$، مقدار نهایی $\|x\|$ از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\|x\| \le \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}\alpha}}.D \quad (۲۴)$$

در رابطه فوق، $\underline{\lambda}$ کوچک‌ترین مقدار ویژه مربوط به تمامی ماتریس‌های لیاپانوف می‌باشد. در نهایت، با توجه به تعریف ۲ سیستم پایدار GUUS می‌باشد.

قضیه۳: سیستم سوئیچ‌شونده خطی (۱) با سیگنال سوئیچ دارای زمان اقامت میانگین τ_a (که در رابطه (۱۷) صدق می‌کند) و $\delta q_k \epsilon [-c_k, +c_k]$ و ثابت‌های

$$\alpha > 0, \beta > 0, \mu \ge 1,$$
$$\gamma_{ii,k} \ge 0, \sum_{k=1}^{r}\gamma_{ii,k} = \gamma_{ii},$$
$$\gamma_{ij,k} \ge 0, \sum_{k=1}^{r}\gamma_{ij,k} = \gamma_{ij},$$
$$\gamma_{ji,k} \ge 0, \sum_{k=1}^{r}\gamma_{ji,k} = \gamma_{ji},$$
$$\gamma_{jj,k} \ge 0, \sum_{k=1}^{r}\gamma_{jj,k} = \gamma_{jj}$$

$\forall(\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \epsilon\, \Xi \times \Xi, i \ne j$ را در نظر بگیرید. اگر برای روابط زیر برقرار باشند، سیستم (۱) پایدار GUUS خواهد بود و متغیرهای حالت نیز مقداری محدود با کران بالای مشخص خواهند داشت.

$$\begin{aligned}&1 - (A_i^0 + B_i^0K_j)^t P_i + P_i(A_i^0 + B_i^0K_j) \le -(\alpha + 1 + \gamma_{ii})P_i \\ &2 - (E_k^i + F_k^iK_j)^t P_i + P_i(E_k^i + F_k^iK_j) \le \frac{\gamma_{ii,k}}{c_k}P_i \quad \forall k \epsilon\{1,\dots,r\} \\ &3 - (E_k^i + F_k^iK_j)^t P_i + P_i(E_k^i + F_k^iK_j) \ge -\frac{\gamma_{ii,k}}{c_k}P_i \quad \forall k \epsilon\{1,\dots,r\}\end{aligned} \quad (۲۵)$$

$$\begin{aligned}&1 - (A_i^0 + B_i^0K_j)^t P_i + P_i(A_i^0 + B_i^0K_j) \le (\beta - 1 - \gamma_{ij})P_i \\ &2 - (E_k^i + F_k^iK_j)^t P_i + P_i(E_k^i + F_k^iK_j) \le \frac{\gamma_{ij,k}}{c_k}P_i \quad \forall k \epsilon\{1,\dots,r\} \\ &3 - (E_k^i + F_k^iK_j)^t P_i + P_i(E_k^i + F_k^iK_j) \ge -\frac{\gamma_{ij,k}}{c_k}P_i \quad \forall k \epsilon\{1,\dots,r\}\end{aligned} \quad (۲۶)$$

$$P_i - \mu P_j \le 0 \quad \forall(\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j)\epsilon\Xi \times \Xi, i \ne j \quad (۲۷)$$

آنگاه کنترل‌کننده‌های فیدبک حالت (۱۱) پایدارساز وجود خواهند داشت که با هر سوئیچ دلخواه که شرط (۱۷) را برآورده کنند، سیستم را پایدار GUUS کنند.

اثبات:

شروط قضیه ۲ را در حضور نامعینی‌ها بازنویسی می‌نماییم. با استفاده از رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$\dot{V}_i(x) + \alpha V_i(x) - \bar{\lambda}D^2 \le 0$$
$$\rightarrow x^t(A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i)x + x^t P_i d + d^t P_i x - \bar{\lambda}D^2 \le 0$$

با استفاده از رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$\dot{V}_i(x) + \alpha V_i(x) - \bar{\lambda}D^2 \le x^t(A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i)x + x^t P_i x + d^t P_i d - \bar{\lambda}D^2 \le x^t(A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + (\alpha+1)P_i)x \le 0$$

در رابطه فوق، $\bar{\lambda}D^2$ حد بالای $d^t P_i d$ می‌باشد، بنابراین حاصل $d^t P_i d - \bar{\lambda}D^2 \le 0$ خواهد بود. به همین دلیل در جمله دوم رابطه فوق، کران بالای حاصل از این عبارت که همان صفر می‌باشد، جایگزین شد. بدیهی است که به منظور برقراری شرایط فوق، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + (\alpha + 1)P_i \le 0 \quad (۲۸)$$

اکنون روابط (۲) تا (۴) و (۱۱) را در (۲۸) جایگذاری می‌نماییم:

$$\begin{aligned}&(A_i^0 + B_i^0K_i)^t P_i + P_i(A_i^0 + B_i^0K_i) \\ &+\left(\sum_{k=1}^{r}\delta q_k(E_k^i + F_k^iK_i)\right)^t P_i \\ &+P_i\left(\sum_{k=1}^{r}\delta q_k(E_k^i + F_k^iK_i)\right) \\ &+(\alpha+1)P_i \le 0\end{aligned} \quad (۲۹)$$

اکنون رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\delta q_k\left[(E_k^i + F_k^iK_i)^t P_i + P_i(E_k^i + F_k^iK_i)\right] \le \gamma_{ii,k}P_i \quad (۳۰)$$

با توجه به فرض فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{r}\delta q_k(E_k^i + F_k^iK_i)\right)^t P_i \\ &+P_i\left(\sum_{k=1}^{r}\delta q_k(E_k^i + F_k^iK_i)\right) \\ &\le \sum_{k=1}^{r}\gamma_{ii,k}P_i = \gamma_{ii}P_i\end{aligned} \quad (۳۱)$$

با اعمال رابطه فوق در رابطه (۲۹)، خواهیم داشت:

$$(A_i^0 + B_i^0K_i)^t P_i + P_i(A_i^0 + B_i^0K_i) \le \quad (۳۲)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

$$-(1+\alpha+\gamma_{ii})P_i$$

با توجه به این نکته که $\delta q_k \epsilon [-c_k, +c_k]$ می‌باشد، رابطه (۳۰) را می‌توان به صورت دو رابطه زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} \left(E_k^i + F_k^i K_i\right)^t P_i + P_i(E_k^i + F_k^i K_i) \le \dfrac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \\ \left(E_k^i + F_k^i K_i\right)^t P_i + P_i\left(E_k^i + F_k^i K_i\right) \ge -\dfrac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \end{cases}$$

بدین صورت، رابطه (۲۵) قضیه ۳ بدست آمد. رابطه (۲۶) نیز به روشی مشابه از گسترش رابطه دوم (۱۵) بدست می‌آید. با گسترش رابطه (۱۶) نیز به سادگی به شرط (۲۷) خواهیم رسید:

$$\begin{cases} V_i = x^t P_i x \\ V_j = x^t P_j x \end{cases} \rightarrow V_i \le \mu V_j \rightarrow x^t\left(P_i - \mu P_j\right)x \le 0$$
$$\rightarrow P_i - \mu P_j \le 0$$

با توجه به ضرب متغیرهای تصمیم‌گیری K_i، P_i و K_j در یکدیگر در روابط (۲۵) و (۲۶)، این روابط غیرخطی می‌باشند. به منظور خطی‌سازی نامعادلات (۲۵) تا (۲۷)، تغییر متغیرهای زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases} U_{ii} = K_i Q_i \\ U_{ij} = K_j Q_i \\ P_i = Q_i^{-1} \end{cases} \quad (۳۳)$$

طرفین روابط (۲۵) تا (۲۷) را از چپ و راست در Q_i ضرب می‌کنیم و رابطه (۳۳) را به جای K_i جایگذاری می‌نماییم. پس از ساده‌سازی‌ها به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & 1 - A_i^0 Q_i + \left(A_i^0 Q_i\right)^t + B_i^0 U_{ii} + \left(B_i^0 U_{ii}\right)^t \\ & \le -(\alpha + 1 + \gamma_{ii})Q_i \\ & 2 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ii} + (F_i U_{ii})^t \\ & \le \frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} Q_i \qquad \forall k \,\epsilon\{1, \dots, r\} \\ & 3 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ii} + (F_i U_{ii})^t \\ & \ge -\frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} Q_i \qquad \forall k \,\epsilon\{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (۳۴)$$

$$\begin{aligned} & 1 - A_i^0 Q_i + \left(A_i^0 Q_i\right)^t + B_i^0 U_{ij} + \left(B_i^0 U_{ij}\right)^t \\ & \le \left(\beta - 1 - \gamma_{ij}\right)Q_i \\ & 2 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ij} + \left(F_i U_{ij}\right)^t \\ & \le \frac{\gamma_{ij,k}}{c_k} Q_i \qquad \forall k \,\epsilon\{1, \dots, r\} \\ & 3 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ij} + \left(F_i U_{ij}\right)^t \\ & \ge -\frac{\gamma_{ij,k}}{c_k} Q_i \qquad \forall k \,\epsilon\{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

$$\begin{aligned} & Q_j - \mu Q_i \le 0 \\ & \forall(\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \epsilon \Xi \times \Xi, i \ne j \end{aligned} \quad (۳۶)$$

اکنون نامعادلات غیر خطی (۲۵) تا (۲۷) به نامعادلات خطی (۳۴) تا (۳۶) تبدیل شده‌اند و اکنون می‌توان از جعبه‌ابزار یالمیپ جهت تعیین متغیرهای تصمیم‌گیری استفاده نمود.

٤- طراحی رویتگر

در این بخش، فرض عدم دسترسی به برخی از متغیرهای حالت به مسئله اضافه می‌گردد. جهت رفع این مشکل، در ابتدا با استفاده از یک رویتگر، متغیرهای حالت سیستم تخمین زده می‌شوند و در ادامه کنترل‌کننده فیدبک حالت با استفاده از این تخمین‌ها، پیاده‌سازی می‌گردد.

معادلات حالت سیستم اصلی و رویتگر در بازه همزمانی به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + d \\ y = C_i x \\ u = k_i \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A_i^0 \hat{x} + B_i^0 u + L_i(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C_i \hat{x} \\ \forall(\sigma(t_l) = i) \epsilon \Xi \end{cases} \quad (۳۷)$$

در روابط فوق، $\hat{x} \in R^{n\times 1}$ بردار متغیرهای حالت، $\hat{y}$ خروجی تخمین زده شده، y خروجی سیستم اصلی و $L_i \in R^{n\times 1}$ بردار بهره رویتگر می‌باشند. اکنون خطای بین مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (۳۸)$$

با بازنویسی روابط، فرم فضای حالت برای دینامیک خطا و حالت سیستم در بازه همزمانی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_i + B_i K_i)x - B_i K_i \tilde{x} + d \\ \dot{\tilde{x}} = (\Delta A_i + \Delta B_i K_i)x + \\ (A_i^0 - \Delta B_i K_i - L_i C_i)\tilde{x} + d \end{cases} \quad (۳۹)$$

اکنون با تعریف بردار حالت جدید به صورت $X = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$ و با استفاده از روابط (۳۹) و (۲)-(۴) ، رابطه سیستم جدید در بازه همزمانی کنترل‌کننده و زیرسیستم به صورت رابطه (۴۰) قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{X} = M_{ii} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d = \left(M_{ii}^0 + \Delta M_{ii}\right)X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d \\ M_{ii}^0 = \begin{bmatrix} A_i^0 + B_i^0 K_i & -B_i^0 K_i \\ 0 & A_i^0 - L_i C_i \end{bmatrix} \\ \Delta M_{ii} = \begin{bmatrix} \Delta A_i + \Delta B_i K_i & -\Delta B_i K_i \\ \Delta A_i + \Delta B_i K_i & -\Delta B_i K_i \end{bmatrix} = \\ \sum_{k=1}^r \delta q_k \cdot \begin{bmatrix} E_k^i + F_k^i K_i & -F_k^i K_i \\ E_k^i + F_k^i K_i & -F_k^i K_i \end{bmatrix} = \\ \sum_{k=1}^r \delta q_k \cdot N_k^{ii} \end{cases} \quad (۴۰)$$

معادلات حالت سیستم اصلی و رویتگر در بازه کلیدزنی همزمان به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + d \\ y = C_i x \\ u = k_j \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A_j^0 \hat{x} + B_j^0 u + L_j(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C_j \hat{x} \\ \forall(\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \epsilon \Xi \times \Xi, i \ne j \end{cases} \quad (۴۱)$$

رابطه سیستم جدید در بازه غیرهمزمانی کنترل‌کننده و زیرسیستم، به صورت رابطه (۴۲) قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{X} = M_{ij} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d = \left(M_{ij}^0 + \Delta M_{ij}\right)X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d \\ M_{ij}^0 = \begin{bmatrix} A_i^0 + B_i^0 K_j & -B_i^0 K_j \\ A_i^0 + B_i^0 K_j - A_j^0 - B_j^0 K_j - L_j C_i + L_j C_j & A_j^0 + B_j^0 K_j - L_j C_j - B_i^0 K_j \end{bmatrix} \\ \Delta M_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta A_i + \Delta B_i K_j & -\Delta B_i K_j \\ \Delta A_i + \Delta B_i K_j & -\Delta B_i K_j \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^r \delta q_k \cdot \begin{bmatrix} E_k^i + F_k^i K_j & -F_k^i K_j \\ E_k^i + F_k^i K_j & -F_k^i K_j \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^r \delta q_k \cdot N_k^{ij} \end{cases} \quad (۴۲)$$

اکنون با استناد به قضیه ۳، اگر برای $\forall(\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \epsilon\, \Xi \times \Xi, i \ne j$ روابط زیر برقرار باشند، سیستم جدید پایدار GUUS خواهد بود.

$$\begin{aligned} & 1 - \left(M_{ii}^0\right)^t P_i + P_i\left(M_{ii}^0\right) \\ & \le -(\alpha + 1 + \gamma_{ii})P_i \\ & 2 - \left(N_k^{ii}\right)^t P_i + P_i\left(N_k^{ii}\right) \\ & \le \frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \qquad \forall k \,\epsilon\{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (۴۳)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

$$3-\left(N_k^{ii}\right)^t P_i+P_i\left(N_k^{ii}\right) \geq -\frac{\gamma_{ii,k}}{c_k}P_i \qquad \forall k\,\epsilon\{1,\dots,r\}$$

$$\begin{aligned} &1-\left(M_{ij}^0\right)^t P_i+P_i\left(M_{ij}^0\right) \leq \left(\beta-1-\gamma_{ij}\right)P_i \\ &2-\left(N_k^{ij}\right)^t P_i+P_i\left(N_k^{ij}\right) \leq \frac{\gamma_{ij,k}}{c_k}P_i \qquad \forall k\,\epsilon\{1,\dots,r\} \\ &3-\left(N_k^{ij}\right)^t P_i+P_i\left(N_k^{ij}\right) \geq -\frac{\gamma_{ij,k}}{c_k}P_i \qquad \forall k\,\epsilon\{1,\dots,r\} \end{aligned} \tag{۴۴}$$

$$\begin{aligned} &P_i-\mu P_j \leq 0 \\ &\forall(\sigma(t_l)=i,\sigma(t_l^-)=j)\epsilon\Xi\times\Xi\,,i\neq j \end{aligned} \tag{۴۵}$$

۵- شبیه‌سازی

در این بخش، دو مثال ارائه شده است. در مثال اول، یک سیستم با چهار زیرسیستم ارائه شده است. روابط این سیستم مربوط به کانال غلتش یک جسم پرنده می‌باشد. روابط کانال غلتش این پرنده با توجه به افزایش سرعت (سرعت ناشی از نیروی پیشرانش در مدت زمان تقریبا سه و نیم ثانیه به مقدار حداکثر می‌رسد) تغییر پیدا می‌کنند. در این مثال، بحث طراحی کنترل‌کننده برای سیستم کلیدزنی غیرهمزمان با وجود اغتشاش و عدم قطعیت در نظر گرفته شده است. در مثال دوم نیز بحث طراحی رویتگر نیز به مسئله قبل اضافه شده است.

شبیه‌سازی‌های این بخش توسط نرم‌افزار متلب ۲۰۱۸ انجام گرفته است.

مثال ۱- چهار زیر سیستم کنترل‌پذیر با عدم قطعیت‌های زیر را در نظر بگیرید. هر چهار زیر سیستم پایدار و کنترل پذیر هستند.

$$A_1^0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} \quad A_2^0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$
$$A_3^0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -9\end{bmatrix} \quad A_4^0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -12\end{bmatrix}$$
$$B_1^0=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\times 10^4 \quad B_2^0=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\times 10^4$$
$$B_3^0=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}\times 10^4 \quad B_4^0=\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}\times 10^4$$
$$E_1^1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad E_1^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$
$$E_1^3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad E_1^4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$
$$F_1^1=\begin{bmatrix}0\\ 3000\end{bmatrix} \quad F_1^2=\begin{bmatrix}0\\ 3000\end{bmatrix}$$
$$F_1^3=\begin{bmatrix}0\\ 3000\end{bmatrix} \quad F_1^4=\begin{bmatrix}0\\ 3000\end{bmatrix}$$

سایر پارامترها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\alpha=1 \quad \gamma_{11}=1 \quad \gamma_{21}=1$$
$$\beta=1 \quad \gamma_{22}=1 \quad \gamma_{32}=1$$
$$c_1=1 \quad \gamma_{33}=1 \quad \gamma_{43}=1$$
$$\mu=1.02 \quad \gamma_{44}=1$$

به ازای پارامترهای فوق، پارامترهای کنترلی توسط یالمیپ به صورت زیر تعیین می‌گردند.

$$K_1=-[0.0021 \quad 0.001]$$
$$K_2=-[0.0021 \quad 0.001]$$
$$K_3=-[0.0020 \quad 0.001]$$
$$K_4=-[0.0020 \quad 0.001]$$
$$P_1=\begin{bmatrix}1.6571 & 0.1260\\ 0.1260 & 0.0209\end{bmatrix}\times 10^3$$
$$P_2=\begin{bmatrix}652.0750 & 36.0230\\ 36.0230 & 10.9793\end{bmatrix}$$
$$P_3=\begin{bmatrix}506.2522 & 25.6173\\ 25.6173 & 9.7918\end{bmatrix}$$
$$P_4=\begin{bmatrix}405.2412 & 19.3529\\ 19.3529 & 8.3770\end{bmatrix}$$

در جدول ۱ نتایج حاصل از این پارامترها نمایش داده شده است. با توجه به مقادیر جدول ۱، کاملا بدیهی است که کران بالای مقدار نهایی متغیرهای حالت، کوچک می‌باشد و از طرف دیگر با وجود حداکثر تاخیر نیم ثانیه‌ای، فقط نیاز به زمان اقامت میانگین ۱/۰۲ ثانیه‌ای می‌باشد.

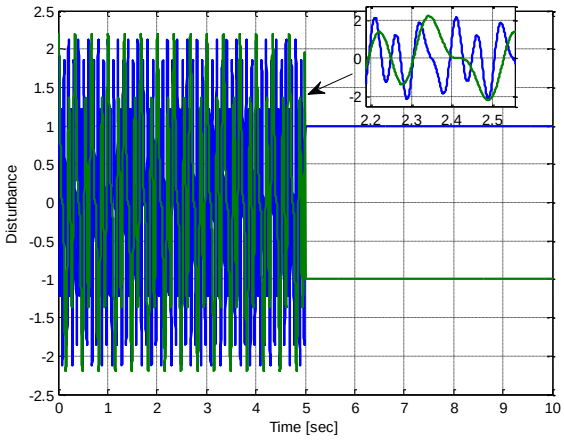
جدول ۱: نتایج حاصل از پارامترهای کنترلی در مثال ۱

$\tau_a^*\ (\tau_{max}=\ 0.5)$	1.02
$\|x\| \leq$	$14.972D$
$V \leq$	$1666.7D^2$
$\bar{\lambda}$	1666.7
$\underline{\lambda}$	7.4355

در شبیه‌سازی‌های انجام گرفته، اغتشاش به صورت زیر مدل شده است:

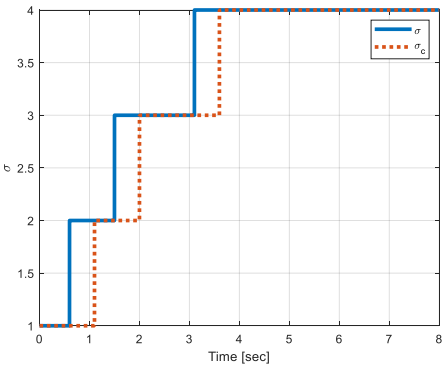
$$d(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}sin(20\pi t)+cos(30\pi t)+sin\,(40\pi t)\\ cos(6\pi t)+sin(12\pi t)+cos\,(18\pi t)\end{bmatrix} & t<5\\ \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} & t\geq 5\end{cases}$$

در شکل ۲، منحنی اغتشاش رسم شده است.



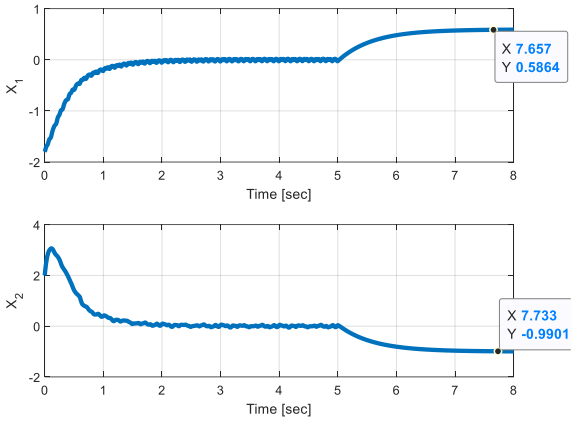
شکل ۲: منحنی اغتشاش خارجی

در شکل ۳ سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل‌کننده‌ها نمایش داده شده است. در این سیگنال‌ها، میانگین زمان اقامت ۱/۱ ثانیه و حداکثر مدت زمان عدم همزمانی، ۰/۵ ثانیه در نظر گرفته شده است. در شکل ۴ نیز متغیرهای حالت سیستم نمایش داده شده است.



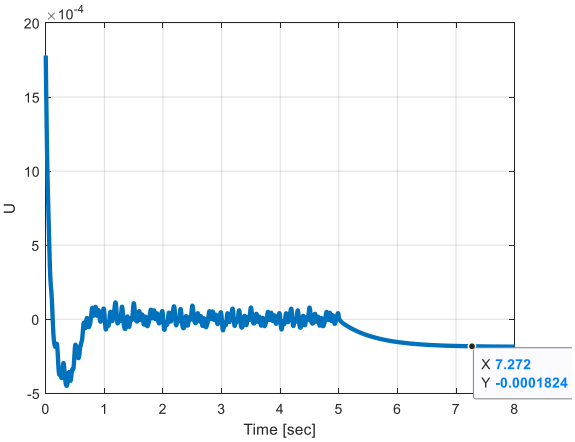
شکل ۳: سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل‌کننده‌ها

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

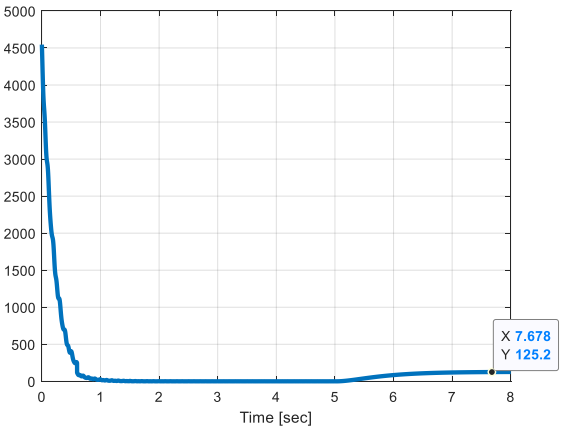


شکل ۴: متغیرهای حالت سیستم

در شکل ۵، سیگنال کنترلی و در شکل ۶ تابع انرژی سیستم نمایش داده شده است.



شکل ۵: سیگنال کنترلی



شکل ۶: منحنی انرژی سیستم

همانگونه که از نتایج پیداست، پایدارسازی سیستم تحت کلیدزنی غیرهمزمان در مدت زمان کوتاهی انجام گرفته است. دامنه سیگنال کنترلی محدود می‌باشد و متغیرهای حالت در مدت زمانی بسیار کوتاه به سمت مقداری محدود که در ناحیه مجاز قرار دارد، میل می‌کنند. از طرفی نیز انرژی سیستم به مرور زمان در محدوده مجاز قرار می‌گیرد. نکته دیگر در مورد تابع انرژی، تغییر رفتار این منحنی از ثانیه پنجم به بعد است. این امر بدلیل تغییر فرم اغتشاش اعمالی به این سیستم در ثانیه پنجم می‌باشد. ولی همچنان انرژی سیستم در محدوده مجاز قرار دارد.

مثال ۲- دو زیر سیستم کنترل‌پذیر با عدم قطعیت‌های زیر را در نظر بگیرید. هر دو زیر سیستم پایدار و کنترل پذیر هستند.

$$A_1^0=\begin{bmatrix}-7.56 & -8.04\\ -0.65 & -7.94\end{bmatrix}\times 10^5 \qquad A_2^0=\begin{bmatrix}-7.76 & -4.22\\ 2.48 & -6.44\end{bmatrix}\times 10^5$$
$$B_1^0=\begin{bmatrix}1.22\\ -1.29\end{bmatrix}\times 10^5 \qquad B_2^0=\begin{bmatrix}1.71\\ -0.22\end{bmatrix}\times 10^5$$
$$E_1^1=\begin{bmatrix}10.2 & -3055.5\\ -9.7 & 8.6\end{bmatrix} \qquad E_1^2=\begin{bmatrix}-9.93 & 0.0238\\ -8.61 & -3.36\end{bmatrix}$$
$$E_2^1=\begin{bmatrix}9.93 & 8.73\\ -5.54 & 7.05\end{bmatrix} \qquad E_2^2=\begin{bmatrix}-3.77 & -3.37\\ 5.32 & -5.68\end{bmatrix}$$
$$E_3^1=\begin{bmatrix}2.066 & 3.49\\ 3.41 & 4.43\end{bmatrix} \qquad E_3^2=\begin{bmatrix}2.31 & 3.29\\ 9.08 & -1.54\end{bmatrix}$$
$$F_1^1=\begin{bmatrix}-0.48\\ -5.08\end{bmatrix} \qquad F_1^2=\begin{bmatrix}4.06\\ 8.84\end{bmatrix}$$
$$F_2^1=\begin{bmatrix}9.73\\ -0.98\end{bmatrix} \qquad F_2^2=\begin{bmatrix}-0.94\\ -1.11\end{bmatrix}$$
$$F_3^1=\begin{bmatrix}-4.79\\ -3.58\end{bmatrix} \qquad F_3^2=\begin{bmatrix}4.75\\ 3.6\end{bmatrix}$$

سایر پارامترها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$\alpha = 34.95$	$\gamma_{11,1} = 57.4$	$\gamma_{12,1} = 90$	$\gamma_{21,1} = 46.1$	$\gamma_{22,1} = 86.1$
$\beta = 53.26$	$\gamma_{11,2} = 73.3$	$\gamma_{12,2} = 16.3$	$\gamma_{21,2} = 81.9$	$\gamma_{22,2} = 78$
$c_1 = 0.1$	$\gamma_{11,3} = 96.4$	$\gamma_{12,3} = 34.1$	$\gamma_{21,3} = 32.4$	$\gamma_{22,3} = 73.8$
$c_2 = 0.11$	$\gamma_{11} = 227.1$	$\gamma_{12} = 140.4$	$\gamma_{21} = 160.4$	$\gamma_{22} = 237.9$
$c_3 = 0.13$				
$\mu = 1.47$				

به ازای پارامترهای فوق، پارامترهای کنترلی توسط یالمیپ به صورت زیر تعیین می‌گردند.

$$K_1 = [-0.56 \quad -0.35]$$
$$K_2 = [-4.35 \quad 2.53]$$
$$L_1 = \begin{bmatrix}-8.1\\ 1836.7\end{bmatrix}$$
$$L_2 = \begin{bmatrix}-3757.2\\ 2\end{bmatrix}$$
$$P_1 = \begin{bmatrix}6595 & -9.30 & 0 & 0\\ -9.30 & 9870 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2865.4 & -3.50\\ 0 & 0 & -3.50 & 4670.1\end{bmatrix}$$
$$P_2 = \begin{bmatrix}5949.5 & 6.40 & 0 & 0\\ 6.40 & 9996.7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3086.8 & 2.80\\ 0 & 0 & 2.80 & 4433.9\end{bmatrix}$$

در جدول ۲: نتایج حاصل از پارامترهای کنترلی در مثالجدول ۲ نتایج حاصل از این پارامترها نمایش داده شده است. با توجه به مقادیر جدول ۲، کاملا بدیهی است که کران بالای مقدار نهایی متغیرهای حالت، کوچک می‌باشد و از طرف دیگر با وجود حداکثر تاخیر ۰/۵ ثانیه‌ای، فقط نیاز به زمان اقامت میانگین ۱/۲۷ ثانیه‌ای می‌باشد.

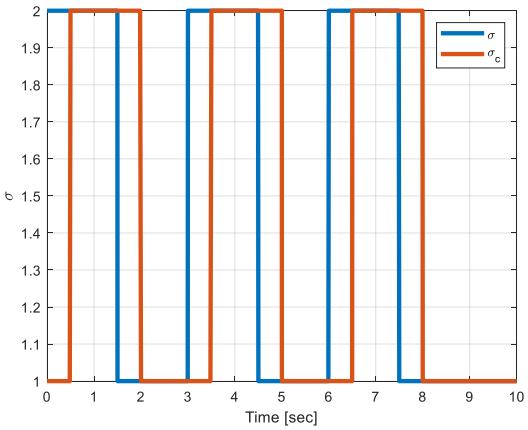
جدول ۲: نتایج حاصل از پارامترهای کنترلی در مثال

$\tau_a^*\ (\tau_{max} = 0.5)$	1.2733
$\|x\| \leq$	$0.316D$
$V \leq$	$286.03D^2$
$\bar{\lambda}$	9996.7
$\underline{\lambda}$	2865.4

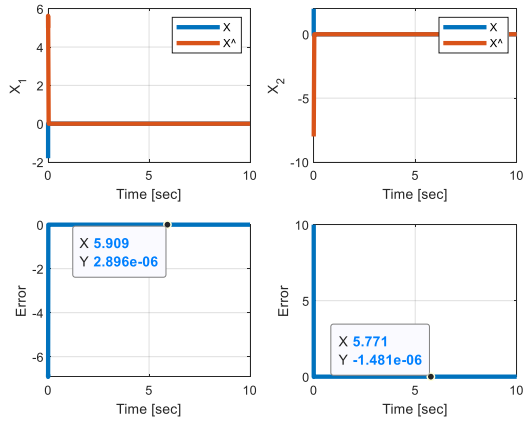
در شبیه‌سازی‌های انجام گرفته، اغتشاش مانند مثال ۱ مدل شده است. در شکل ۷ سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل‌کننده‌ها نمایش داده شده است. در این سیگنال‌ها، میانگین زمان اقامت یک

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

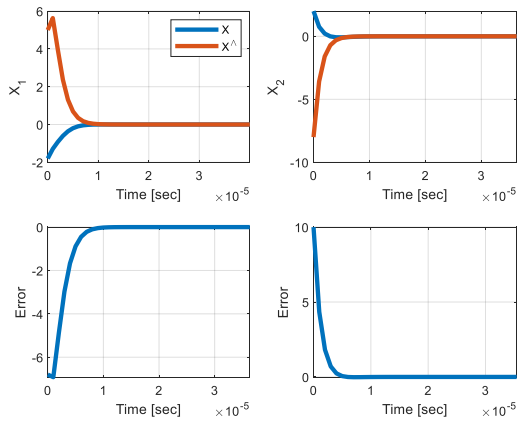
و نیم ثانیه و حداکثر مدت زمان عدم همزمانی، نیم ثانیه در نظر گرفته شده است. در شکل ۸ نیز متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها نمایش داده شده است.



شکل ۷: سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل‌کننده‌ها

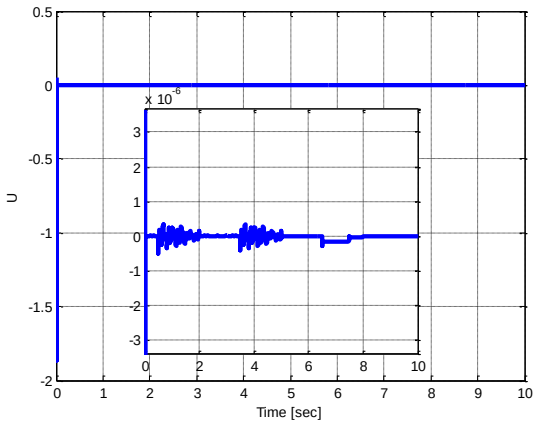


شکل ۸-الف: متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها

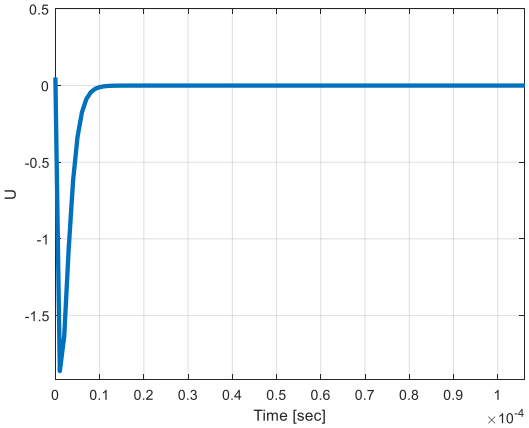


شکل ۸-ب: بزرگنمایی متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها

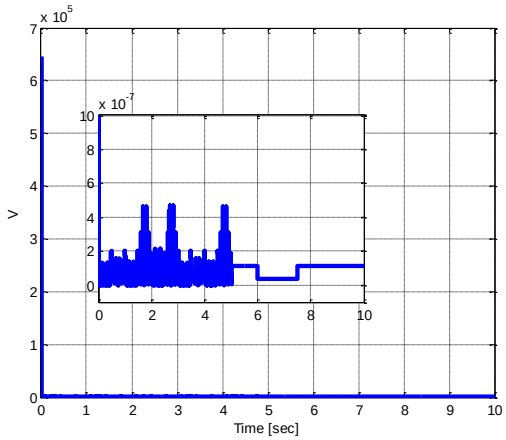
در شکل ۹، سیگنال کنترلی و در شکل ۱۰ تابع انرژی سیستم نمایش داده شده است. شرایط اولیه سیستم اصلی و رویتگر طوری در نظر گرفته شده است که بتوان همگرایی دو سیستم و در نتیجه کارایی روش پیشنهادی را نشان داد. با توجه به نتایج عملکرد موثر روش پیشنهادی در مدت زمانی کوتاه کاملا قابل مشاهده است.



شکل ۹-الف: سیگنال کنترلی

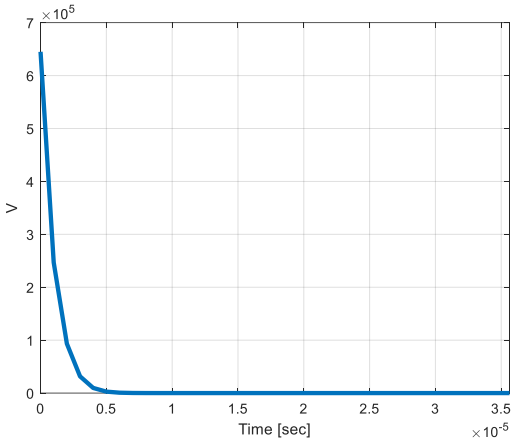


شکل ۹-ب: بزرگنمایی سیگنال کنترلی



شکل ۱۰-الف: منحنی انرژی سیستم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

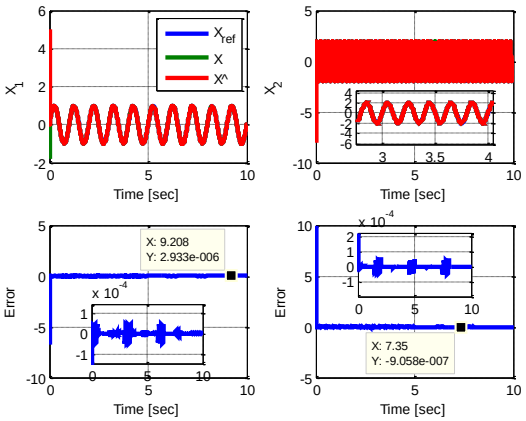


شکل ۱۰-ب: بزرگنمایی منحنی انرژی سیستم

همانگونه که از نتایج پیداست، پایدارسازی سیستم تحت کلیدزنی غیرهمزمان در مدت زمان کوتاهی انجام گرفته است. دامنه سیگنال کنترلی محدود می‌باشد و متغیرهای حالت در مدت زمانی بسیار کوتاه به سمت صفر میل می‌کنند. از طرفی نیز انرژی سیستم به مرور زمان کاهش می‌یابد. اکنون به منظور نشان دادن قابلیت سیستم کنترلی، مسئله ردیابی به جای پایدارسازی در این مسئله مدنظر قرار می‌گیرد. مسیرهای مرجعی که باید توسط حالت‌های سیستم ردیابی شوند، عبارتند از:

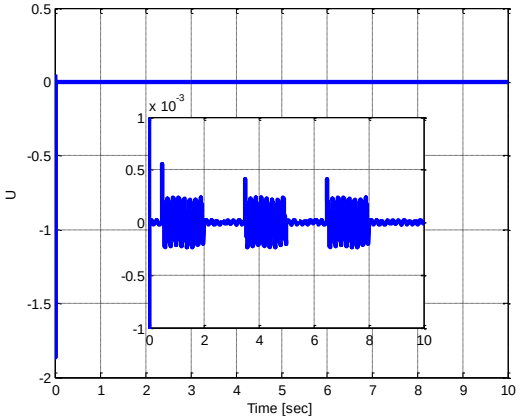
$$\begin{cases} X_{1_{ref}} = sin\,(2\pi t) \\ X_{2_{ref}} = sin\,(10\pi t) \end{cases}$$

. در شکل ۱۱ ، مسیر مرجع، متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها نمایش داده شده است.

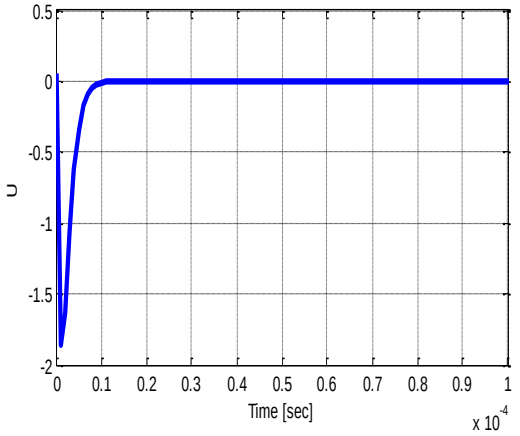


شکل ۱۱: مسیر مرجع، متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها

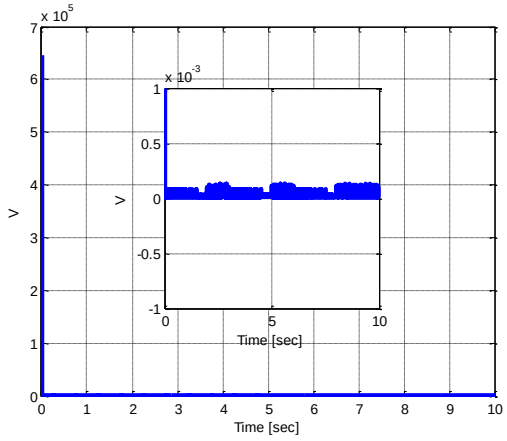
در شکل ۱۲، سیگنال کنترلی و در شکل ۱۳ تابع انرژی سیستم نمایش داده شده است. شرایط اولیه سیستم اصلی و رویتگر طوری در نظر گرفته شده است که بتوان همگرایی دو سیستم و در نتیجه کارایی روش پیشنهادی را نشان داد. با توجه به نتایج عملکرد موثر روش پیشنهادی در مدت زمانی کوتاه کاملا قابل مشاهده است.



شکل ۱۲-الف: سیگنال کنترلی

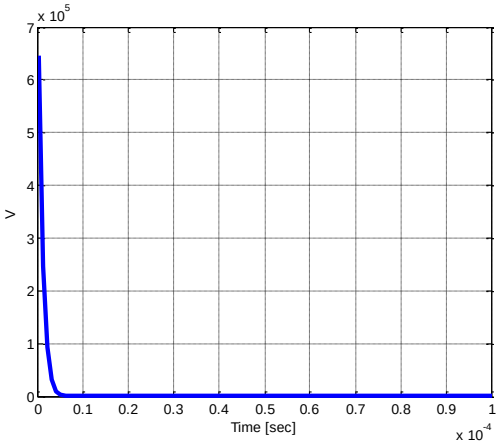


شکل ۱۲-ب: بزرگنمایی سیگنال کنترلی



شکل ۱۳-الف: منحنی انرژی سیستم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]



شکل ۱۳–ب: بزرگنمایی منحنی انرژی سیستم

همانگونه که از نتایج پیداست، ردیابی در سیستم تحت کلیدزنی غیرهمزمان در مدت زمان کوتاهی انجام گرفته است. دامنه سیگنال کنترلی محدود می‌باشد و متغیرهای حالت در مدت زمانی بسیار کوتاه به سمت مسیر مرجع میل می‌کنند. از طرفی نیز انرژی سیستم به مرور زمان کاهش می‌یابد.

٦- نتیجه‌گیری

در این مقاله بر روی کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ‌شونده نامعین با کلیدزنی غیرهمزمان در حضور اغتشاش با زمان اقامت میانگین مبتنی بر رویتگر تمرکز شده است. در ابتدا مدل سیستم مورد نظر معرفی گردید و در ادامه با بهره‌گیری از توابع شبه لیاپانوف، حداکثر زمان مجاز عدم همزمانی، حداقل زمان اقامت میانگین و شروط لازم جهت پایداری سیستم تعیین شدند. تفاوت این پژوهش با سایر پژوهش‌های مشابه، در نظر گرفتن همزمان چندین عامل نامطلوب شامل کلیدزنی غیرهمزمان، نامعینی، اغتشاش و عدم دسترسی به چند متغیر در کنار هم می‌باشد. در نظر گرفتن این چالش‌ها در کنار یکدیگر، پیچیدگی حل مسئله را چندین برابر می‌کند. نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی، نشان‌دهنده عملکرد مناسب این روش کنترلی می‌باشد. شاخصه‌های این ادعا را می‌توان در دامنه سیگنال کنترلی محدود، زمان میانگین کلیدزنی کوتاه به ازای زمان عدم همزمانی بزرگ و زمان نشست بسیار کوتاه مشاهده و بررسی نمود.

مراجع

[1] D. Liberzon, Switching in systems and control. Springer, 2003.

[2] X. Zhao, Y. Yin, and X. Zheng, "State-dependent switching control of switched positive fractional-order systems," ISA transactions, vol. 62, pp. 103-108, 2016.

[3] C. Briat, "Dwell-time stability and stabilization conditions for linear positive impulsive and switched systems," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 24, pp. 198-226, 2017.

[4] L. Lin, Z. Liu, Y. Kao, and R. Xu, "Observer-based adaptive sliding mode control of uncertain switched systems," IET Control Theory & Applications, vol. 14, no. 3, pp. 519-525, 2020.

[5] B. Jiang, H. R. Karimi, S. Yang, C. Gao, and Y. Kao, "Observer-based adaptive sliding mode control for nonlinear stochastic Markov jump systems via T–S fuzzy modeling: Applications to robot arm model," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 68, no. 1, pp. 466-477, 2020.

[6] L. Zhang and H. Gao, "Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time," Automatica, vol. 46, no. 5, pp. 953-958, 2010.

[7] B. Niu, X. Zhao, L. Zhang, and H. Li, "p-Times differentiable unbounded functions for robust control of uncertain switched nonlinear systems with tracking constraints," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 25, no. 16, pp. 2965-2983, 2015.

[8] J. P. Hespanha and A. S. Morse, "Stability of switched systems with average dwell-time," in Proceedings of the 38th IEEE conference on decision and control (Cat. No. 99CH36304), 1999, vol. 3, pp. 2655-2660: IEEE.

[9] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi, and M. Liu, "Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 7, pp. 1809-1815, 2011.

[10] L. Lin and Z. Liu, "State-estimation-based adaptive sliding mode control of uncertain switched systems: a novel linear sliding manifold approach," ISA transactions, vol. 111, pp. 47-56, 2021.

[11] Y. Liu, T. Jia, Y. Niu, and Y. Zou, "Design of sliding mode control for a class of uncertain switched systems," International Journal of Systems Science, vol. 46, no. 6, pp. 993-1002, 2015.

[12] Y. Liu, Y. Niu, and Y. Zou, "Non-fragile observer-based sliding mode control for a class of uncertain switched systems," Journal of the Franklin Institute, vol. 351, no. 2, pp. 952-963, 2014.

[13] J. Xie, S. Li, H. Yan, and D. Yang, "Model reference adaptive control for switched linear systems using switched multiple models control strategy," Journal of the Franklin Institute, vol. 356, no. 5, pp. 2645-2667,2019.

[14] J. Xie, D. Yang, and J. Zhao, "Multiple model adaptive control for switched linear systems: A two-layer switching strategy," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 28, no. 6, pp. 2276-2297, 2018.

[15] S. Yuan, B. De Schutter, and S. Baldi, "Robust adaptive tracking control of uncertain slowly

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]

switched linear systems," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 27, pp. 1-12, 2018.

[16] R. Xu, Z. Liu, and Y. Liu, "State-estimation-based adaptive sliding mode control for a class of uncertain time-delay systems: a new design," International Journal of Systems Science, vol. 53, no. 2, pp. 375-387, 2022.

[17] M. A. Nojoumian, M. Ayati, and M. R. Zakerzadeh, "Bumpless stabilisation of uncertain switched positive linear systems under synchronous and asynchronous switching," International Journal of Systems Science, vol. 53, no. 2, pp. 363-374, 2022.

[18] M. A. Nojoumian, M. Ayati, and M. R. Zakerzadeh, "Asynchronous bumpless stabilisation of uncertain switched linear positive systems with mixed time delay and L 1-gain performance," IET Control Theory & Applications, vol. 16, no. 2, pp. 151-165, 2022.

[۱۹]محمدعلی باقرزاده، جعفر قیصری، جواد عسکری، محسن مجیری،"پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی با استفاده از فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر و سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت مشخص"، مجله کنترل, جلد ۸، شماره ۴، ص ۵۵-۶۴، ۱۳۹۳.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.61186/joc.17.1.93]