مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۸، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۳، صفحه ۵۳-۳۷

به‌کارگیری فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر در تلفیق سیستم ناوبری اینرسی و سیستم موقعیت‌یاب جهانی

محمّدجواد رجبی[۱]، سید محمّدمهدی دهقان بنادکی[۲]، سعید محمّدحسینی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری برق، کنترل، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، mjrajabi@mut.ac.ir

[۲] دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، smmd@mut.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکده الکتروسرام و مهندسی برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، sm_hoseini@iust.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۲۷ ویرایش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۹ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۳

چکیده: استفاده از روش‌های مرسوم تلفیق سیستم ناوبری اینرسی با یک سیستم کمک ناوبری مانند سیستم ماهواره‌ای ناوبری جهانی به کمک فیلتر کالمن توسعه‌یافته نیازمند صرف زمان زیاد برای تعیین مقادیر اولیه نسبتاً دقیق در فرآیند ترازیابی اولیه است. این فیلتر در صورت وجود خطای اولیه بزرگ به دلیل وابستگی ژاکوبی‌ها به متغیرهای حالت، همگرایی کندی داشته و ممکن است واگرا گردد. فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر با تغییر روش تعریف خطا و استفاده از تئوری تغییرناپذیری توانایی رفع این مشکل را داشته و همگرایی آن به خطای مقادیر اولیه وابستگی ندارد. در این مقاله با هدف حذف وابستگی ناوبری به ترازیابی اولیه، از این فیلتر برای تلفیق سیستم ناوبری اینرسی و سیستم موقعیت‌یاب جهانی استفاده‌شده است. بدین منظور با تعبیه کردن متغیرهای ناوبری به‌عنوان یک گروه لی ماتریسی و تعریف خطا به‌صورت ضرب ماتریسی، مستقل از حالت بودن دینامیک خطا اثبات و معادله آن ارائه می‌گردد. مقایسه نتایج تلفیق با استفاده از فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه‌یافته استاندارد و توسعه‌یافته حالت خطا به کمک داده‌های واقعی و تحت خطاهای اولیه مختلف بیانگر کار آیی قابل‌توجه فیلتر کالمن نامتغیر، توانایی آن برای رفع واگرایی یا همگرایی کند روش‌های مرسوم و امکان کاهش زمان آماده‌به‌کار سیستم با حذف ترازیابی اولیه است.

کلمات کلیدی: تلفیق، سیستم ناوبری اینرسی، سیستم موقعیت‌یاب جهانی، خطای ترازیابی اولیه بزرگ، فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر.

Using invariant extended Kalman filter to integrate inertial navigation system and global positioning system

M. J. Rajabi, S. M. M Dehghan, S. Mohammad-Hosseini

Abstract: Using the conventional methods to integrate the inertial navigation system and the global navigation satellite system by the extended Kalman filter depends on a time consuming algorithm to determine relatively accurate initial values. In the presence of large initial error, EKF will diverge or converge slowly due to the dependence of the Jacobians on the state variables values. The invariant extended Kalman filter has the ability to solve this problem by changing the error definition method and using the theory of invariance, in which the convergence does not depend on the error of the initial values. In this paper, in order to remove the initial alignment phase, the IEKF is used to integrate the inertial navigation system and the global positioning system. Considering the navigation variables as elements of a Lie group, the error dynamics can be presented in such a way that the Jacobians are independent of the state variables. The comparison of the integration results using the invariant extended Kalman filter, the standard extended Kalman filter and the error state extended Kalman filter with experimental data set in different initial errors shows the significent

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

performance of the invariant Kalman filter than the other filters and its ability to resolve the divergence or slow convergence problem of the conventional methods. The results show, the dependence of the integration method on the time consuming initial alignment can be removed using this filter.

Keywords: integration, inertial navigation system, global positioning system, large initial Alignment error, invariant Extended Kalman filter.

مقدمه

ناوبری فرآیند اندازه‌گیری و تعیین متغیرهای حرکت جسم شامل بردارهای موقعیت، سرعت و وضعیت است. وظیفه انجام ناوبری بر عهده سیستم ناوبری است که شامل انواع مختلفی ازجمله سیستم ناوبری اینرسی[۱] (INS) است. INS به‌عنوان گزینه اصلی انجام ناوبری دقیق، متغیرهای حرکت را از حل معادلات دیفرانسیل ناوبری با استفاده از یک روش ناوبری کور[۲] تعیین می‌کند. ناوبری کور متغیرهای هرلحظه را با توجه به سرعت، موقعیت و وضعیت لحظه قبل تعیین می‌کند و نیازمند تعیین مقادیر اولیه قبل از شروع فرآیند ناوبری است. بنابراین تعیین دقیق مقادیر اولیه متغیرها امری حیاتی و بسیار تأثیرگذار در دقت خروجی ناوبری است. فرآیند تعیین مقادیر اولیه ناوبری، تنظیم اولیه[۳] نامیده می‌شود[۱-۳]. معمولاً تعیین مقادیر اولیه موقعیت و سرعت به‌راحتی و به کمک یک منبع خارجی مانند سیستم موقعیت‌یاب جهانی[۴] (GPS) یا سرعت‌سنج دوپلر[۵] (DVL) انجام می‌شود. چالش اساسی، تعیین مقادیر اولیه وضعیت است که هم‌راستایی یا ترازیابی[۶] نامیده می‌شود[۴, ۵]. ترازیابی اولیه دقیق معمولاً زمان‌بر است و باعث افزایش زمان آماده‌به‌کار و کاهش سرعت عملکرد سیستم می‌شود. به دلیل استفاده INS از ناوبری کور، خطای اندازه‌گیری حس‌گرهای اینرسی، ناشی از فرآیند ساخت و کالیبراسیون و یا خطای مقادیر اولیه، باعث انباشت خطا در طول زمان و کاهش دقت مخصوصاً در زمان طولانی می‌شود. به‌منظور مقابله با این مشکل می‌توان INS را با یک سیستم کمک ناوبری تلفیق کرد[۲]. دسترسی آسان و ارزان به داده‌های GPS انگیزه‌های زیادی را برای تلفیق INS/GPS ایجاد می‌کند[۳]. همگرایی تلفیق و کاهش خطای آن نیازمند استفاده از یک فیلتر مناسب است. فیلتر کالمن یکی از تلاش‌های موفقیت‌آمیز در زمینه‌ی طراحی فیلتر برای سیستم‌های خطی است که به‌طور گسترده در حوزه‌های مختلف ازجمله ناوبری استفاده می‌شود. این فیلتر که متداول‌ترین الگوریتم تخمین حالت در زمان واقعی است، تخمین حداقل واریانس را برای سیستم‌های خطی با نویز گوسی فراهم می‌کند و از ویژگی‌های همگرایی مناسبی برخوردار است[۶]. در واقعیت اکثر سیستم‌ها و حسگرها رفتار غیرخطی دارند. فیلتر کالمن، باوجود ارائه یک تخمین بهینه، به دلیل استفاده از مدل خطی برای سیستم و حس‌گرها کاربرد عملی بسیار محدودی دارد. فیلتر کالمن توسعه‌یافته[۷] (EKF) مرسوم‌ترین گسترش از فیلتر کالمن برای سیستم‌های غیرخطی است. این فیلتر از تکنیک‌های خطی سازی بهره می‌برد و ساختاری نسبتاً ساده با کارایی مناسب دارد. بااین‌وجود، نه‌تنها هیچ تضمینی برای بهینه بودن تخمین ارائه نمی‌دهد، بلکه خاصیت همگرایی سرتاسری[۸] نیز نداشته و تنها همگرایی محلی آن با فرض خطای اولیه کاملاً کوچک اثبات‌شده است[۷]. EKF به علت انجام خطی سازی سیستم حول تخمین لحظه فعلی، در سیستم‌هایی با رفتار غیرخطی شدید تخمینی غیرقابل‌اعتماد و در برخی موارد واگرا ارائه می‌دهد. همچنین در صورت وجود حالت غیرقابل مشاهده، این حالت‌ها را مشاهده‌پذیر کاذب[۹] می‌کند[۶, ۸]. برای حل این مشکل که ناسازگاری[۱۰] نامیده می‌شود، راه‌کارهایی ازجمله EKF با مشاهده‌پذیری مقید ارائه‌شده است که پیچیدگی محاسباتی دارد و به‌طورکلی نمی‌توان از ناسازگاری اجتناب کرد[۹, ۱۰]. فیلتر کالمن بی‌بو (UKF) نسخه‌ی غیرخطی دیگری از فیلتر کالمن است که برای مقابله با برخی از مشکلات EKF و بهبود عملکرد آن، به‌جای استفاده از ژاکوبی از مجموعه‌ای از نقاط وزن‌دار به نام نقاط سیگما[۱۱] استفاده می‌کند. مشکل اصلی این فیلتر حجم زیاد محاسبات است[۱۱]. به‌منظور مقابله با معایب فیلترهای فوق، معمولاً نسخه‌های ترکیبی و ابتکاری از آن‌ها استفاده می‌شود. ازجمله این ابتکارات استفاده از مفاهیم هندسه دیفرانسیل[۱۲]، نظریه گروه[۱۳] و نظریه نامتغیر[۱۴] در مدل‌سازی سیستم و استخراج فیلتر کالمن است. مرجع [۱۲] با ارائه بینشی متفاوت در مورد مسئله ناسازگاری، نشان داده است که علت اصلی ناسازگاری، فضایی است که تخمین در آن انجام می‌شود و ژاکوبی بیش از آنکه علت ناسازگاری باشد، معلول آن است. در [۱۳] نوع جدیدی از EKF ارائه‌شده است که ریشه در تئوری طراحی رؤیت‌گر حفظ تقارن[۱۵] یا نامتغیر دارد که در آن به‌جای تخمین در فضای اقلیدسی که در فرمول‌بندی استاندارد فیلتر کالمن استفاده می‌گردد، تخمین روی منیفولد انجام می‌شود و خطای تخمین تحت عمل یک گروه لی، نامتغیر است. این عدم‌تغییر[۱۶] به‌عنوان یک تقارن[۱۷] برای سیستم در نظر گرفته می‌شود. هرچند که تا قبل از سال ۲۰۰۲ از ویژگی عدم‌تغییر یا حفظ تقارن برای اهداف کنترلی استفاده‌شده

[1] Inertial Navigation System
[2] Dead Reckoning
[3] Initialization
[4] Global Positioning System
[5] Doppler Velocity Log
[6] Alignment
[7] Extended Kalman Filter
[8] Global
[9] False Observability
[10] Inconsistency
[11] Sigma Points
[12] Differential Geometry
[13] Group Theory
[14] Invariant Theory
[15] Symmetry-Preserving Observers
[16] Invariance
[17] Symmetry

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

بود[۱۴]، اما توجه به تقارن‌های سیستم برای طراحی رؤیت‌گر، اولین بار در این سال با ایده استفاده از یک خطای نامتغیر[1] در [۱۵] شروع شد. این مرجع به طراحی رؤیت‌گر برای یک فرآیند شیمیایی که خروجی آن نسبت غلظت‌ها است و بنابراین تحت تبدیل مقیاس‌گذاری[2] نامتغیر است، پرداخته است که منجر به ایجاد رؤیت‌گر نامتغیر شد. یک چارچوب کلی برای طراحی رؤیت‌گر حفظ تقارن در [۱۶, ۱۷] ارائه‌شده است. این رویکرد، به دلیل استفاده از یک خطای نامتغیر، یک چارچوب هندسی برای طراحی رؤیت‌گر غیرخطی با خواص همگرایی جالب ارائه می‌دهد. از ویژگی‌های این نوع رؤیت‌گرها می‌توان به عدم وابستگی به اطلاعات نویز حسگر، امکان تنظیم پارامترها با الگوریتم پایداری لیاپانوف، مقاومت بالا نسبت به خطای تخمین اولیه و پیچیدگی کمتر اشاره کرد. استفاده از این دسته رؤیت‌گرها این مزیت را دارد که معادلات خطا مستقل از مسیر حالت سیستم و تخمین آن یا اصطلاحاً خودمختار[3] شده و بررسی همگرایی می‌تواند با سهولت بیشتری انجام پذیرد. به‌منظور بهره‌برداری از ویژگی همگرایی فیلتر کالمن خطی، [۱۸] با استفاده از ایده رؤیت‌گر حفظ تقارن، رؤیت‌گر EKF حفظ تقارن[4] را ارائه کرده است که در مقایسه با رؤیت‌گر EKF از خطی سازی مستقیم مدل فرایند غیرخطی و مدل اندازه‌گیری استفاده نمی‌کند و دارای چندین ویژگی‌هایی برجسته، ازجمله حفظ تقارن و امکان همگرایی در بسیاری از شرایط است[۱۸-۲۰]. موفقیت EKF حفظ تقارن منجر به ادامه تحقیقات در مورداستفاده از ویژگی تقارن سیستم‌های غیرخطی و نحوه بهره‌برداری از آن‌ها برای طراحی فیلتر شده است[۱۲, ۱۳]. مرجع [۱۳] با استفاده از ابزارهای هندسه دیفرانسیل، فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر[5] (IEKF) را پیشنهاد کرده‌است. ایده اصلی IEKF تغییر روش تعریف خطا و استفاده از تئوری تغییرناپذیری برای ارائه معادله دیفرانسیل خطا است. این مرجع نشان می‌دهد که اگر حالت بر روی یک گروه لی تعریف و دینامیک سیستم ویژگی گروه افاین[6] را برآورده کند، خطای تخمین که به‌صورت ضرب ماتریسی دو عنصر در فضای گروه لی تعریف می‌شود، تحت عمل گروه نامتغیر و دارای یک معادله دیفرانسیل خودمختار است که لگاریتم لی آن از یک رابطه خطی تبعیت می‌کند. به‌عبارت‌دیگر، خطی شدن سیستم به حالت‌های تخمینی بستگی ندارد. خطای تخمین خودمختار نتیجه اصلی تغییرناپذیری خطای تخمین تحت عمل گروه است که به‌عنوان تقارن سیستم در نظر گرفته می‌شود. این تقارن منجر به خطی شدن با حداقل خطای تقریب، عدم وابستگی به تخمین حالت و همگرایی سریع و دقت مناسب می‌شود و بر بسیاری از کاستی‌های خطی سازی مبتنی بر ژاکوبی که در EKF استفاده می‌شود، غلبه می‌کند. اخیراً برخی از مراجع به دنبال استفاده از IEKF به‌منظور تلفیق مبتنی بر INS بوده‌اند. در [۲۱] به‌منظور مقابله با دقت ضعیف و همگرایی کند EKF تحت خطای ترازیابی اولیه بزرگ، استفاده از IEKF برای سیستم ناوبری 5G/SINS پیشنهادشده است. [۲۲] تخمین زاویه لغزش جانبی یک وسیله نقلیه را به کمک تلفیق اطلاعات حسگرهای سرعت، واحد اندازه‌گیری اینرسی[7] (IMU) و سیستم ماهواره‌ای ناوبری جهانی[8] (GNSS) با استفاده از IEKF انجام داده است. مرجع [۲۳] به مقایسه نتایج تلفیق IMU/DVL با استفاده از IEKF و EKF مبتنی بر کواترنیون در مکان‌یابی زیر آب پرداخته است. در[۲۴] موقعیت‌یابی یک خودرو به کمک تلفیق INS/GNSS مبتنی بر IEKF و بدون در نظر گرفتن رانش و سوگیری حسگرها انجام‌شده است. کار مشابهی نیز در [۲۵] با استفاده از یک مجموعه داده به‌منظور موقعیت‌یابی یک پرنده بدون سرنشین ارائه‌شده است. مرجع [۲۶] نیز مدل خطای ترازیابی SINS را با استفاده از تعریف خطای خودمختار و قضایای ارائه‌شده برای آن استخراج و از فیلتر کالمن خطی برای ترازیابی SINS تحت خطای اولیه بزرگ استفاده کرده است. مقاله حاضر، به‌منظور کاهش زمان آماده‌به‌کار سیستم ناوبری، به دنبال حذف مرحله ترازیابی اولیه است. با این هدف و بر اساس ویژگی‌های فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر از IEKF برای تلفیق INS/GPS استفاده می‌شود. بدین منظور در ادامه‌ی مقاله، در بخش دوم مبانی نظری موردنیاز بیان‌شده است. این بخش به توصیف سیستم‌های دارای ویژگی خطای خودمختار و ارائه معادلات فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر اختصاص داده‌شده است. در بخش سوم با تعبیه کردن حالت‌ها به‌عنوان عناصر گروه لی ماتریسی، برقراری شرط گروه افاین بررسی و ضمن اثبات مستقل از حالت خطای نامتغیر، معادله دینامیک آن ارائه‌شده است. در ادامه با استفاده از مدل ارائه‌شده، معادلات IEKF برای INS/GPS ارائه‌شده است. در بخش چهارم عملکرد سیستم ناوبری تلفیقی ارائه‌شده به کمک مجموعه داده‌های واقعی حاصل از آزمون خودرویی مرجع و تحت خطای هم‌راستایی اولیه مختلف ارزیابی و با فیلتر کالمن توسعه‌یافته استاندارد و فیلتر کالمن توسعه‌یافته حالت خطا مقایسه می‌شود. در انتها، مقاله با جمع‌بندی و نتیجه‌گیری به پایان رسانده می‌شود.

۲- مبانی نظری

۲-۱- معرفی گروه و جبر لی

فضای توپولوژیکی که به‌طور موضعی اقلیدسی است، منیفولد[9] نامیده می‌شود. گروه نیز مجموعه‌ای به همراه یک عمل ترکیب است که دارای خواص بسته بودن، شرکت‌پذیری، عضو خنثی و عضو وارون می‌باشد. منیفولد دیفرانسیل پذیری که دارای ساختار گروه باشد و برای آن دو نگاشت ضرب و نگاشت وارون قابل‌تعریف باشد، یک گروه لی تشکیل می‌دهد. متناظر با هر گروه لی یک فضای برداری مجهز به یک عملگر براکت لی وجود دارد که جبر لی نامیده می‌شود. همچنین گروه ماتریسی زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های مربعی است که با عمل ضرب ماتریسی یک گروه را تشکیل می‌دهند. یک گروه لی که هم‌زمان یک گروه ماتریسی

[1] Invariant Error
[2] Scaling
[3] Autonomous
[4] Symmetry Preserving EKF
[5] Invariant EKF
[6] Group Affine
[7] Inertial Measurement Unit
[8] Global Navigation Satellite System
[9] Manifold

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

نیز باشد، گروه لی ماتریسی است که جبر لی آن فضای مماس حول عنصر همانی می‌باشد[۱-۳]. نگاشت بین عناصر گروه لی ماتریسی $G \subset \mathbb{R}^{N\times N}$، g جبر لی متناظر با آن از مرتبه $\dim g$ و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{\dim g}$ توسط عملگرهای زیر انجام می‌شود.

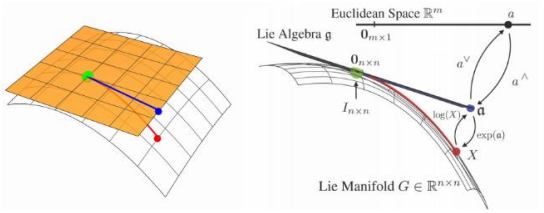
$$(\bullet)^{\wedge} : \mathbb{R}^{\dim g} \to g \quad (۱)$$

$$(\bullet)^{\vee} : g \to \mathbb{R}^{\dim g} \quad (۲)$$

$$\exp : g \to G \quad (۳)$$

$$\log : G \to g \quad (۴)$$

نگاشت نمایی (۳) که یک عنصر از جبر لی را دقیقاً به عنصر متناظر در گروه لی نگاشت می‌کند، برای گروه‌های لی ماتریسی همان ماتریس نمایی است. ارتباط گروه لی، جبر لی و فضای اقلیدسی درشکل ۱ نمایش داده‌شده است.



شکل ۱-ارتباط گروه لی، جبر لی و فضای اقلیدسی [۴]

در نظر گرفتن متغیرهای حالت سیستم به‌عنوان عناصر گروه لی ماتریسی، معادلات دینامیک خطا را به‌گونه‌ای ارائه می‌دهد که ویژگی‌های حرکتی جسم را به‌صورت دقیق‌تر توصیف می‌کند، لیکن انجام محاسبات بر روی گروه لی با پیچیدگی همراه است. به‌منظور حل این پیچیدگی می‌توان از ارتباط گروه و جبر لی بهره برد و محاسبات را در فضای جبر لی انجام داد.

۲-۲- تقارن

در فیزیک و ریاضیات، عدم‌تغییر بعضی از خواص یک سیستم دینامیکی تحت اثر مجموعه معینی از اعمال تقارن نامیده شده است. رؤیت‌گر نامتغیر با استفاده از تقارن به دنبال بهبود عملکرد تخمین است. به‌عنوان‌مثال فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر از خطایی استفاده می‌کند که تحت عمل یک گروه لی تقارن دارد و به همین دلیل مدل دینامیکی آن مستقل از حالت است. در ادامه به‌منظور بهره‌گیری از تقارن برای طراحی فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر، خطای خودمختار تعریف و دو قضیه اساسی نیز معرفی می‌گردد[۵].

۲-۳- خطای خودمختار

گروه لی ماتریسی $G \subset \mathbb{R}^{N\times N}$ با جبر لی متناظر g از مرتبه $\dim g$ و عضو خنثی (I_d) را در نظر بگیرید. I_d، ماتریس همانی با ابعاد $N \times N$ است. یک کلاس از سیستم‌های دینامیکی بر روی گروه لی را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت[۱۳].

$$\frac{d}{dt}\chi_t = f_{u_t}(\chi_t) \quad (۵)$$

که $\chi \in G$ بیانگر متغیرهای حالت و u_t ورودی سیستم است. خطای بین دو مسیر متمایز χ_t و $\overline{\chi}_t$ از حالت‌های سیستم (۵) را می‌توان با استفاده از ضرب آن‌ها تعریف کرد. در این صورت خطاهای چپ نامتغیر[1] و راست نامتغیر[2] به ترتیب به‌صورت (۶) و (۷) تعریف می‌شود.

$$\eta_t^L = \chi_t^{-1}\overline{\chi}_t \quad (۶)$$

$$\eta_t^R = \overline{\chi}_t\chi_t^{-1} \quad (۷)$$

اصطلاح خطای نامتغیر به عدم‌تغییر خطا (تقارن) در اثر ضرب (از چپ یا از راست) یک عنصر از گروه در مسیر حالت اشاره دارد. درصورتی‌که خطای نامتغیر از یک معادله دیفرانسیل به فرم $\frac{d}{dt}\eta_t = g_{u_t}(\eta_t)$ پیروی کند، دارای انتشار خودمختار[3] یا مستقل از مسیر حالت نامیده می‌شود. به‌طورکلی مشتق زمانی η_t تابعی پیچیده از $u_t, \chi_t, \overline{\chi}_t$ است که به‌سادگی در تابعی از η_t خلاصه نمی‌شود و بنابراین بررسی خودمختار بودن خطا، کار مشکلی است. مرجع [۱۳] به‌منظور حل این مشکل قضیه ۱ را که در ادامه معرفی می‌گردد، ارائه کرده است.

۲-٤- قضیه ۱- شرط گروه افاین

سیستم (۵) دارای خطای چپ یا راست نامتغیرِ خودمختار است، اگر برای $t>0$ و $a,b \in G$ شرط زیر را برقرار سازد[۱۳].

$$f_{u_t}(ab) = f_{u_t}(a)b + af_{u_t}(b) - af_{u_t}(I_d)b \quad (۸)$$

این شرط، شرط گروه افاین نامیده می‌شود. در این صورت دینامیک خطاهای خودمختار چپ و راست نامتغیر به‌صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt}\eta_t^L = g_{u_t}^L(\eta_t^L), g_{u_t}^L(\eta) = f_{u_t}(\eta) - f_{u_t}(I_d)\eta \quad (۹)$$

$$\frac{d}{dt}\eta_t^R = g_{u_t}^R(\eta_t^R), g_{u_t}^R(\eta) = f_{u_t}(\eta) - \eta f_{u_t}(I_d) \quad (۱۰)$$

سیستم‌های به فرم (۵) که ویژگی گروه افاین (۸) را برقرار می‌سازند، خصوصیات قابل‌توجهی دارند که سیستم‌های خطی را در حوزه گروه و جبر لی تعمیم می‌دهد. یکی از این ویژگی‌ها، ویژگی لگاریتم خطی خطا است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۱۳].

۲-۵- قضیه ۲- خطی بودن لگاریتم خطا

خطای چپ یا راست نامتغیر η بین دو مسیر از حالت‌های سیستم (۵) را در نظر بگیرید. فرض شود $\xi_0 \in \mathbb{R}^{\dim g}$ به‌گونه‌ای است که $\exp(\xi_0^{\wedge}) = \eta_0$. A نیز ماتریسی $\dim g \times \dim g$ است که رابطه $g_{u_t}(\exp(\xi^{\wedge})) = (A\xi)^{\wedge} + O(\|\xi\|^2)$ را برقرار می‌کند. در این صورت اگر ξ_t برای $t>0$ با معادله دیفرانسیل خطی زیر در $\mathbb{R}^{\dim g}$ مشخص می‌شود[۱۳].

[1] Left Invariant
[2] Right Invariant
[3] Autonomous Propagation

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

$$\frac{d}{dt}\xi_t = A\xi_t \qquad (۱۱)$$

آنگاه برای خطای غیرخطی واقعی η، در همه زمان‌ها و به ازای خطاهای به‌اندازه دلخواه بزرگ، رابطه زیر برقرار است.

$$\forall t \geq 0 \quad \eta_t = \exp(\xi_t^{\wedge}) \qquad (۱۲)$$

این نتیجه بیان می‌کند که بسیاری از مسائل غیرخطی با انتخاب مناسب متغیر خطا، منجر به معادلات خطی برای خطا می‌شوند.

۲-۶- فیلتر کالمن توسعه‌یافته چپ نامتغیر

برای سیستم‌های به فرم (۵) با ویژگی گروه افاین (۸)، دو نوع مشاهده مختلف چپ نامتغیر و راست نامتغیر تعریف می‌شود که به ازای مشاهدات چپ نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه‌یافته چپ نامتغیر[1] (LIEKF) و برای مشاهدات راست نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه‌یافته راست نامتغیر[2] (RIEKF) ارائه‌شده است[۱۳]. در ناوبری نیز از دو نوع اندازه‌گیری محلی و جهانی استفاده می‌شود. اندازه‌گیری محلی مانند اندازه‌گیری‌های اینرسی، بینایی و کیلومتر شمار مربوط به دستگاه بدنی و قابل‌بیان به‌صورت راست نامتغیر است. اندازه‌گیری جهانی مانند GPS نیز که اطلاعاتی در مورد دستگاه جهانی (دستگاه اینرسی) ارائه می‌کند، قابل‌بیان به‌صورت چپ نامتغیر است[۳۰]. بنابراین فیلتر نامتغیر مناسب برای تلفیق INS/GPS، LIEKF است که روابط آن در ادامه ارائه‌شده است[۱۳]. بدین منظور فرض می‌شود که G یک گروه لی ماتریسی با جبر لی متناظر g از مرتبه $\dim g$ و عنصر خنثی I_d است. یک کلاس از سیستم‌های دینامیکی به فرم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dt}\chi_t = f_{u_t}(\chi_t) + \chi_t w_t \qquad (۱۳)$$

که $\chi \in G$ متغیرهای حالت، u_t ورودی سیستم و $w_t \in g$ نویز سفید با ماتریس کوواریانس Q_t است. مشاهدات چپ نامتغیر نویزی نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Y_{t_n} = \chi_{t_n} d + \upsilon \qquad (۱۴)$$

که d برداری شناخته‌شده و υ نویز با مشخصات شناخته‌شده است.

۲-۶-۱- مرحله پیش‌بینی

با توجه به رابطه (۱۳)، مرحله پیش‌بینی در فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر به‌صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt}\hat{\chi}_t = f_{u_t}(\hat{\chi}_t) \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n \qquad (۱۵)$$

۲-۶-۱- مرحله بروز رسانی

درصورتی‌که سیستم (۱۳) شرط گروه افاین را برقرار سازد، خطای چپ نامتغیر بین حالت واقعی χ_t و حالت تخمینی $\hat{\chi}_t$ مستقل از مسیر حالت است و دینامیک آن به‌صورت رابطه (۱۶) می‌باشد.

$$\frac{d}{dt}\eta_t^L = g_{u_t}^L(\eta_t^L) - w_t\eta_t^L \qquad (۱۶)$$

همانند EKF معمولی، با فرض کوچک بودن خطا می‌توان بهره L_n را به کمک خطی سازی خطا محاسبه کرد. طبق تعریف، جبر لی نشان‌دهنده تغییرات بی‌نهایت کوچک یک عنصر گروه حول عضو خنثی گروه است. بنابراین مطابق قضیه ۲ روش تعریف یک متغیر خطا ξ_t در $\mathbb{R}^{\dim g}$ به‌صورت زیر است.

$$\eta_t = \exp(\xi_t^{\wedge}) \qquad (۱۷)$$

با تعریف $(\hat{w}_t)^{\wedge} = -w_t \ , \ \hat{w}_t \in \mathbb{R}^{\dim g}$، معادله خطی خطا در $\mathbb{R}^{\dim g}$ به‌صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt}\xi_t = A\xi_t + \hat{w}_t \qquad (۱۸)$$

که A توسط $g_{u_t}(\exp(\xi^{\wedge})) = (A\xi)^{\wedge} + O(\|\xi_t\|^2)$ تعریف و از جملات مرتبه بالا صرف‌نظر شده است. در EKF نیز با فرض $\hat{w}_t$ به‌عنوان نویز سفید از تقریب مشابهی استفاده‌شده است. طبق قضیه ۲ با فرض ξ_t به‌عنوان یک حل برای سیستم خطی (۱۸) و η_t به‌عنوان یک حل برای معادله خطای غیرخطی(۱۶)، اگر در زمان t_{n-1} رابطه $\eta_{t_{n-1}} = \exp(\xi_{t_{n-1}}^{\wedge})$ برقرار باشد، آنگاه تساوی $\eta_t = \exp(\xi_t^{\wedge})$ در هر زمان $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ و برای خطاهای اولیه دلخواه به‌صورت دقیق و نه تقریبی برقرار است. جمله ابداع[3] (خطای پیش‌بینی خروجی) فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر متناسب با مشاهدات چپ نامتغیر به‌صورت زیر است.

$$Z_{t_n}^L = \hat{\chi}_{t_n}^{-1}(Y_{t_n} - \hat{Y}_{t_n}) \qquad (۱۹)$$

که $\hat{Y}_{t_n}$ تخمین اندازه‌گیری با استفاده از تخمین حالت و Z_{t_n} ابداع است. با استفاده از (۱۷) به‌روزرسانی خطای چپ نامتغیر، برای مشاهدات چپ نامتغیر نویزی به کمک رابطه (۱۹) به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}&(\eta_{t_n}^L)^{+} = \chi_{t_n}^{-1}\hat{\chi}_{t_n}^{+} = \\ &\eta_{t_n}^L \exp\left(L_n\left((\eta_{t_n}^L)^{-1}d - d + (\eta_{t_n}^L)^{-1}\upsilon_{t_n}\right)\right)\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

برای خطی سازی آرگومان تابع نمایی رابطه (۲۰) با استفاده از بسط $\exp(\xi_{t_n}^{\wedge}) = I_d + \xi_{t_n}^{\wedge}$ به‌صورت زیر عمل می‌شود.

$$\begin{aligned}&(\eta_{t_n}^L)^{-1}d - d + (\eta_{t_n}^L)^{-1}\upsilon_{t_n} = \\ &\exp(\xi_{t_n}^{\wedge})^{-1}(d + \upsilon_{t_n}) - d = \\ &(I_d - \xi_{t_n}^{\wedge})(d + \upsilon_{t_n}) - d + O(\|\xi_{t_n}\|^2) = \\ &-\xi_{t_n}^{\wedge} d + \upsilon_{t_n} + O(\|\xi_{t_n}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}\|\|\upsilon_{t_n}\|)\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با کمک رابطه (۲۱) و استفاده از بسط تیلور مرتبه اول ماتریس نمایی، معادله (۲۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

[1] Left-Invariant Extended Kalman Filter
[2] Right-Invariant Extended Kalman Filter
[3] Innovation

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

$$I_d + (\xi_{t_n}^+)^\wedge = I_d + \left(L_n\left(-(\xi_{t_n}^-)^\wedge d + \upsilon_{t_n}\right)\right)^\wedge + O(\|\xi_{t_n}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}\|\|\upsilon_{t_n}\|) \quad (۲۲)$$

با صرف‌نظر از جملات $O(\|\xi_{t_n}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}\|\|\upsilon_{t_n}\|)$، درنهایت معادله خطی خطا در $\mathbb{R}^{\dim g}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\xi_{t_n}^+ = \xi_{t_n}^- + L_n(H\xi_{t_n}^- + \upsilon_{t_n}) \quad (۲۳)$$

که H به‌گونه‌ای در نظر گرفته‌شده است که رابطه زیر برقرار گردد.

$$H\xi_{t_n}^- = -(\xi_{t_n}^-)^\wedge d \quad (۲۴)$$

با توجه به اینکه معادلات (۱۸) و (۲۳) همانند فیلتر کالمن برای سیستم خطی کمکی $\frac{d}{dt}x_t = A_{u_t}x_t + \hat{w}_t$ با اندازه‌گیری‌های گسسته $y_n = Hx_{t_n} + \upsilon_{t_n}$ طراحی‌شده است، بهره L_n را می‌توان از طریق معادله ریکاتی به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P_t = A_{u_t}P_t + P_tA_{u_t}^T + \hat{Q}_t \\
&P_{t_n}^+ = (I - L_nH)P_{t_n}^- \\
&S_n = HP_{t_n}^-H^T + \hat{N}_n \\
&L_n = P_{t_n}^-H^TS^{-1}
\end{aligned} \quad (۲۵)$$

که $\hat{Q}_t$ کوواریانس نویز $\hat{w}_t$ و $\hat{N}_n$ کوواریانس نویز اندازه‌گیری υ_{t_n} است. در این صورت، به‌روزرسانی ماتریس حالت توسط فیلتر کالمن توسعه‌یافته چپ نامتغیر به‌صورت زیر است.

$$\hat{\chi}_{t_n}^+ = \hat{\chi}_{t_n}^- \exp\left(L_n\left(\hat{\chi}_{t_n}^{-1}Y_{t_n} - d\right)\right) \quad (۲۶)$$

در ادامه مسئله INS/ GPS در چارچوب اینرسی زمین مرکز[1] (ECI) مدنظر قرارگرفته است[۲].

۳- تلفیق INS/GPS در چارچوب ECI با IEKF

در این بخش ضمن ارائه معادلات دیفرانسیل ناوبری در چارچوب ECI، گروه لی مناسب معرفی و خطای نامتغیر محاسبه می‌شود. همچنین با برقراری شرط گروه افاین، خودمختار بودن خطا اثبات و معادله دینامیکی خطای نامتغیر و مدل مشاهدات نامتغیر نیز ارائه می‌گردد. در ادامه مراحل پیش‌بینی و بروز رسانی IEKF برای INS/GPS ارائه‌شده است.

۳-۱- معادلات دیفرانسیل ناوبری[۱-۳]

به‌منظور تسهیل بیان کمیت‌های فیزیکی مانند وضعیت، سرعت و موقعیت چارچوب اینرسی زمین-مرکز به‌عنوان دستگاه اینرسی و چارچوب جلو - راست - پایین به‌عنوان دستگاه بدنی در نظر گرفته‌شده است. C_b^i بیانگر ماتریس وضعیت، v_{ib}^i بیانگر بردار سرعت و p_{ib}^i بیانگر بردار موقعیت دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی است. مدل ژیروسکوپ و شتاب سنج نیز به‌صورت زیر در نظر گرفته‌شده است.

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_t &= \omega_t + b_t^g + w_t^g \\
\tilde{a}_t &= a_t + b_t^a + w_t^a
\end{aligned} \quad (۲۷)$$

که ω_t و a_t نرخ دوران و شتاب ورودی، $\tilde{\omega}_t$ و $\tilde{a}_t$ خروجی حسگرها، w_t^g و w_t^a بردار نویز سفید ژیروسکوپ و شتاب سنج و b_t^g و b_t^a نیز بردار رانش[2] ژیروسکوپ و سوگیری[3] شتاب سنج می‌باشد که به‌صورت زیر مدل شده است.

$$\begin{aligned}
\dot{b}_t^g &= w_t^{bg} \\
\dot{b}_t^a &= w_t^{ba}
\end{aligned} \quad (۲۸)$$

که w_t^{ba}, w_t^{bg} بردارهای نویز سفید است. در این صورت معادله دیفرانسیل وضعیت به‌صورت زیر است.

$$\dot{C}_b^i(t) = C_b^i(t)\left(\omega_{ib}^b(t) + w_t^g(t)\right)_\times \quad (۲۹)$$

که $(.)_\times$ ماتریس پادمتقارن یک بردار سه‌بعدی و ω_{ib}^b سرعت دوران دستگاه بدنه نسبت به دستگاه اینرسی است و توسط ژیروسکوپ‌ها اندازه‌گیری می‌شود. معادله دیفرانسیل موقعیت و سرعت نیز به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{ib}^i(t) &= C_b^i(t)(a(t) + w_t^a) + g(t) \\
\dot{p}_{ib}^i(t) &= v_b^i(t)
\end{aligned} \quad (۳۰)$$

که g بردار گرانش و a نیز شتاب وارد بر جسم است که توسط شتاب سنج‌ها اندازه‌گیری می‌شود.

۳-۲- استخراج مدل نامتغیر

با توجه به معادلات (۳۰) و (۳۱)، χ_t ماتریس حالت سیستم به‌عنوان عنصری از گروه لی ماتریسی $SE_2(3)$ که در پیوست الف معرفی‌شده است، به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\chi_t = \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1\times3} & 1 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

مطابق پیوست ب معادله دیفرانسیل ماتریس حالت (۳۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt}\chi_t = f_{u_t}(\chi_t) + \chi_t w_t \quad (۳۲)$$

که

$$f_{u_t}(\chi_t) = \begin{bmatrix} C_b^i(t)\left(\omega_{ib}^b(t)\right)_\times & C_b^i(t)\left(a(t)\right) + g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین در پیوست ب با استفاده از شرط گروه افاین اثبات شده است که (۳۲) دارای خطای نامتغیر خودمختار است. در ادامه بر اساس هدف این مقاله که تلفیق SINS/GPS است و با توجه به اینکه مدل اندازه‌گیری GPS

[1] Earth-Centered Earth-Fixed Coordinate System

[2] Drift

[3] Bias

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

چپ نامتغیر است، خطای حالت چپ نامتغیر به‌صورت (۳۳) قابل‌بیان خواهد بود. جزئیات این رابطه در پیوست ج ارائه‌شده است.

$$\eta_t^L = \begin{bmatrix} C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) & C_i^b(t)\hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & C_i^b(t)\hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1\times3} & 1 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳۳)$$

با جایگذاری معادله (۳۳) در (۹) معادله دیفرانسیل خطای چپ نامتغیر به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta_t^L &= f_{u_t}(\eta_t^L) - f_{u_t}(I_d)\eta_t^L \\ &= \eta_t^L W_1 + W_2\eta_t^L - (W_1+W_2)\eta_t^L = \eta_t^L W_1 - W_1\eta_t^L \end{aligned} \quad (۳۴)$$

که $W_1 = \begin{bmatrix} (\omega_{ib}^b(t))_\times & a(t) & 0_{1\times3} \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & g(t) & 0 \\ 0_{1\times3} & 1 & -1 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

برقراری شرط گروه افاین برای ماتریس حالت (۳۱) بیانگر مستقل از مسیر بودن خطای نامتغیر آن است که معادله دینامیک این خطا در رابطه (۳۴) بیان‌شده است. درواقع این رابطه به این معنی است که حتی اگر تغییر حالت خطا غیرخطی باشد، انتشار آن خطی می‌ماند. در ادامه و به‌منظور طراحی IEKF نیاز به محاسبه دینامیک خطی شده خطای نامتغیر است. در مورد خطای چپ نامتغیر (۳۳)، خطای مربوط به حالت‌های وضعیت، سرعت و موقعیت در گروه لی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد[۳۱].

$$\begin{aligned} C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) &= \exp\left(\left(\zeta_t^C\right)_\times\right) \approx I + \left(\zeta_t^C\right)_\times \\ \zeta_t^v &= C_i^b(t)\hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)v_{ib}^i(t) \\ &= C_i^b(t)(\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) \\ \zeta_t^p &= C_i^b(t)\hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ &= C_i^b(t)(\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^i(t)) \end{aligned} \quad (۳۵)$$

که ζ_t^C خطای وضعیت بین دستگاه بدنی و دستگاه اینرسی، ζ_t^v خطای جدید سرعت، ζ_t^p خطای جدید موقعیت و exp نیز نگاشت نمایی ماتریسی از جبر لی به گروه لی است. در مقایسه با تعریف مرسوم خطا که تفاوت مستقیم بردارها در مختصات محاسباتی و مختصات واقعی است، خطاهای جدید در یک چارچوب مختصات مشترک تعریف می‌شود و هم‌زمان تفاوت بزرگی و تفاوت جهت دو بردار را در نظر می‌گیرد. این نحوه تعریف خطا ضمن توصیف دقیق‌تر ویژگی‌های حرکت، به همگرایی قابل‌اثبات فیلتر کالمن منجر می‌شود[۳۲]. با توجه به رابطه (۳۵)، خطای چپ نامتغیر η^L را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\eta_t^L = \begin{bmatrix} \exp\left(\left(\zeta_t^C\right)_\times\right) & \zeta_t^v & \zeta_t^p \\ 0_{1\times3} & 1 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

نکته قابل‌توجه در مورد سوگیری و رانش حس‌گرها این است که در نظر گرفتن آن‌ها به‌عنوان عناصر ماتریس حالت شرط گروه افاین را نقض و بسیاری از ویژگی‌های IEKF را غیرقابل استفاده می‌کند[۳۳]. به‌منظور حل این مشکل می‌توان سوگیری و رانش را از روش EKF استاندارد تخمین زد. در این صورت یک فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر ناقص[1] حاصل می‌گردد که همچنان عملکرد بهتری نسبت به EKF استاندارد دارد[۳۴]. بدین منظور بردار γ_t شامل سوگیری شتاب سنج‌ها و رانش ژیروسکوپ‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۳۵].

$$\gamma_t \triangleq \begin{bmatrix} b_t^g \\ b_t^a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (۳۷)$$

در این صورت حالت جدید شامل ماتریس حالت سیستم که از قبل تعریف‌شده است و بردار پارامترهای سوگیری و رانش است و به‌صورت $(\chi_t, \gamma_t) \in SE_2(3)\times\mathbb{R}^6$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین خطا نیز به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$e_t^l \triangleq \left(\chi_t^{-1}\hat{\chi}_t, \hat{\gamma}_t - \gamma_t\right) \triangleq \left(\eta_t^l, \xi_t\right) \quad (۳۸)$$

که بردار ξ_t به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\xi_t \triangleq \begin{bmatrix} \hat{b}_t^g - b_t^g \\ \hat{b}_t^a - b_t^a \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_t^g \\ \xi_t^a \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

مطابق پیوست د، با صرف‌نظر از جملات مرتبه دوم، معادله دیفرانسیل خطای حالت‌های (۳۵) را می‌توان به‌صورت زیر را نوشت[۳۱].

$$\frac{d}{dt}\left(\zeta_t^C\right) \approx -\xi_t^g + w_t^g - \left(\tilde{\omega}_t\right)_\times\left(\zeta_t^C\right) \quad (۴۰)$$

$$\frac{d}{dt}\zeta_t^v \approx -\left(\tilde{\omega}_t\right)_\times\zeta_t^v - \left(\tilde{a}_t\right)_\times\zeta_t^C + \left(\xi_t^a - w_t^a\right) \quad (۴۱)$$

$$\frac{d}{dt}\zeta_t^p \approx -\left(\tilde{\omega}_t\right)_\times\zeta_t^p + \zeta_t^v \quad (۴۲)$$

نکته قابل‌توجه این است که صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه دوم، آسیبی به کلیت مسئله نمی‌رساند و خطای غیرخطی چپ نامتغیر را می‌توان به‌صورت دقیق از معادله دیفرانسیل خطای حالت متغیر بازمان بازیابی کرد[۳۶]. فرم ماتریسی معادلات خطای فوق را می‌توان به‌صورت رابطه زیر بیان کرد[۳۱].

$$\frac{d}{dt}\xi = A\xi + Gw \quad (۴۳)$$

که ξ بردار حالت خطای سیستم ناوبری اینرسی، A ماتریس سیستم، G ماتریس نویز و w نیز بردار نویز سفید گاوسی با ماتریس کوواریانس $Q = E\left[ww^T\right]$ است و به شرح زیر تعریف می‌شوند.

$$\zeta = \left[\left(\zeta^C\right)^T \quad \left(\zeta^v\right)^T \quad \left(\zeta^p\right)^T \quad \left(\xi^g\right)^T \quad \left(\xi^a\right)^T\right]^T$$

$$w = \left[\left(w_t^g\right)^T, \left(w_t^a\right)^T, 0_{1\times3}, \left(w_t^{bg}\right)^T, \left(w_t^{ba}\right)^T\right]^T$$

[1] Imperfect Invariant Extended Kalman Filter

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

$$A=\begin{bmatrix} -(\tilde{\omega}_t)_\times & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & -I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ -(\tilde{a}_t)_\times & -(\tilde{\omega}_t)_\times & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & -I_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} & -(\tilde{\omega}_t)_\times & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix} I_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که A به حالت‌های تخمین زده شده بستگی ندارد، بلکه فقط به ورودی سیستم مربوط می‌شود.

۳- مدل مشاهدات

در این بخش سرعت و موقعیت اندازه‌گیری شده توسط GPS به‌منظور استفاده در INS/ GPS به‌صورت چپ نامتغیر مدل می‌شود[۲۲]. این مدل‌سازی با در نظر گرفتن بازوی اهرم[1] انجام می‌گردد. در عمل GPS موقعیت و سرعت مربوط به مرکز آنتن و INS نتایج ناوبری مرکز IMU را ارائه می‌دهد که ازنظر فیزیکی منطبق نیستند. فاصله بین مرکز آنتن GPS و مرکز IMU با عنوان بازوی اهرم شناخته می‌شود که در نظر نگرفتن آن موجب کاهش دقت ناوبری تلفیقی می‌شود. اندازه‌گیری‌های سرعت و موقعیت را می‌توان با در نظر گرفتن بازوی اهرم به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} p^i_{gps}(t) &= p^i_{ib} + l^i_{IA} + w_{Gp} \\ &= p^i_{ib} + C^i_b(t) l^b_{IA} + w_{Gp} \\ v^i_{gps}(t) &= v^i_{ib} + C^i_b(t)(w^b_{ib} \times l^b_{IA}) + w_{Gv} \end{aligned} \quad (۴۴)$$

که v^i_{gps} و p^i_{gps} سرعت و موقعیت محاسبه‌شده توسط GPS است که در دستگاه اینرسی بیان می‌شود. l^b_{IA} بردار بازوی اهرم بیان‌شده در دستگاه بدنی و w_{Gv} و w_{Gp} نویز اندازه‌گیری سرعت و موقعیت GPS است. نمایش ماتریسی مدل‌های اندازه‌گیری موقعیت و سرعت GPS در فرم چپ نامتغیر (۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} p^i_G & v^i_G \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C^i_b(t) & v^i_{ib}(t) & p^i_{ib}(t) \\ 0_{1\times3} & 1 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^b_{IA} & (w^b_{ib})_\times l^b_{IA} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} w_{Gp} & w_{Gv} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۴۵)$$

با توجه به رابطه (۱۹)، ابداع LIEKF یعنی خطای بین اندازه‌گیری GPS و تخمین آن را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} Z &= \hat{\chi}^{-1}(Y-\hat{Y}) = \hat{\chi}^{-1}Y - \hat{\chi}^{-1}\hat{Y} = \\ &\hat{\chi}^{-1}\left(\chi d + \upsilon\right) - \hat{\chi}^{-1}\left(\hat{\chi} d\right) \\ &= \hat{\chi}^{-1}\chi d + \hat{\chi}^{-1}\upsilon - \hat{\chi}^{-1}\hat{\chi} d = \\ &\eta d + \hat{\chi}^{-1}\upsilon - d = \exp(\zeta) d + \hat{\chi}^{-1}\upsilon - d \\ &\approx \left(I + \zeta^{\wedge}\right) d + \tilde{\chi}^{-1}\upsilon - d = \\ &\zeta^{\wedge} d + \hat{\chi}^{-1}\upsilon = H\zeta + \hat{\upsilon} \end{aligned} \quad (۴۶)$$

که $\hat{\upsilon} = \hat{\chi}^{-1}\upsilon$ و H ماتریس ژاکوبی اندازه‌گیری به‌صورت زیر است.

$$H=\begin{bmatrix} -\left(l^b_{IA}\right)_\times & 0_{3\times3} & I_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ -\left(\left(w^b_{ib}\right)_\times l^b_{IA}\right)_\times & I_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \quad (۴۷)$$

واضح است که H به حالت‌های تخمینی بستگی ندارد و به همین دلیل نسبت به عدم قطعیت حالت‌ها حساس نیست.

۳-۴- خلاصه روابط تلفیق INS/GPS با استفاده از IEKF

اگرچه در نظر گرفتن سوگیری و رانش حس‌گرها، ویژگی گروه افاین را نقض می‌کند و سیستم دیگر خاصیت خطای خودمختار را ندارد، اما هنوز هم می‌توان ثابت کرد که IEKF ناقص، مزایای اصلی IEKF را حفظ کرده و دارای استحکام بیشتر و همگرایی سریع‌تری نسبت به EKF است [۱۳]. بنابراین، با گسسته سازی مدل ارائه‌شده در رابطه (۴۳) مراحل پیش‌بینی و به‌روزرسانی فیلتر کالمن توسعه‌یافته نامتغیر ناقص به منظور تلفیق SINS/GPS را می‌توان به‌صورت زیر انجام داد.

مرحله پیش‌بینی

$$\frac{d}{dt}\hat{\chi} = f_{u_i}(\hat{\chi})$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\hat{b}^g = 0 \\ \frac{d}{dt}\hat{b}^a = 0 \end{bmatrix} \quad (۴۸)$$

$$P = \Phi P \Phi^T + \Phi Q \Phi^T \Delta t \ , \ \Phi = \exp(A\Delta t)$$

مرحله به‌روزرسانی

$$L = P H^T (H P H^T + N)^{-1} \quad (۴۹)$$

$$N = \mathrm{cov}(\hat{\upsilon}) = \hat{\chi}^{-1}\,\mathrm{cov}(\upsilon)\,\hat{\chi}^{-T}$$

$$\zeta^+ = L \times Z = \begin{bmatrix} \zeta^{C+} & \zeta^{v+} & \zeta^{p+} & \xi^{g+} & \xi^{a+} \end{bmatrix} \quad (۵۰)$$

$$\hat{\chi}^+ = \hat{\chi}\exp\left(\begin{bmatrix} \zeta^{C+} & \zeta^{v+} & \zeta^{p+} \end{bmatrix}^T\right)$$

$$\hat{\gamma}^+ = \begin{bmatrix} \hat{b}^{g+} \\ \hat{b}^{a+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}^g + \xi^{g+} \\ \hat{b}^a + \xi^{a+} \end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

$$P^+ = (I - LH) P (I - LH)^T + LNL^T \quad (۵۲)$$

[1] Lever Arm

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در مرحله به‌روزرسانی خطای حس‌گرها، طبق روش EKF سنتی به‌روزرسانی می‌شوند. اما وضعیت، سرعت و موقعیت با توجه به ابداع LIEKF به‌روز می‌شوند. ذکر این نکته ضروری است که روش ارائه‌شده برای سیستم‌هایی که زمان عملکرد کوتاهی دارند و محدودیت‌های دینامیکی در مانورهای موردنیاز برای جبران سازی خطای زیرسیستم هدایت و کنترل به دلیل ناترازی اولیه نباشند، احتمالا مناسب نیست. در ادامه کارایی INS/GPS مبتنی بر LIEKF ارزیابی می‌شود.

٤- ارزیابی با استفاده از شبیه‌سازی و داده‌های تجربی

در این بخش، ابتدا به منظور نشان دادن توانایی فیلترکالمن توسعه‌یافته نامتغیر در مقابله با ناهمراستایی زاویه‌ای اولیه بزرگ، به کمک داده‌های حاصل از شبیه‌سازی، عملکرد IEKF با عملکرد EKF استاندارد و فیلتر کالمن توسعه‌یافته حالت خطا[1] (ESKF) ، بازای خطای زاویه‌ای اولیه مختلف مقایسه می‌شود. بدین منظور حرکت یک کشتی در اثر امواج متلاطم دریا شبیه‌سازی‌شده است. فرض می‌شود که حرکت دورانی به دلیل تغییرات زوایای غلت، فراز و سمت ناشی از امواج دریا به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\phi &= 10^\circ \cos(\tfrac{2\pi}{6}t)\\ \theta &= 7^\circ \cos(\tfrac{2\pi}{5}t)\\ \psi &= 5^\circ \cos(\tfrac{2\pi}{7}t)\end{aligned} \qquad (۵۳)$$

که ψ,θ,φ زوایای غلت، فراز و سمت است. همچنین فرض می‌گردد حرکت انتقالی ناشی از تغییرات سرعت به‌صورت است.

$$\begin{aligned}&V_i = A_i \sin(\frac{2\pi}{T_i}t)\ ,\ i=x,y,z\\ &A_x = 10m/s, A_y = 10m/s, A_z = 1m/s\\ &T_x = 7s\ ,\ T_y = 6s\ ,\ T_z = 8s\end{aligned} \qquad (۵۴)$$

مشخصات IMU و گیرنده GPS مورداستفاده، مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱- مشخصات حس‌گرهای مورداستفاده برای شبیه‌سازی

شتاب سنج‌ها	
سوگیری ثابت	$50\ \mu g$
گام تصادفی سرعت	$0.03\ \frac{m}{s\sqrt{h}}$
ژیروسکوپ	
رانش ثابت	$0.01\ ^\circ/h$
گام تصادفی زاویه‌ای	$0.001\ ^\circ/\sqrt{h}$
گیرنده GPS	
دقت موقعیت	$2.5\,m$
دقت سرعت	$5\,\frac{m}{s}$

فرکانس خروجی حس‌گرهای اینرسی ۱۰۰ هرتز و GPS نیز ۱۰ هرتز در نظر گرفته‌شده است. سرعت و موقعیت اولیه به‌طور مستقیم با استفاده از اندازه‌گیری‌های GPS تنظیم می‌شود. با توجه به اینکه معمولاً چالش اساسی ترازیابی در تعیین زاویه سمت است، به منظور ارزیابی الگوریتم‌ها، خطای اولیه زوایای غلت و فراز به صورت ثابت و معادل 5° فرض شده است. خطای اولیه زاویه سمت مختلف نیز به صورت $[0^\circ\ 30^\circ\ 60^\circ\ 90^\circ]$ در نظر گرفته‌شده است. مقادیر مورد استفاده در شبیه‌سازی به صورت زیر است.

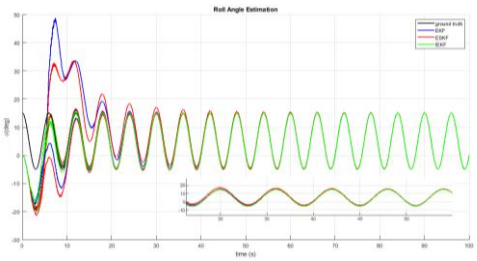
$$R = blkdiag\left(5^2 \times I_{3\times3}\right), \varphi_0 = 0^\circ, \theta_0 = 0^\circ, \psi_0 = 0^\circ$$

$$v_0 = v_{0,GPS}, x_0 = x_{0,GPS}, b^g = b^a = [0,0,0]$$

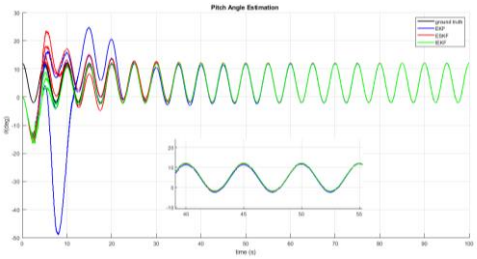
$$Q = diag\left([0.001\ ^\circ/\sqrt{h} \times I_{3\times3}, 0.03\ ^{m}/_{s}/\sqrt{h} \times I_{3\times3}, 0_{9\times9}]^2\right) * 0.01^2$$

$$P_0 = diag([diag[\tfrac{5}{3},\tfrac{5}{3},\tfrac{90}{3}], 5\ ^m/_s \times I_{3\times3}, 2.5\,m \times I_{3\times3}, 0.01\ ^\circ/_{hr} \times I_{3\times3}, 50\,\mu g \times I_{3\times3}]^2)$$

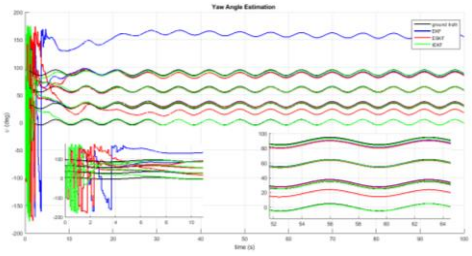
که منظور از blkdiag ماتریس قطری بلوکی است. نتیجه تخمین زوایا اویلر و نیز خطای تخمین آن‌ها در شکل‌های زیر نشان داده‌شده است.



شکل ۲- تخمین زاویه غلت به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز ۵ درجه و ناهمراستایی‌های اولیه مختلف زاویه سمت



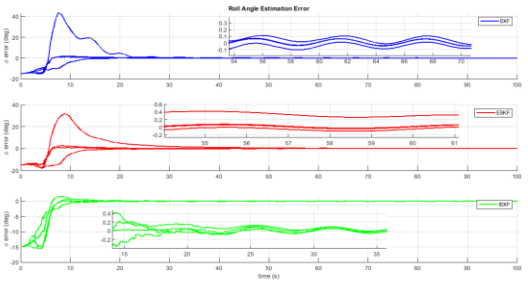
شکل ۳- تخمین زاویه فراز به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز ۵ درجه و ناهمراستایی‌های اولیه مختلف زاویه سمت



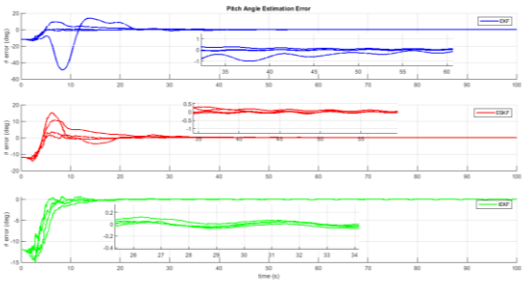
شکل ۴- تخمین زاویه سمت به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز ۵ درجه و ناهمراستایی‌های اولیه مختلف زاویه سمت

[1] Error State Extended Kalman Filter

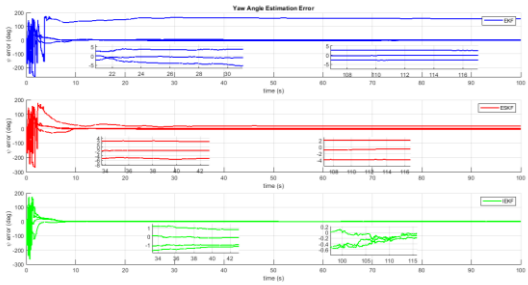
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]



شکل ۵-خطای تعیین زاویه غلت در سناریوهای شبیه‌سازی شده



شکل ۶- خطای تعیین زاویه فراز در سناریوهای شبیه‌سازی شده



شکل ۷- خطای تعیین زاویه سمت در سناریوهای شبیه‌سازی شده

همانگونه که مشخص است IEKF از نظر دقت و سرعت همگرایی عملکرد بهتری را نسبت به ESKF و EKF دارد. این برتری در حضور ناهمراستاییی اولیه زیاد، محسوس‌تراست. در ادامه این بخش تلفیق INS/GPS با استفاده از داده‌های واقعی بررسی می‌شود. با توجه به اینکه به دلیل ماهیت نویزی حس‌گرها و اغتشاشات محیط، استفاده از داده‌های شبیه‌سازی‌شده، نتایج منصفانه‌ای را ارائه نمی‌دهد. به همین دلیل از یک مجموعه داده واقعی با عنوان KITTI[1] که کاربرد گسترده‌ای در کیلومتر شماری بصری[2] (VO)، INS/VO و INS/GPS دارد، استفاده می‌شود[۳۷, ۳۸]. این مجموعه داده با استفاده از حس‌گرهای نصب‌شده بر روی یک خودرو شامل دوربین، GPS/IMU و LiDAR جمع‌آوری‌شده است. داده‌ها شامل خروجی خام حسگرها و داده‌های واقعیت زمینی[3] است که با ترکیب خروجی‌های GPS/IMU و LiDAR محاسبه‌شده است. حسگر GPS/IMU از نوع OXTS RT 3003 GPS/IMU است که مشخصات آن مطابق دفترچه راهنما در جدول ۲ ارائه‌شده است[۳۹].

جدول ۲- مشخصات کلی حس‌گر OXTS RT3003 GPS/IMU

IMU Update rate	$100\ Hz$
Gyro Bias Stability	$2\ ^{\circ}/_{hr}$
Gyro Random Walk	$0.2\ ^{\circ}/_{\sqrt{hr}}$
Accelerometer Bias Stability	$2\ \mu g$
Accelerometer Random Walk	$0.005\ ^{m}/_{s\sqrt{hr}}$
GPS Update rate	$10\ Hz$
GPS Velocity Accuracy	$0.05\ ^{km}/_{hr}$
GPS Position Accuracy	$0.01 m$

در ادامه داده‌های 2011_10_03_drive_0027_sync از مجموعه داده‌های KITTI استفاده‌شده است. این آزمایش در مدت‌زمان ۴۶۹ ثانیه با پیمایش مسیر نشان داده‌شده در

شکل ۸ انجام‌شده است. در این مجموعه داده، به منظور انجام شبیه‌سازی داده‌های GPS با نرخ ۱ هرتز در اختیار است. نتایج تخمین حالت‌های ناوبری به ازای خطای ناهمراستایی اولیه صفر و مقادیر واقعی متناظر آن‌ها در

شکل ۸ تا شکل ۱۴ مقایسه شده است.



شکل ۸- مسیر پیمایش شده[۴۰]

ماتریس‌های کوواریانس نویز مدل دینامیکی و اندازه‌گیری که معمولاً با توجه به‌دقت حسگرهای اینرسی و اندازه‌گیری‌های خارجی تعیین می‌شوند و نیز حدس اولیه مورداستفاده در انجام شبیه‌سازی‌ها به‌صورت زیر در نظر گرفته‌شده است.

$$R = blkdiag\left(0.01^2 \times I_{3\times3}\right)$$

$$\varphi_0 = 0.9067^{\circ}, \theta_0 = 0.0463^{\circ}, \psi_0 = 61.6036^{\circ}$$

$$v_0 = [0,0,0]\,^{m}/_{s}, x_0 = [1.0811, 1.3375, 0.7956]\,m$$

$$b^g = b^a = [0,0,0]$$

$$Q = diag\left(\left[0.2\ ^{\circ}/_{\sqrt{hr}} \times I_{3\times3}, 0.005\ ^{m}/_{s\sqrt{hr}} \times I_{3\times3}, 0_{9\times9}\right]^2\right) * 0.01^2$$

$$P_0 = diag\left(\left[diag\left[(\tfrac{5}{3}), (\tfrac{5}{3}), (\tfrac{90}{3})\right], 0.05\ ^{km}/_{hr} \times I_{3\times3}, 0.01m \times I_{3\times3}, 2\ ^{\circ}/_{hr} \times I_{3\times3}, 2\,\mu g \times I_{3\times3}\right]^2\right)$$

در

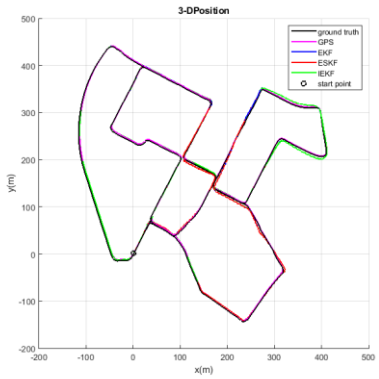
شکل ۹ و شکل ۱۰ به ترتیب نتایج تخمین مسیر پیمایش شده در صفحه x-y و تخمین موقعیت در راستای محورهای ECI نشان داده‌شده است.

[1] Karlsruhe Institute of Technology and Toyota Technological Institute

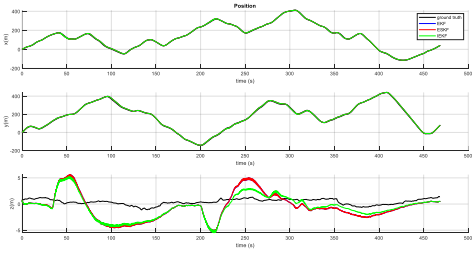
[2] Visual Odometry

[3] Ground Truth

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

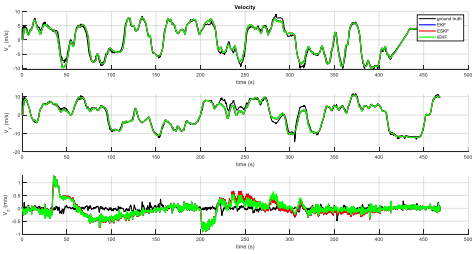


شکل ۹- تخمین مسیر پیمایش شده در صفحه x-y دستگاه ECI



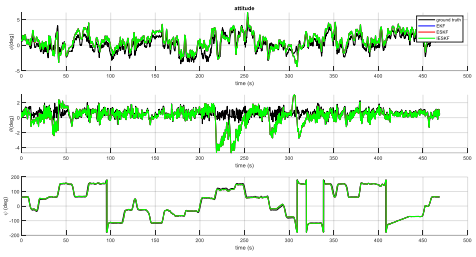
شکل ۱۰- تخمین موقعیت در راستای x، y و z دستگاه ECI

در شکل ۱۱ نیز تخمین سرعت در راستای محورهای دستگاه ECI نشان داده‌شده است.



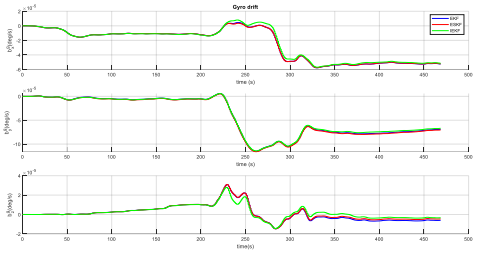
شکل ۱۱- تخمین سرعت در راستای x، y و z دستگاه ECI

شکل ۱۲ نیزنشان‌دهنده تخمین زوایا اویلر است. نکته قابل‌توجه اینکه، در ناوبری وسایل نقلیه جاده‌ای، به دلیل اینکه سطح جاده‌ها نسبتاً صاف است، تخمین زاویه سمت، بیشتر موردتوجه قرار می‌گیرد. همچنین در فرایند تلفیق به دلیل وجود خطاهایی مانند بایاس سنسورها، سعی می‌گردد با تخمین و جبران این خطاها دقت بهبود داده شود. درنظر گرفتن خطای حس‌گرها به‌عنوان حالت‌های سیستم منجر به عدم مشاهده‌پذیری کامل سیستم در حالت سکون می‌شود[۴۱]. اما نکته قابل‌توجه این است که مانور وسیله حامل بر روی مشاهده‌پذیری حالت‌ها اثرگذار است. با توجه به نتایج شبیه‌سازی می‌توان بیان داشت که در طول مسیر طی شده، زوایا مشاهده‌پذیر هستند.

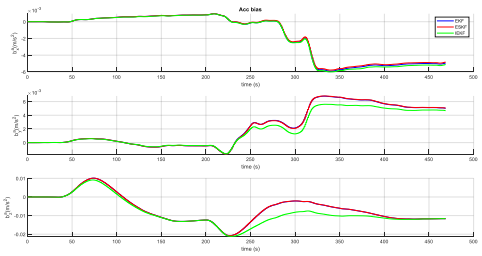


شکل ۱۲- تخمین زاویه غلت، فراز و سمت

شکل ۱۳ و شکل ۱۴ نیز به ترتیب بیانگر نتایج تخمین رانش ژیروسکوپ‌ها و سوگیری شتاب سنج‌ها در راستای محورهای دستگاه ECI است.



شکل ۱۳- تخمین رانش ژیروسکوپ‌ها در راستای محورهای دستگاه ECI



شکل ۱۴- تخمین سوگیری شتاب سنج‌ها در راستای محورهای دستگاه ECI

همچنین مجذور میانگین مربعات خطای تخمین[1] (RMSE) حالت‌های ناوبری برای روش‌های EKF، ESKF و IEKF درجدول ۳ ارائه‌شده است. این نتایج فوق با فرض معلوم بودن شرایط اولیه به‌صورت دقیق به‌دست‌آمده است که بیانگر عملکرد یکسان فیلترها در تلفیق INS/GPS می‌باشد. بر اساس داده‌های حقیقت زمین، زوایای اولیه واقعی به ترتیب برابر $\varphi = 0.9067^\circ$، $\theta = 0.0463^\circ$ و $\psi = 61.6036^\circ$ است. در ادامه به‌منظور ارزیابی کار آیی IEKF و مقایسه با EKF و ESKF، اثر خطای ناهمراستایی زاویه‌ای اولیه بر دقت خروجی بررسی‌شده است. خطای موقعیت‌یابی این فیلترها تحت زوایای ناهمراستایی اولیه مختلف در جدول جدول ۴ ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در صورت عدم وجود زاویه ناهمراستایی، هر سه فیلتر دقت موقعیت‌یابی نسبتاً بالا دارند و تفاوت کمی بین آن‌ها وجود دارد. با افزایش زاویه ناهمراستایی، خطاهای موقعیت‌یابی هر سه افزایش می‌یابد. بااین‌حال، IEKF دقت موقعیت‌یابی بالاتری از EKF و ESKF دارد و هر چه زاویه ناهمراستایی بیشتر باشد، مزیت

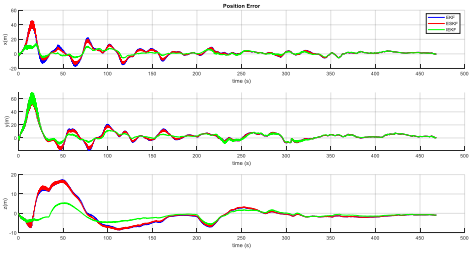
[1] Root Mean Square Error

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

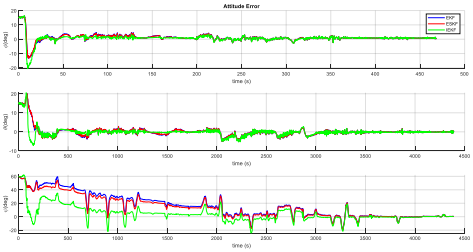
IEKF آشکارتر است. شکل ۱۵ خطای موقعیت‌یابی تحت زاویه ناهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و ناهمراستایی ۶۰ درجه در زاویه سمت را نشان می‌دهد. همچنین خطای تعیین وضعیت در این شرایط در شکل ۱۶ نشان داده شده است. می‌توان دریافت که IEKF هم ازنظر سرعت همگرایی و هم ازنظر دقت موقعیت‌یابی نسبت به EKF و ESKF برتر است.

جدول ۳- مجذور میانگین مربعات خطای تخمین حالت‌های ناوبری

متغیر	RMSE EKF	RMSE ESKF	RMSE IEKF
$\varphi(\circ)$	۱٫۰۳	۱٫۰۳	۱٫۰۳
$\theta(\circ)$	۱٫۰۸	۱٫۰۸	۱٫۰۸
$\psi(\circ)$	۵٫۹	۵٫۹	۵٫۹
Vx(m/s)	۰٫۸۱۶	۰٫۸۱۹	۰٫۸۱۷
Vy(m/s)	۱٫۲	۱٫۲	۱٫۱۹
Vz(m/s)	۰٫۲۷	۰٫۲۷	۰٫۲۶
x(m)	۲٫۵۷	۲٫۵۷	۲٫۵۶
y(m)	۴٫۱۴	۴٫۱۴	۴٫۱۲
z(m)	۲٫۴	۲٫۴	۲٫۱۸



شکل ۱۵- خطای موقعیت‌یابی تحت زاویه ناهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و ۶۰ درجه در زاویه سمت



شکل ۱۶- خطای تخمین وضعیت تحت زاویه ناهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و ناهمراستایی ۶۰ درجه در زاویه سمت

جدول ۴- RMSE موقعیت‌یابی تحت خطای ناهمراستایی زاویه‌ای اولیه مختلف

زاویه ناهمراستایی اولیه	$[15^\circ \quad 15^\circ \quad 60^\circ]$			$[10^\circ \quad 10^\circ \quad 30^\circ]$			$[5^\circ \quad 5^\circ \quad 5^\circ]$			$[0^\circ \quad 0^\circ \quad 0^\circ]$		
$[\delta\varphi_0 \quad \delta\theta_0 \quad \delta\psi_0]$												
	z(m)	y(m)	x(m)	z(m)	y(m)	x(m)	z(m)	y(m)	x(m)	z(m)	y(m)	x(m)
RMSE EKF	۵٫۳	۱۰٫۶	۷٫۱	۳٫۵	۵٫۱	۶٫۳	۳٫۱	۴٫۲	۴	۲٫۴	۴٫۱	۲٫۵
RMSE ESKF	۵٫۳	۱۰٫۳	۶٫۹	۳٫۶	۴٫۷	۶٫۴	۳٫۱	۴٫۲	۴	۲٫۴	۴٫۱	۲٫۵
RMSE IEKF	۲٫۳	۱۰٫۱	۳٫۳	۲٫۲	۶٫۵	۴٫۴	۲	۴٫۵	۳٫۵	۲٫۱	۴٫۱	۲٫۵

نتایج فوق مؤید این نکته است که دقت خروجی EKF و ESKF، به دلیل وابستگی مدل خطی سازی شده مورد استفاده این فیلترها به حالت‌ها، در اثر تغییر خطای اولیه تغییر می‌کند، اما دقت نتایج IEKF تحت خطای زاویه‌ای تفاوت چندانی نمی‌کند. به همین دلیل می‌توان ادعا کرد که IEKF تحت خطای اولیه زاویه‌ای بزرگ مقاوم است و حتی می‌تواند نیاز به ترازیابی اولیه دقیق را برطرف کند.

۸- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با تعبیه کردن وضعیت، سرعت و موقعیت جسم متحرک به‌عنوان عناصر یک گروه لی ماتریسی، مدل دینامیکی خطای مستقل از حالت برای تلفیق INS/GPS ارائه‌شده است. در ادامه به کمک مدل ارائه‌شده، از فیلتر کالمن توسعه‌یافته چپ نامتغیر برای تلفیق INS/GPS استفاده‌شده است. به کمک داده‌های شبیه سازی شده و نیز داده‌های واقعی روش پیشنهادی با تلفیق INS/GPS مبتنی بر دو الگوریتم EKF و ESKF مقایسه شده است. نتایج بیانگر آن است که IEKF توانایی غلبه بر بسیاری از کاستی‌های EKF ازجمله وابستگی ژاکوبی‌ها به متغیرهای حالت را دارد. یکی دیگر از مزیت‌های IEKF، امکان استفاده از آن در صورت وجود زاویه ناهمراستایی اولیه بزرگ است. نتایج ارزیابی نشان می‌دهد که IEKF برخلاف دو روش دیگر که ممکن است با زاویه ناهمراستایی اولیه بزرگ واگرا شوند، از مزیت هم‌گرایی سریع برخوردار است. با این قابلیت IEKF می‌توان مرحله ترازیابی اولیه را حذف و زمان لازم برای شروع فرآیند ناوبری را کاهش داد. در پژوهش‌های آتی می‌توان خطای سوگیری و رانش را به‌عنوان عناصر گروه به‌گونه‌ای در نظر گرفت که شرط گروه افاین نقض نشده و تلفیق INS/GPS و نیز ترازیابی اولیه را به‌صورت کامل

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

از طریق LIEKF انجام داد. همچنین تحلیل مشاهده‌پذیری موضوع دیگری است که می‌تواند در پژوهش‌های آتی مورد توجه قرار گیرد.

مراجع

[1] D. H. Titterton and J. L. Weston, *Strapdown inertial navigation technology*. Institution of Engineering and Technology, 2004.

[2] A. Noureldin, T. B. Karamat, and J. Georgy, *Fundamentals of inertial navigation, satellite-based positioning and their integration*. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] M. S. Grewal, A. P. Andrews, and C. G. Bartone, *Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration*. John Wiley & Sons, 2020.

[4] P. G. Savage, *Strapdown analytics*. Strapdown Associates, 2000.

[5] R. M. Rogers, *Applied mathematics in integrated navigation systems*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.

[6] S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox, *Probabilistic robotics*. The MIT Press, 2005.

[7] A. J. Krener, "The convergence of the extended Kalman filter," in *Directions in mathematical systems theory and optimization*: Springer, 2003, pp. 173-182.

[8] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H∞, and Nonlinear Approaches*. John Wiley and Sons, 2006.

[9] G. P. Huang, A. I. Mourikis, and S. I. Roumeliotis, "Observability-based rules for designing consistent EKF SLAM estimators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 29, no. 5, pp. 502-528, 2010.

[10] G. P. Huang, A. I. Mourikis, and S. I. Roumeliotis, "A quadratic-complexity observability-constrained unscented Kalman filter for SLAM," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 29, no. 5, pp. 1226-1243, 2013.

[11] M. Raitoharju and R. Piché, "On computational complexity reduction methods for Kalman filter extensions," *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 34, no. 10, pp. 2-19, 2019.

[12] A. Barrau and S. Bonnabel, "An EKF-SLAM algorithm with consistency properties," *arXiv:1510.06263*, 2015.

[13] A. Barrau and S. Bonnabel, "The invariant extended Kalman filter as a stable observer," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 4, pp. 1797-1812, 2016.

[14] P. Rouchon and J. Rudolph, "Invariant tracking and stabilization: problem formulation and examples," in *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, vol. 246: Springer, 2000, pp. 261-273.

[15] N. Aghannan and P. Rouchon, "On invariant asymptotic observers," in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002, vol. 2, pp. 1479-1484: IEEE.

[16] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Symmetry-preserving observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 11, pp. 2514-2526, 2008.

[17] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Non-linear symmetry-preserving observers on Lie groups," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1709-1713, 2009.

[18] S. Bonnable, P. Martin, and E. Salaün, "Invariant extended Kalman filter: theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem," in *Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control*, 2009, pp. 1297-1304: IEEE.

[19] P. Martin and E. Salaün, "Generalized Multiplicative Extended Kalman Filter for Aided Attitude and Heading Reference System," in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2010.

[20] S. Bonnabel, "Left-invariant extended Kalman filter and attitude estimation," in *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007, pp. 1027-1032: IEEE.

[21] Y. Luo, M. Wang, C. Guo, and W. Guo, "Research on Invariant Extended Kalman Filter Based 5G/SINS Integrated Navigation Simulation," in *China Satellite Navigation Conference*, 2021, pp. 455-466: Springer.

[22] Z. Zhang, J. Zhao, C. Huang, and L. Li, "Precise and robust sideslip angle estimation based on INS/GNSS integration using invariant extended Kalman filter," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 2022.

[23] E. R. Potokar, K. Norman, and J. G. Mangelson, "Invariant extended kalman filtering for underwater navigation," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 5792-5799, 2021.

[24] A. Ibrahim, A. Abosekeen, A. Azouz, and A. Noureldin, "Enhanced Autonomous Vehicle Positioning Using a Loosely Coupled INS/GNSS-Based Invariant-EKF Integration," *Sensors*, vol. 23, no. 13, p. 6097, 2023.

[25] X. Zhou, Y. Chen, Y. Liu, and J. Hu, "A Novel Sensor Fusion Method Based on Invariant Extended Kalman Filter for Unmanned Aerial Vehicle," in *2021 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2021, pp. 1111-1116: IEEE.

[26] L. Chang, F. Qin, and J. Xu, "Strapdown inertial navigation system initial alignment based on group of double direct spatial isometries," *IEEE Sensors Journal*, vol. 22, no. 1, pp. 803-818, 2021.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

[27] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

[28] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic press, 2003.

[29] G. S. Chirikjian, *Stochastic models, information theory, and Lie groups, volume 2: Analytic methods and modern applications*. Springer Science & Business Media, 2009.

[30] S. C. Hsiung, "Toward Invariant Visual-Inertial State Estimation using Information Sparsification," Master's thesis, Carnegie Mellon University, 2018.

[31] Y. Luo, C. Guo, S. You, J. Hu, and J. Liu, "SE2(3) based Extended Kalman Filtering and Smoothing Framework for Inertial-Integrated Navigation," *arXiv preprint arXiv:2102.12897*, 2021.

[32] M. S. Andrle and J. L. Crassidis, "Attitude estimation employing common frame error representations," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, no. 9, pp. 1614-1624, 2015.

[33] A. Barrau, "Non-linear state error based extended Kalman filters with applications to navigation," Doctoral thesis, Mines Paristech, 2015.

[34] A. Barrau and S. Bonnabel, "The geometry of navigation problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 68, no. 2, pp. 689-704, 2022.

[35] R. Hartley, M. Ghaffari, R. M. Eustice, and J. W. Grizzle, "Contact-aided invariant extended Kalman filtering for robot state estimation," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 39, no. 4, pp. 402-430, 2020.

[36] L. Chang and Y. Luo, "Log-linear Error State Model Derivation without Approximation for INS," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022.

[37] A. Geiger, P. Lenz, and R. Urtasun, "Are we ready for autonomous driving? the kitti vision benchmark suite," in *2012 IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2012, pp. 3354-3361: IEEE.

[38] A. Geiger, P. Lenz, C. Stiller, and R. Urtasun, "Vision meets robotics: The kitti dataset," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 32, no. 11, pp. 1231-1237, 2013.

[39] OxTS, "RTv2 GNSS-aided Inertial Measurement Systems User Manual," *[Online]. Available: www.oxts.com/app/uploads/2018/02/rtman.pdf*, 2018.

[40] T. Qin, P. Li, and S. Shen, "Vins-mono: A robust and versatile monocular visual-inertial state estimator," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 34, no. 4, pp. 1004-1020, 2018.

[41] Y. F. Jiang and Y. P. Lin, "Error estimation of INS ground alignment through observability analysis," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, vol. 28, no. 1, pp. 92-97, 1992.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

٦- پیوست‌ها

٦-١- پیوست الف: گروه ایزو متری‌های دوتایی مستقیم

گروه ایزو متری‌های دوتایی مستقیم[1] که با $SE_2(3)$ نمایش داده می‌شود، برای مدل‌سازی حالت‌های اینرسی به‌صورت زیر ارائه‌شده است[۱۳].

$$\mathrm{SE}_2(3)=\left\{ \mathrm{T}=\begin{bmatrix} \mathrm{C} & \mathrm{v} & \mathrm{p} \\ 0_{1\times3} & 1 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times5} \,|\, \mathrm{C}\in \mathrm{SO}(3),\ \mathrm{v,p}\in\mathbb{R}^3 \right\} \tag{۵۵}$$

که $\mathrm{SO}(3)$ گروه متعامد ویژه است. جبر لی متناظر گروه $SE_2(3)$ توسط $se_2(3)$ نشان داده می‌شود و برای هر بردار $\xi \triangleq \mathrm{vec}(\phi,\vartheta,\rho)\in\mathbb{R}^9$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\xi^{\wedge} \triangleq \begin{bmatrix} \phi_\times & \vartheta & \rho \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times5} \tag{۵۶}$$

نگاشت نمایی از $se_2(3)$ به $SE_2(3)$ نیز به‌صورت زیر است.

$$\exp(\xi^{\wedge})=\begin{bmatrix} \exp(\phi_\times) & J\vartheta & J\rho \\ 0_{1\times3} & 1 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \end{bmatrix},\ J=\mathrm{I}+\frac{1-\cos\|\phi\|}{\|\phi\|^2}\phi_\times+\frac{\|\phi\|-\sin\|\phi\|}{\|\phi\|^3}\phi_\times^2 \tag{۵۷}$$

٦-٢- پیوست ب: اثبات برقراری شرط گروه افاین برای ماتریس حالت (۳۱)

معادله دیفرانسیل ماتریس حالت (۳۱) را می‌توان بر اساس روابط (۲۹) و (۳۰) به‌صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt}\chi_t=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1\times3} & 1 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_b^i(t)\left(\omega_{ib}^b(t)+w_t^g\right)_\times & C_b^i(t)\left(a(t)+w_t^a\right)+g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_b^i(t)\left(\omega_{ib}^b(t)\right)_\times & C_b^i(t)\left(a(t)\right)+g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(w_t^g\right)_\times & w_t^a & 0_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۸}$$

$$=f_{u_t}(\chi_t)-\chi_t\left(w_t\right)^{\wedge}$$

که $w_t=\left[\left(w_t^g\right)^T,\left(w_t^a\right)^T,0_{1\times3}\right]^T$ است. $f_{u_t}(\chi_t)$ قسمت قطعی دینامیک را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$f_{u_t}(\chi_t)=\begin{bmatrix} C_b^i(t)\left(\omega_{ib}^b(t)\right)_\times & C_b^i(t)\left(a(t)\right)+g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}=\chi_t W_1+W_2\chi_t \tag{۵۹}$$

که $W_1=\begin{bmatrix} (\omega_{ib}^b(t))_\times & a(t) & 0_{1\times3} \\ 0_{1\times3} & 0 & 1 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $W_2=\begin{bmatrix} 0_{3\times3} & g(t) & 0 \\ 0_{1\times3} & 1 & -1 \\ 0_{1\times3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[1] double direct isometries

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

با استفاده از (۵۹) روابط $f_{u_t}(\chi_A\chi_B)=\chi_A\chi_B\ W_1+W_2\ \chi_A\chi_B$ و $f_{u_t}(I_d)=W_1+W_2$ به دست می‌آید. بنابراین، برقراری شرط گروه افاین را می‌توان به‌صورت زیر بررسی کرد.

$$\begin{aligned}
&f_{u_t}(\chi_A)\chi_B+\chi_A f_{u_t}(\chi_B)-\chi_A f_{u_t}(I_d)\chi_B\\
&=\chi_A W_1\chi_B+W_2\chi_A\chi_B+\chi_A\chi_B W_1+\chi_A W_2\chi_B-\chi_A(W_1+W_2)\chi_B\\
&=\chi_A\chi_B W_1+W_2\chi_A\chi_B\\
&=f_{u_t}(\chi_A\chi_B)
\end{aligned}\qquad (۶۰)$$

پس ماتریس حالت (۳۱) شرط گروه افاین (۸) را برآورده می‌کند و دارای خطای نامتغیر مستقل از حالت است.

۶-۳- پیوست ج: خطای چپ نامتغیر برای ماتریس حالت (۳۱)

$$\chi_t^{-1}=\begin{bmatrix} C_i^b(t) & -C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & -C_i^b(t)p_{ib}^i(t)\\ 0_{1\times3} & 1 & 0\\ 0_{1\times3} & 0 & 1\end{bmatrix},\ \hat{\chi}_t=\begin{bmatrix} \hat{C}_b^i(t) & \hat{v}_{ib}^i(t) & \hat{p}_{ib}^i(t)\\ 0_{1\times3} & 1 & 0\\ 0_{1\times3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\eta_t^L=\chi_t^{-1}\hat{\chi}_t=\begin{bmatrix} C_i^b(t) & -C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & -C_i^b(t)p_{ib}^i(t)\\ 0_{1\times3} & 1 & 0\\ 0_{1\times3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{C}_b^i(t) & \hat{v}_{ib}^i(t) & \hat{p}_{ib}^i(t)\\ 0_{1\times3} & 1 & 0\\ 0_{1\times3} & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad (۶۱)$$

$$\eta_t^L=\begin{bmatrix} C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) & C_i^b(t)\hat{v}_{ib}^i(t)-C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & C_i^b(t)\hat{p}_{ib}^i(t)-C_i^b(t)p_{ib}^i(t)\\ 0_{1\times3} & 1 & 0\\ 0_{1\times3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

۶-۴- پیوست د: محاسبه روابط (۴۰) تا (۴۲)

معادله دیفرانسیل خطای وضعیت به کمک تقریب مرتبه اول $C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)=\exp\left(\left(\zeta_t^C\right)_\times\right)\approx I+\left(\zeta_t^C\right)_\times$ به‌صورت زیر قابل‌محاسبه است.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)\right)\approx\frac{d}{dt}\left(I+\left(\zeta_t^C\right)_\times\right)=\frac{d}{dt}\left(\zeta_t^C\right)_\times\\
&\frac{d}{dt}\left(C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)\right)=\dot{C}_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)+C_i^b(t)\dot{\hat{C}}_b^i(t)\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)+C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)\left(\tilde{\omega}_t-\hat{b}_t^g\right)_\times\\
&\approx-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times\left(I+\left(\zeta_t^C\right)_\times\right)+\left(I+\left(\zeta_t^C\right)_\times\right)\left(\tilde{\omega}_t-\hat{b}_t^g\right)_\times\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times+\left(\tilde{\omega}_t-\hat{b}_t^g\right)_\times+\left(\zeta_t^C\right)_\times\left(\tilde{\omega}_t-\hat{b}_t^g\right)_\times\\
&=\left(b_t^g-\hat{b}_t^g+w_t^g\right)_\times-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times+\left(\zeta_t^C\right)_\times\left(\tilde{\omega}_t-\hat{b}_t^g\right)_\times\\
&=\left(-\xi_t^g+w_t^g\right)_\times-\left(\tilde{\omega}_t-\xi_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times-\left(\xi_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times+\left(b_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times\\
&+\left(w_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times+\left(\zeta_t^C\right)_\times\left(\tilde{\omega}_t-\xi_t^g\right)_\times-\left(\zeta_t^C\right)_\times\left(b_t^g\right)_\times\\
&=\left(-\xi_t^g+w_t^g\right)_\times+\left(-\left(\tilde{\omega}_t-\xi_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)\right)_\times-\left(\xi_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times+\left(\left(b_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)\right)_\times+\left(w_t^g\right)_\times\left(\zeta_t^C\right)_\times
\end{aligned}\qquad (۶۲)$$

معادله دیفرانسیل خطای جدید سرعت نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\zeta_t^v &= \frac{d}{dt}\left(C_i^b(t)(\hat{v}_{ib}^i(t)-v_{ib}^i(t))\right)=\dot{C}_i^b(t)(\hat{v}_{ib}^i(t)-v_{ib}^i(t))+C_i^b(t)(\dot{\hat{v}}_{ib}^i(t)-\dot{v}_{ib}^i(t))\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times C_i^b(t)(\hat{v}_{ib}^i(t)-v_{ib}^i(t))+C_i^b(t)(\hat{C}_b^i(t)(\tilde{a}_t-\hat{b}_t^a)+g-C_b^i(t)(\tilde{a}_t-b_t^a-w_t^a)-g)\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times C_i^b(t)(\hat{v}_{ib}^i(t)-v_{ib}^i(t))+C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)(\tilde{a}_t-\hat{b}_t^a)-C_i^b(t)C_b^i(t)(\tilde{a}_t-b_t^a-w_t^a)\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times\zeta_t^v+\left(I+\left(\zeta_t^C\right)_\times\right)(\tilde{a}_t-\hat{b}_t^a)-(\tilde{a}_t-b_t^a-w_t^a)\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times\zeta_t^v+\left(\zeta_t^C\right)_\times(\tilde{a}_t-\hat{b}_t^a)+(b_t^a-\hat{b}_t^a+w_t^a)\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times\zeta_t^v-(\tilde{a}_t-\hat{b}_t^a)_\times\zeta_t^C+(-\xi_t^a+w_t^a)
\end{aligned} \tag{۶۳}$$

معادله دیفرانسیل خطای جدید موقعیت نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\zeta_t^p &= \frac{d}{dt}\left(C_i^b(t)(\hat{p}_{ib}^i(t)-p_{ib}^b(t))\right)=\dot{C}_i^b\left(\hat{p}_{ib}^i(t)-p_{ib}^b(t)\right)+C_i^b\left(\dot{\hat{p}}_{ib}^i(t)-\dot{p}_{ib}^b(t)\right)\\
&=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times C_i^b\left(\hat{p}_{ib}^i(t)-p_{ib}^b(t)\right)+C_i^b\left(\hat{v}_{ib}^i(t)-v_{ib}^b(t)\right)=-\left(\tilde{\omega}_t-b_t^g-w_t^g\right)_\times\zeta_t^p+\zeta_t^v
\end{aligned} \tag{۶۴}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]