



مجله کنترل

ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752



نشریه علمی - پژوهشی

انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران - قطب علمی کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

جلد ۱۳، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۸

فهرست مقالات

- ۱ تعیین مسیر بهینه ناظر در ردیابی اهداف متحرک تنها با زاویه سمت با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبی شف
مهدی اردشیری، علیرضا الفی
- ۱۵ توسعه ناحیه جذب کلاس خاصی از سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته بر اساس تابع لیاپانوف
قطعه‌ای مجذوری ناپیوسته
فریده چراغی شامی، علی اکبر قره ویسی، ملیحه مغفوری فرسنگی، محسن محمدیان
- ۲۹ تشخیص الفبای دستی فارسی ناشنویان مبتنی بر اطلاعات نرمال سازی شده در تصاویر ژرفا
شهاب رجبی، امیر موسوی نیا
- ۴۱ تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی هابیرید تاخیری توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای
داود ناصح، ناصر پرز، علی وحیدیان کامیاد
- ۵۱ طراحی یک کنترل کننده ترکیبی ANFIS+PID برای کنترل بازوی ربات شش درجه آزادی و تحلیل همگرایی خطای آن
مجتبی هادی برحق طلب، وحید میگلی، ولی اله غفاری
- ۷۱ طراحی و تحلیل پایداری رؤیتگر و کنترل کننده بهینه تصادفی برای سیستم تعلیق فعال مبتنی بر مدل نامعین ایتو
علیرضا رمضانی مقدم، حامد کبریایی
- ۸۵ پایداری سازی کلاسی از سیستم‌های پارامتر متغیر با استفاده از کنترل کننده‌ی مبتنی بر رؤیتگر بازه‌ای
مصطفی فرامین، بهروز رضایی، زهرا رحمانی



مجله کنترل

ISSN (print) 2008-8345

ISSN (online) 2538-3752



قطب علمی کنترل صنعتی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نشریه علمی - پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران - قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی

خواجه نصیرالدین طوسی، جلد ۱۳، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۸

پست الکترونیک: control@isice.ir

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا

سر دبیر: پروفسور علی خاکی صدیق - تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷ - پست الکترونیکی: sedigh@kntu.ac.ir

آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی.

دبیر اجرایی: دکتر مهدی علیاری شوره دلی - تلفن ۸۴۰۶۲۴۰۳ - پست الکترونیکی aliyari@kntu.ac.ir

هیأت تحریریه:

پروفسور علی خاکی صدیق (استاد) - پروفسور ایرج گودرزنیا (استاد) - پروفسور حمید خالوزاده (استاد) - پروفسور پرویز جبه دار مارالانی (استاد) -

پروفسور علی غفاری (استاد) - دکتر حمیدرضا مومنی (دانشیار) - پروفسور سید کمال الدین نیکروش (استاد) - پروفسور مسعود شفیعی (استاد) - پروفسور

بهزاد مشیری (استاد)

هیأت مشاوران:

دکتر حمیدرضا مومنی، پروفسور بهزاد مشیری، پروفسور مسعود شفیعی، پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور پرویز جبه

دار مارالانی، پروفسور علی غفاری، پروفسور حمید خالوزاده، پروفسور حمیدرضا تقی راد، دکتر کیوان مسروری، دکتر

محمدتقی بطحایی، دکتر محمدتقی بهشتی، دکتر فرزاد جعفر کاظمی، دکتر رویا امجدی فرد، پروفسور سید علی اکبر

موسویان، پروفسور محمد تشنه لب، پروفسور محمد حایری، پروفسور سید علی اکبر صفوی، پروفسور حسین سیفی، دکتر

علیرضا فاتحی، دکتر محمدرضا اکبرزاده توتونچی، دکتر مسعود علی اکبر گلکار، دکتر ناصر پریز، دکتر مهرداد جوادی،

دکتر جعفر حیرانی نوبری، پروفسور فرامرز حسین بابایی، دکتر بیژن معاونی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی، دکتر محمد

عاروان، پروفسور محمد توکلی یینا، دکتر فائزه فریور، دکتر موسی آیتی، دکتر محمد مثنوری، دکتر رمضان هاوونگی، دکتر

امین رمضانی، دکتر عبدالرسول قاسمی، پروفسور محمد فرخی، دکتر یزدان باتمانی.

هیأت مدیره انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق:

مهندس مرتضی محسنی هماگرانی، دکتر فرزاد جعفر کاظمی، مهندس بهروز خلیلی، مهندس محمد حسن موحدی، دکتر سید علی اکبر صفوی، دکتر

حمیدرضا مومنی، مهندس نور محمد رئیسی

مدیر سایت: مهندس نسیمه فراهانی

فهرست مقالات

- ۱ تعیین مسیر بهینه ناظر در ردیابی اهداف متحرک تنها با زاویه سمت با استفاده از
چند جمله‌ای‌های چبی شف
مهدی اردشیری، علیرضا الفی
- ۱۵ توسعه ناحیه جذب کلاس خاصی از سیستم‌های قطعه ای آفاین زمان-پیوسته بر اساس تابع
لیاپانوف قطعه‌ای مجذوری ناپیوسته
فریده چراغی شامی، علی اکبر قره ویسی، ملیحه مغفوری فرسنگی، محسن محمدیان
- ۲۹ تشخیص الفبای دستی فارسی ناشنویان مبتنی بر اطلاعات نرمال سازی شده در تصاویر ژرفا
شهاب رجبی، امیر موسوی نیا
- ۴۱ تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی هایبرید تاخیری توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی
ضربه ای
داود ناصح، ناصر پریر، علی وحیدیان کامیاد
- ۵۱ طراحی یک کنترل کننده ترکیبی ANFIS+PID برای کنترل بازوی ربات شش درجه آزادی و
تحلیل همگرایی خطای آن
مجتبی هادی برحق طلب، وحید میگلی، ولی اله غفاری
- ۷۱ طراحی و تحلیل پایداری رؤیتگر و کنترل کننده بهینه تصادفی برای سیستم تعلیق فعال مبتنی بر
مدل نامعین ایتو
علیرضا رضانی مقدم، حامد کبریایی
- ۸۵ پایداری سازی کلاسی از سیستم‌های پارامتر متغیر با استفاده از کنترل کننده ی مبتنی بر رؤیتگر
بازهای
مصطفی فرامین، بهروز رضایی، زهرا رحمانی

مجله کنترل، مجله‌ای علمی - پژوهشی است که دربرگیرنده تازه‌ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق می‌باشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می‌بایست به زبان فارسی و دارای چکیده انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- (۱) مدل‌سازی، شناسایی، شبیه‌سازی، پیش‌بینی، بهینه‌سازی و پایش عملکرد سیستم‌ها.
- (۲) تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته از قبیل سیستم‌های کنترل خطی و غیرخطی، سیستم‌های کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستم‌های کنترل هوشمند، سیستم‌های کنترل تصادفی، سیستم‌های کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستم‌های ابعاد وسیع، سیستم‌های کنترل چندمتغیره.
- (۳) مکاترونیک و رباتیک.
- (۴) ابزار دقیق و سیستم‌های ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.
- (۵) اتوماسیون صنعتی از قبیل سیستم‌های کنترل گسترده، رابط انسان - ماشین، سیستم‌های ایمنی و تشخیص عیب، تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل کسری، شناسایی، تشخیص و جبران عیب در سیستم‌ها، سیستم‌های کنترل پیچیده، سیستم‌های زمان حقیقی و سیستم‌های کنترل تحت نظارت، کنترل مدل چندگانه.

کاربردهای مورد علاقه مجله "کنترل"، وسیع بوده و می‌تواند در برگیرنده موارد زیر باشد:

- (۱) سیستم‌های هدایت و ناوبری.
- (۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.
- (۳) تولید و توزیع نیروی برق.
- (۴) انرژی‌های تجدیدپذیر.
- (۵) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.
- (۶) سیستم‌های اقتصادی و مالی.
- (۷) سیستم‌های اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه‌های صنعتی.
- (۸) مهندسی پزشکی، مهندسی زیستی و سامانه‌های زیستی.
- (۹) نانو کنترل.
- (۱۰) پردازش داده.
- (۱۱) مهندسی خودرو.
- (۱۲) سیستم‌های حمل و نقل.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه‌های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می‌آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی از طریق سایت مجله www.joc-isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می‌توانید به سایت مجله مراجعه نمایید.

شیوه تدوین

متن مقالات شامل چکیده، بدنه مقاله، مراجع و زیرنویس‌ها باید با فونت ۱۲ B Zar و با فاصله double میان خطوط، در صفحات A4 یک ستونی و تحت نرم‌افزار Word تهیه گردد.

آدرس نویسندگان

آدرس پستی کامل همه نویسندگان همراه با شماره تلفن و دورنگار (فکس) و نشانی پست الکترونیک (email) نویسنده عهده‌دار مکاتبات در برگه مستقلی چاپ و به همراه مقاله ارسال گردد.

چکیده

هر مقاله باید شامل، عنوان (فارسی و انگلیسی)، چکیده (فارسی و انگلیسی) مقاله در حداکثر ۲۰۰ واژه، کلیدواژه (فارسی و انگلیسی) در حداکثر ۵ واژه باشد.

تصاویر و عکس‌ها

در هنگام ارسال مقاله جهت داوری نیازی به ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها نمی‌باشد، ولی رونوشت ارسالی باید واضح باشد. پس از تایید مقاله، ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها جهت چاپ مقاله ضروری می‌باشد.

مراجع

به کلیه مراجع باید در متن ارجاع داده شده باشد. مراجع باید با شماره مشخص گردند و جزئیات آنها به شرح زیر در پایان مقاله به ترتیب حروف الفبای نویسندگان ظاهر گردد:

مقالات

[شماره مرجع] نام خانوادگی و علامت اختصاری اول نام، سال انتشار یا تاریخ برگزاری، "عنوان مقاله"، نام کامل نشریه یا کنفرانس، شماره مجله یا شماره جلد، شماره صفحات.

کتابها

[شماره مرجع] نام خانوادگی و نام کامل همه نویسندگان، عنوان کتاب، نام مترجم (در صورت وجود)، نام کامل ناشر، سال انتشار.

واحدها

کلیه مقالات باید از واحد استاندارد SI (متریک) در تمام بخشهای مقاله استفاده نمایند. در کنار واحد SI می‌توان از واحد انگلیسی در داخل پرانتز نیز استفاده نمود.

طول مقالات

حداکثر تعداد صفحات مقاله ۱۵ صفحه است که معادل حدود ۷۵۰۰ واژه است. برای چاپ صفحات بیشتر و یا رنگی لازم است هزینه‌ای معادل ۱۰۱۰۰۰۰ ریال (۲۵ دلار آمریکا) برای هر صفحه پرداخت گردد.

فرآیند ارسال مقاله

مقالات قابل چاپ در مجله شامل مقالات کامل پژوهشی، مقالات کوتاه و یادداشتهای پژوهشی است. مقالات ارسالی نباید در هیچ مجله داخلی و یا خارجی چاپ شده باشد و یا در حال داوری باشد.

- برای ارسال مقاله خود به سایت مجله به آدرس www.joc-isice.ir مراجعه نموده و طبق دستورالعمل مندرج در سایت عمل نمایید.
- مقالات جهت داوری به داوران متخصص ارسال می‌گردد. در پایان تایید یا رد هر مقاله توسط هیئت تحریریه مجله انجام خواهد پذیرفت. سردبیر مجله نتیجه داوری را برای نویسنده عهده دار مکاتبات ارسال خواهد نمود.
- در صورتی که نیاز به تصحیح مقاله باشد، تصحیحات باید تنها محدود به موارد ذکر شده باشد. در سایر موارد نویسنده لازم است سردبیر را در جریان هرگونه تغییر و یا تصحیح دیگری قرار دهد. در هر صورت مسئولیت صحت و سقم مطالب بر عهده نویسنده خواهد بود.

حق کپی

در صورت تایید مقاله، نویسندگان لازم است فرم انتقال حق انتشار آن به "انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران" را تکمیل و به همراه اصل مقاله ارسال نمایند. نویسندگان لازم است موافقت کتبی دارندگان حق کپی بخشهایی از مقاله که از مراجع و منابع دیگر نسخه‌برداری شده است را دریافت و به دفتر مجله ارسال نمایند.

تعیین مسیر بهینه ناظر در ردیابی اهداف متحرک تنها با زاویه سمت با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبی شف

مهدی اردشیری^۱، علیرضا الفی^۲

^۱ دانشجوی دکتری برق-کنترل، دانشکده مهندسی برق و رباتیک - دانشگاه صنعتی شاهرود، ardeshiri_mahdi@shahroodut.ac.ir

^۲ استاد تمام، دانشکده مهندسی برق و رباتیک - دانشگاه صنعتی شاهرود، a_alfi@shahroodut.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۹

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۲/۱۰

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۶

چکیده: در این مقاله مساله بهینه‌سازی مسیر حرکت ناظر در ردیابی مکان اهداف متحرک سطحی با اندازه‌گیری زاویه سمت به تنهایی مطالعه می‌شود. عملکرد ردیابی هدف با زاویه سمت به تنهایی، به میزان رویت‌پذیری موقعیت اهداف در مسیر حرکتی ناظر/هدف یا مانور بهینه ناظر وابسته است. بدین منظور معیار بهینگی مستقل از تخمین گر هدف، بیشینه دترمینان باند پایین ماتریس اطلاعات فیشر انتخاب می‌شود. ابتدا مدل‌سازی مساله کنترل بهینه مسیر رویت گر به روش چندجمله‌ای متعامد چبی شف انجام می‌شود. سپس با بهینه‌سازی مستقیم عددی، قانون کنترل برای حرکت رویت گر مستقل از شرایط اولیه بدست می‌آید. مزایای مدل‌سازی پیشنهادی بیشینه کردن رویت‌پذیری کل زمان مانور، محاسبه قانون کنترل در زمان شروع مانور و انعطاف بالا در اعمال محدودیت‌های مسیر حرکت ناظر می‌باشد. کارایی روش ارائه شده توسط شبیه‌سازی با روش مونت کارلو با روش‌های مرسوم بهینه‌سازی مسیر به طور جامع مقایسه می‌گردد. همچنین عملکرد در سناریوهای مختلف برای ردیابی اهداف دور، نزدیک، متحرک و ساکن ارزیابی شده و قابل اعتماد بودن آن بررسی می‌شود. این روش در مساله کاربردی ردیابی یک شناور سطحی توسط زیردریایی با استفاده از سونار نیز استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: رهگیری سمت به تنهایی، رویت‌پذیری هدف، ماتریس اطلاعات فیشر، مسیر بهینه رویت‌گر، چندجمله‌ای چبی شف.

Optimal Observer Path Planning For Bearings-Only Moving Targets Tracking Using Chebyshev Polynomials

Mahdi Ardeshiri, Alireza Alfi

Abstract: In this paper, an optimization problem for the observer trajectory in the bearings-only surface moving target tracking (BOT) is studied. The BOT depends directly on the observability of the target's position in the target/observer geometry or the optimal observer maneuver. Therefore, the maximum lower band of the Fisher information matrix is opted as an independent criterion of the target estimator. First, modeling of the optimal control problem of the observer path is presented based on the orthogonal Chebyshev polynomial. Then, a control law for the observer direction, which is independent of the initial conditions, is obtained using the direct numerical optimization. The advantages of the proposed model include maximization of the total maneuver time, calculation of the control law at the start time of the maneuver, and high flexibility in applying the tracking constraints of the observer's motion. The efficiency of the proposed algorithm is compared with the conventional path optimization methods using the Monte Carlo. In addition, the performance of the algorithm is evaluated in different scenarios for target tracking, including remote, near, moving, and stationary, and its reliability is investigated. It is also applied in the surface submarine tracking problem using sonar.

Keywords: Bearings only tracking, Target observability, Fisher information matrix, Optimal observer path planning, Chebyshev polynomial.

۱- مقدمه

رهگیری اهداف در شرایطی که محدودیت اندازه‌گیری پارامترهای هدف با حساسه‌های فعال وجود دارد، تنها با اندازه‌گیری زاویه سمت اهداف توسط حس‌گرهای غیرفعال انجام می‌پذیرد که اصطلاحاً رهگیری سمت به تنهایی (BOT¹) نامیده می‌شود و کاربردهای زیادی خاصه در صنایع نظامی و تجاری دارد. مساله BOT با توجه به تعداد و موقعیت حساسه‌ها، تعداد اهداف و ابعاد حرکتی اهداف دسته‌بندی شده است. در بسیاری از مسائل کاربردی، موقعیت و شرایط اولیه هدف نیز در مساله BOT نامعلوم است. همچنین تعقیب با کمترین مانور با توجه به محدودیت‌ها و موانع مسیر حرکت ناظر، از الزامات اساسی این مساله کاربردی خاصه در عمل می‌باشد. مانور بالا موجب تولید نویزهای صوتی و آشکارپذیری بیشتر ناظر می‌گردد. در دهه‌های اخیر مساله BOT و تحلیل حرکت هدف (TMA²) موضوع مورد علاقه محققین بوده است. این موضوع برای مسائل اکوستیکی (زیردریایی که سونار غیرفعال دارد) و تجهیزات الکترو مغناطیسی (مراقب‌ها یا حسگرهای ESM) و تجهیزات اپتیکی (در ماهواره‌ها و دوربین‌های مادون قرمز) مورد استفاده بوده است [۱-۳]. تحقیقات زیادی در خصوص انواع مساله BOT انجام شده است که می‌توان به کتاب‌های مهم این موضوع در مراجع [۴-۶] اشاره نمود. نسخه استاندارد تحلیل حرکت سمت به تنهایی (BOTMA) شامل دو متحرک در یک سطح دو بعدی است که ناظر (تعقیب‌کننده) و هدف با سرعت شبه خطی با سرعت و جهت ثابت در طول زمان رهگیری، حرکت می‌کند. بدین ترتیب منظور از BOTMA کلاسیک، محاسبه چهار پارامتر شامل دو مختصات موقعیت جغرافیایی، سرعت و کورس (جهت حرکت) هدف است که با جمع‌آوری و اندازه‌گیری سمت هدف توسط حساسه سمت‌یاب یک ناظر انجام می‌پذیرد. تحت این فرض کلاسیک، اگر بردار سرعت ثابت باشد، ناظر نمی‌تواند هدف را شناسایی کند و لذا مسئله رویت‌پذیری نیست [۷-۹]. در دهه ۸۰ میلادی تاثیر مانور ناظر بر افزایش رویت‌پذیری هدف در مساله BOT مورد بحث قرار گرفته است [۷]. زمانی که رویت‌پذیری قطعی است با توجه به آمیختگی اندازه‌گیری سمت با خطا، دقت BOT به شدت به مانور رویت‌گر وابسته است. در مرجع [۸] نشان داده شده است که بیشینه نمودن رویت‌پذیری مساله BOT، از تعامل دو شرط متقابل که یکی کاهش فاصله ناظر تا هدف و دیگری حرکت متعامد ناظر بر خط دید هدف است، محقق می‌گردد. در برخی موارد، محققین از مسیرهای تقریبی حرکتی با مانور S شکل جهت تحقق الزام رویت‌پذیری استفاده نموده اند، لیکن این موضوع علاوه بر تولید نویز صوتی، موجب آشکارپذیری ناظر (شناور خودی) و هزینه طی مسیر اضافی است.

عمده مسائل اصلی کنترل مانور بهینه رویت‌گر برای موقعیت‌یابی^۳ هدف (هدف ساکن) انجام شده است [۱۰-۱۵]. در مرجع [۱۰]، حرکت حامل بر دو مسیر مستقیم‌الخط بررسی و تاثیر مسیر حرکت مقایسه گردیده است. با فرض کورس ثابت در گام اول مسیر، محاسبه کورس رویت‌گر در گام دوم مسیر به منظور بیشینه کردن دقت محاسبه فاصله هدف انجام شده است. در مرجع [۱۱]، برای یک مسئله موقعیت‌یابی، با تعریف تابع لیاپانوف محدودیت تقرب، مسئله بهینه‌سازی هامیلتونین-جاکوبی با افزودن باند پایین آشکارپذیری FIM برای مسئله BOT ارائه شده است. در [۱۲]، با بهره‌گیری از روش‌های حساب تغییرات (روش‌های غیرمستقیم بهینه‌سازی)، حل بسته‌ای برای مانور بهینه (وابسته به پارامتر ورودی ضریب تقرب) در مسئله موقعیت‌یابی (هدف ساکن) مطالعه شده است. در مراجع اخیر الزام برقراری این دو شرط متقابل، مسیر حرکت ناظر در مسائل کاربردی را به صورت مارپیچی (S شکل) [۳] تعریف نموده‌اند. اهمیت این روش علاوه بر سادگی محاسبات برخط^۴، عدم وابستگی محاسبات به نامعلوم بودن شرایط اولیه است. در این مراجع، روش ریاضی برای محاسبه سایر خصوصیات بهینه مانور مارپیچی از جمله سرعت چرخش ارائه نشده و عموماً رهگیری با بیشینه مانور حامل توصیه شده است. هزینه این روش، مسیر طولانی و نامطلوب مانور ناظر، امکان عدم رویت‌پذیری در برخی جهت‌های حرکتی از جمله مسیر فرار هدف، و بهینه نبودن زمان پایانی مانور نسبت به کل مانور می‌باشد. کمینه بودن مسیر حرکتی ناظر در جهت تقرب به هدف، علاوه بر بهبود شرط رویت‌پذیری در سناریوهای دورشنده هدف، باعث تخمین دقیق در زمان انتهایی مانور می‌گردد. به عنوان یک مثال جامع از روش حل غیرمستقیم، در مرجع [۱۲]، با تشکیل یک مساله مقدار مرزی هامیلتونی (HBVP) و با استفاده از نظریه حساب تغییرات، رابطه‌ای بین جهت حرکت ناظر و زاویه سمت هدف در مسیر بهینه ارائه شده است. دشواری حل، فرض شرایط مرزی نهایی و معلوم بودن موقعیت اولیه هدف از محدودیت‌های این روش است. از طرف دیگر، روش‌هایی که زمان نهایی مانور را بررسی کرده‌اند، در ابتدای مسیر، تقرب ناظر به هدف و در انتهای مسیر، دور زدن هدف را توصیه می‌کنند [۱۳]. همچنین در مرجع [۱۵]، مسیریابی ناظر در جهت کاهش کواریانس خطای تخمین انجام شده و نتایج با مرجع [۱۲] مقایسه شده است.

در این مقاله، بهینه‌سازی مسیر یک ناظر (یک حساسه اندازه‌گیر سمت هدف) در رهگیری حرکت دو بعدی یک هدف متحرک مورد نظر است. چنانکه در بالا ذکر شد، اگر بردار سرعت ناظر ثابت باشد، مساله رویت‌پذیر نبوده و شناسایی ممکن نیست. از طرفی دیگر، به دلیل غیرخطی و نامعلوم بودن مدل و پارامترهای اولیه سیستم، تعیین معیاری که به‌وسیله آن به صورت برخط بتوان رویت‌پذیری سیستم را سنجید و یا بهبود داد اغلب غیرممکن است. در مساله بهبود مسیر ناظر، محدودیت در

³ Localization⁴ Online¹ Bearings-Only Tracking² Target Motion Analysis

با توجه به توضیحات داده شده، این مقاله به طراحی مسیر یک ناظر به روش کنترل بهینه برای حرکت در صفحه (برای اهداف سطحی شناوری) می‌پردازد. فرض شده است که ناظر قابلیت اندازه‌گیری فقط زاویه سمت یک هدف را دارد و با داشتن موقعیت ناظر در هر لحظه، موقعیت هدف تخمین زده می‌شود. طراحی مسیر ناظر با هدف رویت‌پذیری هرچه بیشتر موقعیت هدف صورت پذیرفته است. مدلسازی و حل مساله کنترل رویت‌پذیر بهینه با استفاده از روش‌های عددی انجام می‌شود و با بهره‌گیری از ویژگی‌های بهینه‌سازی مسیرمانور تا زمان نهایی آن، تابع کنترل مسیر مستقل از شرایط و فاصله اولیه هدف محاسبه می‌گردد. پس از مدل‌سازی مساله کنترل بهینه مسیر ناظر، برای حل مسئله از چندجمله‌ای متعامد چپ شیف استفاده می‌شود و قانون کنترل برای حرکت ناظر بدست می‌آید. سپس کارایی روش ارائه شده توسط شبیه‌سازی مونت کارلو با روش‌های دیگر بهینه‌سازی مسیر مقایسه می‌شود. معیار بهینگی تخمین هدف، افزونگی درمیان باند پایین FIM انتخاب شده است. در این تحقیق همگرایی سریع، محاسبات آسان و انعطاف در طرح‌ریزی سناریو از ویژگی‌های این روش است. بازه رهگیری از زمان $[0, \infty)$ به بازه متناهی $(-1, 1)$ تبدیل می‌گردد و کلیه قیود دیفرانسیلی و انتگرالی با تقریب مناسبی به توابع چندجمله‌ای متعامد نگاشت می‌شوند. سپس با روش‌های بهینه‌سازی معمول، قانون کنترل شامل رابطه مسیر حرکت ناظر با زاویه سمت هدف تعیین می‌گردد. با توجه به محدودیت‌های مساله BOT از جمله پارامترهای نامعلوم اولیه و انتهای خاصه فاصله تا هدف و شرایط مرزی انتهای مانور ناظر، در روش پیشنهادی این مقاله موارد ذیل لحاظ شده است:

- ۱- طراحی روتینگر بهینه مساله BOT با تعریف تابع هامیلتونین، به منظور بهره‌گیری از دقت بالای بهینه‌سازی روش‌های کلاسیک (دقت بالای روش‌های بهینه‌سازی غیرمستقیم)
- ۲- نگاشت مساله روتینگر بهینه کلاسیک به یک مساله حل عددی NLPP با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد چپ شیف به منظور گسسته‌سازی در طول زمان مانور و بهینه‌سازی مساله در بردارهای متعامد، که این امر به دلیل دشواری و محدودیت‌های روش‌های حل تحلیلی روتینگر بهینه در مساله BOT انجام شده است.
- ۳- عدم نیاز به معلوم بودن شرایط اولیه و مرزی که از الزامات و محدودیت‌های حل تحلیلی به روش‌های کلاسیک است.
- ۴- ارائه تابع کنترلی منحصر به فرد مسیر بهینه روتینگر (برای فواصل مختلف) برای اهداف ساکن، سرعت ثابت و یا مانوردار، که در ابتدای مانور ناظر متناسب با محدودیت‌های حرکت آن محاسبه می‌شود و در اهداف متحرک متناسب با زاویه نسبی دید و مانور آنها، مسیر بهینه به صورت برخط تطبیق داده می‌شود.
- ۵- استفاده از تابع هزینه باند پایین FIM جهت طراحی روتینگر به عنوان یک معیار رویت‌پذیری مستقل از پارامترهای تخمین.

مسیر حرکت و میدان دید ناظر تاثیرگذار است. کنترل بهینه ناظر در مسیری که باعث کاهش بیشتر کوواریانس خطای تخمین باشد می‌تواند موجب افزایش رویت‌پذیری شود. البته این معیار وابسته به نوع تخمینگر می‌باشد. عموماً در کارهای ارائه شده در مراجع، تابعی اسکالر از ماتریس اطلاعات فیشر^۱ (FIM) بیشینه می‌گردد [۸] و در برخی مراجع کمینه باند پایین کرامر راتو^۲ (CRLB)، از معکوس ماتریس فیشر محاسبه [۱۶] به عنوان معیار بهینگی استفاده می‌شود. در مرجع [۱۲]، یکسان بودن عملکرد این دو معیار بر تعیین مسیر بهینه ناظر نشان داده شده است.

حل مسائل کنترل بهینه را می‌توان به روش‌های مستقیم^۳ و غیرمستقیم^۴ دسته‌بندی کرد [۱۷]. در روش‌های غیرمستقیم، اساس کار بر یافتن جواب مبتنی بر شرایط لازم بهینگی است که از روش‌های حساب تغییرات و اصل پونتیاگین بدست می‌آید. حساسیت روش‌های بهینه‌سازی حساب تغییرات، مبتنی بر تحقق شرط لازم (مشتق مرتبه اول) و شرایط مرزی مساله است. در مقابل روش‌های مستقیم، بهینه‌سازی مبتنی بر گسسته‌سازی مساله کنترل بهینه و تبدیل آن به یک مساله حل عددی NLPP^۵ است که برای حل آن از روش‌های بهینه‌سازی عددی استفاده می‌شود. مزیت اصلی روش‌های مستقیم، عدم نیاز به یافتن شرایط لازم مرتبه اول روش‌های غیرمستقیم^۶ HBVP است. از جمله روش‌های مستقیم بهینه‌سازی جواب، استفاده از تقریب چندجمله‌ای‌های متعامد توابع لژاندر^۷، چپ شیف^۸، هرمت^۹، لاگنر^{۱۰} و دسته توابع سری فوریه می‌باشند. از جمله ویژگی‌هایی که تکنیک‌های مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر و چپ شیف را برای حل مسئله کنترل بهینه، از بقیه روش‌های عددی متمایز می‌کند می‌توان به ساده بودن فرآیند گسسته‌سازی و دقت بالا اشاره کرد. در این روش‌ها پارامترهای متغیرهای حالت و کنترل، به طور همزمان گسسته‌سازی می‌شوند. بنابراین معادلات دیفرانسیل به یک سری قیود جبری تبدیل و به NLPP اضافه می‌گردند [۱۸]. موضوع مهم و تاثیرگذار بر تعیین مسیر بهینه، کران زمانی است که معیار رویت‌پذیری در آن بهینه می‌گردد. از این منظر، پژوهش‌های انجام شده شامل بهینگی در یک گام جلوتر یا در زمان نهایی دسته‌بندی شده‌اند. عموماً بهره‌گیری از روش‌های بیشینه نمودن تابع معیار در یک گام جلوتر، حرکت ناظر به صورت مارپیچ حول هدف می‌باشد. البته روش‌های کلاسیک نظریه کنترل بهینه می‌توانند به قوانین کنترلی موثرتری منتهی گردند، لیکن با توجه به غیرخطی و نامعلوم بودن پارامترهای مساله BOT، حل این توابع دشوار و در برخی موارد با خطای زیاد توأم می‌گردد.

¹ Fisher Information Matrix (FIM)

² Cramer-Rao Lower Bound (CRLB)

³ Direct

⁴ Indirect

⁵ Nonlinear Programming Problem

⁶ Hamiltonian Boundary Value Problem

⁷ Legendre Polynomial

⁸ Chebyshev Polynomial

⁹ Hermit Polynomial

¹⁰ Laguerre

$$F_k = \nabla_x f(x_k)|_{x_k=\hat{x}_{k-1}} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}, G_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$U_{k-1,k} = \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_{k3} \\ u_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^o - x_{k-1}^o - T\dot{x}_{k-1}^o \\ y_k^o - y_{k-1}^o - T\dot{y}_{k-1}^o \\ \dot{x}_k^o - \dot{x}_{k-1}^o \\ \dot{y}_k^o - \dot{y}_{k-1}^o \end{bmatrix} \quad (3)$$

ماتریس انتقال حالت مدل در لحظه k برابر F_k است و بردار $U_{k,k+1}$ به طور دقیق با حساسه‌های ناوبری ناظر مانند GPS اندازه‌گیری می‌شود.

همچنین معادلات غیرخطی بردار اندازه‌گیری زمان گسسته z_k با نویز اندازه‌گیری گوسی با میانگین صفر $v_k \sim N(0, R_k^j)$

مقادیر اولیه نامعلوم و غیرخطی مساله BOT در نمونه برداری اولیه z_0 :

$$x_0 = r_0 \cdot \sin(z_0) \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (4)$$

$$y_0 = r_0 \cdot \cos(z_0)$$

همچنین، معادلات غیرخطی اندازه‌گیری سمت هدف به صورت ذیل است:

$$z_k = h(X_k) + v_k = \beta_k + v_k \quad (5)$$

$$h(X_k) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (6)$$

$$x = r \cdot \sin(z) \quad (7)$$

$$y = r \cdot \cos(z)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۲-۱ تخمین هدف در مساله BOT

مساله TMA در مختصات کارترین برای معادلات اندازه‌گیری رابطه (۶) غیرخطی است. بنابراین الگوریتم فیلترهای خطی کارآمد نیست. در این تحقیق در مواقع لزوم از فیلتر توسعه‌یافته کالمن^۱ جهت تخمین بردارهای حالت به شرح ذیل استفاده می‌شود.

- پیش‌بینی بردار حالت و ماتریس کواریانس خطا

$$\hat{X}_{k+1|k} = F_k \cdot \hat{X}_{k|k} - U_{k,k+1} \quad (8)$$

$$P_{k+1|k} = F_k \cdot P_{k|k} F_k' + Q_k \quad (9)$$

- بهره فیلتر کالمن توسعه‌یافته

$$G_{k+1} = P_{k+1|k} \hat{H}_{k+1}' [\hat{H}_{k+1} P_{k+1|k} + \hat{H}_{k+1}' + \delta_{\beta_{k+1}}^2]^{-1} \quad (10)$$

- محاسبه بردار خطی اندازه‌گیری با استفاده از محاسبات بردار تخمین

$$\hat{H}_k = \frac{dh(X_k)}{dx} |_{x=\hat{X}_{k+1|k}} \quad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\hat{y}_{k+1|k}}{\hat{r}^2} & -\frac{\hat{x}_{k+1|k}}{\hat{r}^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- بروزرسانی بردار تخمین و کواریانس خطا

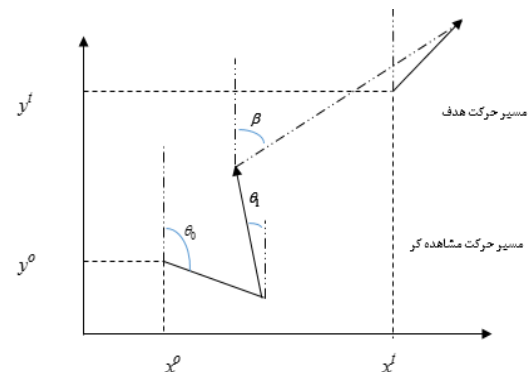
$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + G_{k+1} [z_{k+1} - \hat{\beta}_{k+1|k}] \quad (12)$$

۶- قابلیت کاهش خطای روش پیشنهادی در ابتدا و انتهای مانور ناظر که باعث همگرایی سریع مساله BOT و کاهش خطای تخمین نسبت به سایر روش‌های یک گام به جلوی بهینه‌سازی می‌گردد.

جهت بررسی روش پیشنهادی، عملکرد آن با مهمترین روش‌های بهینه‌سازی غیرمستقیم [۱۲] و مراجع ارائه شده اخیر بهینه‌سازی به روش مستقیم [۱۵] مقایسه می‌شود. در ادامه مقاله در بخش ۲ پس از تعریف هندسه مساله، معیارهای رویت‌پذیری FIM و همگرایی CRLB ارائه می‌شود. پس از ارائه روش پیشنهادی در بخش ۳، عملکرد آن در مقایسه با روش‌های غیرمستقیم و مستقیم در بخش ۴ نشان داده می‌شود. در بخش انتهایی، نتیجه‌گیری و فعالیت‌های آتی پیشنهادات می‌شود. معرفی پارامترهایی که در متن تعریف نشده اند در پیوست الف آمده است.

۲- تعاریف و مدل‌سازی مساله BOT

شکل ۱ هندسه دو بعدی مساله BOT را نشان می‌دهد. متغیرهای استفاده شده در مقاله مطابق شکل ۱ عبارتند از:



شکل ۱: هندسه دو بعدی مساله BOT [۱۳]

مساله عمومی BOT تخمین مسیر حرکت هدف (سرعت و موقعیت هدف) با اندازه‌گیری داده‌های حساسه سمت آغشته به نویز، توسط یک ناظر در حال مانور (حامل حساسه) تعریف می‌شود. در ادامه برای تعریف ریاضی مساله BOT در حالت هدف با سرعت و جهت ثابت (بدون مانور)، از دستگاه مختصات کارترین استفاده می‌شود. بنابراین مدل‌سازی هدف و معادلات حالت مساله رهگیری BOT همراه تابع اندازه‌گیری غیرخطی مساله BOT با گسسته‌سازی در لحظه k به صورت روابط ذیل تعریف می‌شود [۵].

$$X_k^t = [x_k^t \ y_k^t \ \dot{x}_k^t \ \dot{y}_k^t]^T \quad V_t: \text{بردار حالت هدف با سرعت خطی}$$

$$X_k^o = [x_k^o \ y_k^o \ \dot{x}_k^o \ \dot{y}_k^o]^T \quad V_o: \text{بردار حالت ناظر با سرعت خطی}$$

بردار حرکت نسبی هدف:

$$X_k = X_k^t - X_k^o = [x_k \ y_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k]^T$$

زاویه سمت واقعی هدف و مقدار اندازه‌گیری آن به ترتیب:

معادلات دینامیکی گسسته فضای حالت هدف، با سرعت ثابت، با فرض نامعلوم بودن شتاب و اعمال آن در مدل به صورت نویز مستقل گوسی به صورت $W_k = [w_{x_k}, w_{y_k}]^T = [\ddot{x}_k, \ddot{y}_k]^T$ به شرح ذیل می‌باشد:

$$X_{k+1} = F_k X_k + G_k W_k - U_{k,k+1} \quad (1)$$

¹ Extended Kalman Filter (EKF)

$$A_{1\sigma} = \pi \sqrt{\det P} \quad (19)$$

بنابراین، مانور بهینه ناظر، افزایش رویت‌پذیری مسیر حرکت ناظر بر مبنای کاهش ناحیه خطا مطابق با رابطه (۱۸) است. برای یک تخمینگر کارآمد ناحیه عدم قطعیت دو بعدی خطا مطابق رابطه ذیل است که کاهش آن با افزایش FIM میسر می‌گردد.

$$A_{1\sigma} = \frac{\pi}{\sqrt{FIM}} \quad (20)$$

۲-۳ انتخاب تابع هزینه بهینه‌سازی مسیر ناظر

اساس بحث بهینه‌سازی مسیر BOT بر مبنای بیشینه FIM با مانور ناظر محقق می‌شود. قاعده مانور ناظر بر اساس هندسه حرکتی مورد علاقه و مطلوب ناظر و هدف تعیین می‌گردد که بایستی موجب افزایش رویت‌پذیری هدف و کاهش ناحیه عدم قطعیت به منظور بالابردن دقت تخمین گردد. توابع هزینه متعددی برای بهینه‌سازی مسیر معرفی شده‌اند که عمدتاً به افزایش رویت‌پذیری مسیر ناظر مرتبط می‌گردد. از موارد مهم می‌توان به ماتریس اطلاعات متقابل^۲، کاهش CRLB، کاهش کواریانس خطای تخمین، افزایش دترمینان FIM و یا افزایش باند پایین دترمینان FIM اشاره نمود. هرچند استفاده از کمینه خطای کواریانس تخمین در برخی از مقالات به‌عنوان یک معیار، به‌طور مستقیم کاهش خطای تخمین را هدف قرار داده است [۷]؛ لیکن این معیار وابسته به تخمینگر بوده و تنها بهینه‌سازی در یک گام جلوتر از هدف قرار می‌دهد. در این تحقیق بیشینه باند پایین دترمینان FIM، به شرح ذیل استفاده می‌شود. لازم به ذکر است این معیار علاوه بر کاهش باند خطای CRLB، نیازی به محاسبات دشوار ماتریس معکوس FIM ندارد و مشابه معیار CRLB عمل می‌کند [۱۲]. همچنین، در کل زمان مانور مسیر بهینه محاسبه می‌شود.

$$W = \left(-\sigma_{\beta}^2 \int_0^{t_f} \left(\frac{\dot{\beta}}{r^2} \right) d\tau \right) \quad (21)$$

هرچند مشخصات یک تخمینگر در بهینه‌سازی‌های الگوریتم تخمین موثر است، لیکن در این مقاله مورد بحث نبوده و تنها در شبیه‌سازی‌ها به عنوان مقایسه، مطابق سایر مقالات، بهره‌گیری شده است.

۳ بهینه‌سازی مستقیم مساله BOT به روش جیبی شاف با طرح‌یزی سناریوی دلخواه

با توجه به مدل‌سازی مساله BOT در بخش قبل و تعریف تابع هزینه رویت‌پذیری هدف، معادلات دینامیکی هدف و محدودیت‌های مسیر حرکت ناظر با تعریف ورودی کنترل، مسیر بهینه زمان پیوسته به یک مساله کنترل بهینه مسیر به شکل روابط (۲۲) تعریف می‌گردد.

$$P_{k+1|k+1} = [I_{4 \times 4} - G_{k+1} \hat{H}_{k+1} P_{k+1|k}] \quad (13)$$

برای عملکرد مناسب EKF در مساله BOT، تنظیم مقادیر اولیه و تطبیق کواریانس تخمین اهمیت دارد. همچنین بهره‌گیری از اطلاعات قبلی^۱ فاصله و سرعت هدف مفید است. لذا می‌توان از فیلترهای تطبیقی جهت به‌روزرسانی کواریانس تخمین بهره‌گیری نمود [۱۹]. در این تحقیق از الگوریتم‌های بهینه تطبیقی برای همگرایی سریع کواریانس خطا به دینامیک حرکت هدف استفاده می‌شود.

$$\hat{X}_{0|0} = [\bar{r} \cdot \sin z_0; \bar{r} \cdot \cos z_0; 0; 0] \quad (14)$$

$$P_{0|0} = \text{diag}[\sigma_r^2; \sigma_r^2; \sigma_s^2; \sigma_s^2] \quad (15)$$

۲-۲ معیار سنجش رویت‌پذیری مسیر حرکت ناظر

استفاده از معادلات شبه‌خطی سنجش رویت‌پذیری در توابع غیرخطی، برای بررسی یکنایی تخمین مرسوم است. لیکن، این روش گزارشی از کیفیت رویت‌پذیری ارائه نمی‌دهد. در عمده مراجع افزایش دترمینان FIM و یا کاهش معکوس آن، معادل دترمینان CRLM که در فیلتر بدون بایاس معادل کمینه کواریانس خطا است، معیارهای مرسوم رویت‌پذیری تخمینگرهای غیرخطی هستند. بنابراین، بیشینه FIM و یا کمینه CRLM، معیارهای بهینه مستقل از پارامترهای تخمینگر برای تشخیص رویت‌پذیری هدف می‌باشد. لذا در این مقاله از این معیار بهره‌گیری شده است. رابطه کلی FIM در یک تخمین بدون بایاس برای بردار Z_k شامل دنباله اندازه‌گیری $\{z_1, \dots, z_k\}$ ، از چگالی احتمال شرطی بردار اندازه‌گیری به بردار مسیر حالت $P_{Z_k|x_k}(Z^k|x_k)$ تعریف می‌شود [۱۵].

$$FIM = -E \left[\frac{\partial^2 \ln P \left(\frac{Z^k}{x_k} \right)}{\partial x_k^2} \right] = E \left[\frac{\partial \ln P \left(\frac{Z^k}{x_k} \right)}{\partial x_k} \right]^2 \quad (16)$$

ماتریس FIM به روش بازگشتی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۵].

$$FIM = J_{k+1} = [F_k^{-1}]' J_k F_k^{-1} + \frac{1}{\sigma_{\beta}^2(k)} [H_{k+1}]' \cdot H_{k+1} \quad (17)$$

رابطه اساسی ذیل در تخمینگرهای بدون بایاس برای CRLM و کواریانس خطای تخمین برقرار است که در تخمین ایده‌آل به تساوی تبدیل می‌گردد [۶].

$$P_{k|k} \triangleq E \left\{ (\hat{x}_{k|k} - x_k)(\hat{x}_{k|k} - x_k)^T \right\} \geq J_k^{-1} \quad (18)$$

ماتریس کواریانس خطای یک ماتریس نیمه‌معین مثبت است. فرم درجه دو خطای موقعیت به شکل بیضیگون نمایش داده می‌شود که مقدار آن با مقادیر ویژه ماتریس کواریانس خطا P برابر است و چرخش محورهای خطا با بردارهای ویژه آن معین می‌شود. محدوده خطا برابر است با

² Mutual Information

¹ Priori Knowledge

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{s=0}^N b_{Ns} f_s, \quad s = 1, 2, \dots, N$$

$$b_{Ns} = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N/2} \frac{1}{1-4j^2} \cos \frac{2j\pi s}{N}$$

$$b_{N0} = b_{NN} = \frac{.5}{N^2-1} \quad (27)$$

$$\text{Min } W = \text{Min} \left(-\sigma_\beta^2 \int_0^{t_f} \left(\frac{\dot{\beta}}{r^2} \right) d\tau \right)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \cdot \cos \theta$$

$$S_i(x, u, t) \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (22)$$

همانطور که در مقدمه در خصوص پژوهش‌های انجام شده در یافتن مسیر بهینه مساله BOT عنوان شد، روش‌های عددی ارائه شده با فرض معلوم بودن شرایط اولیه (فاصله اولیه هدف) و برای مساله موقعیت‌یابی اهداف ساکن ارائه شده‌اند. هدف این مقاله، یافتن مسیر بهینه منحصر بفرد با فرض نامعلوم بودن شرایط اولیه است که نسبت به اهداف متحرک نیز کارآمد باشد. لذا ورودی کنترل مستقل از پارامترهای مجهول زاویه نسبی مشاهده هدف، کورس ناظر در نظر گرفته شده‌اند.

با توجه به وجود عامل انتگرالی در تابع هزینه طراحی مسیر رویت پذیر بهینه (22)، پیش‌بینی مسیرهای ممکن با پارامتر مجهول فاصله هدف (r) در کل زمان مانور جهت محاسبه کمینه رابطه (22) با ابزارهای حل مستقیم بسیار دشوار و زمان‌بر است. لذا برای حل این مساله، روش بهینه‌سازی چندجمله‌ای‌های متعامد برای مساله BOT پیشنهاد می‌شود. بدین منظور از توابع پایه‌ای قطعه‌ای پیوسته جیبی شف استفاده می‌گردد. بهینه‌سازی تابع معیار در چند نقطه در طول مسیر مطابق با ابعاد انتخابی پایه‌های متعامد انجام می‌شود. بنابراین بهینه‌سازی در طول زمان مانور به روش مستقیم در زمان شروع مانور امکان‌پذیر شده است. انتخاب پارامترهای ورودی کنترل‌پذیر در پایداری این نوع بهینه‌سازی اهمیت دارد. ویژگی دیگر استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد، گسسته‌سازی همزمان متغیرهای حالت و کنترل قیود موجود در مساله BOT به‌طور همزمان است. بنابراین معادلات دیفرانسیل و انتگرال‌گیر به یک دسته از قیود جبری تبدیل و به NLPP اضافه می‌شوند. ابتدا فرض می‌کنیم تابع $f(t)$ در فاصله $(-1, 1)$ تعریف شده است. مقدار تقریب تابع بر اساس چندجمله‌ای‌های متعامد جیبی شف $T_n(x)$ به صورت رابطه (23) می‌باشد [20].

$$f(x) = \sum_{r=0}^N a_r T_r(x) \quad (23)$$

$$a_r = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_r(x_j) \quad (24)$$

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (25)$$

مطابق تعریف توابع متعامد جیبی شف داریم:

$$T_{0=1/2}, T_1 = x$$

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (26)$$

$$T_n = T_{n/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

برای روابط انتگرالی در مساله بهینه‌سازی از تبدیلات ارائه شده در (27) و روابط مشتقی (28) استفاده می‌شود [21].

$$f' = (x_i) = \sum_{j=0}^N d_{ij} f(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$d_{ij} = \frac{4\theta_j}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{(n+1) \text{ odd}}^{n-1} \frac{\theta_n}{c_i} T_n(x_j) T_l(x_j),$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

$$\theta_0 = \theta_N = 1/2, \quad \theta_j = 1 \text{ for } j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (28)$$

$$\text{if } i \geq 1 \quad c_i = 1 \quad \text{else } c_i = 1,$$

براین اساس، حل الگوریتم بهینه‌سازی BOT به شکل ذیل طرح‌ریزی می‌گردد.

گام اول:

- انتخاب ورودی کنترل

- انتخاب زمان مانور t_f

- انتخاب مرتبه چندجمله‌ای جیبی شف N

- تغییر متغیر $\tau = \frac{T_f}{2}(1+t)$ از $[0, t_f]$ به $[-1, 1]$

- انتخاب $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ به‌عنوان کران‌های تابع معیار و کران‌های مورد قبول گام دوم:

- تنظیم اولیه مسیر مورد نظر در پایه‌های چندجمله‌ای که به‌منظور دستیابی به مسیر یکنای بهینه تعادل دو شرط مخالف، بیشینه رویت‌پذیری شامل حرکت متعامد بر مسیر (در جهت افزایش β) و تقرب به هدف (در جهت کاهش فاصله تا هدف)، مد نظر قرار می‌گیرد. یکی از مزایای روش پیشنهادی امکان کنترل بهینه مسیر در کل زمان مانور است.

- انتخاب زاویه سمت نسبی هدف به عنوان ورودی مانور ناظر جهت استقلال مسیر بهینه به دینامیک مسیر حرکت

- تقریب مشتق توابع جیبی شف مطابق رابطه (28) برای معادلات دینامیکی حرکت (1) به شرح ذیل

$$\sum_{j=0}^N d_{ij} x(t_i) = V \sin(\theta(t_i))$$

$$\sum_{j=0}^N d_{ij} y(t_i) = V \cos(\theta(t_i)) \quad (29)$$

$$\theta_i = \theta(t_i) = \sum_{j=0}^N a_j T_j(t_i)$$

$$u_i = \theta(t_i) - \beta(t_i)$$

که در آن N مرتبه چندجمله‌ای جیبی شف، a_j و d_{ij} به ترتیب از روابط (24) و (28) محاسبه می‌شوند.

تابع هزینه مسیر بهینه با استفاده از روابط (1) و (22) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

است که بدون وابستگی به نامعلوم بودن شرایط اولیه فاصله تا هدف در کوتاهترین زمان ممکن خطای رویت‌پذیری کمینه شود. عمدتاً در مقالات در روش‌های تحلیلی [۳] و عددی [۶ و ۷] از پارامتر بی‌بعدی به نام نسبت تقرب استفاده شده است که با توجه به حداکثر زمان لازم برای رسیدن رویتگر به هدف در حرکت مستقیم تعریف می‌شود.

$$t_f = \rho \frac{\|x^t - x^o\| \|y^t - y^o\|}{V_o} \quad (33)$$

در مراجع اشاره شده با کاهش کواریانس خطا و یا افزایش باند کرامر رانو، متناسب با ضریب ρ به عنوان نسبت زمانی تقرب به هدف، مسیرهای مشابه‌ای را به روش تحلیلی غیرمستقیم و یا عددی (مستقیم) ارائه نموده‌اند. در این مقاله، بهینه‌سازی کل مسیر با رابطه (۲۱) و یافتن مسیر مستقل از فاصله اولیه و یا ضریب تقرب در کمینه زمان ممکن مدنظر است.

۴-۱ تعیین مسیر بهینه با روش پیشنهادی چندجمله‌ای‌های جیبی شرف

جیبی شرف در مساله کاربردی دریایی

در این بخش کارآمدی روش پیشنهادی در مساله کاربردی BOT در رهگیری اهداف دریایی سطحی بررسی می‌شود. بدین منظور محاسبه مسیر رویت‌پذیر در بازه ۵۰۰ متر الی ۱۵۰۰ متر، با سرعت ثابت و بیشینه رویتگر معادل ۱۰ گره دریایی در زمان تقرب ۱۰ تا ۱۰۰ درصد مسیر مستقیم تا رسیدن به هدف انجام پذیرفته است. همچنین بیشینه محدوده دید سونار ۹۰ درجه نسبت به خط دید هدف به عنوان شرایط محدودکننده مطابق رابطه (۳۱) و نرخ نمونه‌برداری حساسه سونار، در هر ثانیه ۱ بار می‌باشد. با بهره‌گیری الگوریتم مدل‌سازی جیبی شرف مرتبه ۴ و استفاده از تابع $fmincon$ نرم‌افزار متلب جهت محاسبه کمینه تابع هزینه رابطه (۲۲)، پاسخ مشابه‌ای برای تمامی سناریوهای ارائه شده منتج گردید. در مجموع کمینه تابع هزینه بهینه، در مسیری با مانوری معادل ۱۰ درصد کل زمان تقرب مستقیم به هدف قابل دستیابی است. واضح است کمینه زمان تقرب در تخمین پارامترهای هدف علاوه بر رویت‌پذیری مسیر به باند خطای حساسه اندازه‌گیر نیز وابسته است. مطابق نتایج جدول ۱ مشاهده می‌شود مسیر بهینه با تابع کنترلی θ_{NJ} با تقریب مناسبی به فاصله هدف وابسته نمی‌باشد. حساسیت کمینه تابع هزینه بهینه‌سازی (۲۱) نسبت به پارامتر فاصله مطابق رابطه (۳۴) از درجه ۳- است که به پارامتر کنترلی مفروض وابسته نمی‌باشد. بنابراین مسیر بهینه می‌تواند مستقل از فاصله محاسبه شود. اهمیت این موضوع در محاسبه برخط مسیر بهینه می‌باشد. زیرا هرچند مسیر بهینه پیشنهادی مطابق جدول ۱ تقریباً یکتا است، لیکن در برخی موارد با افزودن شرایط محدودکننده رویتگر نیاز به محاسبه مجدد مسیر بهینه مطابق شرایط جدید مسیر است.

$$\begin{aligned} \min J_N &= F(x_i, c_i) \\ J_N &= \sum_{i=0}^N b_{Ni} L[x(t_i), y(t_i), \theta(t_i), t_i], \quad t_i \in [-1, 1] \\ L[x(t_i), y(t_i), \theta(t_i), t_i] &= \frac{V \sin(\theta(t_i))}{\sqrt{(x(t_i)^2 + y(t_i)^2)^3}} \end{aligned} \quad (30)$$

که b_{Ni} از رابطه (۲۷) جایگزین می‌شود.

گام سوم: حل مساله بهینه‌سازی با شرایط مرزی دلخواه

ممکن است در طول مسیر مساله BOT محدودیت‌های برای پارامترهای ورودی و سینماتیکی ناظر مانند محدودیت در زاویه دید و یا عبور از موانع مدنظر باشد. این محدودیت‌ها نیز به صورت زیر لحاظ می‌شوند.

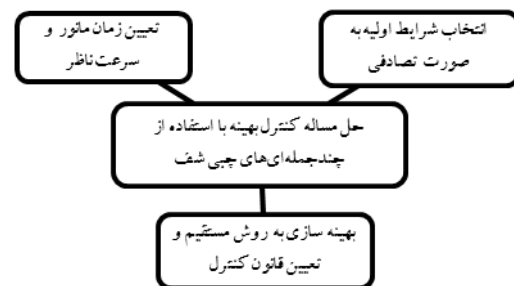
$$\begin{aligned} \text{Equality constraints} \\ G(x_i, c_i, t_i) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \\ \text{constrains:} \\ S(x_i, c_i, t_i) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (31)$$

گام چهارم: شرط توقف بهینه‌سازی

$$\begin{aligned} |J_{N+1} - J_N| &< \varepsilon_1, \\ [\Sigma(G^2 + S^2)]^{1/2} &< \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (32)$$

اگر شرایط گام چهارم مهیا نشود، $k = k + 1$ مراحل از گام سوم تکرار می‌گردد.

این بخش از بهینه‌سازی مسیر به صورت برون‌خط اجرا و قانون کنترل محاسبه می‌گردد. قانون کنترل بر اساس پارامترهای از پیش تعیین شده t_f و v_{max}^o در صورت وجود شرایط مرزی و محدودیت‌های مسیر محاسبه می‌گردد. روند تخمین مسیر با تحقق قانون کنترل در شکل ۲ آورده شده است. در بخش بعدی با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد روش بهینه‌سازی پیشنهادی با چندجمله‌ای جیبی شرف برای مساله BOT مقایسه و کارآمدی آن ارائه می‌شود.



شکل ۲: محاسبه قانون کنترل رویتگر مساله BOT

۴ بررسی کارایی روش پیشنهادی در طراحی سناریوهای بهینه در یک مساله کاربردی

در مساله تعیین مسیر رویتگر همواره مصالحه‌ای بین زمان و خطای نهایی رویت‌پذیری وجود دارد. در این مقاله هدف یافتن مسیر بهینه یکتایی

جدول ۱: مقایسه کمینه تابع هزینه و مسیر بهینه برای مساله BOT

برای فواصل ۰/۵ تا ۱۵ کیلومتری فاصله هدف در ۱۰ درصد زمان تقرب با سرعت ۱۰ گره دریایی ناظر با روش بهینه‌سازی چبی شف مرتبه ۴

$r(km)$	0.5	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	15
J_N $\rho = 10\%$	-0.1722 *1-e-17	-0.2368 *1-e-18	-0.3702 *1-e-20	-0.3251 *1-e-21	-0.5787 *1-e-22	-0.1517 *1-e-22	-0.5081 *1-e-23	-0.2015 *1-e-23	-0.9044 *1-e-24	0.2371 *1-e-24
$N_j(deg)$	-70.83 -13.00 61.540 88.958 45.711	-72.84 -14.06 60.9178 89.0597 45.1459	-73.36 -14.32 60.7615 89.0910 45.0027	-73.53 -14.41 60.79 89.10 44.95	-73.62 -14.45 60.682 89.107 44.930	-73.67 -4.485 60.667 89.111 44.916	-73.70 -14.50 60.657 89.113 44.906	-73.73 -14.51 60.647 89.115 44.898	-73.75 -14.52 60.64 89.11 44.894	-73.77 -14.53 60.63 89.11 44.88

$$\eta_k \triangleq (CRLB(RMS_k)) / (RMS_k) \times 100\% \quad (37)$$

$$RTAMS = \quad (38)$$

$$\sqrt{\frac{1}{(t_f - t_1)^M} \sum_{k=t_1+1}^{t_f} \sum_{i=1}^M (\hat{x}_k^i - x_k^i)^2} + \left(\right.$$

در این بخش برای مقایسه و ارزیابی روش پیشنهادی، برخی روش‌های معروف ارائه شده در مراجع معرفی شده است.

تنها روش تحلیلی با تعریف تابع همیلتونین و حل کلاسیک کنترل مسیر بهینه رویت‌پذیر توسط Hammel در مرجع [۱۲] ارائه شده است. با توجه به دشواری حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی، در این طراحی جهت امکان‌پذیری حل مساله، مقادیر اولیه معلوم و سمت نسبی مشاهده هدف در زمان نهایی ۹۰ درجه فرض شده است. رابطه کورس بهینه رویتگر و سمت هدف به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\theta^\circ = 3\beta_f - 2\beta + \pi/2 \quad (39)$$

که سمت نهایی هدف با رابطه غیرخطی ذیل به نسبت زمانی تقرب مسیر مستقیم (ρ) وابسته است.

$$\rho = \cos^{1/3} [3(\beta_f - \beta_0)] \int_{\beta_0}^{\beta_f} \frac{d\beta}{\cos^{4/3} [3(\beta_f - \beta)]} \quad (40)$$

از روش‌های متداول طراحی مسیر رویتگر به روش حل مستقیم عددی در مرجع [۶] ارائه شده است. در اینگونه روش‌ها، بهینه‌سازی مسیر برای یک گام جلوتر به روش عددی انجام می‌گیرد. اشکال اساسی این روش عدم تضمین بهینه نتایج نهایی و حجم محاسبات بالا به جهت لزوم تکرار حل مساله بهینه در هر گام است. هرچند در مرجع [۱۵]، رابطه خطی کسری (۴۰) برای $\rho = 50\%$ با بهره‌گیری از بسته نرم‌افزاری خاص به روش حل عددی شبه‌گوسی استفاده شده است، لیکن در این مرجع ابزار و رابطه جامعی برای طراحی در تمامی مسائل کاربردی ارائه نشده است.

$$\theta^\circ = \beta + \frac{\alpha}{2}, \quad \text{if } (\beta) < \frac{\alpha}{2}$$

$$\theta^\circ - \beta_0 = a(\beta - \beta_0) + b + \frac{c}{\beta - \beta_0 + d} \quad (41)$$

$$a = 1.045, b = 1.47, c = 0.06794, d = -0.04875$$

$$S_r^J = \frac{r}{J} \frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{\dot{\beta}}{r^2} \right) = -3 \quad (34)$$

درمجموع برای تخمین یک هدف، با انتخاب زمان مناسب تقرب (متناسب با خطای حساسه ناظر) می‌توان مسیر بهینه مانور را مستقل از فاصله اولیه مطابق شکل ۲ در ابتدای مانور محاسبه نمود. اهمیت روش پیشنهادی در انتخاب تابع هزینه مستقل از تخمین‌گر و ارائه یک روش بهینه‌سازی در کل زمان مانور با محاسبات کمینه (مطابق با ابعاد بردارهای متعامد) به منظور اعمال شرایط محدودکننده دلخواه می‌باشد. برای اثبات این ادعا در بخش بعد عملکرد مهمترین روش‌های ارائه شده در مقالات با روش پیشنهادی بررسی می‌شود.

۲-۴ مقایسه کارآمدی روش پیشنهادی به روش‌های ارائه شده در حالت هدف ساکن

عموما مقایسه ردیابی‌های مختلف بر مبنای شبیه‌سازی‌های مونت کارلو انجام می‌شود. در مراجع مختلف برای ارزیابی عملکردی مساله BOT از توابع مختلفی استفاده شده است. از جمله توابع معیار کارآمدی ردیابی می‌توان به (۱) باند کرامر راتو به عنوان شاخص بیشینه عملکرد ممکن تخمینگر و یا مقایسه کارآمدی مسیر بهینه BOT، (۲) معیار ریشه میانگین مربعات خطای فاصله (RMS^1) به عنوان متوسط خطای مونت کارلو در هر مرحله از تخمین، (۳) معیار کارآمدی η^2 فیلتر برای نمایش نرخ همگرایی تخمین به CRLB، (۴) معیار ریشه زمانی میانگین متوسط خطا ($RTAMS^3$) برای عملکرد زمانی تخمین، نام برد. این معیارها برای مقایسه عملکرد فیلترهای مختلف در حالت شبیه‌سازی نیز استفاده می‌شوند [۱۳].

$$CRLB(RMS_k) = \sqrt{J_k^{-1}(x) + J_k^{-1}(y)} \quad (35)$$

$$RMS_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{x}_k^i - x_k^i)^2 + (\hat{y}_k^i - y_k^i)^2} \quad (36)$$

¹ Root-Mean Square

² Efficiency

³ Root Time Averaged Mean Square

علاوه بر روش‌های فوق، یک مسیر مارپیچ بهینه S شکل (Spiral) در مسیر مستقیم به هدف برای ارزیابی روش پیشنهادی طراحی می‌شود. همانطور که در بخش مقدمه عنوان شد، هدف این مقاله، کاهش هزینه حرکتی در مانور S شکل و طراحی مسیر یکنای بهینه مانور رویتگر در حالت نامعلوم بودن شرایط اولیه تخمین پارامتر فاصله تا هدف است که انعطاف لازم جهت اعمال محدودیت‌های مانورهای تاکتیکی را داشته باشد. همچنین، روش پیشنهادی با اعمال تابع هزینه در طول مسیر، بایستی بهترین عملکرد را در زمان نهایی نسبت به روش‌های مرسوم دارا باشد. برای همسان‌سازی با محدودیت‌های سایر مانورها، مسیر بهینه پیشنهادی با محدودیت زاویه نسبی دید هدف کمتر از ۹۰ درجه و شرایط نهایی مرزی ۹۰ درجه حل می‌شود. با توجه به اینکه رابطه بین کورس رویتگر و هدف یک رابطه ثابت است، تنها در یک جهت شبیه‌سازی انجام شده است و در این سناریوها سمت هدف صفر درجه نسبت به شمال، سرعت ناظر ۱۰ گره دریایی (۵ متر بر ثانیه)، خطای حساسه ناظر گوسی و با انحراف معیار ۳ درجه فرض می‌شود. مسیر بهینه و خطای رویت‌پذیری با فرض شرایط اولیه معلوم، برای فاصله ۲ کیلومتر با مانور معادل ۳۰۰ ثانیه در شکل‌های ۳-الف و ۲-ب نشان داده شده است. همچنین، برای بررسی حساسیت روش‌ها به شرایط اولیه، نتایج حل در شرایط نامعلوم در قسمت شکل ۳-ج و ۲-د ارائه شده است. در روش پیشنهادی در شکل ۳-ب و ۳-د از ثانیه ۱۴۰ به بعد خطای رویت‌پذیری به کمتر از ۱۰۰ متر بهبود یافته است. با توجه به اینکه در این روش بهینه‌سازی پیشنهادی در تمام مسیر جهت رسیدن به نتیجه نهایی بهینه مدنظر بوده، در ۵۰ درصد نهایی مسیر، باند خطای مطلوبی حاصل می‌شود. همچنین، عدم حساسیت به شرایط اولیه نامعلوم در شکل ۲-ج و ۲-د مشاهده می‌شود. در روش کلاسیک (Hammel)، کنترل مسیر بهینه در شرایط مرزی (انتهای مسیر) به دقت مناسبی همگرا می‌شود، لیکن زمان همگرایی با شرایط معلوم در انتهای زمان رهگیری در شکل ۲-ب و حساسیت بالا به معلوم

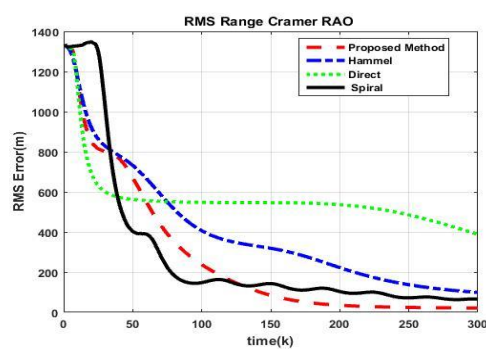
بودن شرایط اولیه و عدم همگرایی در شکل ۲-د نشان ضعف این روش در طراحی مسیر بهینه مساله BOT است. با توجه به اینکه روش مستقیم همواره برای یک گام جلوتر مسیر بهینه محاسبه می‌گردد، در مجموع در زمان نهایی نتیجه مطلوب حاصل نشده است. مانور S که عمدتاً در مسائل کاربردی استفاده شده است، با طی تلفات مسیر اضافی توأم بوده و البته به دقت مطلوب در بسیاری شرایط منجر نمی‌شود. به منظور بررسی رویتگر بهینه در کاهش خطای تخمین فاصله هدف، از تخمینگر EKF مطابق روابط (۱۲) استفاده شده است. نتایج خطای تخمین رویتگرهای بهینه مثال قبل در شکل ۴ آمده است. خطای روش پیشنهادی در انتهای مانور از سایر روش‌ها کمتر است ضمن اینکه مقایسه میزان خطا در شکل ۴ از میزان کاهش خطای کرارماتو در شکل ۳-ب و ۳-د تبعیت می‌کند. برای بررسی جامع نتایج در فواصل خیلی نزدیک ۰/۵ الی ۱۵ کیلومتر، طراحی مسیر بهینه به روش‌های ذکر شده صورت گرفته و خطای تخمین و توابع معیار در زمان نهایی به شرح جدول ۲ محاسبه می‌شوند. نتایج خطای CRLB نشان می‌دهد مسیر بهینه طراحی شده با روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر در تمامی حالات کمینه بوده است. کمینه بودن این خطا به‌طور مستقیم در RMS خطای تخمین فاصله موثر است. بدیهی است در صورت بهره‌گیری از تخمینگرهای مناسب، کاهش خطا تا باند کرارماتو امکان بهبود دارد. همچنین کمینه بودن متوسط خطا در طول زمان رهگیری خاصه در بردهای بالا در روش پیشنهادی بهینه است، چراکه در این روش طراحی مسیر بهینه در کل مسیر مدنظر بوده است. هرچند در روش مستقیم در بردهای کوتاه، متوسط زمانی مناسب است، لیکن خطای زمان نهایی از روش پیشنهادی بیشتر است. لازم به ذکر است با توجه به حساسیت روش تحلیلی و مستقیم، پارامتر فاصله اولیه در این دو حالت معلوم فرض شده است.

جدول ۲: مقایسه خطای مسیر بهینه (CRLB)، متوسط خطای تخمین در طول مسیر (RTAMS)، خطای تخمین فاصله در زمان نهایی t_f

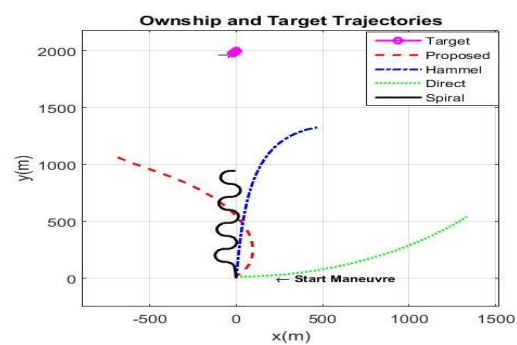
Distance\ time	500m/80s			2Km/300s			7km/600s			10km/800s			15km/1000s		
Method	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)
Proposed	6.4	1878	259	18	324	94	146	1164	786	145	1572	236	240	3087	780
Hammel	8.9	2318	482	24	1674	384	655	3248	2811	282	5446	5987	394	9800	10300
Direct	110	941	707	388	403	393	783	3633	3703	760	5453	7317	546	11098	12302
Spiral	7.8	2612	572	65	5569	3210	280	1961	2270	560	1661	3673	1135	8236	7918

(ب)

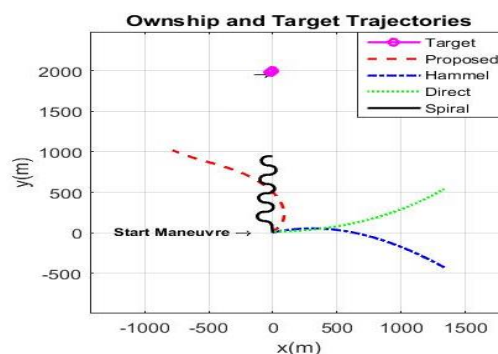
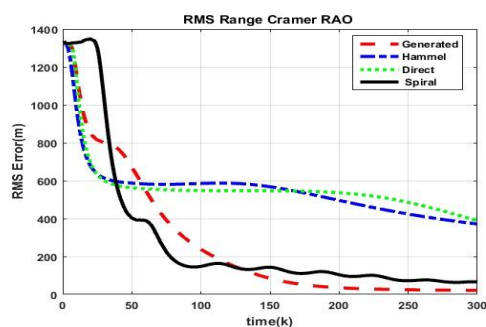
(الف)



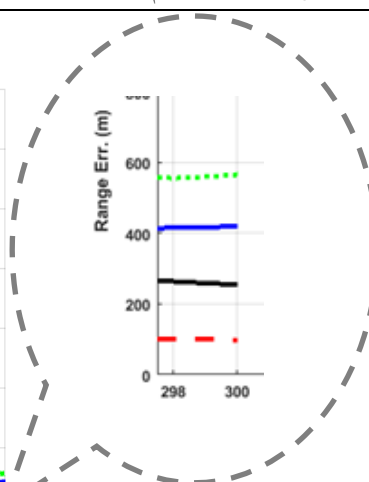
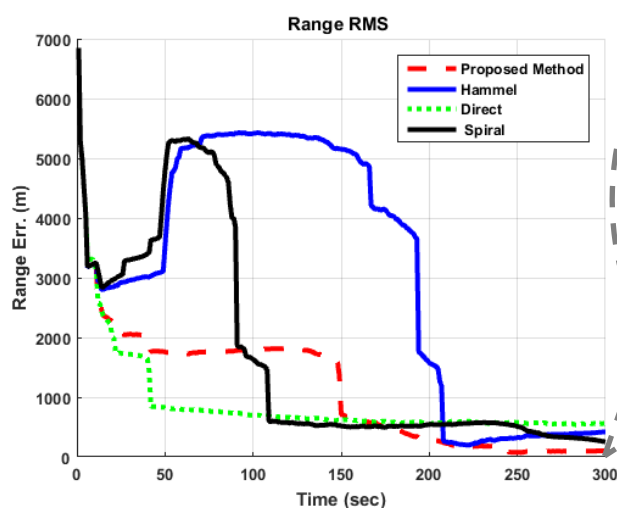
(د)



(ج)



شکل ۳: شرایط اولیه معلوم (الف) مسیر بهینه، (ب) خطای رویت‌پذیری - شرایط اولیه نامعلوم، (ج) مسیر بهینه، (د) خطای رویت‌پذیری



شکل ۴: خطای تخمین فاصله با تخمینگر EKF هدف ساکن (سناریو شکل ۳-الف)

دید هدف می باشد، پارامتر سمت نسبی رویتگر را به عنوان پارامتر ورودی در نظر گرفته و رابطه (۲۹) را به شکل ذیل بازنویسی و گام‌های طراحی مجدداً اجرا می‌شوند.

$$u_i = \theta(t_i) - \beta(t_i) \quad (42)$$

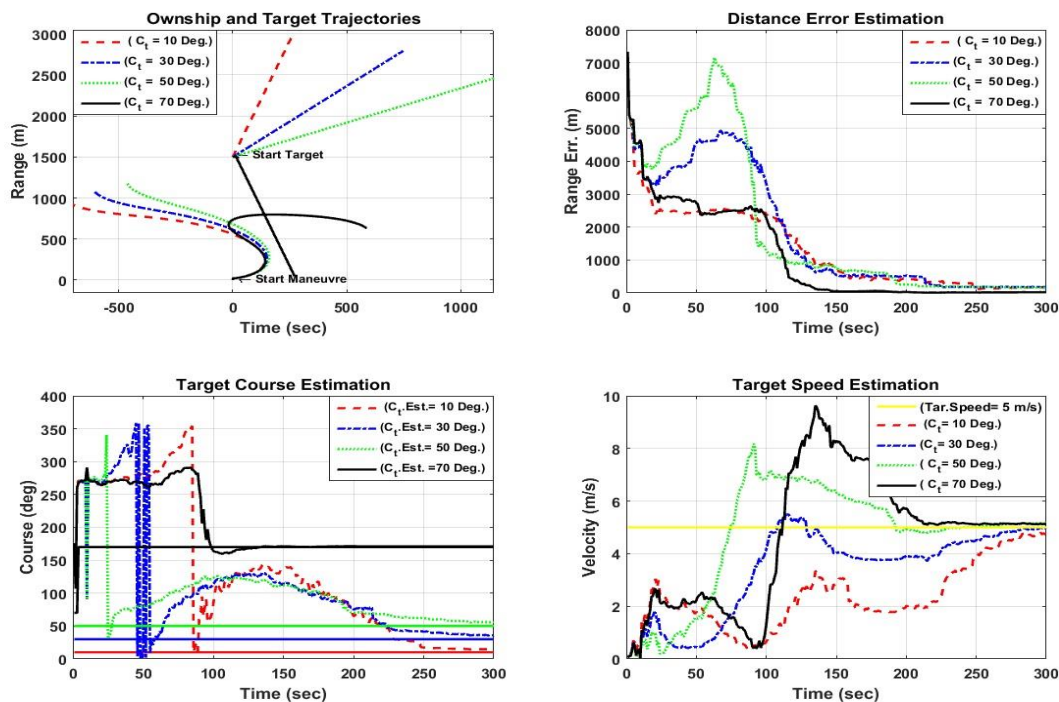
در این بخش برای عمومیت بخشی به حالات ممکن، در دو حالت اهداف دورشونده و نزدیک‌شونده شبیه‌سازی مونت کارلو اجرا شده است. کارآمدی روش پیشنهادی در ردیابی شناورهای سطحی در فضای دو

۳-۴ بررسی کارآمدی روش پیشنهادی در رهگیری اهداف متحرک

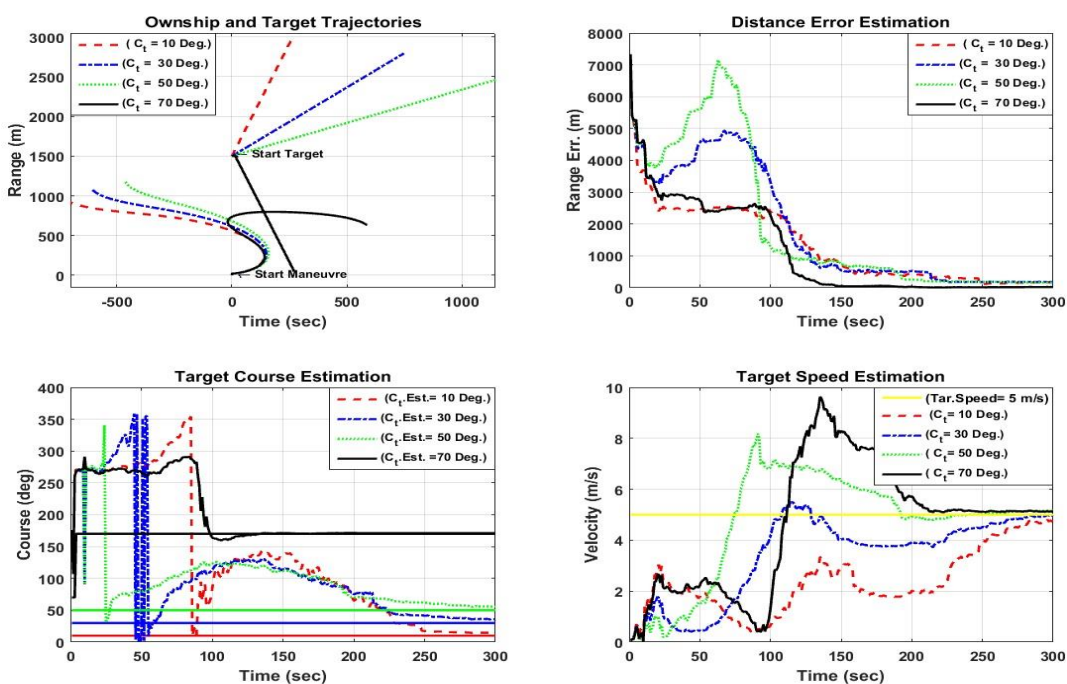
هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش مستقل از پارامترهای مجهول رهگیری اهداف متحرک جهت کنترل مسیر بهینه رویتگر است. با توجه به اینکه تنها پارامتر کنترل‌پذیر رویتگر سمت حرکت خود و سمت نسبی

هدف به مقدار واقعی از ثانیه ۴۰۰ به بالا در برد بلند در شکل ۵ و برد کوتاه از ثانیه ۱۵۰ در شکل ۶ نشان داده شده است. بدیهی است زمان همگرایی در برد کوتاه در شکل ۶ سریعتر از برد بلند در شکل ۵ است.

بعدی با فرض نامعلوم بودن شرایط اولیه هدف، مطابق سناریوهای مندرج در جدول ۳ بررسی شده است. نتایج تخمین مطابق سناریوی جدول ۳ در حالت الف و ب به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. متناسب با نرخ رویت‌پذیری مسیرهدف با کورس حرکتی مسیرهای نزدیک‌شونده خطای فاصله کاهش یافته است. همگرایی تخمین کورس و سرعت



شکل ۵: نتایج تخمین هدف برد مطابق سناریوهای جدول ۳-الف



شکل ۶: نتایج تخمین هدف برد مطابق سناریوهای جدول ۳-ب

جدول ۳- الف: هدف نزدیک‌شونده در محدوده برد بلند

ردیابی اهداف سطحی توسط ناظر زیردریایی

No.	V_o m/s	σ deg.	V_t m/s	r Km	$C_{t deg.}$	t_f Sec.
1	5	3	5	7	110	800
2	5	3	5	7	130	800
3	5	3	5	7	150	800
4	5	3	5	7	170	800

جدول ۳- ب: هدف دورشونده در محدوده برد کوتاه ردیابی

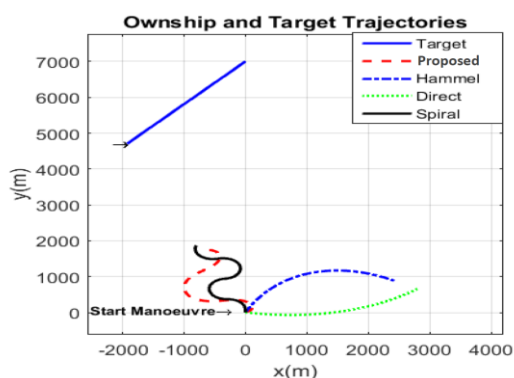
اهداف سطحی توسط ناظر زیردریایی

No.	V_o m/s	σ deg.	V_t m/s	r Km	$C_{t deg.}$	t_f Sec.
1	5	3	5	1.5	10	300
2	5	3	5	1.5	30	300
3	5	3	5	1.5	50	300
4	5	3	5	1.5	70	300

۴-۴ طراحی انواع سناریوهای بهینه و در اهداف مانوردار

در این بخش به اختصار، روش پیشنهادی در حالت مانور اهداف با یک مثال بررسی می‌شود. طراحی مسیر رویتگر در ۶۰۰ ثانیه مانور ناظر و تخمین هدف با سناریوی حرکتی در برد ۷ کیلومتر مطابق جدول ۳ و با مانور ۹۰ درجه در ثانیه ۳۰۰، ردیابی مطابق شکل ۷ انجام شده است. همانگونه که پیش‌بینی می‌شد مطابق شکل ۷-الف و ۷-ب در روش پیشنهادی متناسب با زاویه نسبی دید هدف مسیر رویتگر تغییرات کمی بعد از ثانیه ۳۰۰ داشته است. مقایسه شکل ۷-ج و ۷-د نیز این موضوع را

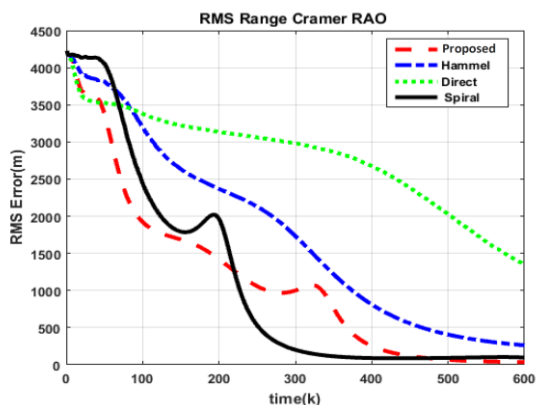
تایید می‌کنند. در روش مستقیم، مانور هدف رویت‌پذیری را در این مثال افزایش داده، لیکن میزان آن از سایر روش‌ها کمتر است. مقایسه خطای تخمین فاصله در شکل ۷-ه و ۷-و نشان می‌دهد مانور باعث افزایش خطای تخمین فاصله شده است. این موضوع به دلیل خطای کواریانس تخمینگر در زمان مانور منتج شده است که بایستی با بهینه‌سازی تخمینگر بهبود یابد که البته موردنظر این تحقیق نمی‌باشد.



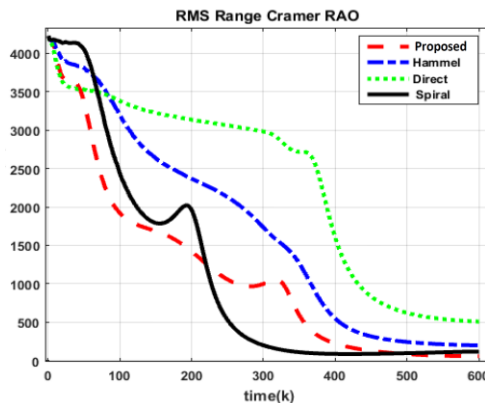
شکل ۷-ب: مسیر رویتگر هدف بدون مانور (فاصله 7km)



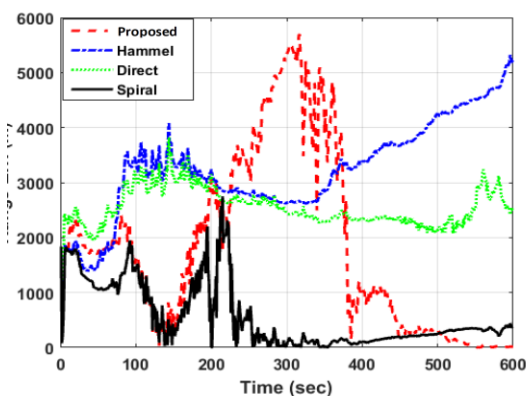
شکل ۷-الف: مسیر رویتگر هدف با مانور (فاصله 7km)



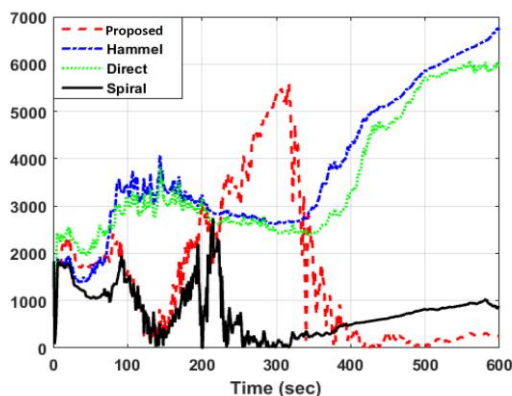
شکل ۷-د: خطای رویت‌پذیری فاصله هدف بدون مانور (فاصله 7km)



شکل ۷-ج: خطای رویت‌پذیری فاصله هدف با مانور (فاصله 7km)



شکل ۷- و: خطای تخمین فاصله هدف بدون مانور (فاصله 7km)



شکل ۸- ه: خطای تخمین فاصله هدف با مانور (فاصله 7km)

- [2] P. I. Reji and V. S. Dharun, "Recursive Multistage Estimator for Bearings only Passive Target Tracking in ESM EW Systems," Indian J. Sci. Technol., vol. 8, no. 26, pp. 1-7, 2015.
- [3] B. Omkar Lakshmi Jagan, S. Koteswara Rao, A. Jawahar, and S. B. Karishma, "Passive target tracking using intercept sonar measurements," Indian J. Sci. Technol., vol. 9, no. 12, pp. 10-13, 2016.
- [4] Bar-Shalom, Yaakov, X. Rong Li, and Thiagalingam Kirubarajan. Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software. John Wiley & Sons, 2004.
- [5] Ristic, Branko, Sanjeev Arulampalam, and Neil Gordon. Beyond the Kalman filter: Particle filters for tracking applications. Artech house, 2004.
- [6] Mahler, Ronald PS. Advances in statistical multisource-multitarget information fusion. Artech House, 2014.
- [7] S. C. Nardone, A. G. Lindgren, K. A. I. F. Gong, and M. Er, "Fundamental Properties and Performance of Conventional Bearings-Only Target Motion Analysis," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-29, no. 9, Sep.1984 .
- [8] J.-P. Le Cadre, "Discrete-Time Observability and Estimability Analysis for Bearings-Only Target Motion Analysis," IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst. VOL. 33, NO. 1 JANUARY 1997.
- [9] K. Gerlach, "Comments on Discrete-Time Observability and Estimability for Bearing-Only Target Motion Analysis," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., no. 13, pp. 1361-1367, 1998.
- [10] J. a. Fawcett, "Effect of course maneuvers on bearings-only range estimation.," IEEE Trans. Acoust., vol. 36, no. 8, pp. 1193-1199, 1988.
- [11] P. T. Liu, "An optimum approach in target tracking with bearing measurements," J. Optim. Theory Appl., vol. 56, no. 2, pp. 205-214, 1988.
- [12] S. E. Hammel, P. T. Liu, E. J. Hilliard, and K. F. Gong, "Optimal observer motion for localization with bearing measurements," Comput. Math. with Appl., vol. 18, no. 1-3, pp. 171-180, 1989.
- [13] Y. Oshman and P. Davidson, "Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 35, no. 3, pp. 892-902, 1999.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله با روش شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داده شد که روش پیشنهادی بهینه‌سازی با چندجمله‌ای‌های چبی شف برای طراحی مسیر بهینه روترگر مساله BOT با یک تابع کنترل منحصر به فرد و مستقل از پارامترهای نامعلوم اولیه قابل محاسبه است. کارآمدی روش پیشنهادی برای اهداف ساکن و متحرک با مانور ارزیابی شد. بهره‌گیری از دقت بالای روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک (روش‌های غیرمستقیم) در مدل‌سازی اولیه به همراه بهره‌گیری از روش‌های حل مستقیم به دلیل پایداری بالا به پارامترهای نامعلوم و افزایش سرعت حل با استفاده از چندجمله‌ای متعامد (جهت رفع پیچیدگی‌های حل تحلیلی تابع هامیلتونین) مشخصه اصلی این روش است. از دیگر مزایای طراحی مسیر با تعقیب و تقرب دلخواه، در ابتدای شروع مانور است. علاوه بر آن همگرایی بالا، سرعت و حجم محاسبات پایین (نسبت به سایر روش‌های حل مستقیم) و همچنین استقلال محاسبه مسیر بهینه از پارامترهای نامعلوم اولیه و مرزی در مسائل کاربردی BOT نشان داده شد. هرچند در حالت اندازه‌گیری بدون خطا محاسبه زمان همگرایی قابل محاسبه است، لیکن با وجود خطای حساسه اندازه‌گیر، کمینه زمان در این پژوهش از شبیه‌سازی محاسبه شده است. تحقیقات آتی در این حوزه شامل محاسبه زمان بهینه جهت همگرایی مورد نظر متناسب با خطای حساسه اندازه‌گیر است تا به صورت برخط همگرایی مساله BOT تضمین گردد. همچنین بررسی عملکرد روش پیشنهادی برای اهداف مانوردار و یافتن معیارهای تطبیقی سریع متناسب با توابع معیار روتر پذیر برای همگرایی تخمین‌گرهای اهداف مانوردار مدنظر تحقیقات بعدی می‌باشد.

مراجع:

- [1] K. Dogancay, "UAV path planning for passive emitter localization," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 48, no. 2, pp. 1150-1166, 2012.

methods." Math. Comput. Simul. Vol. 121, pp. 95-108, 2016.

[۱۹] مقداد محمدی، حسین قلی زاده نرم، "تطبیق کوواریانس های نویز فیلتر کالمن توسعه یافته در ردیابی هدف از روی سمت به روش بازگشتی"، مجله کنترل جلد ۱۰، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۷۲-۵۵ ISSN 2008-8345, Journal of Control, Vol. 10, No. 2, Summer 2016

[20] Elsayed ME, and M. El-Kady. "Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems." Math. Comput. Simul. vol. 139.2-3, pp. 513-523, 2003.

[21] P. Taylor, "A Chebyshev Finite Difference Method For Solving A Class Of Optimal Control Problems," Int. J. Comput., no. February 2013, pp. 37-41, 2010.

[14] A.N. Bishop, "Bearing-Only Localization using Geometrically Constrained Optimization," IEEE Trans. Aeros. Elect. Syst. Vol. 45, Jan. 2009 .

[۱۵] امیر حسین نایی، ناصر پریر، "تعیین مسیر رویت گر در موقعیت یابی تنها با زاویه سمت با در نظر گرفتن محدودیت میدان دید"، مجله کنترل جلد ۸، بهار ۱۳۹۳ و صفحه ۷۱-۵۵-۲۰۰۸-۸۳۴۵, Journal of Control, Vol. 10, No. 2, Summer 2016 ISSN

[16] J. P. Helferty and D. R. Mudgett, "Optimal observer trajectories for bearings only tracking by minimizing the trace of the Cramer-Rao lowerbound," Proc. 32nd IEEE Conf. Decis. Control, pp. 936-939, 1993.

[17] J. T. Betts, "Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization," J. Guid. Control. Dyn., vol. 21, no. 2, pp. 193-207, 1998.

[18] Mezzadri, Francesco, and Emanuele Galligani. "A Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming

پیوست الف:

متغیرهای استفاده شده در مقاله به شرح ذیل می‌باشند:

$$\dot{r} = [\dot{x} \quad \dot{y}]^T, \bar{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \hat{r}, \bar{r}$$

$$F_k$$

$$\beta, z, \hat{\beta}$$

$$\dot{\beta}$$

$$\theta$$

$$\omega = [\omega_x; \omega_y]$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

$$v$$

$$\hat{X}_{k|k}, \hat{X}_{0|0}$$

$$P_{k|k}, P_{0|0}$$

$$\hat{X}_{k+1|k}, P_{k+1|k}$$

$$FIM = J, J^{-1}$$

$$H, \hat{H}$$

$$T, t_f, \rho$$

$$X^T$$

- سرعت نسبی، حدس اولیه با واریانس σ_r^2

- فاصله نسبی هدف، تخمین فاصله، حدس اولیه با توزیع واریانس σ_r^2

- ماتریس انتقال حالت در لحظه k

- زاویه سمت واقعی و اندازه گیری شده هدف و تخمین آن به ترتیب

- نرخ تغییرات سمت هدف

- جهت حرکت ناظر (کورس ناظر)

- عدم قطعیت سرعت نسبی هدف در جهت x و y به صورت مستقل با

میانگین صفر و کوواریانس σ_x^2 و σ_y^2

- ماتریس کوواریانس متغیر تصادفی بردار w

- نویز اندازه گیری گوسی $N(0, \delta_\beta^2)$

- بردار تخمین حالت در لحظه k و تنظیم شرایط اولیه

- ماتریس کوواریانس خطای تخمین در لحظه k و تنظیم کوواریانس اولیه

- بردار پیش‌بینی تخمین حالت و کوواریانس خطا

- ماتریس اطلاعات فیشر و کرامر رانو

- گرادیان بردار اندازه گیری به بردار حالت و تخمین آن

- زمان نمونه‌برداری، زمان نهایی مانور و نسبت زمان مانور به زمان رسیدن

به هدف در مسیر مستقیم

ترانهاده بردار X

توسعه ناحیه جذب کلاس خاصی از سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته بر اساس تابع لیاپانوف قطعه‌ای مجذوری

فریده چراغی شامی^۱، علی اکبر قره ویسی^۲، ملیحه مغفوری فرسنگی^۳، محسن محمدیان^۴

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، cheraghi.fa@eng.uk.ac.ir

^۲ استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، a_gharaveisi@yahoo.com

^۳ استاد تمام، دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، mmaghfoori@mail.uk.ac.ir

^۴ استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، m.mohammadian@mail.uk.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۲۱

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۲/۲

دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۱۷

چکیده: این مقاله به ارائه روش جدیدی جهت تخمین و توسعه ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین دوبعدی زمان-پیوسته پرداخته است. تاکنون برای تخمین و توسعه ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته از توابع لیاپانوف پیوسته گوناگونی استفاده شده است. در روش پیشنهادی، در قالب نگاهی نو و به کمک تابع لیاپانوف قطعه‌ای مجذوری ناپیوسته، ناحیه جذب سیستم حول مبدأ مختصات با طراحی کنترل کننده فیدبک حالت توسعه می‌یابد. در این مقاله نشان داده می‌شود که شرط پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرز سلول‌ها، محافظه کاری تخمین ناحیه جذب سیستم را افزایش می‌دهد و تصحیح این شرط، قابلیت جستجوی قدرتمندتری را به الگوریتم تخمین ناحیه جذب می‌بخشد. نتایج شبیه سازی گویای برتری روش پیشنهادی نسبت به روش مبتنی بر تابع لیاپانوف پیوسته است به نحوی که با استفاده از این روش، ناحیه جذب بزرگتری نسبت به روش پیوسته متناظرش بدست آمده است.

کلمات کلیدی: ناحیه جذب، سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته، کنترل کننده فیدبک حالت، تابع لیاپانوف قطعه‌ای مجذوری

ناپیوسته

Enlarging Domain of Attraction for a Special Class of Continuous-time Quadratic Lyapunov Function Piecewise Affine Systems based on Discontinuous Piecewise

Farideh Cheraghi-Shami, Ali Akbar Gharaveisi, Malihe M. Farsangi, Mohsen Mohammadian

Abstract: This paper presents a new approach to estimate and to enlarge the domain of attraction for a planar continuous-time piecewise affine system. Various continuous Lyapunov functions have been proposed to estimate and to enlarge the system's domain of attraction. In the proposed method with a new vision and with the aids of a discontinuous piecewise quadratic Lyapunov function, the domain of attraction at the origin is enlarged by designing a state feedback controller. This paper shows that the continuity of the Lyapunov function on the boundaries, increases the conservativeness in estimating the domain of attraction, and gives more powerful search ability to the domain of attraction estimation algorithm by relaxing this continuity condition. The simulation results show the superiority of the proposed method so that using this method the larger estimation of the domain of attraction is obtained than continuous one.

Keywords: domain of attraction, continuous-time piecewise affine systems, state feedback controller, discontinuous piecewise quadratic Lyapunov functions.

۱- مقدمه

مباحث مربوط به ناحیه جذب سیستم‌ها در کنار پیچیدگی‌های طبیعی آن بسیار کاربردی است. کاربردهای عملی این موضوع در سیستم‌های کنترل و قدرت [۱-۳]، فرآیندهای شیمیایی [۴]، هوا-فضا [۵]، سیستم‌های بیولوژیکی [۶]، اکولوژی [۷] و ترافیک [۸] بسیار مورد توجه قرار گرفته است. به‌طورحتم، بررسی این مباحث در سیستم‌های هابیرید نیز به همین میزان ارزشمند خواهد بود، زیرا بسیاری از سیستم‌های فیزیکی و مهندسی در کلاس سیستم‌های هابیرید قرار می‌گیرند. سیستم‌های قطعه‌ای آفاین (PWA)^۱ در کلاس خاصی از سیستم‌های هابیرید هستند که هم‌ارزی آن با چند کلاس دیگر از سیستم‌های هابیرید نشان داده شده است [۹]، به‌عنوان مثال سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته، کلاسی از سیستم‌های سوئیچ‌شونده با حالت‌های عملکردی مختلف است که در آن فرامین سوئیچ وابسته به متغیرهای حالت است [۱۰]. از دیگر مزیت‌های سیستم قطعه‌ای آفاین این است که ابزاری برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی پیچیده و غیرخطی در اختیار می‌گذارد [۱۱]. غالباً سیستم‌های هابیرید مرتبه ۳ و بالاتر از آن سیستم‌های بسیار پیچیده‌ای هستند؛ در تقریب قطعه‌ای آفاین سیستم‌های غیرخطی، برای مواجهه با این مشکل، ابتدا از روش‌های کاهش مرتبه استفاده می‌شود و سپس سیستم در قالب قطعه‌ای آفاین مرتبه ۲ یا ۳ فرمول‌بندی می‌شود [۱۲]. لازم به ذکر است که تقریب قطعه‌ای آفاین بدست آمده برای سیستم غیرخطی، بر روی مرز سلول‌ها پیوسته است و این در حالی است که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی موجود دارای غیرخطی‌هایی مانند اشباع، ناحیه مرده و هیستریزس هستند که ذاتاً بر روی مرز نواحی پیوسته است [۱۳].

روش‌های تخمین ناحیه جذب را بطورکلی می‌توان در دو دسته روش‌های مبتنی بر توابع لیپانوف [۱۴] و روش‌های غیرلیپانوفی [۱۵] قرار داد. با توجه به ساختار قطعه‌ای سیستم مورد بحث در این مقاله، محاسبه ناحیه جذب آن امری دشوار است. اخیراً، روشی غیر لیپانوفی بر اساس تحلیل پیوستگی توابع انتقال گسسته^۲، به منظور تخمین ناحیه جذب یک سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته حول نقاط تعادلش و یا چرخه حدی آن در [۱۶] ارائه شده است. در [۱۷]، ناحیه پایداری سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته حول چرخه حدی آن به کمک الگوریتم ژنتیک تعیین می‌گردد. برای سیستمی با یک نقطه تعادل پایدار، می‌توان زیر مجموعه‌ای از ناحیه جذب را با جستجوی تابع لیپانوف سیستم تخمین زد. قابل ذکر است که بیشتر روش‌های موجود تخمین ناحیه جذب مبتنی بر توابع لیپانوف است. توابع لیپانوف گوناگونی برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین معرفی شده‌اند، از قبیل: توابع لیپانوف مشترک مجذوری [۱۸]،

چندجمله‌ای [۱۹]، قطعه‌ای مجذوری (PWQ)^۳ [۱۸، ۲۰، ۲۱]، قطعه‌ای آفاین [۲۲، ۲۳]، قطعه‌ای چندجمله‌ای همگن (PHP)^۴ [۲۴] و PWQ ناپیوسته [۲۵]. از جمله توابع لیپانوف رایج جهت آنالیز پایداری سیستم‌های قطعه‌ای آفاین، تابع لیپانوف PWQ است.

به منظور تحلیل پایداری و همچنین تخمین ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین غالباً از شکل پیوسته تابع لیپانوف PWQ استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال مراجعی همچون [۱۸، ۲۰، ۲۶]، از تابع لیپانوف PWQ جهت تخمین ناحیه جذب در قالب یک مسئله بهینه‌سازی کمک گرفته‌اند. در [۲۷]، ابتدا یک سیستم غیرخطی در قالب یک سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته تقریب زده شده است، سپس ناحیه جذب سیستم حاصل حول مبدأ مختصات به کمک یک تابع لیپانوف PWQ پیوسته تعیین گردیده است. برای کلاس خاصی از سیستم‌های قطعه‌ای آفاین پیوسته که در آن فضای حالت به تعداد محدودی نواحی محدب، بدون کران و چندوجهی افزا می‌شود، از تابع لیپانوف PWQ پیوسته همبسته-مخروطی^۵ به منظور محاسبه تخمین ناحیه جذب حول مبدأ مختصات استفاده شده است [۲۸]. در [۲۹]، سیستم‌های قطعه‌ای مولتی-آفاین^۶ به عنوان کلاسی از سیستم‌های فازی با نتایج تک تک^۷ مورد مطالعه قرار گرفته است که می‌توان از این سیستم‌ها برای تقریب هر سیستم غیرخطی هموار با دقت دلخواه استفاده نمود. در مرجع مذکور، تحلیل پایداری مجانبی این سیستم‌ها توسط تابع لیپانوف PWQ پیوسته صورت گرفته است.

در طراحی کنترل‌کننده با هدف گسترش ناحیه جذب، علاوه بر لحاظ پایداری نقطه تعادل سیستم، ناحیه جذب متناسب با توانایی تابع لیپانوف گسترش می‌یابد. در [۳۰] برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری^۸، سیستم‌هایی که فقط یک متغیر مسئول افزای فضای حالت می‌باشد، کنترل‌کننده فیدبک حالت به کمک تابع لیپانوف مشترک مجذوری طراحی شده است. در [۳۱]، طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت قطعه‌ای آفاین برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری با ارائه شرطی جهت جلوگیری از مد لغزشی و بر اساس تابع لیپانوف PWQ پیوسته صورت گرفته است. در [۳۲]، ابتدا دینامیک سیستم خودرو به صورت قطعه‌ای آفاین نواری مدل شده است و سپس کنترل‌کننده فیدبک حالت با هدف جلوگیری از خروج ناخواسته خودرو از لاین توسط تابع لیپانوف PWQ پیوسته طراحی گردیده است. در [۳۳]، ماتریس‌های کنترل‌کننده فیدبک حالت و تابع لیپانوف مشترک مجذوری با حل مسئله بهینه‌سازی ارائه شده در جهت پایدارسازی یک سیستم قطعه‌ای آفاین نواری زمان-پیوسته نامعین حول نقطه تعادل مطلوب بدست آمده است. در تحقیق دیگری سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری همراه با نویز وینر^۹ مورد بررسی قرار گرفته‌اند و کنترل‌کننده فیدبک حالت با هدف پایدارسازی سیستم حلقه بسته و با اعمال تابع لیپانوف مشترک مجذوری طراحی شده است [۳۴].

^۱ Multi-Affine^۲ Singleton Consequents^۳ Slab^۴ Wiener^۱ Piecewise Affine^۲ Discrete Transition Functions^۳ Piecewise Quadratic^۴ Piecewise Homogeneous Polynomial^۵ Cone-copositive

کنترل‌کننده فیدبک حالت می‌پردازد. در نهایت، شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری در بخش‌های ۶ و ۷ آورده می‌شود.

۲- معرفی سیستم و تبیین مسأله

۲-۱ معرفی سیستم

یک سیستم قطعه‌ای آفاین پیوسته دو بعدی به صورت

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + a_i + B_i u(t) \quad (1)$$

$$x \in \hat{X}_i, i \in I, x(0) = x_0$$

توصیف می‌شود که $x(t) \in X \subset R^2$, $u(t) \in U \subset R^m$ به ترتیب بردار ورودی، بردار متغیر حالت و بردار شرط اولیه سیستم می‌باشد. همچنین، $X = \bigcup_{i \in I} \hat{X}_i$ ناحیه کاری سیستم است که به زیر نواحی چندوجهی $\hat{X}_i$, $i \in I$ ، افراز شده است و I مجموعه مدهای سیستم می‌باشد به طوری که برای $i \neq j, \forall i, j \in I$ داریم $X_i \cap X_j = \emptyset$. به علاوه، ماتریس‌های A_i و B_i و بردار a_i با ابعاد مناسب تعریف می‌گردد. $\hat{X}_i$ پسته^۴ مجموعه X_i است که برای X_i چندوجهی، به صورت زیر قابل توصیف می‌باشد:

$$\hat{X}_i = \{x \in R^2 : E_i x \geq e_i\}, i \in I \quad (2)$$

که در آن E_i و e_i به ترتیب ماتریس و بردار با مقادیر ثابت هستند. چنانچه برای $i \neq j, \forall i, j \in I$ ، $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j \neq \emptyset$ باشد، مرز دو ناحیه هم جوار X_i و X_j به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{X}_i \cap \hat{X}_j \subset \{x | x = F_{ij} s + f_{ij}, s \in R\} \quad (3)$$

که در آن S پارامتری حقیقی و $F_{ij} \in R^2$ و $f_{ij} \in R^2$ بردارهای قابل محاسبه هستند. برای ناحیه مرزی تعریف شده در (۳)، اگر $F_{ij} \neq 0$ ، مرز بخشی از یک خط است و اگر $F_{ij} = 0$ ، مرز یک نقطه است. برای دو ناحیه همجوار X_i و X_j با $F_{ij} \neq 0$ ، می‌توان مقادیر C_{ij} و c_{ij} و خط $S_{ij} = \{x | C_{ij} x + c_{ij} = 0\}$ را به گونه‌ای تعریف کرد که $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j \subset S_{ij}$ و C_{ij} بردار نرمال S_{ij} (یک بردار عمود بر S_{ij}) با جهت از X_i به X_j باشد.

۲-۲ تبیین مسأله

تعریف ۱. ناحیه جذب

سیستم $\dot{x}(t) = f(x)$ دارای نقطه تعادل مبدأ مختصات را در نظر بگیرید. ناحیه جذب سیستم مجموعه‌ای از شرایط اولیه‌ای ممکن است که به ازای آنها همگرایی به مبدأ مختصات تضمین می‌گردد، یا به بیان دیگر،

در تعمیم این کار، طراحی روینگر برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین نواری دارای نویز وینر به وسیله تابع لیاپانوف PWQ پیوسته صورت گرفته است [۳۵]. در [۳۶]، سیستم‌های قطعه‌ای خطی پیوسته دومودال^۱، به عنوان کلاسی از سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی با دو حالت عملکردی مختلف و میدان‌های برداری پیوسته که در آن فرامین سوئیچ وابسته به متغیرهای حالت است، مورد بررسی قرار گرفته‌اند و با بکارگیری تابع لیاپانوف مشترک مجذوری، کنترل‌کننده فیدبک حالت در جهت پایدارسازی سیستم حلقه بسته حول مبدأ مختصات طراحی شده است. در [۳۶، ۳۷]، کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین چندمدلی^۲ که در آن ماتریس‌های حالت دارای شکل خاصی هستند به کمک توابع لیاپانوف مشترک صورت گرفته است.

در [۳۸]، ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-گسسته به کمک تابع لیاپانوف قطعه‌ای آفاین ناپیوسته تخمین زده شده است. اخیراً در [۳۹]، کنترل‌کننده فیدبک حالت پریودیک به منظور پایدارسازی سیستم‌های قطعه‌ای آفاین پریودیک زمان-پیوسته به کمک یک تابع لیاپانوف گسسته متغیر با زمان پیشنهاد شده است. برای سیستم‌های قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته دوبعدی دارای یک نقطه تعادل در مبدأ مختصات اثبات شده است که نوع تعمیم یافته تابع لیاپانوف PWQ پیوسته، که از حذف شرط پیوستگی حاصل می‌گردد [۲۵]، محافظه کاری بسیار پایینی در آنالیز سیستم‌های قطعه‌ای آفاین دارا می‌باشد. پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سیستم تضمین می‌کند که چنانچه مسیر حالت از سلولی وارد سلول دیگر شود، در لحظه عبور از مرز، مقدار تابع لیاپانوف تغییر نمی‌کند. این در حالی است که اگر در حین عبور از مرز مقدار تابع لیاپانوف کاهش یابد نیز شرایط پایدار برقرار است. این نکته ایده کلیدی در تعریف توابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته بوده است. در این مقاله با الهام از این روش، ناحیه جذب سیستم به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته تخمین و توسعه می‌یابد، به گونه‌ای که توسعه ناحیه جذب با طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت قطعه‌ای آفاین صورت می‌گیرد. در این راستا، دو مسأله بهینه‌سازی مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی دوخطی (BMI)^۳ پیشنهاد می‌گردد. تخمین بهینه ناحیه جذب شامل بزرگ‌ترین مجموعه‌ی سطح تابع لیاپانوف است که در فضای کاری محصور شده باشد. در این مقاله نشان داده می‌شود که برای یک سیستم قطعه‌ای آفاین زمان-پیوسته با میدان‌های برداری پیوسته، ناحیه جذب بهینه حول مبدأ مختصات حاصل از تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته نسبت به روش پیوسته متناظرش ارتقاء می‌یابد.

بخش‌بندی مقاله بدین صورت سازماندهی شده است. در بخش ۲، به توصیف سیستم قطعه‌ای آفاین و تبیین مسأله پرداخته می‌شود. بخش ۳ به آنالیز پایداری سیستم هاپیرید اختصاص داده شده است. در بخش ۴، آنالیز پایداری سیستم و طراحی کنترل‌کننده برای آن به کمک تابع لیاپانوف ناپیوسته صورت می‌گیرد. سپس، بخش ۵ به ارائه دو مسأله بهینه‌سازی به منظور محاسبه تخمین ناحیه جذب سیستم حلقه باز و توسعه آن به کمک

³ Bilinear Matrix Inequality

⁴ Closure

¹ Bimodal

² Multimodel

تذکره ۳: شرط پیوستگی سیستم (۸) بر روی مرزهای $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j$ معادل رابطه زیر است

$$(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) \bar{x} = (\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j) \bar{x} \quad (12)$$

$$, x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j, \forall i \in I, j \in N_i$$

که در آن $N_i = \{k | k \in I, k \neq i, \hat{X}_i \cap \hat{X}_k \neq \emptyset\}$ تعریف می‌گردد.

۳- تحلیل پایداری

سیستم پیوسته هائیرید زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f_i(x), x \in \hat{X}_i, i \in I \quad (13)$$

که در آن $x(t) \in X \subset R^n$ بردار حالت سیستم می‌باشد و $f_i: \hat{X}_i \rightarrow R^n$ تابع پیوسته و کراندار محلی است. فرض می‌شود $x = 0$ تنها نقطه تعادل سیستم (۱۳) است. همچنین، ناحیه X توسط $\bigcup_{i \in I} \hat{X}_i = X$ به‌گونه‌ای افراز شده است که $i \in I, X_i$ و $\forall i, j \in I, i \neq j$ ، شرط $X_i \cap X_j = \emptyset$ برقرار باشد. شرط پیوستگی میدان‌های برداری سیستم (۱۳) ایجاب می‌کند که برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$ ، $f_i(x) = f_j(x)$ ، $i \neq j$ باشد.

قابل ذکر است وجود یک تابع لیاپانوف مشترک برای همه زیرسیستم‌های $\dot{x} = f_i(x)$ ، پایداری سیستم را تضمین می‌کند، اما محافظه کاری بالایی دارد. برای کاهش محافظه کاری، قضیه تابع لیاپانوف چندگانه^۱ ارائه شده است که برای هر زیرسیستم $\dot{x} = f_i(x)$ ، تابع پیوسته $V_i(x)$ اختصاص می‌یابد.

$$V(x) = V_i(x), x \in X_i, i \in I \quad (14)$$

معین مثبت بودن توابع $V_i(x)$ و کاهشی بودن این توابع وقتی $x \in X_i$ است، پایداری سیستم (۱۳) را تضمین نمی‌کند. از جمله روش‌های ارائه شده برای حل این مشکل، تضمین پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سیستم (۱۳) می‌باشد، یعنی برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$ ، $i \neq j$ ، تساوی $V_i(x) = V_j(x)$ برقرار باشد [۴۰]؛ که همین شرط سبب محافظه کاری روش آنالیز پایداری مذکور می‌گردد، زیرا پیوستگی بر روی مرزها تنها تضمین می‌کند که چنانچه مسیر حالت از سلولی وارد سلول دیگر شود، در لحظه عبور از مرز، مقدار تابع لیاپانوف تغییر نمی‌کند. در [۴۱، ۱۸]، با حذف شرط پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سلول‌ها، شرایط پایداری بر اساس توابع لیاپانوف ناپیوسته ارائه شده است، اما روش ارائه شده در مقالات مذکور، برای حالت‌های بسیار خاص و بر طبق دانش کسب‌شده از رفتار سیستم بر روی مرزها می‌باشد که کاربرد آن را بسیار محدود می‌کند. در [۲۵]، برای سیستم‌های دوبعدی با فرض توابع

$$D = \{x_0 \in R^n | x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\}. \quad (4)$$

در این مقاله، دو مسأله زیر بررسی خواهد شد:

مسأله ۱: محاسبه ناحیه جذب سیستم (۱)، با $u = 0$ ، حول مبدأ مختصات به کمک تابع لیاپانوف ناپیوسته.

مسأله ۲: تعیین ماتریس‌های $M_i \in R^{m \times 2}$ و بردارهای $m_i \in R^m$ برای $i \in I$ ، به کمک تابع لیاپانوف ناپیوسته به گونه‌ای که کنترل‌کننده فیدبک حالت قطعه‌ای آفاین پیوسته

$$u(t) = M_i x(t) + m_i, x \in \hat{X}_i, i \in I \quad (5)$$

پایداری نمایی سیستم کنترل شده (۱) با ورودی (۵) را حول مبدأ مختصات تضمین کند و ناحیه جذب سیستم حلقه بسته را توسعه دهد.

سیستم کنترل شده (۱) با ورودی (۵) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\dot{x} = (A_i + B_i M_i)x + (a_i + B_i m_i), x \in \hat{X}_i, i \in I \quad (6)$$

در ادامه، با تعریف $\bar{x} = [x^T \ 1]^T$ ، روابط (۵)، (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب زیر بازنویسی می‌شوند:

$$u = \bar{M}_i \bar{x}, x \in \hat{X}_i, i \in I \quad (7)$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_i \bar{x} + \bar{B}_i u, x \in \hat{X}_i, i \in I \quad (8)$$

$$\hat{X}_i = \{x \in R^2 : \bar{E}_i \bar{x} \geq 0\}, i \in I \quad (9)$$

$$\hat{X}_i \cap \hat{X}_j \subset \{x | \bar{x} = \bar{F}_{ij} \bar{s}, \bar{s} = [s^T \ 1]^T, s \in R\} \quad (10)$$

$$, i, j \in I, i \neq j$$

که در آن $\bar{M}_i = [M_i \ m_i]$ ، $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\bar{E}_i = [E_i \ -e_i]$ ، $\bar{F}_{ij} = \begin{bmatrix} F_{ij} & f_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. همچنین، برای دو ناحیه همجوار X_i و X_j با $F_{ij} \neq 0$ ، چنانچه $\bar{C}_{ij} = [C_{ij} \ c_{ij}]$ باشد، $S_{ij} = \{x | \bar{C}_{ij} \bar{x} = 0\}$ تعریف می‌گردد.

تذکره ۱: از آنجایی که فرض شده است که سیستم (۱) دارای نقطه تعادل مبدأ مختصات است، پس برای $i \in I_0$ و $0 \in \hat{X}_i$ لازم است $a_i = 0$ و همچنین $\det(A_i) \neq 0$ باشد.

تذکره ۲: شرط پیوستگی کنترل‌کننده فیدبک حالت (۷) بر روی مرزهای سیستم (۸) به صورت زیر لحاظ می‌شود

$$\bar{M}_i \bar{x} = \bar{M}_j \bar{x}, x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j, \forall i \in I, j \in N_i \quad (11)$$

که در آن $N_i = \{k | k \in I, k \neq i, \hat{X}_i \cap \hat{X}_k \neq \emptyset\}$.

¹ Multiple Lyapunov Function

$V(x)$ کاهشی می‌باشد [۴۰]. اگر $x \in \bigcap_{i \in I_x} \hat{X}_i$ ، دو حالت متفاوت وجود دارد: $card\{I_x\} = 2$ و $card\{I_x\} > 2$. حالت $card\{I_x\} = 2$ ، به این معنا است که مرز بخشی از یک خط است و معادل این است که برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$ ، $i \neq j$ ، $\forall i, j \in I$ ، $F_{ij} \neq 0$ برقرار باشد و $card\{I_x\} > 2$ یعنی مرز یک نقطه است. با برقراری تساوی (۱۹)، شرط کاهشی بودن تابع لیپانوف در هر دو حالت برقرار است [۲۵]. در نتیجه، همه مسیرهای حالت سیستم (۱۳) در X ، بطور نمایی با نرخ همگرایی $\min \alpha_i$ ، $i \in I$ ، به سمت مبدأ مختصات همگرا می‌شوند. این نکته اثبات قضیه ۱ را به پایان می‌رساند. ■

۴- تحلیل پایداری و پایدارسازی

تابع $V(x)$ بیان شده در رابطه (۱۵) را به عنوان یک تابع لیپانوف کاندید در نظر بگیرید که در آن

$$V_i(x) = \bar{x}^T \bar{P}_i \bar{x}, x \in \hat{X}_i \subset R^2, \forall i \in I \quad (20)$$

که ماتریس متقارن $\bar{P}_i \in R^{3 \times 3}$ به صورت

$$\bar{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & q_i \\ q_i^T & r_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

تعریف می‌شود به طوری که $P_i \in R^{2 \times 2}$ ، $q_i \in R^2$ و $r_i \in R$. در این بخش، به کمک تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته فوق، شرایط کافی برای آنالیز پایداری و پایدارسازی سیستم قطعه‌ای آفاین (۱) ارائه می‌گردد.

۴-۱ تحلیل پایداری سیستم حلقه باز به کمک تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته

در قضیه ۲، برای سیستم (۱)، با $u = 0$ ، یا

$$\dot{x} = A_i x + a_i, x \in \hat{X}_i, i \in I, x(0) = x_0 \quad (22)$$

که به صورت $\dot{\bar{x}} = \bar{A}_i \bar{x}$ قابل بازنویسی می‌باشد، شرایط پایداری به کمک تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته بدست می‌آید.

قضیه ۲- چنانچه به ازای هر $i \in I$ ، مجموعه‌ای از ماتریس‌های متقارن $\bar{P}_i \in R^{3 \times 3}$ ، ماتریس‌های با درایه‌های نامنفی Z_i و Λ_i ، مقادیر اسکالر نامنفی α_i و ε و به ازای هر $i, j \in I$ ، بردارهای $\bar{\omega}_{ij}^1, \bar{\omega}_{ij}^2$ با ابعاد مناسب و درایه‌های نامنفی وجود داشته باشند به طوری که روابط (۲۳) تا (۲۸) برقرار باشد، آنگاه سیستم (۲۲) پایدار نمایی است و مسیرهای حالت آن با نرخ همگرایی $\min \alpha_i$ ، $i \in I$ ، به سمت مبدأ مختصات همگرا می‌شود.

$$q_i = 0, r_i = 0, \forall i \in I_0 \quad (23)$$

$$\bar{P}_i - \varepsilon I_3 - \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i > 0, \forall i \in I, i \notin I_0 \quad (24)$$

پیوسته $V_i(x): \hat{X}_i \rightarrow R, i \in I$ ، تابع ناپیوسته زیر به عنوان تابع لیپانوف سیستم معرفی می‌شود

$$V(x) = \begin{cases} V_i(x) & x \in X_i \\ \min \{V_i(x)\}_{i \in I_x} & x \in \bigcap_{i \in I_x} \hat{X}_i \end{cases} \quad (15)$$

که در آن $I_x = \{i | x \in \hat{X}_i\}$. اثبات می‌گردد که چنین تابع لیپانوف ناپیوسته‌ای، بر روی مرزها در جهت میدان برداری کاهشی است. همچنین نشان داده می‌شود که آنالیز پایداری سیستم به کمک این تابع ناپیوسته با محافظه کاری بسیار پایین تری نسبت به تابع لیپانوف پیوسته متناظرش صورت می‌گیرد و نیاز به هیچ دانش قبلی از رفتار سیستم بر روی مرزها نیز ندارد به طوری که آنالیز پایداری تنها بر اساس میدان‌های برداری سیستم انجام می‌شود. از این پس در این مقاله منظور از تابع لیپانوف ناپیوسته، همان تابع رابطه (۱۵) می‌باشد. در ادامه، قضیه‌ای برای آنالیز پایداری سیستم (۱۳) در فضای دوبعدی، با تعمیم روش آنالیز ارائه شده [۲۵] برای تابع لیپانوف ناپیوسته (۱۵) پیشنهاد می‌گردد.

قضیه ۱- سیستم (۱۳) متعلق به فضای دوبعدی X ، تعریف شده بر افراز چندوجهی $\{X_i\}_{i \in I}$ ، را در نظر بگیرید. اگر برای $i \in I$ ، مجموعه‌ای از توابع پیوسته $V_i(x): \hat{X}_i \rightarrow R$ ، اسکالرهایی $\alpha_i \geq 0$ و $\varepsilon \geq 0$ و مقادیر اسکالر نامنفی $\omega_{ij}^1, \omega_{ij}^2$ ، $\forall i, j \in I$ ، وجود داشته باشند به طوری که در روابط (۱۶) تا (۱۹) صدق کنند، آنگاه برای این سیستم، نقطه تعادل مبدأ مختصات پایدار نمایی است و تابع ناپیوسته رابطه (۱۵) با نرخ همگرایی $\min \alpha_i$ ، $i \in I$ ، تابع لیپانوف سیستم می‌باشد.

$$V_i(0) = 0, i \in I_0 \quad (16)$$

$$V_i(x) > \varepsilon \|x\|_2, x \in \hat{X}_i, x \neq 0, i \in I \quad (17)$$

$$\dot{V}_i(x) < -\alpha_i V_i(x), x \in \hat{X}_i, x \neq 0, i \in I \quad (18)$$

$$V_i(x) - V_j(x) = \omega_{ij}^1 C_{ij} f_i(x) + \omega_{ij}^2 C_{ij} f_j(x) \quad (19)$$

$$, x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j, \forall i, j \in I, i \neq j, F_{ij} \neq 0$$

که $\|\cdot\|_2$ به نرم ۲ و عملگر $\prec$ (به مثبت معین بودن (منفی معین بودن) اشاره دارد.

اثبات- تابع $V(x)$ تعریف شده در (۱۵) را به عنوان یک کاندید برای تابع لیپانوف در نظر بگیرید. روابط (۱۶) و (۱۷) بر معین مثبت بودن $V(x)$ دلالت دارد [۴۰]. برای اثبات پایداری کافی است نشان دهیم که تابع $V(x)$ در طول همه مسیرهای حالت سیستم (۱۳) کاهشی است. برای این منظور، یک مسیر حالت نوعی $x(t)$ از سیستم را در نظر بگیرید. در هر لحظه t ، $x(t)$ می‌تواند به یک سلول یا به مرزهای بین سلول‌ها تعلق داشته باشد. طبق تعریف، $card\{I_x\}$ دلالت بر تعداد عناصر مجموعه شمارش پذیر I_x دارد. اگر $x(t) \in \hat{X}_i$ و $card\{I_x\} = 1$ ، آنگاه $V(x) = V_i(x)$ و بر اساس (۱۸)، $\dot{V}(x) < \alpha V(x) < 0$ ، در نتیجه،

قضیه ۳- سیستم (۸) را با وروی کنترل (۷) در نظر بگیرید. اگر به ازای هر $i \in I$ ، مجموعه‌ای از ماتریس‌های متقارن $\bar{P}_i \in R^{3 \times 3}$ ، ماتریس‌های با درایه‌های نامنفی Z_i و Λ_i ، ماتریس‌های $\bar{M}_i \in R^{m \times 3}$ ، مقادیر اسکالر نامنفی α_i و ε و به ازای هر $i, j \in I$ ، بردارهای $\bar{\omega}_{ij}^1$ و $\bar{\omega}_{ij}^2$ با ابعاد مناسب و درایه‌های نامنفی وجود داشته باشند، به طوری که روابط (۳۰) تا (۳۷) برقرار باشد، آنگاه سیستم کنترل شده (۸) پایدار نمایی است و مسیرهای حالت سیستم با نرخ همگرایی $\min \alpha_i$ ، $i \in I$ ، به سمت مبدأ مختصات همگرا می‌شود.

$$q_i = 0, r_i = 0, \forall i \in I_0 \quad (30)$$

$$\bar{P}_i - \varepsilon I_3 - \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i > 0, \forall i \in I, i \notin I_0 \quad (31)$$

$$P_i - \varepsilon I_2 - E_i^T Z_i E_i > 0, \forall i \in I_0 \quad (32)$$

$$(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i)^T \bar{P}_i + \bar{P}_i (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) + \bar{E}_i^T \Lambda_i \bar{E}_i + \alpha_i \bar{P}_i < 0, \forall i \in I, i \notin I_0 \quad (33)$$

$$(A_i + B_i M_i)^T P_i + P_i (A_i + B_i M_i) + E_i^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i < 0, \forall i \in I_0 \quad (34)$$

$$\bar{F}_{ij}^T (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \bar{F}_{ij} = \bar{F}_{ij}^T (\bar{\Gamma}_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^T) \bar{F}_{ij} \quad (35)$$

$$, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0$$

$$(\bar{M}_i - \bar{M}_j) \bar{F}_{ij} = 0, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0 \quad (36)$$

$$(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) \bar{F}_{ij} = (\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j) \bar{F}_{ij} \quad (37)$$

$$, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0$$

که در رابطه (۳۵)، $\bar{\Gamma}_{ij}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \bar{E}_i^T \bar{\omega}_{ij}^1 \bar{C}_{ij} (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) + \bar{E}_j^T \bar{\omega}_{ij}^2 \bar{C}_{ij} (\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j) \quad (38)$$

اثبات- رابطه (۳۶) پیوستگی سیگنال کنترل را بر روی مرزهای سلول‌ها تضمین می‌کند به این صورت که $(\bar{M}_i - \bar{M}_j) \bar{F}_{ij} \bar{s} = 0$ و بر اساس رابطه (۱۰)، $\bar{M}_i \bar{x} = \bar{M}_j \bar{x}$ که در آن $\bar{x} \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$. به همین صورت، رابطه (۳۷) به پیوستگی میدان‌های برداری سیستم حلقه بسته بر روی مرزهای سلول‌ها اشاره دارد. حال تابع PWQ ناپیوسته رابطه (۲۰) را به عنوان تابع لیاپانوف کاندید در نظر بگیرید.

■ برای $i \in I_0$ و $x \in X_i$

رابطه (۳۰) معادل رابطه (۱۶) است که تضمین می‌کند $V_i(0) = 0$ از آنجایی که برای $x \in X_i$ داریم $x^T E_i^T Z_i E_i x > 0$ ، بنابراین رابطه (۳۲) معادل رابطه (۱۷) می‌باشد که به معنای شرط مثبت بودن تابع لیاپانوف

$$P_i - \varepsilon I_2 - E_i^T Z_i E_i > 0, \forall i \in I_0 \quad (25)$$

$$\bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + \bar{E}_i^T \Lambda_i \bar{E}_i + \alpha_i \bar{P}_i < 0 \quad (26)$$

$$, \forall i \in I, i \notin I_0$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i + E_i^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i < 0 \quad (27)$$

$$, \forall i \in I_0$$

$$\bar{F}_{ij}^T (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \bar{F}_{ij} = \bar{F}_{ij}^T (\bar{H}_{ij} + \bar{H}_{ij}^T) \bar{F}_{ij} \quad (28)$$

$$, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0$$

که در (۲۸)، $N_i = \{k \mid k \in I, k \neq i, \hat{X}_i \cap \hat{X}_k \neq \emptyset\}$ و $\bar{H}_{ij}$ به صورت

$$\bar{H}_{ij} = \bar{E}_i^T \bar{\omega}_{ij}^1 \bar{C}_{ij} \bar{A}_i + \bar{E}_j^T \bar{\omega}_{ij}^2 \bar{C}_{ij} \bar{A}_j \quad (29)$$

تعریف می‌گردد.

اثبات- تابع PWQ ناپیوسته رابطه (۲۰) را به عنوان تابع لیاپانوف کاندید در نظر بگیرید.

■ برای $i \in I_0$ و $x \in X_i$

رابطه (۲۳) معادل (۱۶) می‌باشد و تضمین می‌کند که $V_i(0) = 0$. از آنجایی که برای هر $x \in X_i$ داریم $x^T E_i^T Z_i E_i x > 0$ ، بنابراین رابطه (۲۵) معادل رابطه (۱۷) می‌باشد که به معنای مثبت بودن تابع لیاپانوف است. به همین صورت، رابطه (۲۷)، رابطه (۱۸) را نتیجه می‌دهد که معادل شرط منفی بودن مشتق تابع لیاپانوف است.

■ برای $i \notin I_0$ و $x \in X_i$

از آنجایی که برای $x \in X_i$ داریم $\bar{x}^T \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i \bar{x} > 0$ ، رابطه (۲۴)، (۱۷) را برآورده می‌کند که همان شرط مثبت بودن تابع لیاپانوف است. به همین صورت، رابطه (۲۶) ایجاب می‌کند که رابطه (۱۸) برقرار باشد.

■ برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$

بر اساس قضیه ۲ از [۲۵]، رابطه (۲۸) تضمین می‌کند که تابع لیاپانوف بر روی مرزهای سلول‌ها در راستای مسیر حالت غیر افزایشی خواهد بود. با توجه به روابط (۲۶) و (۲۷)، نرخ همگرایی تابع لیاپانوف درون X_i برابر α_i می‌باشد. از آنجایی که تابع لیاپانوف به ازای نقاط روی مرزهای سلول‌ها، افزایشی ندارد، بنابراین در کل فضای افراز شده $X = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i$ ، نرخ همگرایی $\min \alpha_i$ ، $i \in I$ ، برای تابع لیاپانوف تضمین می‌گردد. ■

۲-۴ طراحی کنترل کننده فیدبک حالت به کمک تابع

لیاپانوف PWQ ناپیوسته

در قضیه ۳، شرایط پایدارسازی سیستم (۸) با کنترل کننده فیدبک حالت (۷) به کمک تابع PWQ ناپیوسته رابطه (۲۰) به عنوان تابع لیاپانوف کاندید، ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 V_i(x) - V_j(x) = & \left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x} \right)^T C_{ij} \left((A_i + B_i M_i)x + (a_i + B_i m_i) \right) \\
 & + \left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x} \right)^T C_{ij} \left((A_j + B_j M_j)x + (a_j + B_j m_j) \right) \\
 & + \left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x} \right)^T C_{ij} \left((A_i + B_i M_i)x + (a_i + B_i m_i) \right) \\
 & + \left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x} \right)^T C_{ij} \left((A_j + B_j M_j)x + (a_j + B_j m_j) \right) \\
 = & 2 \left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x} \right)^T C_{ij} \left((A_i + B_i M_i)x + (a_i + B_i m_i) \right) \\
 & + 2 \left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x} \right)^T C_{ij} \left((A_j + B_j M_j)x + (a_j + B_j m_j) \right)
 \end{aligned} \quad (41)$$

که با تعریف $\omega_{ij}^2 = 2 \left((\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x} \right)^T$ و $\omega_{ij}^1 = 2 \left((\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x} \right)^T$ و جایگذاری آنها در تساوی (۴۱)، رابطه (۱۹) برای $f_i(x) = (A_i + B_i M_i)x + (a_i + B_i m_i)$ و $f_j(x) = (A_j + B_j M_j)x + (a_j + B_j m_j)$ بدست می‌آید. با برآورده شدن روابط (۱۶) تا (۱۹) و طبق قضیه ۱، پایداری نمایی سیستم حلقه بسته تضمین می‌گردد. بر طبق روابط (۳۳) و (۳۴)، نرخ همگرایی تابع لیپانوف درون X_i برابر α_i می‌باشد. از آنجایی که تابع لیپانوف به ازای نقاط روی مرزهای سلول‌ها افزایشی ندارد، بنابراین، سیستم (۸) کنترل‌کننده پیوسته (۷) با نقطه تعادل مبدأ مختصات پایدار نمایی است و نرخ همگرایی α_i ، $i \in I$ ، برای تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته در کل فضای افزاشده $X = \bigcup_{i \in I} \hat{X}_i$ ، تضمین می‌گردد. ■

تذکره ۴: در قضیه‌های ۲ و ۳، چنانچه به ازای هر $i, j \in I$ ، $\bar{\omega}_{ij}^1 = 0$ ، $\bar{\omega}_{ij}^2 = 0$ باشد، آنگاه شرایط پایداری سیستم، معادل با شرایط پایداری بر اساس تابع لیپانوف PWQ پیوسته می‌باشد.

۵- محاسبه تخمین ناحیه جذب

سیستم $\dot{x}(t) = f(x)$ با نقطه تعادل مبدأ مختصات را در نظر بگیرید. روش‌های مختلف تحلیلی و عددی زیادی جهت تخمین ناحیه جذب یک نقطه تعادل پایدار ارائه شده است. بسیاری از این روش‌ها مبتنی بر تعریف تابع لیپانوف است که به وسیله آن ناحیه جذب حول نقطه تعادل محاسبه می‌گردد. تابع لیپانوف معین مثبت $V(x)$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که تخمین ناحیه جذب، مسأله‌ای دشوار است عموماً زیرمجموعه‌ای از ناحیه جذب تخمین زده می‌شود. طبق قضیه لاسال برای مجموعه‌های پایا [۴۲]، مجموعه‌ی محدود $\Omega(c)$ که به صورت زیر تعریف شده است، مجموعه‌ی سطح تابع لیپانوف $V(x)$ و زیرمجموعه‌ای از ناحیه جذب سیستم می‌باشد.

$$\Omega(c) = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c, \forall c > 0\} \quad (42)$$

فرض کنید مجموعه‌ی D^- بصورت $D^- = \{x \in R^n \mid \dot{V}(x) < 0\}$ تعریف شود، واضح است که هر عضو مانند x روی مرز ناحیه‌ی D^- در رابطه $\dot{V}(x) = 0$ صدق می‌کند. اعضای از مجموعه $\Omega(c)$ که عضو

است. به همین صورت، رابطه (۳۴)، رابطه (۱۸) را نتیجه می‌دهد که معادل با شرط منفی بودن مشتق تابع لیپانوف است.

■ برای $x \in X_i$ و برای $i \notin I_0$:

از آنجایی که برای هر $x \in X_i$ ، $\bar{x}^T \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i \bar{x} > 0$ است، بنابراین رابطه (۳۱)، (۱۷) را برآورده می‌کند که همان شرط مثبت بودن تابع لیپانوف است. همچنین $\bar{x}^T \bar{E}_i^T \Lambda_i \bar{E}_i \bar{x} > 0$ و رابطه (۳۳) ایجاب می‌کند که رابطه (۱۸) برقرار باشد.

■ برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$:

بر اساس قضیه ۱، رابطه (۱۹) شرط کاهشی بودن تابع لیپانوف ناپیوسته چندگانه را بر روی مرزهای سیستم برآورده می‌کند. در ادامه با توجه به تعریف تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته، نشان می‌دهیم که رابطه (۳۵) معادل رابطه (۱۹) است. رابطه (۳۵) را از چپ در $\bar{s}^T$ و از راست در $\bar{s}$ ضرب می‌کنیم،

$$\bar{s}^T \bar{F}_{ij}^T (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \bar{F}_{ij} \bar{s} = \bar{s}^T \bar{F}_{ij}^T (\bar{\Gamma}_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^T) \bar{F}_{ij} \bar{s}$$

آنگاه با توجه به توصیف نواحی مرزی $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$ بر اساس رابطه (۱۰)، داریم:

$$\bar{x}^T (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \bar{x} = \bar{x}^T (\bar{\Gamma}_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^T) \bar{x} \quad (39)$$

که $\bar{\Gamma}_{ij}$ در رابطه (۳۹) بر اساس (۳۸) معادل گذاری می‌شود. سپس، با بازنویسی رابطه (۳۹) به کمک (۲۰) تساوی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 V_i(x) - V_j(x) = & \bar{x}^T \bar{E}_i^T \bar{\omega}_{ij}^1 \bar{C}_{ij} (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) \bar{x} \\
 & + \bar{x}^T \bar{E}_j^T \bar{\omega}_{ij}^2 \bar{C}_{ij} (\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j) \bar{x} \\
 & + \bar{x}^T (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i)^T \bar{C}_{ij}^T (\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x} \\
 & + \bar{x}^T (\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j)^T \bar{C}_{ij}^T (\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x}
 \end{aligned} \quad (40)$$

از آنجایی که برای $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$ ، $\bar{E}_i \bar{x} \geq 0$ و $\bar{E}_j \bar{x} \geq 0$ می‌باشد، بنابراین $(\bar{\omega}_{ij}^1)^T \bar{E}_i \bar{x}$ و $(\bar{\omega}_{ij}^2)^T \bar{E}_j \bar{x}$ مقادیر اسکالر نامنفی هستند و از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
 & \bar{C}_{ij} (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) \bar{x} \\
 = & [C_{ij} \quad c_{ij}] \begin{bmatrix} A_i + B_i M_i & a_i + B_i m_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \\
 = & C_{ij} ((A_i + B_i M_i)x + (a_i + B_i m_i))
 \end{aligned}$$

حال می‌توان رابطه (۴۰) را به شکل زیر بازنویسی نمود

D^- باشند مجموعه‌ای پایا را تشکیل می‌دهند و هر مسیر رها شده در آن به نقطه تعادل مبدأ مختصات همگرا خواهد شد. یک تخمین مناسب، بزرگ‌ترین ناحیه $\Omega(c)$ واقع در D^- است، چنانچه این تخمین مناسب با D_{est} نشان داده شود رابطه زیر برقرار است:

$$D_{est} = \Omega(c^*) \quad (43)$$

که در آن c^* مقدار ماکزیمم c است که به ازای آن $D_{est} \subseteq D^-$ باشد. برای محاسبه c^* مسأله بهینه‌سازی زیر حل می‌شود [۴۳]:

$$\begin{aligned} c^* &= \sup c \\ \text{s.t.} \\ \Omega(c) &\subseteq D^-, \\ D^- &= \{0\} \cup \{x \mid \dot{V}(x) < 0\} \end{aligned} \quad (44)$$

در [۴۴]، تخمین بهینه‌ای از ناحیه جذب سیستم‌های چندجمله‌ای به صورت

$$\Omega(c^*) = \sup_{V(x)} \text{volume}(\Omega(c)) \quad (45)$$

$$\text{s.t. } \dot{V}(x) < 0, \forall x \in \Omega(c), x \neq 0$$

ارائه شد که در آن $\text{volume}(\Omega(c))$ به حجم^۱ ناحیه $\Omega(c)$ اشاره دارد. بنابراین، تخمین بهینه‌ای از ناحیه جذب بوسیله ماکزیمم کردن حجم مجموعه‌ی سطح تابع لیپانوف حاصل می‌شود. قابل ذکر است که برای تابع لیپانوف مجذوری $V(x) = x^T P x$ ، تعریف شده در $X \subset R^n$ ، تساوی $\sup \text{volume}(\Omega(c)) = \min \text{trace}(P)$ برقرار است. با توجه به ساختار دوبعدی سیستم (۱)، ماکزیمم کردن حجم $\Omega(c)$ معادل با این است که مساحت $\Omega(c)$ در X ماکزیمم گردد. با بکارگیری تابع لیپانوف مجذوری مشترک برای سیستم (۱)، با $u=0$ ، تخمین بزرگ‌ترین ناحیه جذب سیستم با می‌نیم‌سازی $\text{trace}(P)$ ، که همان مجموع مقادیرهای ویژه P است، محاسبه می‌شود. البته همان‌طور که قبلاً ذکر شد، تابع لیپانوف مجذوری مشترک محافظه‌کاری بالایی در آنالیز و در نتیجه تخمین ناحیه جذب سیستم (۲۲) دارد. با توجه به ساختار قطعه‌ای آفاین سیستم (۱)، ناحیه جذب آن غیرمحدب است [۲۴]. در [۲۳، ۴۵، ۴۶]، برای یافتن تخمین بهینه ناحیه جذب سیستم‌های قطعه‌ای آفاین، مسأله بهینه‌سازی $\min_{i \in I} \text{trace}(P_i)$ مطرح شده است که در آن مسأله می‌نیم‌سازی مجموع $\text{trace}(P_i)$ با توجه به شرایط پایداری حل می‌گردد. در این مقاله پیشنهاد می‌شود که مسأله بهینه‌سازی با هدف می‌نیم‌سازی بزرگ‌ترین $\text{trace}(\bar{P}_i)$ لحاظ گردد. در ادامه تابع لیپانوف مناسب جهت تخمین و توسعه ناحیه جذب با حل دو مسأله بهینه‌سازی BMI به ترتیب برای سیستم حلقه باز (۲۲) و سیستم حلقه بسته (۸) با ورودی کنترل (۷)، در قالب مسأله ۱ و مسأله ۲، بدست می‌آید.

مسأله ۱: مسأله بهینه‌سازی تخمین ناحیه جذب سیستم (۲۲)، حول مبدأ مختصات بر اساس تعاریف ارائه شده در قضیه ۲، با هدف محاسبه

$$\begin{aligned} \min \gamma \\ \text{s.t.} \\ \gamma > 0, \\ \text{trace}(\bar{P}_i) &\leq \gamma, \forall i \in I, \\ q_i &= 0, r_i = 0, \forall i \in I_0, \\ \bar{P}_i - \varepsilon I_3 - \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i &> 0, \forall i \in I, i \notin I_0, \\ P_i - \varepsilon I_2 - E_i^T Z_i E_i &> 0, \forall i \in I_0, \\ \bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + \bar{E}_i^T \Lambda_i \bar{E}_i + \alpha_i \bar{P}_i &< 0, \\ \forall i \in I, i \notin I_0, \\ A_i^T P_i + P_i A_i + E_i^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i &< 0, \forall i \in I_0, \\ \bar{F}_{ij}^T (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \bar{F}_{ij} &= \bar{F}_{ij}^T (\bar{H}_{ij} + \bar{H}_{ij}^T) \bar{F}_{ij} \\ \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} &\neq 0, \end{aligned} \quad (46)$$

مسأله ۲: مسأله بهینه‌سازی زیر در خصوص توسعه ناحیه جذب سیستم حلقه بسته (۸) با طراحی کنترل کننده فیدبک حالت پیوسته (۷) بر اساس تعاریف ارائه شده در قضیه ۳ و با هدف محاسبه $\bar{M}_i$ ، $\bar{Z}_i$ ، γ ، $\bar{P}_i$ ، $\bar{\omega}_{ij}^1$ ، $\bar{\omega}_{ij}^2$ و α_i برای $i \in I$ پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \gamma \\ \text{s.t.} \\ \gamma > 0, \\ \text{trace}(\bar{P}_i) &\leq \gamma, \forall i \in I, \\ q_i &= 0, r_i = 0, \forall i \in I_0, \\ \bar{P}_i - \varepsilon I_3 - \bar{E}_i^T Z_i \bar{E}_i &> 0, \forall i \in I, i \notin I_0, \\ P_i - \varepsilon I_2 - E_i^T Z_i E_i &> 0, \forall i \in I_0, \\ (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i)^T \bar{P}_i + \bar{P}_i (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) \\ + \bar{E}_i^T \Lambda_i \bar{E}_i + \alpha_i \bar{P}_i &< 0, \forall i \in I, i \notin I_0, \\ (A_i + B_i M_i)^T P_i + P_i (A_i + B_i M_i) \\ + E_i^T \Lambda_i E_i + \alpha_i P_i &< 0, \forall i \in I_0, \\ \bar{F}_{ij}^T (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \bar{F}_{ij} &= \bar{F}_{ij}^T (\bar{\Gamma}_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^T) \bar{F}_{ij} \\ \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} &\neq 0, \\ (\bar{M}_i - \bar{M}_j) \bar{F}_{ij} &= 0, \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} \neq 0, \\ (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{M}_i) \bar{F}_{ij} &= (\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{M}_j) \bar{F}_{ij} \\ \forall i \in I, j \in N_i, F_{ij} &\neq 0, \end{aligned} \quad (47)$$

تذکر ۵: بزرگترین تخمین ناحیه جذب سیستم (۱)، متناظر با تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته بدست آمده از مسأله ۱ و ۲، مجموعه سطح $\Omega(c^*)$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

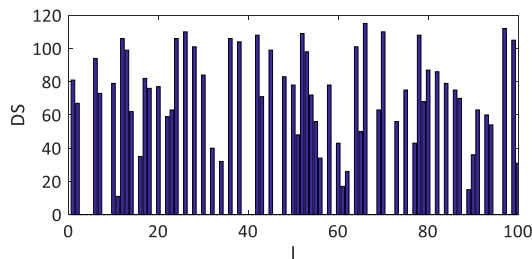
$$D_{est} = \Omega(c^*) = \{x \mid \bar{x}^T \bar{P}_i \bar{x} \leq c^*, x \in X_i, i \in I\} \quad (48)$$

واضح است که $D_{est} \subseteq X$ است و c^* بزرگ‌ترین مقداری است که به ازای آن مجموعه‌ی سطح $\Omega(c)$ در فضای X محصور می‌گردد.

به کمک توابع لیپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته، مقایسه‌ای منصفانه میان این دو روش تخمین ناحیه جذب سیستم صورت گیرد. بدین منظور، صد سیستم قطعه‌ای آفاین مطابق با توصیف فوق بطور تصادفی تولید شده است و مسأله ۱ برای این سیستم‌ها توسط YALMIP حل می‌گردد [۴۷]. برای l امین سیستم، $1 \leq l \leq 100$ ، مساحت ناحیه جذب بهینه حاصل از تابع لیپانوف PWQ پیوسته را $S_C(l)$ و مساحت ناحیه جذب بهینه حاصل از تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته را $S_D(l)$ در نظر بگیرید. تفاضل این دو مساحت به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$DS = S_D(l) - S_C(l) \quad (52)$$

در شکل ۱، نمودار میله‌ای DS بر حسب l رسم شده است.



شکل ۱: نمودار میله‌ای تفاضل مساحت DS بر حسب l

با توجه به شکل ۱، از میان یک‌صد سیستم منتخب، تعداد شصت و یک سیستم با استفاده از تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته در مقایسه با روش پیوسته متناظرش به تخمین بزرگتری از ناحیه جذب رسیده‌اند و در باقی سیستم‌ها ناحیه جذب یکسان بدست آمده است. این مثال نشان می‌دهد که روش پیشنهادی بهبود قابل ملاحظه‌ای در تخمین ناحیه جذب سیستم حلقه باز و کاهش محافظه کاری ایجاد کرده که این کاهش بدلیل خفیف کردن^۱ شرط پیوستگی تابع لیپانوف بر روی مرزها می‌باشد.

مثال ۲- سیستم قطعه‌ای آفاین با اشیاع واحد زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sat}(x_1 - x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (53)$$

$$, |x_1| \leq 3, |x_2| \leq 3$$

در این مثال حل دو مسأله ۱ و ۲ و محاسبه تخمین بهینه ناحیه جذب سیستم به کمک تابع لیپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته مورد نظر است. حل مسأله توسط PENBMI انجام شده است [۴۸]. با حل مسأله ۱، مساحت تخمین‌های بهینه برای ناحیه جذب سیستم حول مبدأ مختصات برای هر دو تابع لیپانوف پیوسته و ناپیوسته تقریباً یکسان می‌باشد که در شکل ۲ قابل مشاهده است.

با توجه به ساختار دوبعدی سیستم (۱)، مجموعه‌ی بسته‌ی $\Omega(c^*) = \{x | \bar{x}^T \bar{P}_i \bar{x} \leq c^*, x \in X_i, i \in I\}$ دارای بیشترین مساحت در ناحیه کاری X می‌باشد که همان تخمین بهینه ناحیه جذب است. برای انتخاب c^* الگوریتمی نوشته شده است که c را با عدد اسکالر مثبت کوچکی مقداردهی اولیه می‌کند و سپس در گام‌های بعدی هر بار مقدار c را اندکی افزایش می‌دهد. c^* اولین مقداری است که به ازای آن $\Omega(c)$ بر مرزهای X مماس می‌شود.

با توجه به تذکر ۴، با فرض $\bar{\omega}_{ij}^1 = 0, \bar{\omega}_{ij}^2 = 0$ و حل دو مسأله ۱ و ۲، می‌توان ناحیه جذب بهینه سیستم (۱) حول مبدأ مختصات را توسط تابع لیپانوف PWQ پیوسته نیز بدست آورد. انتظار می‌رود که تخمین‌های بهینه بدست آمده به کمک تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته بزرگتر از تخمین‌های بهینه بدست آمده توسط تابع لیپانوف PWQ پیوسته باشد، زیرا تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته محدودیت کمتری نسبت به تابع لیپانوف PWQ پیوسته دارد که در آن $\bar{\omega}_{ij}^1$ و $\bar{\omega}_{ij}^2$ فقط مقادیر صفر را می‌پذیرد. این موضوع با ارائه دو مثال در بخش شبیه‌سازی بررسی می‌شود.

۶- نتایج شبیه‌سازی

مثال ۱- سیستم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + e \text{sat}(x_1 + x_2) \\ |x_1| \leq 10, |x_2| \leq -10 \end{cases} \quad (49)$$

را در نظر بگیرید که در آن تابع $\text{sat}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ x & -1 < x < 1 \\ -1 & x \leq -1 \end{cases} \quad (50)$$

به دلیل وجود تابع $\text{sat}(x)$ دامنه به سه زیرناحیه زیر افراز می‌شود

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq -1\}, \\ \hat{X}_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1\}, \\ \hat{X}_3 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1\} \end{aligned}$$

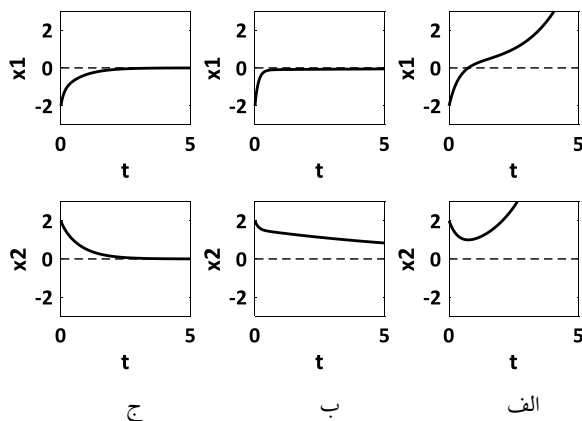
که در آن $I = \{1, 2, 3\}$ و $I_0 = 2$. همچنین، برای زیرسیستم

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c+e & d+e \end{bmatrix} x, -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1 \quad (51)$$

که در ناحیه $\hat{X}_2$ تعریف شده و شامل مبدأ مختصات است، مقداردهی تصادفی متغیرهای a, b, c, d, e به گونه‌ای انجام شده است که این زیرسیستم پایدار باشد. واضح است که با وجود پایداری زیرسیستم (۲)، هیچ تضمینی برای پایداری این مجموعه از سیستم‌ها وجود ندارد. هدف این مثال این است که با تولید تعداد زیادی سیستم و حل مسأله ۱ برای آنها

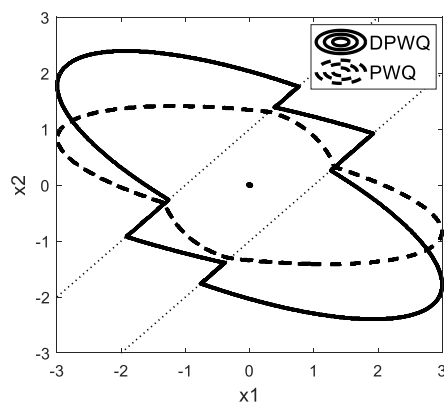
¹ relaxation

می‌شود، سیستم ناپایدار (۵۳) به کمک کنترل کننده فیدبک حالت پایدار شده است.



شکل ۳: مسیرهای حالت رسم شده به ازای شرط اولیه $x_0 = [-2 \ 2]^T$ برای (الف) سیستم حلقه باز (ب) سیستم حلقه بسته پایدار شده توسط تابع لیپانوف PWQ (پیوسته ج) سیستم حلقه بسته پایدار شده توسط تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته

ناحیه‌های جذب توسعه یافته سیستم حلقه بسته متناظر با توابع لیپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته در شکل ۴ به تصویر کشیده است و مساحت حاصل از آنها نیز در جدول ۱ آورده شده است.

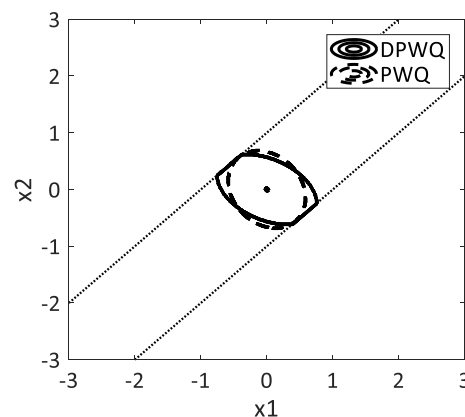


شکل ۴: ناحیه جذب گسترش یافته سیستم حلقه بسته به کمک تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته (خط ضخیم) و به کمک تابع لیپانوف PWQ پیوسته (خط چین)

جدول ۱: مساحت ناحیه جذب توسعه یافته بهینه برای توابع لیپانوف PWQ پیوسته و ناپیوسته

Lyapunov function Type	Areas of the DA
Continuous PWQ	10.54
Discontinuous PWQ	16.42

با توجه به جدول ۱، مساحت ناحیه جذب توسعه یافته بهینه برای تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته برابر ۱۶/۴۲ و برای تابع لیپانوف PWQ پیوسته برابر ۱۰/۵۴ محاسبه می‌گردد که مؤید این نکته است که استفاده از تابع



شکل ۵: ناحیه جذب سیستم حلقه باز به کمک تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته (خط ضخیم) و به کمک تابع لیپانوف PWQ پیوسته (خط چین)
با حل مسأله ۲، به ازای هر $i \in I$ ، ضرایب کنترل کننده فیدبک حالت $\bar{M}_i$ و ماتریس‌های $\bar{P}_i$ متناظر با تابع لیپانوف PWQ پیوسته به صورت زیر بدست آمده است:

$$\bar{M}_1 = [-4.6589 \ -13.2212 \ 8.4244]$$

$$\bar{M}_2 = [-5.9894 \ -1.5082 \ 0]$$

$$\bar{M}_3 = [-4.6589 \ -13.2212 \ -8.4244]$$

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & -2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & -6.2849 \\ -2.4619 & -6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 13.2875 & 0.9908 \\ 0.9908 & 13.7096 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & 2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & 6.2849 \\ 2.4619 & 6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$

و همچنین ماتریس‌های $\bar{M}_i$ و $\bar{P}_i$ متناظر با تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته به صورت زیر بدست آمده است.

$$\bar{M}_1 = [-0.4708 \ -3.0561 \ 2.8199]$$

$$\bar{M}_2 = [-8.5203 \ -7.3693 \ 0]$$

$$\bar{M}_3 = [-0.4708 \ -3.0561 \ -2.8199]$$

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & -2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & -6.2849 \\ -2.4619 & -6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 13.2875 & 0.9908 \\ 0.9908 & 13.7096 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 2.0541 & 3.4774 & 2.4619 \\ 3.4774 & 19.9699 & 6.2849 \\ 2.4619 & 6.2849 & 6.3095 \end{bmatrix}$$

در شکل ۳، به ترتیب مسیرهای حالت سیستم حلقه باز، سیستم حلقه بسته پایدار شده به کمک تابع لیپانوف PWQ پیوسته و سیستم حلقه بسته پایدار شده به کمک تابع لیپانوف PWQ ناپیوسته با شرط اولیه

- [7] S. Sundar, "Effect of Elevated Carbon Dioxide Concentration on Plant Growth: A Mathematical Model," *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 3, pp. 59-67, 2015.
- [8] J. Haddad and N. Geroliminis, "On the stability of traffic perimeter control in two-region urban cities," *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 46, pp. 1159-1176, 2012.
- [9] A. Bemporad, "Efficient conversion of mixed logical dynamical systems into an equivalent piecewise affine form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 832-838, 2004.
- [۱۰] ملا محمدیان کاسب حامد، کریم پور علی، پرز ناصر. سیستم های تکه ای خطی تبار مستقیم: کلاس جدیدی از سیستم های هایبرید با دینامیک های خطی تبار و مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم. *مجله کنترل*. ۱۳۹۱؛ ۶(۱): ۲۱-۲۹.
- [11] N. Eghbal, N. Pariz, and A. Karimpour, "Uniform modeling of parameter dependent nonlinear systems," *Journal of Zhejiang University SCIENCE C*, vol. 13, pp. 850-858, 2012.
- [۱۲] کشوری خور هادی، کریم پور علی، پرز ناصر. شناسایی سیستم های سوئیچ شونده خطی با استفاده از نگاشت معادلات خطی همزمان. *مجله کنترل*. ۱۳۹۳؛ ۸(۱): ۲۱-۳۰.
- [13] J. H. Richter, W. Heemels, N. van de Wouw, and J. Lunze, "Reconfigurable control of piecewise affine systems with actuator and sensor faults: stability and tracking," *Automatica*, vol. 47, pp. 678-691, 2011.
- [14] L. Khodadadi, B. Samadi, and H. Khaloozadeh, "Estimation of region of attraction for polynomial nonlinear systems: A numerical method," *ISA transactions*, 2013.
- [15] H. K. Khalil and J. Grizzle, *Nonlinear systems vol. 3: Prentice hall Upper Saddle River*, 2002.
- [16] Y. Chen, Y. Sun, C.-S. Tang, Y.-G. Su, and A. P. Hu, "Characterizing regions of attraction for piecewise affine systems by continuity of discrete transition functions," *Nonlinear Dynamics*, vol. 90, pp. 2093-2110, 2017.
- [17] Y. Chen, Y. Sun, C. Tang, Y. Su, and A. P. Hu, "Computing Regions of Stability for Limit Cycles of Piecewise Affine Systems," *Information Technology And Control*, vol. 46, pp. 459-469, 2017.
- [18] M. Johansson and A. Rantzer, "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 43, pp. 555-559, 1998.
- [19] B. Samadi and L. Rodrigues, "A unified dissipativity approach for stability analysis of piecewise smooth systems," *Automatica*, vol. 47, pp. 2735-2742, 2011.
- [20] H. Nakada and K. Takaba, "Local stability analysis of piecewise affine systems," *Rn*, vol. 10, p. 1, 2003.

لیاپانوف PWQ ناپیوسته در مقایسه با روش پیوسته متناظرش به تخمین بزرگتری از ناحیه جذب منجر شده است.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، با طراحی کنترل کننده فیدبک حالت، ناحیه جذب سیستم های قطعه ای آفاین دوبعدی و زمان-پیوسته توسعه داده شد. روش پیشنهادی شامل استفاده از تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته برای تخمین و گسترش ناحیه جذب و یافتن بزرگترین تخمین یا تخمین بهینه ناحیه جذب به کمک مجموعه ی سطح تابع لیاپانوف بود. مسأله های تخمین ناحیه جذب سیستم حلقه باز و حلقه بسته در قالب BMI حل شد. سپس، بزرگترین مجموعه ی سطح تابع لیاپانوف محصور شده در فضای کاری محاسبه گردید و به عنوان تخمین بهینه ناحیه جذب لحاظ شد. محاسبه تخمین بهینه ناحیه جذب به کمک تابع لیاپانوف PWQ ناپیوسته، از انعطاف بیشتری نسبت به روش پیوسته ی متناظرش برخوردار بود زیرا شرط پیوستگی تابع لیاپانوف بر روی مرز شرطی محافظه کارانه است که این موضوع در قالب مثال به تصویر کشیده شد. از آنجایی که تابع لیاپانوف PWQ پیوسته از جمله موثرترین و رایج ترین نوع توابع جهت آنالیز پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم های قطعه ای آفاین می باشد، با جایگزینی قیود پیوستگی تابع لیاپانوف با قیدی با محافظه کاری کمتر، نتایج بهتری حاصل شد.

مراجع

- [1] P. Siewniak and B. Grzesik, "A generalized geometrical piecewise-affine model of DC-DC power electronic converters," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 43, pp. 342-373, 2015.
- [2] P. Siewniak and B. Grzesik, "The piecewise-affine model of buck converter suitable for practical stability analysis," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 43, pp. 3-21, 2015.
- [۳] کاردهی مقدم ریحانه، پرز ناصر، مدیر شانه چی حسن، وحیدیان کامیاد علی. افزایش زمان بحرانی سیستم های غیر خطی بوسیله گسترش جهت دار ناحیه جذب. *مجله کنترل*. ۱۳۸۹؛ ۴(۲): ۱-۱۰.
- [4] S. Anbu and N. Jaya, "Design of gain scheduling adaptive control for continuous stirred tank reactor," *International Journal of Automation and Control*, vol. 8, pp. 141-157, 2014.
- [5] A. Chakraborty, P. Seiler, and G. J. Balas, "Nonlinear region of attraction analysis for flight control verification and validation," *Control Engineering Practice*, vol. 19, pp. 335-345, 2011.
- [6] M. L. Matthews and C. M. Williams, "Region of attraction estimation of biological continuous Boolean models," in *Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2012 IEEE International Conference on*, 2012, pp. 1700-1705.

- [34] J. Raouf and L. Rodrigues, "Stability and stabilization of piecewise-affine slab systems subject to Wiener process noise," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, pp. 949-960, 2015.
- [35] H. Razavi, K. Merat, H. Salarieh, A. Alasty, and A. Meghdari, "Observer based minimum variance control of uncertain piecewise affine systems subject to additive noise," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 19, pp. 153-167, 2016.
- [36] Y. Eren, J. Shen, and K. Camlibel, "Quadratic stability and stabilization of bimodal piecewise linear systems," *Automatica*, vol. 50, pp. 1444-1450, 2014.
- [37] M. di Bernardo, U. Montanaro, R. Ortega, and S. Santini, "Extended hybrid model reference adaptive control of piecewise affine systems," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 21, pp. 11-21, 2016.
- [38] M. Rubagotti, L. Zaccarian, and A. Bemporad, "A Lyapunov method for stability analysis of piecewise-affine systems over non-invariant domains," *International Journal of Control*, vol. 89, pp. 950-959, 2016.
- [39] P. Li, J. Lam, and K. C. Cheung, "Stability, stabilization and L2-gain analysis of periodic piecewise linear systems," *Automatica*, vol. 61, pp. 218-226, 2015.
- [40] L. Rodrigues, *Dynamic output feedback controller synthesis for piecewise-affine systems*: Stanford University, 2002.
- [41] S. Pettersson and B. Lennartson, "Exponential stability of hybrid systems using piecewise quadratic Lyapunov functions resulting in LMIs," in *IFAC, 14th Triennial World Congress*, Beijing, PR China, 1999.
- [42] J. P. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method: with applications* vol. 4: Academic Press New York, 1961.
- [43] O. Hachicho, "A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 344, pp. 535-552, 2007.
- [44] G. Chesi, *Domain of attraction: analysis and control via SOS programming* vol. 415: Springer Science & Business Media, 2011.
- [45] M. Johansson, "Piecewise quadratic estimates of domains of attraction for linear systems with saturation," in *CD-ROM of 15th IFAC World Congress*, 2002.
- [46] T. González and M. Bernal, "Progressively better estimates of the domain of attraction for nonlinear systems via piecewise Takagi-Sugeno models: Stability and stabilization issues," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 297, pp. 73-95, 2016.
- [21] R. Iervolino, F. Vasca, and L. Iannelli, "Cone-copositive piecewise quadratic lyapunov functions for conewise linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, pp. 3077-3082, 2015.
- [22] M. Johansson, "Analysis of piecewise linear system via convex optimization-a unifying approach," in *Proceedings of the 1999 IFAC World Congress*, 1999, pp. 521-526.
- [23] M. K.-J. Johansson, *Piecewise linear control systems: a computational approach* vol. 284: Springer, 2003.
- [24] J. Xu and L. Xie, "Homogeneous polynomial Lyapunov functions for piecewise affine systems," in *American Control Conference*, 2005. *Proceedings of the 2005*, 2005, pp. 581-586.
- [25] N. Eghbal, N. Pariz, and A. Karimpour, "Discontinuous piecewise quadratic Lyapunov functions for planar piecewise affine systems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 399, pp. 586-593, 2013.
- [26] T. González and M. Bernal, "Progressively better estimates of the domain of attraction for nonlinear systems via piecewise Takagi-Sugeno models: Stability and stabilization issues," *Fuzzy Sets and Systems*, 2015.
- [27] S. Gering, L. Eciolaza, J. Adamy, and M. Sugeno, "A piecewise approximation approach to nonlinear systems: Stability and region of attraction," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, pp. 2231-2244, 2015.
- [28] R. Iervolino, D. Tangredi, and F. Vasca, "Lyapunov stability for piecewise affine systems via cone-copositivity," *Automatica*, vol. 81, pp. 22-29, 2017.
- [29] A.-T. Nguyen, M. Sugeno, V. Campos, and M. Dambrine, "LMI-based stability analysis for piecewise multi-affine systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 25, pp. 707-714, 2017.
- [30] L. Rodrigues and S. Boyd, "Piecewise-affine state feedback for piecewise-affine slab systems using convex optimization," *Systems & Control Letters*, vol. 54, pp. 835-853, 2005.
- [31] K. Liu, Y. Yao, D. Sun, and V. Balakrishnan, "Improved state feedback controller synthesis for piecewise-linear systems," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 8, pp. 6945-6957, 2012.
- [32] A. Benine-Neto, S. Mammar, B. Luseti, and S. Scalzi, "Piecewise affine control for lane departure avoidance," *Vehicle System Dynamics*, vol. 51, pp. 1121-1150, 2013.
- [33] N. Dadkhah and L. Rodrigues, "Non-fragile state-feedback control of uncertain piecewise-affine slab systems with input constraints: a convex optimisation approach," *IET Control Theory & Applications*, vol. 8, pp. 626-632, 2014.

-
- [47] J. Lofberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on, 2004, pp. 284-289.
- [48] D. Henrion, J. Lofberg, M. Kocvara, and M. Stingl, "Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI," in Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on, 2005, pp. 7581-7586.

تشخیص الفبای دستی فارسی ناشنوایان مبتنی بر اطلاعات نرمال سازی شده در تصاویر ژرفا

شهاب رجبی^۱، امیر موسوی نیا^۲

^۱ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه الکترونیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، sh.rajabi@ee.kntu.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی کامپیوتر، گروه معماری کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، moosavie@kntu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱۰

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۹/۱۰

دریافت: ۱۳۹۷/۰۶/۱۰

چکیده: پس از ارائه دستگاه کینکت، محصول شرکت مایکروسافت گزارشهای بسیاری از کاربرد این دستگاه در تشخیص حالت دست و انگشتان منتشر شده است. در بیشتر این کاربرد ها اطلاعات ژرفا تنها برای جداسازی تصویر دست از پس زمینه استفاده شده و پردازش اصلی بر روی تصاویر ویدیویی و در فضای دو بعدی انجام شده است. در این مقاله روشی ارائه می شود که اطلاعات ژرفا نقش پر رنگ تری در پردازش دارند. با کمک روش آستانه گذاری مبتنی بر ژرفا، ابتدا قالب دست شخص در فضای سه بعدی استخراج می شود. سپس در فضای سه بعدی، راستای عمود بر کف دست پیدا شده و با استفاده از ماتریسهای دوران و انتقال، این راستا با راستای دوربین همسو می شود. به این ترتیب دورانه های دست حول محورهای پیچ و یافاز تصویر حذف شده و با استفاده از ماتریس انتقال، تصویر دست در فاصله مشخصی از دوربین قرار می گیرد. در مرحله بعد، از دو ابزار تبدیل موجک و یک توصیفگر جدید به نام توصیفگر دایروی که در این سیستم معرفی شده است برای استخراج ویژگی ها استفاده می شود. یک شبکه های عصبی، غربالگری اولیه را در ویژگی های استخراج شده توسط تبدیل موجک انجام داده و سپس توصیفگر دایروی با استفاده از ماشین بردار پشتیبان بازنمایی حرف موردنظر را به اتمام می رساند. در آزمایشهای عملی با کمک اطلاعات برخط سنسور کینکت دقت شناسایی حروف الفبای فارسی ۹۶/۷٪ و تاخیر ۲ ثانیه برای هر علامت بدست آمده است.

کلمات کلیدی: الفبای ایستای فارسی ناشنوایان، سنسور کینکت، تبدیل موجک، توصیفگر دایروی، شبکه عصبی

Persian sign language detection based on normalized depth image information

Shahab Rajabi, Amir Mousavinia

Abstract: There are many reports of using the Kinect to detect hand and finger gestures after release of device by Microsoft. The depth information is mostly used to separate the hand image in the two-dimension of RGB domain. This paper proposes a method in which the depth information plays a more dominant role. Using a threshold in depth space first the hand template is extracted. Then in 3D domain the perpendicular vector to the hand surface is found. Using the rotation matrix all the rotations along three axes are compensated in a way that the camera z- coordinate lies perpendicular to hand surface. Then the resulted 3d image is translated to a distance of 80 to 100 cm from the Kinect. Wavelet transform with a new descriptor, called Circular Descriptor are used to extract required features. A trained MLP neural network in conjunction with a SVM is used to classify the signs. Empirical results show an average accuracy of 96.7 % with a two seconds delay for online recognition of Persian Sign Language.

Keywords: Persian sign language, deaf people, Kinect sensor, wavelet, circular descriptor.

۱- مقدمه

امروزه بازشناسی زبان اشاره ناشنوایان به یک حوزه تحقیقاتی در حال رشد تبدیل شده و تحقیقات زیادی در زمینه تشخیص ژست دست و شناسایی الفبای ناشنوایان صورت گرفته است. استفاده از تصاویر ویدئو و دستکشهای رنگی و یا نشان گذاری شده بسیار متداول است. در اغلب این روش‌ها، مجموعه‌ای از بردارهای ویژگی، یک فضای با ابعاد بالاتر را تشکیل می‌دهند که در آن احتمال طبقه‌بندی بهتر الگو افزایش می‌یابد [۱]. مدلسازی هندسی دست با در نظر گرفتن ساختار اسکلت آن نیز با موفقیت برای شناسایی حرکات و موقعیت دست نسبت به دوربین استفاده شده است [۲،۳].

اخیرا همراه با ارائه حسگرهای ژرفای ارزان قیمت مانند کینکت، محصول شرکت مایکروسافت، بازشناسی زبان اشاره بر اساس اطلاعات تصویر ژرفا به دلیل ارائه یک مدل سه بعدی نسبتا دقیق و عدم نیاز به پوشیدن دست‌کش و یا رنگ آمیزی خاص، مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. بازشناسی بر اساس اطلاعات ژرفا معمولا دقیقتر بوده و گستره‌ی بیشتری از لغات را در مقایسه با تصاویر رنگی دو بعدی در بر می‌گیرد [۴،۵]. کینکت علاوه بر تصویر ژرفا می‌تواند به کمک دوربین رنگی خود که محورش قدری با محور دوربین ژرفا متفاوت است، تصاویر ویدیوی دو بعدی را نیز ارائه دهد.

ورما و همکارانش [۶] روشی را ارائه کرده‌اند که با استفاده از حسگر کینکت، همزمان با حرکت دست کاربر به داخل صحنه، ضبط و پردازش تصاویر شروع شده و تا زمانی که هر دو دست کاربر پایین برود این رویه را ادامه می‌دهد. سپس تمام این فریمهای ضبط شده برای ترجمه توسط سیستم استفاده می‌شوند.

آقای یانگ نیز با استفاده از تصویر ژرفای کینکت مایکروسافت و ارائه یک میدان تصادفی شرطی سلسله مراتبی، ابتدا علامتهای حرکات دست را شناسایی و سپس با کمک یک نقشه‌ی تقویت شده، تشخیص نهایی را انجام می‌دهد [۷].

در روشی دیگر بر مبنای کینکت، از یک کدگذاری برای مدل سازی اشارات مختلف دست استفاده می‌شود. در این روش با توجه به تفاوت بین اشاره‌ها، با انتخاب تعدادی از نمونه‌ها در هر دسته از نشانه‌ها آموزش انجام می‌شود. سپس در هر فریم از ویدئوی جدید میزان شباهت با نمونه‌های آموزش دیده بررسی می‌شود. در نهایت بهترین نمونه‌ها برای یک چارچوب فرمول بندی شده و بطور هم‌زمان یک طبقه‌بند ویدیویی برای تشخیص علائم تولید می‌شود [۸].

بنگيو نیز از اطلاعات به دست آمده از ژرفا توسط کینکت، با الگوریتم SAE^۱ به فرآیند آموزش ویژگی‌ها پرداخته و با استفاده از الگوریتم آنالیز مولفه‌های اصلی^۲ تحت طبقه‌بندی ماشین بردار پشتیبان^۳ دقت نتایج خود را افزایش می‌دهد [۹]. در روشی دیگر از یک شبکه عصبی کانولوشن به جای ساختن ویژگی‌های پیچیده استفاده شده که به طور خودکار ویژگی‌ها را استخراج می‌کند و توانسته است با دقت ۹۱/۷٪ الفبای اشاره ایتالیایی را با استفاده از کینکت به دست آورد.

روش‌های اشاره شده غالبا اطلاعات زمانی را مدل می‌نمایند و قادر به انطباق گستره وسیعی از کلمات اشاره نیستند. برای حل این مشکل با توجه به اینکه حافظه طولانی کوتاه مدت می‌تواند اطلاعات توالی زمانی را به خوبی مدل کند، در [۱۰] با روش هدف-به-هدف، بازشناسی زبان اشاره بر اساس LSTM^۴ پیشنهاد شده است. این روش با توجه به مسیرهای حرکتی، چهار مفصل اسلکتی به عنوان ورودی و بدون در نظر گرفتن دانش پیشین و عاری از ویژگی‌های صریح استفاده می‌شود.

آلمدیا روشی برای بازشناسی الفبای برزیلی ناشنوایان ارائه داده است که در ابتدا هفت ویژگی بینایی از تصاویر RGB به دست می‌آورد. هر ویژگی مربوط به یک، دو یا سه عنصر ساختاری در الفبای اشاره برزیلی^۵ است. سپس رابطه بین ویژگی‌های استخراج شده و عناصر ساختاری بر اساس شکل حرکت و موقعیت آن محاسبه می‌شود. در پایان بوسیله طبقه‌بند بردار پشتیبان، بازشناسی انجام می‌شود. نتایج دقت ۸۰٪ را در این الگوریتم نشان می‌دهد [۱۱].

فیلترهای ذره‌ای نیز در بازشناسی ژست انسان نقش ویژه‌ای دارند. لیم در یک تحقیق، یک فیلتر سریالی مبتنی بر ماتریس کوواریانس را برای تشخیص زبان اشاره پیشنهاد داده است. پس از انجام مراحل پیش پردازش و رجدا سازی دست، با کمک این فیلتر دست در دنباله‌ای از فریم‌ها علامت گذاری شده و به صورت هم‌زمان هر دو دست ردیابی می‌شود. سپس با تولید ماتریس کوواریانس ویژگی اطراف ناحیه ردیابی شده و کاهش ابعاد، بازشناسی زبان اشاره آمریکایی با نرخ ۸۷/۳۳٪ انجام می‌دهد [۱۲].

ژایو نیز مدل رفتاری را با یک گراف برچسب گذاری نموده و طبقه‌بندی را با تطابق گراف از یک پایگاه داده و تصویر ورودی انجام می‌دهد [۱۳]. برای جلوگیری از پیچیدگی‌های این تطابق، یک کرنل گراف برای افزایش سرعت و همچنین دقت بالاتر معرفی می‌شود. برای جلوگیری از چالش تشخیص علامت‌ها در توالی‌های به هم پیوسته ویدیویی از یک رویکرد در مدل سازی علامت‌های زیرمجموعه‌ای استفاده شده است. این چارچوب با ترکیبی از تکنیک‌های خوشه‌بندی فضایی-زمانی و انحراف پویای زمانی کار می‌کند. از آنجایی که زبان اشاره شامل هر دو بردار ویژگی فضا و زمان است از پراکندگی زمان پویا برای اندازه‌گیری فاصله بین دو نشانه مجاور استفاده می‌شود. این فاصله به عنوان یک بردار ویژگی زمانی در هنگام خوشه‌بندی بردارهای ویژگی فضایی با استفاده از خوشه‌بندی مینیمم بی‌نظمی^۶ مورد استفاده قرار می‌گیرد. این فرآیند به صورت بازگشتی انجام می‌شود تا تمام حرکات میانی را به صورت پویا بدون استفاده از مدل سازی صریح یا ضمنی خوشه‌بندی کند [۱۴].

در زمینه تشخیص الفبای ناشنوایان فارسی گزارش‌های زیادی وجود ندارد. اما یکی از بهترین سیستم‌های موجود در [۱۵] معرفی شده که با استفاده از تبدیل موجک و شبکه‌های عصبی، از تصاویر ویدیوی حاصل از یک دوربین دیجیتال اقدام به بازشناسی الفبای ناشنوایان می‌نماید. ابتدا قسمت‌های اضافی عکس‌های رنگی حذف شده، اندازه‌ی آنها تغییر کرده و به حالت سیاه و سفید تبدیل می‌شوند. سپس تبدیل

⁴ Momory Term – short Long

⁵ Brazilian Sign Language

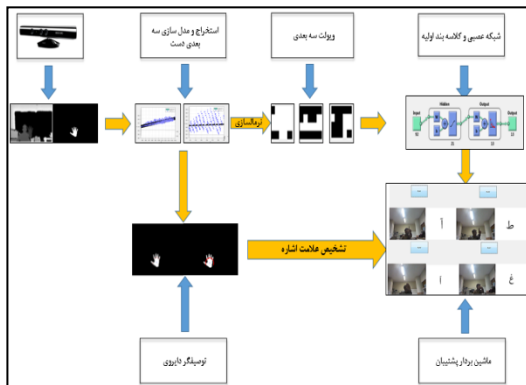
⁶ Minimum Entropy Clustering

¹ Sparse-Auto Encoder

² Principal Component Analysis

³ Support Vector Machine

دست کاربر در فضای سه بعدی به دست آمده و سپس با دوران و انتقال دستگاهها در فضای سه بعدی راستای عمود بر کف دست با راستای دوربین کینکت موازی می‌شود. در بخش سوم و به شکل موازی دو سری ویژگی هندسی از دست استخراج می‌شود. ویژگی نخست از توصیفگر دایروی پیشنهادی این مقاله و ویژگی دوم از ضرایب تبدیل موجک اطلاعات دست در فضای سه بعدی به دست می‌آیند. در بخش چهارم نیز با ترکیب همزمان شبکه عصبی و ماشین بردار پشتیبان شناسایی انجام می‌شود. در ادامه هر یک از مراحل فوق با جزئیات بیشتر شرح داده می‌شوند.



شکل (۱) بلوک دیاگرام روش پیشنهادی

۲-۱ استخراج دست انسان از تصاویر ژرفا

کاربر در مقابل دستگاه کینکت و در فاصله ۱۳۰ تا ۱۸۰ سانتی متری قرار گرفته و دست خود را در مقابل بدن و در برابر دستگاه کینکت قرار می‌دهد. این فاصله به شکل تجربی و با توجه به خروجیهای دستگاه کینکت بدست آمده است. اینک در تصویر عمق با انتخاب یک آستانه مناسب مبتنی بر ژرفا، β ، می‌توان دست را از پس زمینه جدا کرد. این مقدار آستانه با توجه به تفاوت‌های ناچیز در اندازه دست کاربران مختلف، مقدار تقریباً ثابتی بر اساس آزمایش‌ها به دست آمده است و بر اساس قطر متوسط دست انسان نرمال سازی شده است. اگر $D(n)$ تصویر عمق بدست آمده از دستگاه کینکت باشد و th ضخامت متوسط دست انسان در اینصورت رابطه ۱ روش جداسازی دست از پس زمینه را در تصویر ژرفا نشان میدهد.

$$I(n) = \{D(n): D_{min} \leq D(n) \leq D_{min} + th\} \quad (1)$$

در این رابطه n شماره پیکسل در تصویر ژرفا، D_{min} مقدار ژرفای نزدیکترین جسم به دستگاه کینکت (فرض شده که نزدیکترین جسم به دستگاه دست کاربر باشد) و $I(n)$ تصویر عمق دست است. th در سیستم پیشنهادی و برای یک دست متعارف مقدار ۷۵ میلیمتر انتخاب شده است. در شکل ۲ یک نمونه تصویر ویدیو و ژرفای بدست آمده از دوربین کینکت قبل از استخراج دست مشاهده می‌شود. با استفاده از روش پیشنهاد شده تصویر ژرفای دست مطابق شکل ۳ استخراج شده است. برخی مواقع بعلت وجود نویز بخشهای کوچک دیگری نیز در خروجی آستانه گیر مشاهده می‌شود. برای رفع این مشکل بزرگترین جسم را بعنوان دست انتخاب می‌کنیم.

موجک گسسته بر روی عکس‌های سیاه و سفید اعمال شده و تعدادی از ویژگی‌ها استخراج می‌شوند. در نهایت ویژگی‌های استخراج شده برای آموزش یک شبکه عصبی پرسپترون چند لایه استفاده شده است. در سیستم استفاده شده از هیچ نوع دستکش یا سیستم‌های نشانگر استفاده نشده و این سیستم تنها نیاز به تصاویر دست خالی برای بازشناسی نیاز دارد. لازم است که پس زمینه تصاویر مشکلی باشد و تنها دست و آن هم در امتداد عمود بر دوربین در تصویر قرار گرفته باشد. نتایج تجربی نشان می‌دهد که این سیستم قابلیت شناسایی ۳۲ حرف الفبای فارسی انتخاب شده را به دقت طبقه‌بندی ۹۴/۰۶٪ را دارد.

در اغلب روش‌های ارائه شده، محدودیت‌هایی برای کاربران مانند پوشیدن دستکش، ویا الزامات محیطی مانند وجود پس زمینه ساده وجود دارد. روشهایی با استفاده از فضای رنگی معرفی شدند که همانطور که مشخص هست در فضای نویزی دقت این الگوریتم‌ها به شدت کاهش می‌یابد [۱۶، ۱۷]. تعدادی از الگوریتم‌ها نیز از لحاظ زمانی و سنگینی محاسبات رنج می‌بند و برای برنامه‌های کاربردی و بلند رنج نامناسب است [۱۸، ۱۹]. به علاوه در تعداد زیادی از الگوریتم‌های شناسایی حالت دست و همچنین بیشتر الگوریتم‌های کارا در زمینه شناسایی الفبای فارسی ناشنوایان، وابستگی زیادی به زاویه دست کاربر نسبت به دوربین دارند و از این رو اکثر آن‌ها از یک مجموعه داده خاص با پس زمینه ساده استفاده نموده‌اند [۲۰، ۲۱].

در این مقاله سیستمی معرفی می‌شود که بدون اعمال محدودیت پوششی برای دست افراد ناشنوا و با دقتی مناسب برای پیاده سازی آنی، شناسایی الفبای فارسی ناشنوایان در یک محیط معمولی و واقعی توسط سنسور کینکت انجام می‌شود. ابتدا با کمک اطلاعات ژرفا ناحیه اطراف دست استخراج شده و به این ترتیب پس زمینه حذف می‌شود. مرکز دست با اجرای الگوریتم‌های متعارف مورفولوژی و محاسبه مرکز جرم بدست می‌آید. سپس با استفاده از تبدیل موجک و یک توصیفگر جدید که در این مقاله معرفی می‌شود، استخراج ویژگی انجام می‌پذیرد. برای کلاسه‌بندی از دو روش شبکه عصبی و بردارهای پشتیبان استفاده شده است. در نهایت از یک فیلتر مدین برای حذف نویز در نتایج خروجی بازشناسی استفاده شده تا عملیات شناسایی حروف به درستی صورت گیرد.

در ادامه این مقاله و در بخش دوم کلیات سیستم پیشنهادی شامل روش بدست آوردن صفحه گذرنده از کف دست و چگونگی محاسبه مرکز و شعاع کف دست توضیح داده می‌شود. روش استخراج ویژگی در بخش سوم و توصیف گر دایروی در بخش چهارم بررسی می‌شوند. سرانجام نتایج شبیه سازی، مقایسه و جمع بندی نیز فصول پنجم و ششم را تشکیل می‌دهند.

۲-۲ معرفی سیستم پیشنهادی

در این مقاله از ابزار کینکت که توسط شرکت مایکروسافت برای کنسول بازی ایکس باکس تهیه شده است، استفاده می‌نماییم. شکل ۱ بلوک دیاگرام سیستم ارائه شده را نشان می‌دهد. روش پیشنهادی از چهار بخش اصلی تشکیل می‌شود. در بخش نخست و با استفاده از سنسور کینکت دست کار بر از پس زمینه جدا می‌شود. در بخش دوم با استفاده از تکنیک رگرسیون سه بعدی، مختصات صفحه گذرنده از کف

$$D = \frac{ax_p + by_p + z_p + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \quad (3)$$

برای بدست آوردن مشخصات بهترین صفحه‌ای که از نقاط مرتبط با کف دست در تصویر ژرفا می‌گذرد یک مساله بهینه سازی برای مجموعه نقاط در فضا طرح می‌شود. اگر تعداد نقاط استخراج شده در تصویر ژرفای دست را R در نظر بگیریم، نرم مجموع فواصل این نقاط نسبت به صفحه، D_T ، از رابطه ۴ بدست می‌آید:

$$D_T = \sum_{i=1}^R |D_i|^2 = \sum_{i=1}^R \left| \frac{ax_i + bx_i + z_i + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \right|^2 \quad (4)$$

با مشتق گیری نسبت به مولفه های a و b و d سه رابطه حاصل می‌شود که در روابط ۵-۷ نشان داده شده‌است.

$$\frac{dD_T}{db} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^R \frac{(y_i^2)b^3 + [y_i(ax_i + z_i + d - 1)]b^2 + (a^2y_i^2 + y_i^2 - ax_i - z_i - d)b + (a^3x_iy_i + a^2y_iz_i + a^2y_id + ax_iy_i + z_iz_i + dy_i)}{(a^2 + b^2 + 1)^{3/2}} = 0 \quad (5)$$

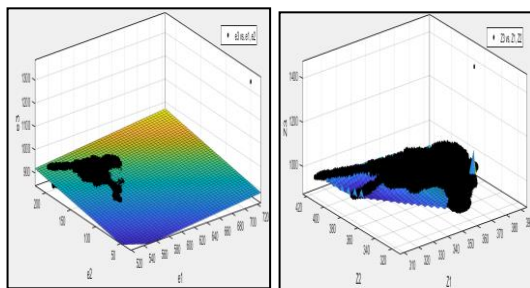
$$\frac{dD_T}{da} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^R \frac{(x_i^2)a^3 + [x_i(by_i + z_i + d - 1)]a^2 + (b^2x_i^2 + x_i^2 - by_i - z_i - d)a + (b^3y_ix_i + b^2x_iz_i + b^2x_id + bx_iy_i + z_iz_i + dx_i)}{(a^2 + b^2 + 1)^{3/2}} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dD_T}{dd} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^R (ax_i + by_i + z_i + d) = 0 \quad (7)$$

با قرار دادن سه معادله ۵، ۶ و ۷ در یکدیگر، مولفه های a و b و همچنین d مطابق با معادله ۸ محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^R ax_i + by_i + z_i}{R} \quad (8)$$

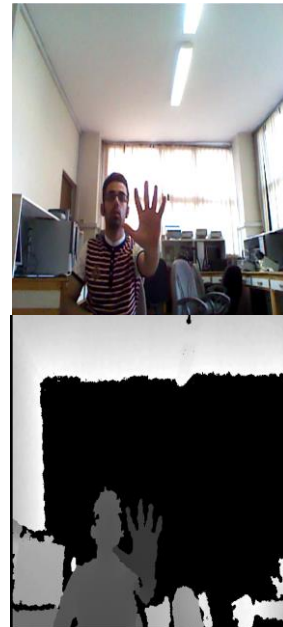
نرم افزار MATLAB توسط محیط گرافیکی Cftool می‌تواند این مساله را حل نماید. شکل ۴ صفحات استخراج شده برای دو مجموعه نمونه از نقاط مرتبط با تصاویر ژرفای دست را نشان می‌دهد. صفحه پیشنهاد شده به رنگ تیره و پیوسته در تصویر قابل تشخیص هستند.



شکل ۴) استخراج صفحه عبور کننده از کف دست در فضای سه

بعدی

پس از این مرحله، با استفاده از زوایای صفحه تقریب زده شده نسبت به بردارهای یکه دستگاه مختصات کینکت و نیز اعمال ماتریس‌های دوران ارائه شده برای دو محور x و y مطابق رابطه (۹) بر تصویر ژرفای



شکل ۲) تصویر اتخاذ شده از دوربین کینکت: بالا تصویر ویدیو. پایین تصویر

ژرفا



شکل ۳) دست استخراج شده از شکل ۲ با استفاده از روش آستانه گذاری در فضای ژرفا

۲-۲- استخراج صفحه گذرنده از کف دست

دست کاربر می‌تواند در فضای آزاد در راستاهای مختلف قرار گیرد که دوران راستای نسبی انگشتان دست نسبت به دوربین کینکت را تغییر خواهد داد. برای حل مشکل ابتدا با کمک رگرسیون خطی صفحه فرضی عبور کننده از کف دست در فضا شناسایی شده و سپس به کمک ماتریس‌های دوران و انتقال، راستای عمود بر این صفحه با محور کینکت در یک راستا قرار می‌گیرد. به این ترتیب اثرات مربوط به چرخش در سمت (یاو) و ارتفاع (پیچ) حذف خواهد شد. برای حذف اثر چرخش حول محور طولی (رول) نیز از توصیف گر دایروی که در بخش بعدی معرفی می‌شود استفاده خواهد شد. رابطه ۲ معادله یک صفحه در فضای سه بعدی را نشان می‌دهد [۲۳، ۲۲].

$$ax + by + z + d = 0 \quad (2)$$

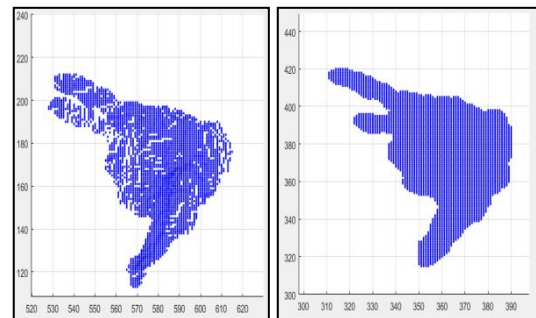
فاصله یک نقطه با مختصات $(x_p, y_p, z_p)^T$ تا صفحه فوق نیز به کمک رابطه ۳ محاسبه می‌شود:

دست، می توان چرخش و زاویه دست ناخواسته کاربر نسب به محورهای مختصات x و y را حذف نمود [۲۴].

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

شکل ۵ نتیجه انجام دوران بر روی مجموعه نقاط سه بعدی مرتبط با شکل ۴ را با بزرگنمایی نشان می دهد.



شکل ۵) هم راستا سازی اطلاعات ژرفای دست با اعمال ماتریس دوران بر نقاط سه بعدی برای شکل ۴

پس از حذف دوران از اطلاعات ژرفای دست لازم است که اندازه دست نیز با توجه به معیارهای هندسی موجود در دست انسان نرمال سازی شود. به این ترتیب اثر تغییرات فاصله تا دوربین و یا بزرگی و کوچکی دست نیز حذف خواهند شد. معادلات ۱۰ و ۱۱ روش نرمال سازی شعاع کف دست و فاصله آن تا دوربین کینکت را نشان می دهند:

$$N_r = \frac{R_{New}}{R_{Reference}} \quad (10)$$

$$N_D = \frac{D_{New}}{D_{Reference}} \quad (11)$$

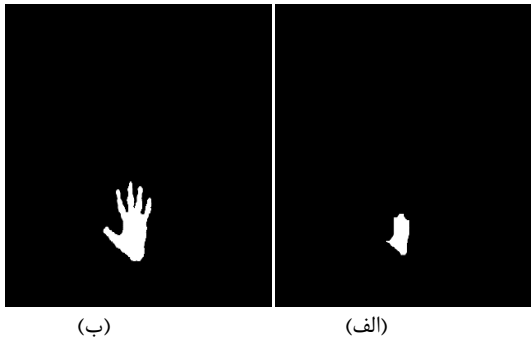
در روابط فوق R_{New} شعاع کف دست کاربر و $R_{Reference}$ شعاع کف دست مرجع و N_r ضریب نرمال سازی شعاعی است. به همین ترتیب N_D ضریب نرمال سازی ژرفا، D_{New} فاصله کف دست کاربر با کینکت و $D_{Reference}$ فاصله کف دست مرجع نسبت به دوربین کینکت است. برای انجام این عمل ابتدا لازم است که مرکز و شعاع دست بدست آیند.

۲-۳- استخراج مرکز و شعاع کف دست

امروزه از الگوریتم های مورفولوژی در علم پردازش تصویر برای کاربردهای گوناگونی از جمله شناسایی محل ترک خوردگی، نقاط آسیب دیده و همچنین ترمیم تصویر استفاده می شود. در این سیستم استخراج مرکز و شعاع کف دست با استفاده از تکنیک سایش انجام شده است. سایش تصویر A بر اساس روابط ریاضی در تصاویر باینری توسط ساختار عنصر B از رابطه (۱۲) پیروی می کند.

$$A \ominus B = \{z \in E | B_z \subseteq A\} \quad (12)$$

در این رابطه E یک فضای اقلیدسی و A یک تصویر باینری است. B_z در واقع برگردان B بوده و با حرکت روی تصویر باینری آن را سایش می دهد. شکل ۶ تصویر کف دست را قبل و بعد از عملیات سایش نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود، توده ی کف دست انسان به جا مانده و انگشت های در شکل ۶ ب حذف شده است.



شکل ۶) عملیات سایش: الف) تصویر دو سطحی دست قبل از سایش ب) استخراج توده کف دست بوسیله عملیات سایش

برای به دست آوردن مرکز کف دست ابتدا با استفاده از اصل به هم پیوستگی، توده های V را به ترتیب بر اساس بالاترین بهم پیوستگی تا پایین ترین آن برچسب گذاری می کنیم. این برچسب گذاری در حقیقت نماینده وزن آن توده به هم پیوسته می باشد و در بازه $[1, n]$ قرار می گیرد.

$$W_V = (n - V + 1)X \quad (13)$$

در این رابطه n تعداد توده های شامل یک یا چند پیکسل در تصویر شامل دست بوده و X پایین ترین وزن یک توده در تصویر می باشد. در رابطه (۱۳) مجموع وزن های موجود در تصویر را مشاهده می نمایید.

$$\sum_{V=1}^n W_V = 1 \quad (14)$$

این رابطه می تواند بصورت رابطه زیر ساده شود:

$$\sum_{L=0}^{n-1} (n-L)X = 1 \quad \text{then } X = \frac{1}{\sum_{L=0}^{n-1} (n-L)} \quad (15)$$

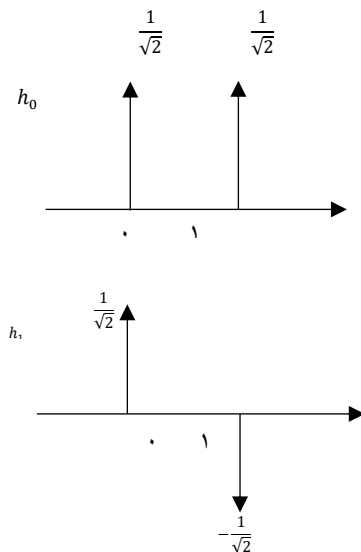
سپس مرکز توده O از رابطه ۱۵ محاسبه می شود:

$$O = \frac{\sum_{V=1}^n \sum_{K=1}^{C_V} W_V q_{K_V}}{\sum_{V=1}^n W_V C_V} \quad (16)$$

در این رابطه C_V ، تعداد پیکسل های توده V ام و q_{K_V} مختصات پیکسل k ام از خوشه V ام را نشان می دهد. پس از به دست آوردن مرکز دست، به محاسبه شعاع کف دست، 2 می پردازیم. مقدار 2 را به صورت بهینه از

۱-۳ تبدیل موجک هار برای استخراج ویژگی

در این مقاله از تبدیل موجک هار برای کدکردن تصاویر ژرفای حروف الفبای فارسی برای خانواده‌های مختلف تعریف شده استفاده شده است. شکل ۸ بردارهای پایه h_0 و h_1 در بانک فیلترهای ویولت هار را نشان می‌دهد.



شکل ۸) ضرایب پایه های برداری ویولت هار در بانک فیلتر

برای اجرای یک مرحله از تبدیل ویولت، تقریب تصویر و جزئیات افقی و عمودی و قطری تصویر برای یک تصویر F با ابعاد $m \times n$ روابط (۱۸) تا (۲۱) برقرار است.

(۱۸)

$$A_1 = \frac{1}{2} (F(2m, 2n) + F(2m-1, 2n) + F(2m, 2n-1) + F(2m-1, 2n-1))$$

(۱۹)

$$H_1 = \frac{1}{2} (F(2m, 2n) + F(2m-1, 2n) - F(2m, 2n-1) - F(2m-1, 2n-1))$$

(۲۰)

$$V_1 = \frac{1}{2} (F(2m, 2n) - F(2m-1, 2n) + F(2m, 2n-1) - F(2m-1, 2n-1))$$

(۲۱)

$$D_1 = \frac{1}{2} (F(2m, 2n) - F(2m-1, 2n) - F(2m, 2n-1) + F(2m-1, 2n-1))$$

نمای کلی از تبدیل ویولت بر اساس بانک فیلتر در شکل ۹ نشان داده شده است.

کمترین مقدار ممکن غیر صفر آغاز نموده و تابع هزینه را مطابق رابطه (۱۶) در نظر می‌گیریم.

(۱۶)

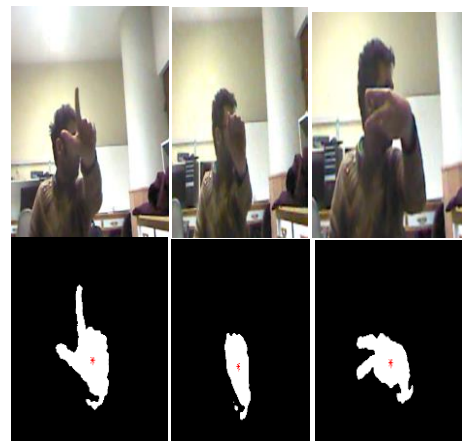
$$J(r) = \sum_{\theta=0}^{2\pi-Res(\theta)} |(r - rp_{\theta})(\cos(\theta) + \sin(\theta))|^2$$

مقدار $Res(\theta)$ در واقع رزولوشن اندازه‌گیری بر محیط دایره رسم شده را نشان می‌دهد و هر چه مقدار کوچکتر انتخاب شود، r با دقت بهتری محاسبه شده و زاویه θ با مقدار آن در رابطه $J(r)$ افزایش می‌یابد. rp_{θ} در واقع شعاع در راستای زاویه θ می‌باشد که مقدار آن با افزایش طول در راستای زاویه θ ، تا جایی که به اولین مقدار غیر صفر در آن توده برسد، محاسبه می‌شود و مقدار ثابتی برای هر یک از زوایای مورد نیاز به دست می‌آید. در رابطه (۱۸) با مشتق‌گیری نسبت به r تابع هزینه را برابر با صفر قرار داده و از آن طبق روابط (۱۹) مقدار r بهینه محاسبه می‌شود. شکل ۵ مرکز دست استخراج شده را برای سه نمونه نشان می‌دهد.

(۱۷)

$$J'(r) = 0 \quad \sum_{\theta=0}^{2\pi-Res(\theta)} (-rp_{\theta})(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2(r - rp_{\theta}) = 0$$

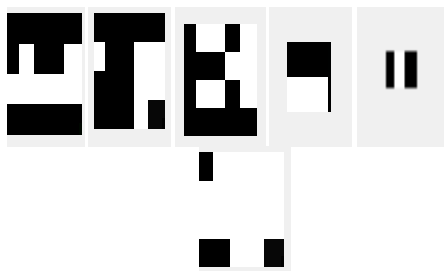
$$\rightarrow r = \frac{\sum_{\theta=0}^{2\pi-Res(\theta)} (rp_{\theta}(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2)}{\sum_{\theta=0}^{2\pi-Res(\theta)} rp_{\theta}(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2}$$



شکل ۷) استخراج مرکز دست برای سه نمونه از حروف الفبای ناشنوایان

۳- استخراج ویژگی

پس از طی مراحل ساده‌سازی تصویر و پیدا نمودن مدل هندسه دست، حال نوبت به استخراج ویژگی می‌رسد. در این روش، ابتدا با استفاده از تبدیل موجک هار یک فرآیند استخراج ویژگی صورت گرفته سپس از یک توصیف‌گر دایروی برای قدرتمندتر نمودن ابزار شناسایی استفاده می‌شود که است انگشتان ایستاده در تصویر را بیابد. خروجی هر یک از این دو ابزار استخراج ویژگی به ترتیب توسط شبکه‌های عصبی و بردارهای پشتیبان دسته‌بندی شده که در ادامه به تشریح آن‌ها خواهیم پرداخت.



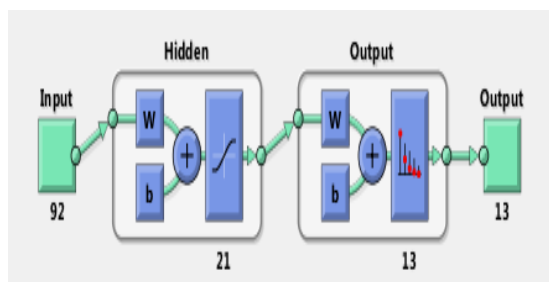
شکل ۱۱) کدسازی شکل ۸ با اعمال تبدیل موجک: الف) تقریب سطح ششم، ب) جزییات افقی سطح ششم، پ) جزییات عمودی سطح ششم، ت) جزییات قطری سطح ششم، ث) جزییات افقی سطح هفتم، ج) جزییات عمودی سطح هفتم

۳-۲- شبکه عصبی برای استخراج ویژگی

در سالهای اخیر، استفاده از دسته‌بندهای مبتنی بر شبکه‌های عصبی برای حل مسائل پیچیده غیرخطی رشد روزافزونی داشته است. پس از کد نمودن هر یک از حالت‌های دست، در این سیستم همانند مرجع [۱۵] از شبکه‌های عصبی برای دسته‌بندی ویژگی‌های به دست آمده از تبدیل موجک استفاده می‌کنیم. در شبکه عصبی طراحی شده از تابع غیر خطی سیگموئید مطابق رابطه (۲۳) در لایه میانی استفاده شده است [۲۶].

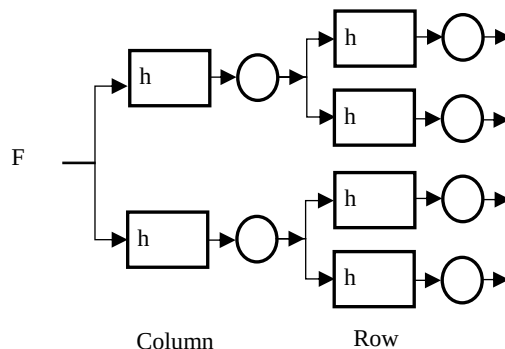
$$Tansig(n) = \frac{2}{1 + e^{-2n}} - 1 \quad (23)$$

شکل ۱۲ ساختار کلی شبکه عصبی مورد استفاده در این مقاله را نشان میدهد که شامل لایه ورودی با ۹۲ نرون، لایه خروجی با ۱۳ نرون و لایه مخفی با ۲۱ نرون است.



شکل ۱۲) بلوک دیاگرام شبکه عصبی طراحی شده

به شکل تجربی مشخص شد که شبکه عصبی قادر به تشخیص تمامی حروف الفبا نیست به همین دلیل تنها ۱۳ نرون در لایه خروجی برای تشخیص ۱۳ خانواده متفاوت که در جدول ۱ مشخص شده اند، منظور شده است. در مرحله آموزش برای هر خانواده ۲۰ فریم متفاوت و در مجموع ۲۶۰ فریم در نظر گرفته شد. الگوریتم پس انتشار خطا برای آموزش وزنها در شبکه عصبی بکار گرفته شد. پس از اتمام آموزش از مجموعه داده جدیدی برای تست شبکه عصبی استفاده شد.



شکل ۹) شمای کلی تبدیل ویولت استفاده شده [۱۵]

ابتدا سائز هر فریم ورودی حاصل از پردازش تصاویر عمق را به مقدار 300×300 تغییر داده تا برای اعمال تبدیل موجک آماده شود. فرآیند گفته شده را عملیات پیش‌پردازش جهت آماده‌سازی تصاویر برای اعمال تبدیل موجک می‌نامیم که در شکل ۱۰ نمونه‌ای از آن قابل مشاهده است.



شکل ۱۰) تصویر کف دست بر مبنای اطلاعات ژرفا

سپس تبدیل موجک اعمال می‌شود. بر اساس آزمایش‌های متعدد و به دلیل سادگی و کارا بودن در این تحقیق، از تبدیل موجک هار استفاده شده است و بعد از ۷ مرحله تبدیل موجک که هر مرتبه روی تقریب موجک مرحله قبل اجرا می‌شود، بردار ویژگی رابطه (۲۲) به دست می‌آید. از این بردار ویژگی اهداف زیر دنبال می‌شود:

- ۱- اختصاص یک کد به هر تصویر و کاهش ابعاد فضای ویژگی
- ۲- بردار ویژگی مناسب و کافی و بهینه برای تمییز دادن حروف مختلف

$$F = [A(6) \ H(6) \ V(6) \ D(6) \ H(7) \ D(7)] \quad (24)$$

مولفه‌های A ، H ، V و D به ترتیب ضرایب تقریب تصویر، جزییات افقی، جزییات عمودی و جزییات قطری را در بر داشته و اعداد داخل پرانتز سطح تبدیل موجک گرفته شده را نشان می‌دهد. ضرایب را به صورت ستونی تعریف نموده و از F یک بردار ویژگی ۹۲ بعدی ساخته خواهد شد که در واقع کد مورد نظر برای حالت دست می‌باشد. شکل ۱۱ تصاویر حاصل از کدسازی شکل ۱۰ را نشان می‌دهد.

جدول ۱: گروه‌بندی خانواده حرف‌های پیشنهادی توسط شبکه

عصبی

خانواده حرف پیشنهادی	حرف پیشنهادی
آ، آ، ع، غ	آ
آ، آ، ی، ه	آ
ع، غ، ن	ع
ع، ه، گ، ن، ل	گ
آ، ع، ه، غ، ن	غ
ه، ن	ه
آ، ل، گ، ی	ل
ع، م	م
ه، م، ن، ی، گ	ن
گ، ل، آ	ا
ل، ط، ی، م	ط
ل، ی، گ	ی

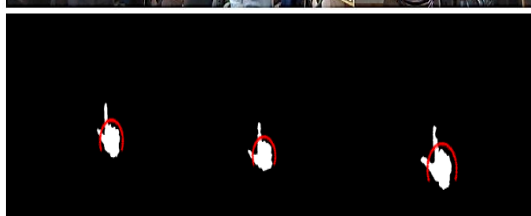
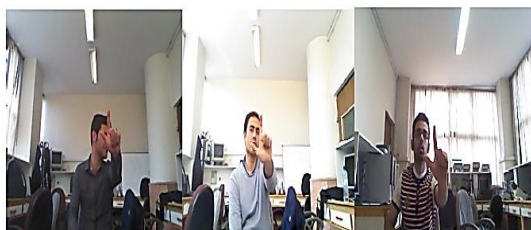


شکل ۱۳) توصیفگر دایروی: نمایش مرکز و نماینده هر انگشت در تصویر جداسازی شده دست

این زوایا هر کدام به عنوان یک ویژگی در ورودی بردار ویژگی حاصل از این قسمت در نظر گرفته خواهد شد. ضخامت هر انگشت نیز با توجه به تعداد نقاط برجسته قرار گرفته شده روی هر قسمت به هم پیوسته از دایره توصیفگر مشخص می‌شود. بدین ترتیب بردار ویژگی

$$X = [T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$$

حاصل از این توصیفگر برای هر دست شامل ۱۰ ویژگی است که به ترتیب پهنا و زاویه هر انگشت را نشان می‌دهد. در صورت عدم وجود هر کدام از انگشت‌ها مقادیر صفر برای زاویه و ضخامت آن در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱۴ سه کاربر مختلف یک حرف را به نمایش گذاشته‌اند. توصیفگر دایروی بر روی تصویر ژرفای استخراج شده اعمال شده‌است. همان‌گونه که قابل مشاهده است وضعیت دو انگشت اول به خوبی تمییز داده می‌شود.



شکل ۱۴) تصویر حرف الف توسط ۳ شخص متفاوت و اعمال توصیفگر دایروی

با انجام آزمایش‌های متعدد، طول شعاع مرجع مقدار ثابت ۳۶ پیکسل و مقدار ژرفای مرجع ۸۶ سانتیمتر به دست آمده است. نکته حائز اهمیت در شعاع توصیفگر مقدار C می‌باشد. به دلیل وابستگی خطای اندازه‌گیری عمق در کینکت به فاصله کاربر تا دوربین، مقدار ثابتی برای این ضریب نمی‌توان یافت. اگر کاربر دست خود را در فاصله ای بین ۸۰ تا ۱۳۰ سانتیمتر از دستگاه کینکت قرار دهد رابطه ۲۶ مقدار C مناسب را نشان می‌دهد.

۴- توصیفگر دایروی

در این قسمت به معرفی توصیفگری جدید خواهیم پرداخت که می‌تواند تمایزی قابل توجهی در حالات مختلف دست پدید آورده و اثر غلت را نیز در تصاویر ورودی خنثی سازد. پس از به دست آوردن مرکز و شعاع دست و همچنین از بین بردن چرخش ناخواسته کاربر در سمت و ارتفاع، روشی ارائه می‌شود که می‌تواند تعداد انگشتان باز و بسته را به دست آورد. به این منظور بعد از نرمال‌سازی تصویر ژرفای دست، دایره‌ای از مرکز کف دست ترسیم می‌شود که بتواند انگشتان دست را قطع نماید. شعاع این دایره با بررسی مشخصات هندسی دست بیش از ۵۰ نفر و با استفاده از رابطه ۲۴ بدست می‌آید:

$$R = \begin{cases} C \times N_D \times N_r & , D_{New} < D_{Reference} \\ \frac{C \times N_r}{N_D} & , D_{New} \geq D_{Reference} \end{cases} \quad (24)$$

C مقدار ثابتی است که با توجه به آزمایش‌های متنوع در دو شرایط خاص بنا به فاصله دست تا دوربین و مقدار N_r به دست می‌آید. دایره توصیفگر ویژگی‌های جالب توجهی همچون زوایای انگشتان ایستاده و ضخامت انگشتان برای تشخیص به هم چسبیدگی دو یا چند انگشت را در اختیار قرار می‌دهد. به این ترتیب می‌توان معیاری ارائه کرد که وضعیت انگشتان دست را در هر حالت نشان دهد. شکل ۱۳ دایره رسم شده و محل برخورد آن با انگشتان را نشان داده است. با در نظر گرفتن مرکز کف دست به عنوان نقطه مرجع می‌توان برای هر انگشت زاویه‌ای مطابق رابطه ۲۵ ارائه کرد:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_{PALM} - y_{FINGER}}{x_{PALM} - x_{FINGER}} \right) \quad (25)$$

۵- نتایج شبیه سازی

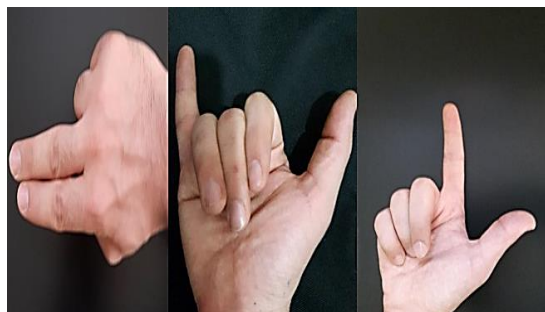
در این بخش نتایج حاصل از پیاده سازی الگوریتم پیشنهادی نشان داده می شود. در شکل ۱۷ نمایش سه حرف آ، ط و ا در رابط گرافیکی کاربر نوشته شده در نرم افزار متلب را مشاهده می کنید.



شکل ۱۷) نمایش چهار حرف از الفبای ناشنوایان تحت سیستم پیشنهادی

برای مقایسه روش پیشنهادی، عملکرد الگوریتم مرجع [۱۵] که در زمان نگارش این مقاله معتبرترین روش موجود در زمینه بازشناسی الفبای فارسی ناشنوایان می باشد، استفاده شده است. این مرجع از اطلاعات تصویر رنگی استفاده کرده و این تصاویر در شرایط ایده آل و با پس زمینه کاملاً ساده و سیاه رنگ تهیه شده اند. معیار مقایسه انتخابی نیز میزان موفقیت آمیز بودن تشخیص حروف است که با رابطه (۲۷) تعریف می شود.

$$(27) \quad \text{نرخ بازشناسی} = \frac{\text{تعداد شناسایی درست}}{\text{تعداد کل آزمونها}} \times 100$$



شکل ۱۸) بخشی از مجموعه داده ساخته شده برای مقایسه با مرجع [۱۵]

برای ایجاد پایگاه داده مورد نیاز جهت پیاده سازی و مقایسه با مرجع [۱۵] در مجموع ۴۲۳ فریم تهیه شد. شکل ۱۸ نمونه ای از این مجموعه داده را نشان می دهد. یک دوربین گالکسی A8 با رزولوشن ۱۶

(۲۶)

$$C = \begin{cases} 65, & (N_D < 1 \text{ OR } N_D > 1.11) \text{ AND } (N_r \leq 0.85) \\ 50, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

حال پس از تعیین مقدار C و مقادیر مرجع، با داشتن شعاع و مینیمم فاصله در هر فریم، ضرایب نرمال سازی به دست می آید. سپس دایره ای به شعاع توصیفگر و رزولوشن $Res(\theta) = \frac{\pi}{50}$ رسم می نمایم تا ضخامت انگشتان و محل آنها یافت می شود. در شکل ۱۵ نتیجه توصیفگر پیشنهادی برای هنگامی که دست در فواصل به ترتیب از چپ، ۱۰۱ سانتیمتری، ۱۲۷ سانتیمتری و ۸۴ سانتیمتری قرار گرفته است، نشان می دهد.



شکل ۱۵) نمایش حرف "ی" توسط ۳ کاربر متفاوت و اعمال توصیفگر دایروی

همانگونه که شرح داده شد شبکه عصبی استفاده شده حروف را به سیزده خانواده مختلف دسته بندی می کند. این خانواده ها در جدول ۱ ارائه شده اند. اینک و برای جداسازی کلاس های موجود در هر خانواده از یک ماشین بردار پشتیبان تحت یک کرنل خطی بر مبنای حد حاشیه نرم^۱ استفاده می شود [۲۸، ۲۹]. ایده استفاده از کرنل خطی به جای استفاده از انواع غیر خطی آن، حجم محاسبات پایین آن و مناسب تر بودن برای پیاده سازی برخط می باشد. در مرحله آموزش برای هر کلاس ۳۰ نمونه از داده های آموزشی با استفاده از ویژگی های آناتومیک ساخته شده است. با اعمال مد آماری، کلاسی که در رقابت با کلاس های دیگر بیشترین موفقیت را داشته است به عنوان کلاس برنده انتخاب می شود. برای تصمیم گیری نهایی خروجی های شبکه عصبی و ماشین بردار پشتیبان برای فریم های متوالی تصویر ژرفا بدست آمده و یک فیلتر مدین بر بروی آخرین ده نمونه اجرا می شود. نتیجه این فیلتر خروجی اصلی خواهد بود. به این ترتیب اگر در بیش از شش فریم خروجی بردارهای پشتیبان به یک حرف اشاره نمایند حرف مورد نظر نمایش داده می شود. هدف از این عملیات، حذف نویز از خروجی حاصل از نمایش یک فیلم و قابل اعتماد نمودن الگوریتم می باشد.

¹ Soft Margin

الگوریتم در محیطی غیر از متلب می توان سرعت پردازش را از چهار فریم در ثانیه به مقادیر بیشتر نیز افزایش داد.

۷- مراجع

- [1] Moghadam M., Nahvi, M. Hassanzadeh, 2011, "Static Persian Sign Language Recognition Using Kernel-Based Feature Extraction", 7th Iranian IEEE Machine Vision and Image Processing (MVIP).
- [2] Wang, L. C., Wang, R., Kong, D., Yin, B., 2014, "Similarity Assessment Model for Chinese Sign Language Videos", IEEE Transaction on Multimedia, 16, pp.751 – 761.
- [3] Huang, J., Zhou, W., Li, H., Li, W., 2015, "Sign language recognition using 3d 1430 convolutional neural networks", Multimedia and Expo (ICME), IEEE International Conference on IEEE, pp.1-6.
- [4] Agris, U. V., Zieren, J., Canzler, U., Bauer, B., Kraiss, K. 2008, "Recent developments in visual sign language recognition", Universal Access in the Information Society, 6(4), pp.323-362.
- [5] Shah, N. K., Rathod, R. K., Agravat, J. S. 2014, "A survey on Human Computer Interaction Mechanism Using Finger Tracking", International Journal of Computer Trends and Technology (IJCTT). 7(3), pp. 174-177.
- [6] Verma, H. V., Aggarwal, E., Chandra, S., 2013, "Gesture recognition using kinect for sign language translation", IEEE Second International Conference on IEEE Image Information Processing (ICIIP).
- [7] Yang, H.D., 2014, "Sign language recognition with the kinect sensor based on conditional random fields", Sensors 15(1), pp.135-147.
- [8] Sun, C., Zhang, T., Bao, B., Xu, C., Mei, T., 2013, "Discriminative Exemplar Coding for Sign Language Recognition with Kinect", IEEE Transaction on Cybernetics, 43, pp.1418 – 1428.
- [9] Li, S.Z., Yu, B., Wu, W., Su, S.Z., Ji, R.R., 2015, "Feature learning based on SAE-PCA network for human gesture recognition in rgb-d images", Neurocomputing, 151, pp.565-573.
- [10] Liu, T., Zhou, W., Li, H., 2016, "Sign language recognition with long short-term memory", IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), pp.2871-2875.
- [11] Almeida, S.G.M., Guimarães, F.G., Ramírez, J.A., 2014, "Feature extraction in Brazilian sign language recognition based on phonological structure and using rgb-d sensors", Expert Systems with Applications, 41, pp.7259-7271.
- [12] Lim, M.K., Tan, W.C. A., Tan, C.S., 2016, "A feature covariance matrix with serial particle filter for isolated sign language recognition", Expert Systems with Applications, 54, pp.208-218.

مگاپیکسل برای تصویر برداری استفاده شده است. دو کاربر متفاوت الگوهای مورد نیاز را با قرار دادن دست خود در فاصله ۵۰ سانتی متری از دوربین و در مقابل یک صفحه سیاه رنگ تامین کرده اند. از این میان ۲۷۶ الگو برای آموزش شبکه عصبی استفاده شده است. جدول ۲ نتایج پیاده سازی روش پیشنهادی و روش ارائه شده در مرجع [۱۵] را برای تشخیص تک تک حروف الفبای فارسی ناشنوایان نشان میدهد.

جدول ۲: مقایسه میزان موفقیت تشخیص حروف در روش

پیشنهادی و روش [۱۵]

حرف	دقت در [۱۵]	دقت در سیستم پیشنهادی
آ	٪۸۱/۸۱	٪۹۶
ا	٪۸۱/۸۱	٪۹۸/۷۱
ع	٪۹۰/۹	٪۸۹/۲۸
گ	٪۹۵/۴۵	٪۹۶
غ	٪۱۰۰	٪۱۰۰
ه	٪۹۰/۹	٪۹۵/۸۵
ل	٪۱۰۰	٪۹۴
م	٪۹۰/۹	٪۱۰۰
ن	٪۹۰/۹	٪۹۱/۵
أ	٪۸۱/۸۱	٪۱۰۰
ط	٪۱۰۰	٪۱۰۰
ی	٪۹۰/۹	٪۱۰۰

همانطور که مشاهده می کنید نرخ بازشناسی در سیستم پیشنهادی رشد و بهبود یافته است و نرخ بازشناسی کل سیستم پیشنهادی برابر ٪۹۶/۷ می باشد.

الگوریتم پیشنهادی توسط نرم افزار Matlab و بر روی یک کامپیوتر با پردازنده ۲/۳ گیگاهرتز و ۴ گیگابایت حافظه اجرا شده است. به شکل متوسط برای هر فریم از تصویر ژرفا ۲۵۰ میلی ثانیه زمان لازم است. برای حذف نویز در خروجی از یک فیلتر مدین بر روی آخرین هشت نمونه استفاده می شود. به این ترتیب خروجی نهایی با حدود دو ثانیه تاخیر قابل مشاهده است.

۶- نتیجه گیری

روش ارائه شده در این تحقیق با کمک دستگاه کینکت این امکان را فراهم می سازد که به شکل عملی و بدون در نظر گرفتن شرایط خاص برای محیط تصویر برداری و یا پوشیدن دستکش های مخصوص، بتوان الفبای ناشنوایان فارسی را تشخیص داد. تشخیص برخی از این علائم با توجه به اینکه تنها با جابجایی مختصر انگشتان در محور طولی متمایز شده اند، با استفاده از تصاویر عادی بسیار سخت است. در روش پیشنهادی استفاده از تصاویر ژرفا امکان این تمایز فراهم شده است. اجرای الگوریتم در این فضا امکان بی اثر کردن دوران دست کاربر در راستای محورهای مختصات را فراهم ساخته و به این ترتیب دقت تشخیص را تا ۹۶/۷٪ افزایش می دهد. مطمئناً در صورت پیاده سازی

-
- the backpropagation method", *Biological Cybernetics*, 59, pp.257–263.
- [27] M. T., Demuth, H. B., Beale, M. H., De Jesús O., *Neural network design*, 2nd edition, Hagan, (2014),
- [28] Duda, R. O., Hart, P. E., Stork, D. G., 1973, "Pattern classification", *Journal of Classification*, 24, pp.305–307.
- [29] Fukunaga, Keinosuke, *Introduction to statistical pattern recognition*, Elsevier, 2013.
- [13] Zhao, R., Martinez, M. A., 2016, "Labeled Graph Kernel for Behavior Analysis", *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 38, pp.1640 – 1650.
- [14] Elakkiya, R., Selvamani, K. 2017, "Enhanced dynamic programming approach for subunit modelling to handle segmentation and recognition ambiguities in sign language", *Journal of Parallel and Distributed Computing*.
- [15] Karami, A., Zanj B., Kiani A. 2011, "Persian sign language (PSL) recognition using wavelet transform and neural networks", *Expert Systems with Applications*, 38(3), pp.2661-2667.
- [16] Wang, C., Liu, Z., Chan S., 2015, "Superpixel-Based Hand Gesture Recognition with Kinect Depth Camera", *IEEE Transaction on Multimedia*, 17, pp. 29 – 39.
- [17] Neiva D. H., Zanchettin C. 2018, "Gesture Recognition: a Review Focusing on Sign Language in a Mobile Context", *Expert Systems with Applications*.
- [18] Albrecht, I., Haber, J., Seidel, H. 2003, "Construction and animation of anatomically based human hand models", *Proceedings of ACM SIGGRAPH / Eurographics Symposium on Computer Animation SCA '03*, pp.98-109.
- [19] Caillette, F., Galata, A., Howard, T., 2008, "Real-time 3-d human body tracking using learnt models of behavior", *CVIU*, 109(2), pp 112-125.
- [20] Francke, H., Solar J, R., Verschae, R., 2007, "Real time hand gesture detection and recognition using boosted classifiers and active learning", *Advances in Image and Video Technology*, 4872, pp.533-547.
- [21] Krotosky, S., Trivedi, M., 2006, "Registration of Multimodal Stereo Images Using Disparity Voting from Correspondence Windows", *IEEE International Conference on Video and Signal Based Surveillance*. pp. 91-91.
- [22] Markelj, P., Tomaževič, D., Likar, B., Pernuš, F. 2012, "A review of 3D/2D registration methods for image-guided interventions", *Medical image analysis*, 16(3), pp.642-661.
- [23] Pizzoli, M., Forster, C., Scaramuzza, D. 2014, "REMODE: Probabilistic, monocular dense reconstruction in real time", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*.
- [24] Craig, J, J. 2009, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* (3rd Edition).
- [25] Van den Bergh, M., Van Gool L., 2011, "Combining RGB and ToF cameras for real-time 3D hand gesture interaction", *IEEE Workshop on Applications of Computer Vision (WACV)*.
- [26] Vogl, T. P., Mangis, J.K., Rigler, A.K., Zink, W.T., Alkon, D.L. 1988, "Accelerating the convergence of
-

تحلیل پایداری سیستم های غیرخطی هایبرید تاخیری توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی ضربه ای

داود ناصح^۱، ناصر پرز^۲، علی وحیدیان کامیاد^۳

^۱ فارغ التحصیل دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، naseh@mail.um.ac.ir

^۲ استاد، دانشکده مهندسی، گروه برق-کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

^۳ استاد، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، vahidian@um.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۹

ویرایش: ۱۳۹۶/۱۲/۲۲

دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۳۱

چکیده: در این مقاله معیارهایی برای بررسی پایداری سیستم های غیرخطی هایبرید دارای تاخیر زمانی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی ضربه ای ارائه می گردد. ابتدا قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیل معمولی در N بعد بر اساس مفهوم غیرنزولی شبه یکنوازی فوقانی بیان می گردد. در اینجا برای تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی فازی، توابع شبه لیاپانوف برداری تعریف می گردند. سپس با استفاده از این توابع به همراه قضیه مقایسه جدید برخی قضایا برای بررسی انواع مفاهیم پایداری (پایداری نهایی، پایداری مجانبی، پایداری قوی و پایداری یکنواخت) برای سیستم دیفرانسیل فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر مطرح می شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می رسند. در انتها مثالی دوبعدی برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می گردد. در نهایت با مثالی عملی در حوزه پزشکی، پلی بین مبانی ریاضی تحقیق و کاربرد عملی پژوهش تبیین می کنیم.

کلمات کلیدی: سیستم دیفرانسیل فازی، سیستم غیرخطی هایبرید، توابع شبه لیاپانوف برداری، تاخیر زمانی.

Stability analysis of nonlinear hybrid delayed systems described by impulsive fuzzy differential equations

David Naseh, Naser Pariz, Ali Vahidian Kamya

Abstract: In this paper we introduce some stability criteria of nonlinear hybrid systems with time delay described by impulsive hybrid fuzzy system of differential equations. Firstly, a comparison principle for fuzzy differential system based on a notion of upper quasi-monotone nondecreasing is presented. Here, for stability analysis of fuzzy dynamical systems, vector Lyapunov-like functions are defined. Then, by using these functions together with the new comparison theorem, we will get results for some concepts of stability (eventual stability, asymptotic stability, strong stability and uniform stability) for impulsive hybrid fuzzy delay differential systems. Furthermore, theorems for practical stability in terms of two measures are introduced and are proved. Finally, an illustrating example for stability checking of a differential system with fuzziness and time delay is given. Then, by introducing an applied example in Pharmacokinetics, we bridge theoretical concepts to the application of research in real world.

Keywords: fuzzy differential system, nonlinear hybrid system, vector Lyapunov-like function, time delay.

۱- مقدمه

امروزه نظریه پایداری لیاپانوف کاملاً شناخته شده است و قضایا و کاربردهای آن در [۱، ۲] ارائه شده اند. از آن جایی که یافتن تابع لیاپانوف امری مشکل است، در عمل مفهوم پایداری بر حسب دو معیار مطرح شده که روشی بسیار قدرتمند است [۳-۶]. در برخی موارد، از جمله نگه داشتن دمای یک پروسه شیمیایی بین کران هایی خاص، نوسان فضایما حول یک مسیر و غیره، حالت سیستم شاید ناپایدار باشد، ولی سیستم می تواند به اندازه کافی نزدیک به حالت مطلوب نوسان داشته باشد به گونه ای که عملکرد سیستم عملاً مناسب باشد. در این موارد مفهوم پایداری کاربردی معرفی شده است [۷-۹]. در مراجع فوق، نویسندگان پایداری سیستم های بدون ضربه (جهش در حالت) را بررسی کرده اند. این در حالی است که در مدلسازی بسیاری از مسائل دنیای واقعی، از جمله سیستم های سوئیچ شونده، باید اثرات ضربه ای را نیز در نظر بگیریم چرا که افزودن ضربه علاوه بر ایجاد تطابق بیشتر بین مساله اصلی و مدل سازی شده، در پایداری سیستم نیز تاثیر خواهد داشت. در مراجع [۱۰-۲۰] پایداری معادلات دیفرانسیل ضربه ای بررسی شده است. همانطور که مشاهده می شود، در کارهای قبلی نویسندگان فوق فرض کرده اند که حالت ها فقط به حالت کنونی بستگی دارد؛ این در حالی است که در بسیاری از موارد که تاخیر زمانی داریم، دینامیک های سیستم به حالت گذشته هم وابستگی دارند [۲۱-۲۳]. از سوی دیگر، اخیراً بدلائل زیادی از جمله کاربرد فراوان کنترلگرهای گسسته برای سیستم های پیوسته، برخی نویسندگان بر روی پایداری سیستم های هایبرید و سوئیچ شونده اهتمام ورزیده اند؛ مثلاً در [۳۰] سیستم دینامیکی هایبرید، در [۳۱] سیستم دیفرانسیل هایبرید، در [۳۲] سیستم تفاضلی ضربه ای، در [۳۳] سیستم های تفاضلی هایبرید و در [۳۸] سیستم های هایبرید تاخیری مورد بررسی قرار گرفته اند.

چنانچه مشاهده می گردد، در کارهای پیشین، فازی بودن پدیده ها نیز لحاظ نشده است؛ در حالی که این مساله در دنیای واقعی غیرقابل اجتناب است؛ چرا که فازی، راهی برای مدلسازی سیستم های دارای عدم قطعیت و بطور یقینی مشخص نشده است [۲۴-۲۹، ۳۶، ۳۷، ۳۹، ۴۰]. بنابراین، ما در این مقاله به بررسی پایداری یک سیستم کلی فازی که می تواند هایبرید و دارای اثرات ضربه ای، همچنین تاخیر در حالت ها باشد (یا هر کدام از این شرایط را نداشته باشد) می پردازیم و قضایایی برای بررسی انواع پایداری (پایداری نهایی، پایداری مجانبی، پایداری قوی و پایداری یکنواخت) این سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی ارائه خواهیم کرد. البته توجه داریم که این قضایا کلی بوده و برای سیستمی که دارای قیود ذکر شده نیز نباشد قابل استفاده است.

به عنوان مساله ای کاربردی و رایج در حوزه مکانیک که دارای ویژگی های فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر است می توان به سیستم جعبه دنده خودرو اشاره کرد که یک سیستم سوئیچینگ هایبرید است و به هنگام تعویض دنده با ضربه همراه است، همچنین همواره دارای

تاخیرهایی به هنگام تغییر و درگیری دنده می باشد. به عنوان نمونه ای دیگر در حوزه پزشکی می توان مساله اثر دارو بر بدن را نام برد که در آن ضربه به هنگام تزریق یا خوردن دارو وارد می شود، همچنین تاخیر در جذب دارو بوسیله بدن وجود دارد. که این مورد را به عنوان مثالی در انتهای مقاله مورد بررسی قرار می دهیم.

بخش های این مقاله بدین شرح است: در بخش ۲، برخی مفاهیم و تعاریف پایه که در ادامه مقاله از آن ها استفاده می کنیم را معرفی می کنیم. در بخش ۳، ابتدا قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیلی معمولی در N بعد بر اساس مفهوم غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بیان می گردد. سپس با تعریف توابع شبه لیاپانوف برداری و استفاده از آن ها به همراه قضیه مقایسه جدید، قضایایی برای بررسی انواع مفاهیم پایداری برای سیستم دیفرانسیل فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر مطرح می شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می رسند. پس از آن مثالی روشنگر برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می گردد. همچنین به منظور برقراری پلی بین مبانی ریاضی تحقیق و کاربرد عملی آن در دنیای واقعی، به بررسی مثالی از پزشکی می پردازیم. در نهایت، نتیجه گیری در بخش ۴ آورده شده است.

۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

در این بخش برخی نمادها، تعاریف و نتایج که در ادامه مقاله استفاده می شوند از مراجع [7, 9, 10, 17, 28, 30] ذکر می شوند.

فرض کنید فضای توابع فازی را بصورت E^n نمایش و طبق خواص مرجع [28] تعریف می کنیم. آنگاه برای تعمیم آن به فضای فازی N -بعدی می توانیم از حاصلضرب دکارتی زیر

$$(E^n)^N \equiv E^n \times E^n \times \dots \times E^n$$

به همراه متر فازی برداری^۱

$$\bar{D}_0(X, Y) = (D_0(X_1, Y_1), D_0(X_2, Y_2), \dots, D_0(X_N, Y_N))$$

استفاده کنیم که در آن $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} D([X]^\alpha, [Y]^\alpha)$ متر فازی بر روی E^n است و $D(\cdot, \cdot)$ فاصله هاسدورف^۲ است.

همچنین، مشتق ها کوهارا^۳ برای توابع فازی بصورت زیر تعریف می گردد

$$D_H F(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(t-h)}{h}$$

کره فازی بصورت زیر قابل تعریف است

$$S(\rho) \triangleq \{X \in (E^n)^N : \|\bar{D}_0(X, \bar{0})\| < \rho\}$$

¹ vector fuzzy metric

² Hausdorff distance

³ Hukuhara derivative

که در آن منظور از $\|\cdot\|$ نرم ماکزیمم است.

تعریف ۱-۲: فرض کنید $\mathcal{T}$ یک مقیاس زمانی^۱ با کوچکترین عضو^۲ $t_0 \geq 0$ و بدون بزرگترین عضو^۳ باشد. نگاشت های (عملگرهای پرش^۴) $\sigma, \rho: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ بر روی آن در مرجع [9] تعریف شده اند.

تعریف ۲-۲: تابع $G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ که $\mathcal{G}$ ناحیه ای در فضای $\mathbb{R}^N$ است، را غیرنزولی شبه یکنوا در $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ گوییم اگر برای هر $t \in \mathcal{T}$ و $j = 1, 2, \dots, N$ ، توابع $G_j(t, \alpha)$ بر حسب $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_N)$ صعودی باشند [10].

تعریف ۳-۲: تابع $(N \geq 1)G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ را غیرنزولی شبه یکنوا از بالا بر حسب U گویند، اگر برای $U, W \in \mathbb{R}_+^N$ نامساوی $\|U\| \leq \|W\|$ نتیجه دهد $\|G(t, U)\| \leq \|G(t, W)\|$. [9]

تعریف ۴-۲: کلاس هایی از توابع بصورت زیر تعریف می شوند $\mathcal{K} \triangleq \left\{ \alpha: C[\mathcal{T}^+, \mathbb{R}^+], \text{ است } \alpha(t) \text{ و } \alpha(0) = 0 \right\}$
 $\Gamma \triangleq \left\{ h \in C[\mathcal{T} \times (E^n)^N, \mathbb{R}^+]: \forall t \in \mathcal{T}, \inf_{X \in (E^n)^N} h(t, X) = 0 \right\}$ ،
و $\Gamma_d \triangleq \left\{ h \in C[\mathcal{R}_d \times (E^n)^N, \mathbb{R}^+]: \forall t \in \mathcal{R}_d = [-d, \infty), \inf_{X \in (E^n)^N} h(t, X) = 0 \right\}$

تعریف ۵-۲: با فرض $h_0 \in \Gamma_d$ ، $\psi \in PC([-d, 0], (E^n)^N)$ و بازای هر $t \in \mathcal{T}$ تعریف می کنیم [7]

$$\bar{h}_0(t, \psi) \triangleq \sup_{-d \leq \zeta \leq 0} h_0(t + \zeta, \psi(\zeta))$$

تعریف ۶-۲: تابع $V: \mathcal{T} \times S(\rho) \rightarrow \mathbb{R}^N$ متعلق به کلاس $\mathbb{V}_0$ است اگر [17]

(الف) تابع V در تمام بازه های $[t_{k-1}, t_k] \times S(\rho)$ پیوسته باشد و برای تمام $t \in \mathcal{T}$ داشته باشیم $V(t, \bar{0}) \equiv 0$ ؛

(ب) تابع $V(t, X)$ لیپ شیتز محلی^۵ بر حسب X باشد؛ یعنی برای

$$|V(t, X) - V(t, Y)| \leq L(t) \bar{D}_0(X, Y)$$

که در آن $L(t)$ یک ماتریس $N \times N$ با عناصر غیرمنفی پیوسته بر $\mathbb{R}_+$ است و

$$|V(t, X) - V(t, Y)| \equiv (|V_1(t, X) - V_1(t, Y)|, |V_2(t, X) - V_2(t, Y)|, \dots, |V_N(t, X) - V_N(t, Y)|)$$

در اینجا منظور از $|V(t, X)|$ بردار $(|V_1(t, X)|, |V_2(t, X)|, \dots, |V_N(t, X)|)$ است که V_i ها $i = 1, 2, \dots, N$ عناصر V هستند.

(ج) برای هر $k \in \mathbb{N}$ حدود کراندار زیر وجود داشته باشند

$$\lim_{(t,Y) \rightarrow (t_k,X)} V(t, Y) = V(t_k, X)$$

تعریف ۷-۲: فرض کنید $V \in \mathbb{V}_0$ است؛ مشتق چپ دینی (تعمیم یافته به حالت هایبرید دارای تاخیر) برای این تابع را بر اساس مرجع [10] بصورت زیر تعریف می کنیم

$$D^-V(t, X) \triangleq \lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf \frac{V(t+h(t), X(t+h(t))+h(t)F(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k))) - V(t, X(t))}{h(t)} = \frac{V(\sigma(t), X(\sigma(t)) + (\sigma(t) - t)F(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k))) - V(t, X(t))}{\sigma(t) - t}$$

۳- نتایج اصلی

سیستم معادلات دیفرانسیل فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} D_H X(t) = F(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k)), & t \in (t_k, t_{k+1}] \\ X(t_0^+) = X_0, & I_0(X_0) = X_0, X(t_0 + t) = \psi(t), t \in [-d, 0] \\ X(t_k) = X_k, X(t_k^+) = X_k^+, X_k^+ = X_k + I_k(X_k), & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.1)$$

که در آن $d = \text{const} > 0$ تاخیر محدود، $F \in C_{rd}[\mathcal{T} \times \Omega \times (E^m)^N, (E^n)^N]$ که منظور از $\Omega \times (E^m)^N, (E^n)^N$ نگاشت پیوسته متراکم از راست^۶ [9] و حوزه ای شامل مبدا در فضای فازی $(E^n)^N, (E^m)^N$ ، $\lambda_k \in [\Omega, (E^m)^N]$ ، $\psi \in C([-d, 0], \Omega)$ ، $F(t, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) \equiv 0$ ، $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ بازای $t_k \rightarrow \infty$ ، $X(t^+) = \lim_{r \rightarrow t^+} X(r)$ ، $k \rightarrow \infty$ بازای $k \rightarrow \infty$ ، $X(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} X(s)$ هستند. توابع $I_k: (E^n)^N \rightarrow (E^n)^N$ بازای $k = 1, 2, \dots$ به گونه ای هستند که اگر $\|D_0(X, \bar{0})\| < L$ و $I_k(X) \neq \bar{0}$ باشد، آنگاه $\|D_0(X + I_k(X), \bar{0})\| < L$ است که در آن L ثابتی مثبت و $\bar{0}$ مبدا فازی است.

منظور از $PC([-d, 0], \mathbb{R}^N)$ مجموعه توابع تکه ای پیوسته از چپ $f: [-d, 0] \rightarrow \mathbb{R}^N$ با نرم سوپریمم $\|f\| = \sup_{-d \leq r \leq 0} \|f(r)\|$ است، که در آن $\|\cdot\|$ نرمی در فضای $\mathbb{R}^N$ است.

فرض می کنیم شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) برای هر تابع $X(s): [t_0 - d, \infty) \rightarrow (E^n)^N$ که همه جا پیوسته است به جز در t_k که در آن $X(t_k^+)$ و $X(t_k^-)$ موجود و $X(t_k) = X(t_k^+)$ است، تابع $F(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k))$ بازای تقریباً هر $t \in \mathcal{T}$ پیوسته است و در نقاط ناپیوستگی اش، از چپ پیوسته است.

(ب) تابع $F(t, \varphi)$ بر حسب φ در هر مجموعه فشرده از $PC([-d, 0], \mathbb{R}^N)$ لیپ شیتز است.

با شرایط فوق، جواب یکتایی برای سیستم (3.1) موجود است [23].

¹ time scale

² minimal element

³ maximal element

⁴ jump operators

⁵ locally Lipschitzian

⁶ right-dense (rd) continuous

به همراه سیستم (3.1)، سیستم مقایسه ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} U'(t) = G(t, U), & t > t_0, t \in (t_k, t_{k+1}] \\ U(t_0) = U_0, \\ U(t_k) = U_k, U(t_k^+) = U_k^+, U_k^+ = U_k + J_k(U_k), k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.2)$$

که در آن $J_k: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}, G: \mathcal{T} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ که حوزه ای از $\mathbb{R}^N$ شامل مبدا و $U_0 \in \mathbb{G}$ است. اگر ماکزیم بازه به فرم $[t_0, w]$ که جواب سیستم (3.2) تعریف شده است را با $J^+(t_0, U_0)$ نمایش دهیم، با فرض برقراری شرایط (الف) و (ب) فوق، $J^+(t_0, U_0) = \mathcal{T} = [t_0, \infty)$ است [10].

حال به تعریف برخی از مفاهیم پایداری می پردازیم که با توجه به مراجع [9, 23] استخراج شده اند.

تعریف ۳-۱: اگر $U(t) = U(t, t_0, U_0)$ پاسخی از سیستم (3.2)

باشد، آنگاه این سیستم را

(الف) پایدار کاربردی نهایی^۱ (EPS) نامیم، اگر برای $0 < \alpha < \beta$ و

برخی $t_0 \in \mathcal{T}$

$$\|U_0\| < \alpha \Rightarrow \|U(t)\| < \beta, \quad t \geq t_0 \geq \exists \tau(\alpha, \beta) > 0, \quad \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T};$$

(ب) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت^۲ (UEPS) گوئیم، اگر (الف)

بازای هر $t_0 \in \mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ج) شبه پایدار کاربردی نهایی^۳ (EPQ) نامیم، اگر برای $\alpha, \beta, T > 0$

و برخی $t_0 \in \mathcal{T}$ با $t_0 + T \in \mathcal{T}$

$$\|U_0\| < \alpha \Rightarrow \|U(t)\| < \beta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \exists \tau(\alpha, \beta) > 0, \quad \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T};$$

(د) شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت^۴ (UEPQ) گوئیم، اگر (ج)

بازای هر $t_0 \in \mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ه) پایدار کاربردی نهایی قوی^۵ (SEPS) نامیم، اگر (الف) و (ج)

همزمان برقرار باشند؛

(و) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی^۶ (SUEPS) گوئیم، اگر

(ب) و (د) بطور توأم برقرار باشند.

تعریف ۳-۲: فرض کنید $h_0 \in \Gamma_d, h \in \Gamma$ ، و $X(t) = X(t, t_0, \psi)$

پاسخی از سیستم (3.1) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف) $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی $(\bar{h}_0, h)$ -EPS نامیم، اگر

برای $0 < \alpha < \beta$ و برخی $t_0 \in \mathcal{T}$

$$; \bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 \geq \exists \tau(\alpha, \beta) > 0, \quad \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T};$$

(ب) $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی یکنواخت $(\bar{h}_0, h)$ -UEPS

گوئیم، اگر (الف) بازای هر $t_0 \in \mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ج) $(\bar{h}_0, h)$ -شبه پایدار کاربردی نهایی $(\bar{h}_0, h)$ -EPQ نامیم، اگر

برای $\alpha, \beta, T > 0$ و برخی $t_0 \in \mathcal{T}$ با $t_0 + T \in \mathcal{T}$

$$; \bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 + \exists \tau(\alpha, \beta) > 0, \quad T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T};$$

(د) $(\bar{h}_0, h)$ -شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت $(\bar{h}_0, h)$ -UEPQ

گوئیم، اگر (ج) بازای هر $t_0 \in \mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ه) $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی قوی $(\bar{h}_0, h)$ -SEPS نامیم،

اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و) $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی $(\bar{h}_0, h)$ -SUEPS

گوئیم، اگر (ب) و (د) بطور توأم برقرار باشند.

(ز) $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار مجانبی کاربردی^۷ $(\bar{h}_0, h)$ -PAS نامیم، اگر

(الف) برقرار باشد و

$$; \bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \forall t_0 \in \mathcal{T} \exists T = T(t_0, \varepsilon) > 0, \quad \varepsilon, t \geq t_0 + T;$$

(ح) $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار مجانبی کاربردی یکنواخت^۸ $(\bar{h}_0, h)$ -UPAS

گوئیم، اگر (ب) برقرار باشد و T در (ز) مستقل از t_0 باشد.

حال اصول مقایسه و قضایای پایداری جدید را برای سیستم معادلات دیفرانسیل فازی دارای تاخیر، در فضای فازی N -بعدی را ارائه می کنیم.

قضیه ۳-۳: فرض کنید

(الف) $V \in C[\mathcal{T} \times (E^n)^N, \mathbb{R}^N]$ لپ شیتز محلی باشد.

(ب) G غیرنزولی شبه یکنواخت فوقانی بر حسب U بازای هر $t \in \mathcal{T}$

است، و برای $X \in (E^n)^N$ داریم

$$D^-V(t, X) \leq G(t, V(t, X))$$

(ج) $U \in \mathbb{R}^N$ ، و $M(t) = M(t, t_0, U_0)$ پاسخ ماکزیمال^۹ سیستم

زیر است

$$U' = G(t, U), \quad U(t_0) = U_0$$

آنگاه برای هر پاسخ سیستم فازی $X(t_0) = X_0$

$$\|V(t, X)\| \leq \|U(t)\|, \quad t \in \mathcal{T}, \text{ داریم}$$

که نتیجه می دهد $\|V(t_0, X_0)\| \leq \|U_0\|$

¹ eventual practical stable (EPS)

² uniform eventual practical stable (UEPS)

³ eventual practical quasistable (EPQ)

⁴ uniform eventual practical quasistable (UEPQ)

⁵ strong eventual practical stable (SEPS)

⁶ strong uniform eventual practical stable (SUEPS)

⁷ $(\bar{h}_0, h)$ -practical asymptotic stable $(\bar{h}_0, h)$ -PAS

⁸ $(\bar{h}_0, h)$ -uniform practical asymptotic stable $(\bar{h}_0, h)$ -UPAS

⁹ maximal solution

در اینصورت برای هر تابع $X \in C_{rd}[T, \Omega]$ به قسمی که

$$\|V(t+r, X(t+r))\| \leq \|V(t, X(t))\|, \quad r \in [-d, 0]$$

خواهیم داشت

$$\|V(t, X(t, t_0, \psi))\| \leq \|M(t, t_0, U_0)\|, \quad t \in T \quad (3.4)$$

که $X(t) = X(t, t_0, \psi)$ بیانگر پاسخ سیستم (3.1) و $M(t) = M(t, t_0, U_0)$ پاسخ ماکزیمال سیستم (3.2) است.

اثبات: از آن جایی که در بازه $(t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{N}$ ، تابع $X(t)$ مطابق بر پاسخ سیستم (3.1) است، نتیجه می گیریم که برای $t_{k-1} < t \leq t_k$ تابع $X(t)$ در معادله انتگرالی زیر صدق می کند

$$X(t) = X(t_k) + I_k(X(t_k)) + \int_{t_k}^t F(r, X(r), X(r-d)) dr$$

فرض می کنیم $t \in (t_0, t_1]$ ؛ در اینصورت طبق قضیه ۳-۳ داریم

$$\|V(t, X(t, t_0, \psi))\| \leq \|M(t, t_0, U_0)\|, \quad t \in T$$

با فرض اینکه نامعادله (3.4) برای $t \in (t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{N}$ بازای هر t برقرار است، با استفاده از (3.3) و توجه به این که توابع φ_k غیرنزولی یکنوا هستند، داریم

$$\begin{aligned} & \|V(t_k^+, X(t_k^+) + I_k(X(t_k^+)))\| \leq \\ & \|\varphi_k(V(t_k, X(t_k)))\| \leq \|\varphi_k(M(t_k, t_0, U_0))\| = \\ & \|\varphi_k(M_{k-1}(t_k, t_{k-1}, U_{k-1}))\| = U_k \end{aligned}$$

به طریق مشابه با اعمال قضیه ۳-۳ به بازه های بعدی تا $t \in (t_k, t_{k+1}]$ بدست می آوریم $\|V(t, X(t, t_0, \psi))\| \leq \|M_k(t, t_k, U_k)\| = \|M(t, t_0, U_0)\|$ بنابراین، نامساوی (3.4) به استقراء برقرار است و اثبات به اتمام می رسد.

قضیه ۳-۵: فرض کنید $\varphi \in \mathcal{K}$ ، $h \in \Gamma$ ، $h_0 \in \Gamma_d$ و شرایط قضیه ۳-۴ برقرار است. علاوه بر آن داریم

$$0 < \alpha < \beta \quad (\text{الف})$$

(ب) $\tilde{h}_0(t, X) < \alpha$ نتیجه می دهد $\tilde{h}_0(t, X) \leq h(t, X)$ و به اصطلاح گوییم $\tilde{h}_0$ ظرفیت^۱ از h است؛

(ج) برای $V \in \mathbb{V}_0$ ، وجود دارد $a, b \in \mathcal{K}$ به قسمی که $b(h(t, X)) \leq \|V(t, X)\| \leq a(\tilde{h}_0(t, X))$ ؛

$$\varphi(\alpha) < \beta \text{ و } a(\alpha) < b(\beta) \quad (\text{د})$$

آنگاه انواع مفاهیم پایداری نهایی سیستم مقایسه ای (3.2)، منجر به انواع خواص مشابه $(\tilde{h}_0, h)$ -پایداری نهایی سیستم فازی (3.1) می گردند.

اثبات: تعریف می کنیم $m(t) = V(t, X(t))$. طبق (الف)

$$\begin{aligned} m(t+h(t)) - m(t) &= V(t+h(t), X(t+h(t))) - V(t, X(t)) \\ &= V(t+h(t), X(t+h(t))) - V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) \\ &\quad + V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) - V(t, X(t)) \\ &\leq L(t+h(t))\bar{D}_0(X(t+h(t)), X(t) + h(t)F(t, X(t))) \\ &\quad + V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) - V(t, X(t)) \end{aligned}$$

با اعمال خواص متر هاسدورف بدست می آوریم

$$\begin{aligned} m(t+h(t)) - m(t) &\leq L(t+h(t))\bar{D}_0(X(t+h(t)) - X(t), h(t)F(t, X(t))) \\ &\quad + V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) - V(t, X(t)) \end{aligned}$$

طبق تعریف مشتق چپ دینی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D^-m(t) &\equiv \lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf_{h(t)} \frac{m(t+h(t)) - m(t)}{h(t)} \leq \\ &\lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf_{h(t)} \left[\frac{L(t+h(t))\bar{D}_0(X(t+h(t)) - X(t), h(t)F(t, X(t)))}{h(t)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) - V(t, X(t))}{h(t)} \right] = \lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf_{h(t)} L(t + h(t))\bar{D}_0 \left[\frac{X(t+h(t)) - X(t)}{h(t)}, F(t, X(t)) \right] \\ &\quad + D^-V(t, X) = L(t)\bar{D}_0[D_H X, F(t, X(t))] + D^-V(t, X) = D^-V(t, X) \end{aligned}$$

بنابراین $D^-m(t) \leq G(t, m(t))$

که می توان گفت $\|D^-m(t)\| \leq \|G(t, m(t))\|$

با استفاده از نظریه نامعادلات دیفرانسیلی به این نتیجه می رسیم که

$$\|V(t, X)\| \leq \|M(t)\|$$

قضیه ۳-۶: فرض کنید

(الف) تابع G غیرنزولی شبه یکنوا فوقانی و پیوسته بر روی

مجموعه های $\mathcal{G} \times (t_k, t_{k+1}]$ بازای $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و

$$M(t) = \begin{cases} U_0 & t = t_0 \\ M_0(t, t_0, U_0) & t \in (t_0, t_1] \\ M_1(t, t_1, U_1^+) & t \in (t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \\ M_k(t, t_k, U_k^+) & t \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

جواب ماکزیمال سیستم (3.2) است؛

(ب) توابع $\varphi_k: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ، $\varphi_k(U) = U + J_k(U)$ غیرنزولی یکنوا

فوقانی در $\mathcal{G}$ هستند؛

(ج) بازای هر $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\beta \in \mathcal{G}$ حد $\lim_{(t, \alpha) \rightarrow (t, \beta)} G(t, \alpha)$ وجود

دارد؛

(د) تابع $V \in \mathbb{V}_0$ به گونه ای است که $\|V(t_0, \psi)\| \leq \|U_0\|$ ؛

(ه) معادلات زیر برقرار هستند

$$D^-V(t, X(t)) \leq G(t, V(t, X(t))), \quad t \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\|V(t^+, X(t) + I_k(X(t)))\| \leq \|\varphi_k(V(t, X(t)))\|, \quad t = t_k \quad (3.3)$$

¹ finer

$$h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T} \quad (3.6)$$

فرض کنید $V(t_0, \psi) = U_0$ باشد، از آن جایی که $\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$ است، از (ج) نتیجه می گیریم

$$\|V(t_0, \psi)\| = \|U_0\| \leq a(\bar{h}_0(t_0, \psi)) < a(\alpha)$$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 \geq \tau_2(\alpha, \beta)$$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳-۴ برقرار است داریم

$$\|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\|, \quad t \geq t_0$$

این معادله به همراه (ج) منجر به تناقض زیر می شود

$$b(h(t, X(t))) \leq \|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

بنابراین (3.6) برقرار است، یعنی

$$\Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta) \bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$$

و سیستم فازی هایبرید ضربه ای (3.1) پایدار $SUEPS(\bar{h}_0, h)$ است.

قضیه ۳-۶: فرض کنید شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است به غیر از شرط (د) که با شرط زیر جایگزین شده است

$$\varphi(\alpha) < \beta \quad (د)$$

آنگاه خواص شبه پایداری نهایی سیستم مقایسه ای (3.2) بیانگر خواص $(\bar{h}_0, h)$ -شبه پایداری نهایی سیستم فازی متناظر (3.1) خواهند بود.

اثبات: فرض کنید سیستم (3.2)، $UEPQ$ باشد؛ در اینصورت بازای $(a(\alpha), b(\beta))$ داده شده با $\alpha, \beta, T > 0$ داریم

$$\exists \tau(\alpha, \beta) > 0; \|U_0\| < a(\alpha) \Rightarrow \|U(t)\| < b(\beta), \forall t_0 \in \mathcal{T}, t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta).$$

بازای هر $(t_0, \psi) \in \mathcal{T} \times PC([-d, 0], (E^n)^N)$ به گونه ای که

$$\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha, \quad \text{از (ب) و (د) می یابیم}$$

$$h(t_0, \psi) \leq \varphi(\bar{h}_0(t_0, \psi)) < \varphi(\alpha) < \beta$$

ادعا می کنیم که

$$h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta) \quad (3.7)$$

فرض می گیریم $V(t_0, \psi) = U_0$ باشد، چون $\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$ است

$$\|V(t_0, \psi)\| = \|U_0\| \leq a(\bar{h}_0(t_0, \psi)) < a(\alpha) \quad \text{از (ج) داریم}$$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

پس چون شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است

$$\|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\|, \quad t \geq t_0$$

اثبات: ابتدا به بررسی پایداری یکنواخت می پردازیم. فرض کنید سیستم (3.2) پایدار به مفهوم $UEPS$ باشد. در اینصورت برای $(a(\alpha), b(\beta))$ داده شده با $0 < \alpha < \beta$

$$\exists \tau(\alpha, \beta) > 0; \|U_0\| < a(\alpha) \Rightarrow \|U(t, t_0, U_0)\| < b(\beta), t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T}.$$

بازای هر $(t_0, \psi) \in \mathcal{T} \times PC([-d, 0], (E^n)^N)$ به گونه ای که

$$\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha, \quad \text{طبق شرایط (ب) و (د) داریم}$$

$$h(t_0, \psi) \leq \varphi(\bar{h}_0(t_0, \psi)) < \varphi(\alpha) < \beta$$

ادعا می کنیم که

$$h(t, X(t)) < \beta \quad \forall t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta) \quad (3.5)$$

به برهان خلف ادعای فوق را ثابت می کنیم. اگر معادله فوق صحیح

نباشد، فرض خلف را به این صورت می گیریم که وجود دارد $t^* > t_0$

که $t^* \in (t_k, t_{k+1}]$ برای برخی $k \in \mathbb{N}$ به قسمی که

$$h(t^*, X(t^*)) \geq \beta \quad \text{و} \quad h(t, X(t)) < \beta, \quad \text{for} \quad t_0 \leq t < t^*$$

فرض می کنیم $V(t_0, \psi) = U_0$ باشد، از آن جایی که

$$\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \quad \text{است طبق شرط (ج)}$$

$$\|V(t_0, \psi)\| = \|U_0\| \leq a(\bar{h}_0(t_0, \psi)) < a(\alpha)$$

که منجر می شود به $\|U(t)\| < b(\beta), \quad \text{for} \quad t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta).$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳-۴ برقرار است، داریم

$$\|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\|, \quad t \geq t_0$$

این معادله به همراه (ج) ما را به تناقض زیر می رساند

$$b(\beta) \leq b(h(t^*, X(t^*))) \leq \|V(t^*, X(t^*))\| \leq \|M(t^*)\| < b(\beta)$$

این تناقض نشانگر باطل بودن فرض خلف و برقراری نامعادله (3.5)

است، یعنی $\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$ نتیجه می دهد $h(t, X(t)) < \beta$ بازای هر

$$t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta) \quad \text{که به معنای پایداری } -UEPS(\bar{h}_0, h) \text{ برای سیستم}$$

فازی (3.1) است.

حال به بررسی پایداری قوی می پردازیم. برای ثوابت $0 < T < 0$ و

$$\alpha < \beta, \quad \text{طبق آنچه در بخش قبل اثبات کردیم، سیستم فازی (3.1) پایدار}$$

به مفهوم $UEPS(\bar{h}_0, h)$ است. بنابراین

$$\exists \tau_1(\alpha, \beta) > 0; \bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, \forall t_0 \in \mathcal{T}, t \geq t_0 \geq \tau_1(\alpha, \beta).$$

فرض کنید سیستم مقایسه ای (3.2) پایدار به مفهوم $UEPQ$ است؛

آنگاه بازای $(a(\alpha), b(\beta))$ داده شده

$$\exists \tau_2(\alpha, \beta) > 0; \|U_0\| < a(\alpha) \Rightarrow \|U(t)\| < b(\beta), t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau_2(\alpha, \beta).$$

با تعریف $\tau(\alpha, \beta) \equiv \max\{\tau_1(\alpha, \beta), \tau_2(\alpha, \beta)\}$ ثابت می کنیم

$$D^-V(t, X(t)) \leq -c(V(t, X(t))), \quad X \in C_{rd}[T, \Omega], t \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c \in \mathcal{K}$$

آنگاه سیستم فازی (3.1)، $UPAS(\bar{h}_0, h)$ - است.

اثبات: از آن جایی که (ذ) بطور ضمنی (د) را نتیجه می دهد، طبق قضیه ۷-۳، سیستم (3.1) پایدار $UEPS(\bar{h}_0, h)$ - است، یعنی

$$\Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in T\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$$

برای هر $\varepsilon \in (0, \alpha)$ داده شده، فرض می کنیم $T = \frac{\alpha(\alpha)}{c(b(\beta))} > 0$

ثابت می کنیم $t^* \in [t_0, t_0 + T]: t_k < t^* \leq t_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به قسمی که

$$(3.10)m(t^*) < b(\beta)$$

اگر چنین نباشد، آنگاه

$$m(t) \geq b(\beta), t \in [t_0, t_0 + T]$$

با فرض $t_1, t_2, \dots, t_p \in [t_0, t_0 + T]$ و (ذ) داریم

$$T - m(t_0^+) = [m(t_0 + T) - m(t_p)] + [m(t_p) - m(t_{p-1})] + \dots + [m(t_2) - m(t_1)] + [m(t_1) - m(t_0^+)] \leq [m(t_0 + T) - m(t_p^+)] + [m(t_p) - m(t_{p-1}^+)] + \dots + [m(t_2) - m(t_1^+)] + [m(t_1) - m(t_0^+)] \leq \int_{t_p^+}^{t_0+T} D^-V(t, X(t), X_p) dt + \int_{t_{p-1}^+}^{t_p} D^-V(t, X(t), X_{p-1}) dt + \dots + \int_{t_1^+}^{t_2} D^-V(t, X(t), X_1) dt + \int_{t_0^+}^{t_1} D^-V(t, X(t), X_0) dt \leq -c(b(\beta))T$$

این نامساوی به همراه (ج) منجر می شود به $-a(\alpha) \leq -m(t_0^+) \leq m(t_0 + T) - m(t_0^+) \leq -c(b(\beta))T < -a(\alpha) + 1$

که تناقض است. بنابراین نامعادله (3.10) برقرار است.

با استفاده از (ج)، (ه)، (ذ) و (3.10) بدست می آوریم

$$b(h(t, X)) \leq m(t) \leq m(t^*) < b(\beta), t \geq t^*$$

چون b تابعی از کلاس $\mathcal{K}$ (اکیدا صعودی) است نتیجه می شود

$$h(t, X) < \beta, t \geq t_0 + T$$

بنابراین سیستم دیفرانسیل فازی ضربه ای تاخیری (3.1)، پایدار به مفهوم $UPAS(\bar{h}_0, h)$ - است.

مثال ۹-۳: سیستم دیفرانسیل فازی تاخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D_H x_1(t) = -1.5x_1(t) + x_2(d(t)) + h_1(t) \\ D_H x_2(t) = -1.5x_2(t) + x_1(d(t)) + h_2(t) \end{cases}, t \geq t_0 \quad (3.11)$$

که شرایط اولیه آن به صورت زیر است $\begin{cases} x_1(t + t_0) = \varphi_1(t) \\ x_2(t + t_0) = \varphi_2(t) \end{cases}, t \in [-1, 0]$

که در آن $t_0 \geq 0, d \in C(\mathbb{R}, [-1, 0]); t - X = (x_1, x_2) \in E^2$ متغیر با زمان کراندار است. $1 \leq d(t) \leq t$ توجه داریم که $d(t) = t - |\sin t|$ مثالی از تاخیر

این به همراه (ج) به تناقض زیر می انجامد

$$b(h(t, X(t))) \leq \|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\| < b(\beta)$$

بنابراین (3.7) برقرار است یعنی

$$\Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$$

پس سیستم فازی هایبرید ضربه ای تاخیری (3.1)، $UEPQ(\bar{h}_0, h)$ - است.

قضیه ۷-۳: فرض کنید $h_0 \in \Gamma_d, h \in \Gamma, \varphi \in \mathcal{K}$

$$0 < \alpha < \beta \quad (\text{الف})$$

(ب) $\bar{h}_0(t, X) < \alpha$ نتیجه می دهد $h(t, X) \leq \varphi(\bar{h}_0(t, X))$ اصطلاح گویم $\bar{h}_0$ ظریفتر از h است؛

(ج) برای $V \in \mathbb{V}_0$ وجود دارد $a, b \in \mathcal{K}$ به قسمی که $b(h(t, X)) \leq \|V(t, X)\| \leq a(\bar{h}_0(t, X))$;

$$D^-V(t, X(t)) \leq 0, X \in C_{rd}[T, \Omega], t \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\|V(t^+, X(t) + I_k(X(t)))\| \leq \|V(t, X(t))\|, X \in C_{rd}[T, \Omega], t = t_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\varphi(\alpha) < \beta \text{ و } \alpha(\alpha) < b(\beta) \quad (\text{و})$$

آنگاه سیستم فازی (3.1)، $UEPS(\bar{h}_0, h)$ - است.

اثبات: از (الف) و (ب) نتیجه می شود

$$h(t_0, \psi) \leq \varphi(\bar{h}_0(t_0, \psi)) < \varphi(\alpha) < \beta$$

سپس ثابت می کنیم $UEPS(\bar{h}_0, h)$ - است، یعنی

$$h(t, X) < \beta, t \in T \Rightarrow \bar{h}_0(t_0, \psi) < \varphi(\alpha)$$

اگر اینگونه نباشد، وجود دارد جوابی از سیستم (3.1) با $\bar{h}_0(t_0, \psi) < \varphi(\alpha)$ و $t^* \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$ به گونه ای که

$$h(t^*, X(t^*)) = \beta, X \in C_{rd}[T, \Omega], t \in [t_0, t^*) \quad (3.8)$$

حال با تعریف $m(t) = V(t, X(t))$ ، برای $t \in [t_0, t^*)$ ، از (د) و (ه) می یابیم

$$m(t^*) \leq m(t_k^+) \leq m(t_k) \leq \dots \leq m(t_0^+) \quad (3.9)$$

با استفاده از (ج)، (و)، (3.8) و (3.9) نتیجه می گیریم

$$b(\beta) \leq b(h(t^*, X(t^*))) \leq m(t^*) \leq m(t_0^+) \leq a(\bar{h}_0(t_0, \psi)) \leq a(\alpha) < b(\beta)$$

که تناقض است و اینگونه اثبات به اتمام می رسد.

قضیه ۸-۳: فرض کنید شرایط قضیه ۷-۳ برقرار باشند به جز شرط (د) که با شرط زیر جایگزین گردد

در ادامه برای نشان دادن نحوه استفاده و کاربرد لم و قضایای فوق، مثالی کاربردی از پزشکی (اثر دارو بر ساختمان بدن) را مطرح می کنیم.

مثال ۳-۱۱: هنگامی که به بیمار تجویز دارویی می شود، پس از مصرف دارو، این دارو کم کم وارد جریان خون می شود. از آن جایی که دارو از کبد و کلیه می گذرد، با متابولیسم بدن به مرور زمان کاهش و در نهایت حذف می شود. سرعت این عملیات بستگی به نوع آن داروی خاص دارد [34]. مثلاً فرض می کنیم $(1-a)\%$ از دارو در هر بازه زمانی حذف می شود. دوز اولیه را x_0 در نظر می گیریم. علاوه بر آن، فرض می کنیم در زمان های t_k که $k = 0, 1, 2, \dots$ و $t_k < t_{k+1}$ دارو بصورت تزریق وریدی با نرخ ثابت b میلی گرم تا لحظه s_k که $k = 1, 2, \dots$ و $t_k < s_k < t_{k+1}$ وارد جریان خون شود و این روند تکرار شود. ساده ترین مدلی که نرخ تغییرات مقدار دارو را در محل جذب توصیف می کند بصورت $D_H x(t) = -ax(t)$ است (مثال ۲.۲ از مرجع [35] را ببینید) و تغییر درون وریدی با معادله $x(t) = x(t_k - 0) + b(t - s_k)$ مدل می شود. اگر عملیات تزریق وریدی را تکرار کنیم، مدل ریاضی توصیف دینامیک میزان دارو در جریان خون بصورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} D_H x(t) = -ax(t) & t \in (s_k, t_{k+1}], k = 0, 1, 2, \dots \\ x(t) = x(t_k - 0) + b(t - s_k) & t \in (t_k, s_k], k = 1, 2, \dots \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

که در آن $x \in E$ است و $a, b > 0$ ثابت هستند. از آن جایی که $b \neq 0$ است، سیستم فوق دارای پاسخ صفر (با فرض $x_0 = \bar{0}$) می باشد. بنابراین، با استفاده از لم فوق، با فرض آن که جواب غیرصفر سیستم $x^*(t)$ با شرط اولیه داده شده $x(t_0) = x_0$ باشد، طبق معادلات (3.15) و (3.14) مساله بصورت زیر کاهش می یابد

$$\begin{cases} D_H x(t) = -ax(t) & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, 2, \dots \\ x(t) = x(t_i - 0) & t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, \dots \\ x(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

سیستم اسکالر (3.16) بسیار ساده است و پایداری پاسخ صفر آن (با $\tilde{x}_0 = \bar{0}$) واضح است.

برای بررسی پایداری با استفاده از قضایای پایداری کافیت تابع شبه لیاپانوف را بصورت $V(t, x) = x^2$ در نظر بگیریم. در اینصورت بدست می آوریم

$$D^-V(t, x) = 2xf(t, x) = -2ax^2 \leq \bar{0}$$

بنابراین تمام شرایط قضیه ۳-۷ برقرار است، پس پاسخ صفر سیستم (3.16) و در نتیجه پاسخ غیرصفر سیستم (3.15) پایدار یکنواخت هستند. پاسخ سیستم (3.16) در حالت خاص $a = 0.6$ یعنی ۴۰٪ حذف دارو در هر بازه زمانی، $b = 2$ ، $t_k = 2k$ ، $s_k = 2k - 1$ ، $k = 1, 2, \dots$ و بازای مقادیر اولیه متفاوت در شکل ۱ رسم شده است.

فرض کنید ثوابت $L_1, L_2 > 0$ وجود دارند به قسمی که $D_0(h_i(t_1), h_i(t_2)) \leq L_i |t_1 - t_2|$ ، $i = 1, 2$ همچنین تابع شبه لیاپانوف را بصورت $V(t, x_1, x_2) = D_0(x_1, x_2)$ در نظر بگیریم. اگر $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in S(\rho)$ ، $\rho > 0$ ، برای هر $r \in [-1, 0]$ نامعادله زیر برقرار است:

$$D_0(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) > D_0(\varphi_1(r), \varphi_2(r))$$

تعریف می کنیم

$$\begin{cases} f_1(t, \varphi) = -1.5\varphi_1(t) + \varphi_2(d(t)) + h_1(t) \\ f_2(t, \varphi) = -1.5\varphi_2(t) + \varphi_1(d(t)) + h_2(t) \end{cases}$$

طبق خواص E^2 از مرجع [29] و نیز خواص فاصله $D_0(X, Y)$ از مراجع [23, 28] با محاسبه مشتق دینی تابع لیاپانوف بدست می آوریم

$$\liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{D_0(t+h, X(t+h(t))) + h(t)F(t, X(t), X(t-d)) - D_0(t, X(t))}{h} \leq -D_0(\varphi_1, \varphi_2) + L\rho$$

که در آن $L = \max\{L_1, L_2\}$ است. بنابراین، معادله سیستم اسکالر مقایسه ای را در این حالت بصورت زیر در نظر می گیریم

$$u'(t) = -u + L\rho$$

که دارای پاسخ $u(t) = (-L\rho + u_0)e^{-(t-t_0)} + L\rho$ است. بنابراین، $|u(t)| \leq |u_0| + 2L\rho$ که نشان می دهد پاسخ سیستم مقایسه ای اسکالر پایدار یکنواخت است، پس طبق قضیه ۳-۷ سیستم فازی (3.11) پایدار کاربردی یکنواخت است.

توجه: ممکن است پاسخ بدیهی^۱ سیستم، همان پاسخ صفر^۲ سیستم نباشد. در این مواقع از لم زیر استفاده می کنیم.

لم ۳-۱۰: فرض کنید $x^*(t) = x(t, t_0, X_0) \in PC^1(\mathcal{T}, (E^n)^N)$ پاسخ غیرصفر سیستم فازی (3.1) باشد. آنگاه سیستم زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} D_H x = f(t, x) & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, 2, \dots \\ x(t) = \phi_i(t, x(t)) & t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, \dots \\ x(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

که در آن $\phi_i \in f \in PC^1(\mathcal{T} \times (E^n)^N, (E^n)^N)$ ، $\alpha, \tilde{x}_0 \in (E^n)^N$ و $i = 1, 2, \dots, C([t_i, s_i] \times (E^n)^N, (E^n)^N)$

$$f(t, x) = F(t, x + x^*(t)) - F(t, x^*(t)) \quad (3.13)$$

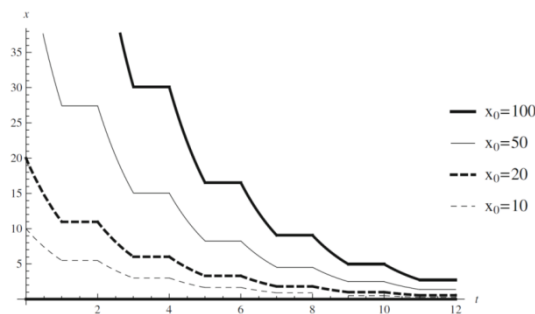
$$\phi_i(t, x) = \psi_i(t, x + x^*(t)) - \psi_i(t, x^*(t)) \quad (3.14)$$

سیستم (3.12) دارای پاسخ صفر (با $\tilde{x}_0 = \bar{0}$) است. بنابراین بررسی خواص پایداری پاسخ غیرصفر $x^*(t)$ از سیستم اولیه مطرح شده (3.1)، به بررسی خواص پایداری پاسخ صفر سیستم (3.12) ساده می گردد.

¹ Trivial solution

² Zero solution

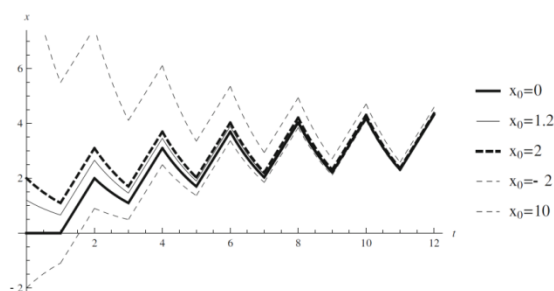
- [2] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy: Stability Theory by Lyapunov's Direct Method, Springer, New York, NY, USA, 1997.
- [3] V. Lakshmikantham, X.Z. Liu: Stability Analysis in Terms of Two Measures, World Scientific, Singapore, 1993.
- [4] S.M.S. de Godoy, M.A. Bena: Stability criteria in terms of two measures for functional differential equations, Applied Mathematics Letters 18 (6) (2005) 701-706.
- [5] P. Wang, H. Lian: On the stability in terms of two measures for perturbed impulsive integro-differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 313 (2) (2006) 642-653.
- [6] P. Wang, Z. Zhan: Stability in terms of two measures of dynamic system on time scales, Computers and Mathematics with Applications 62 (12) (2011) 4717-4725.
- [7] C.H. Kou, S.N. Zhang: Practical stability for finite delay differential systems in terms of two measures, Acta Math. Appl. Sinica 25 (3) (2002) 476-483.
- [8] V. Lakshmikantham, V.M. Matrosov, S. Sivasundaram: Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.
- [9] P. Wang, W. Sun: Practical stability in terms of two measures for set differential equations on time scales, The Scientific World Journal (2014), Article ID 241034, 7 pages.
- [10] D.D. Bainov, I.M. Stamova: On the practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations with variable impulsive perturbations, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 272-288.
- [11] Z.G. Luo, J.H. Shen: New Razumikhin type theorems for impulsive functional differential equations, Appl. Math. Comput. 125 (2002) 375-386.
- [12] A.A. Soliman: Stability criteria of impulsive differential systems, Appl. Math. Comput. 134 (2003) 445-457.
- [13] J.T. Sun: Stability criteria of impulsive differential system, Appl. Math. Comput. 156 (2004) 85-91.
- [14] J.T. Sun, Y.P. Zhang: Impulsive control of a nuclear spin generator, J. Comput. Appl. Math. 157 (1) (2003) 235-242.
- [15] J.T. Sun, Y.P. Zhang: Stability analysis of impulsive control systems, IEE Proc. Control Theory Appl. 150 (4) (2003) 331-334.
- [16] J.T. Sun, Y.P. Zhang, Q.D. Wu: Less conservative conditions for asymptotic stability of impulsive control systems, IEEE Trans. Automat. Control 48 (5) (2003) 829-831.



شکل ۱: منحنی پاسخ های سیستم تغییر یافته (3.16) بازای دوزهای

اولیه متفاوت

پاسخ $x^*(t)$ از سیستم (3.15) پایدار است؛ یعنی اگر دوز تزریقی اولیه باندازه کافی نزدیک به مقدار دوز اولیه ثابت داده شده x_0 باشد، آن گاه مقدار دارو در جریان خون به اندازه کافی نزدیک به مقدار دوز اولیه تجویزی داده شده x_0 خواهد بود. رفتار پاسخ های $x^*(t)$ از سیستم (3.15) در حالت خاص $s_k = 2k - 1, t_k = 2k, b = 2, a = 0.6$ و بازای مقادیر اولیه متفاوت در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲: منحنی پاسخ های سیستم (3.15) بازای دوزهای اولیه

متفاوت

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، قضایایی برای تحلیل پایداری سیستم های هایبرید تاخیری توصیف شده با دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ضربه ای ارائه کردیم. برای این منظور از توابع شبه لیپانوف برداری به همراه قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیلی معمولی استفاده شد. در این راستا، پایداری را از دیدگاه های مختلف یعنی پایداری نهایی، پایداری قوی، پایداری مجانبی و پایداری یکنواخت بررسی کردیم. همچنین قضایایی برای پایداری کاربردی سیستم های دینامیکی فازی به اثبات رساندیم. در انتها با مثالی عددی، کارایی روش را نشان دادیم و در نهایت با مثالی عملی از پزشکی، پلی بین مبانی ریاضی تحقیق و کاربرد عملی پژوهش تبیین کردیم.

مراجع

- [1] J.P. Lasalle, S.Lefschetz: Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York, NY, USA, 1961.

- [31] P. Wang, X. Liu, Practical stability of impulsive hybrid differential systems in terms of two measures on time scales, *Nonlinear Analysis* 65 (2006) 2035-2042.
- [32] Yu Zhang, Exponential stability of impulsive discrete systems with time delays, *Applied Mathematics Letters* 25 (2012) 2290-2297.
- [33] P. Wang, M. Wu, Y. Wu, Practical stability in terms of two measures for discrete hybrid systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid systems* 2 (2008) 58-64.
- [34] A. Routes, "Drug absorption, distribution and elimination. Pharmacokinetics", 2015. [Online]. Available: <http://www.columbia.edu/itc/gsas/g9600/2004/GrazianoReadings/Drugabs>. [Accessed: 10- Oct-2017].
- [35] Pharmacokinetics, [Online]. Available: <http://coewww.rutgers.edu/classes/bme/bme305/BookChapters/Chap702Sep03>. [Accessed: 10- Oct- 2017].
- [36] H. Zarei, A. Kamyad and A. Heydari, "Fuzzy Modeling and Control of HIV Infection", *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2012, pp. 1-17, 2012.
- [37] M. Mazandarani, N. Pariz and A. Vahidian Kamyad, "Granular Differentiability of Fuzzy-Number-Valued Functions", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, pp. 1-1, 2017.
- [38] L. Hu, X. Mao and Y. Shen, "Stability and boundedness of nonlinear hybrid stochastic differential delay equations", *Systems & Control Letters*, vol. 62, no. 2, pp. 178-187, 2013.
- [39] C. Yakar, M. Çiçek and M. Gücen, "Practical stability, boundedness criteria and Lagrange stability of fuzzy differential systems", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 64, no. 6, pp. 2118-2127, 2012.
- [40] S. Zhang and J. Sun, "Stability of Fuzzy Differential Equations With the Second Type of Hukuhara Derivative", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 1323-1328, 2015.
- [17] T. Yang: *Impulsive Systems and Control: Theory and Applications*, Nova Science Publishers, Huntington NY, 2001.
- [18] S.G. Hristova, A. Georgieva: Practical stability in terms of two measures for impulsive differential equations with supremum, *Int. J. Diff. Eq.* 2011 (2011) Article ID 703189, 13 pages.
- [19] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive differential systems, *Advance in Differential equation and Control Processes* 10 (2012) 171-182.
- [20] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive functional differential equations, *Lecture Notes in Engineering and Computer Science* 2197 (2012) 169-171.
- [21] J.S. Yu: Stability for nonlinear delay differential equations of unstable type under impulsive perturbations, *Applied Mathematics Letters* 14 (2001) 849-857.
- [22] Y. Zhang, J.T. Sun: Boundedness of the solutions of impulsive differential systems with time-varying delay, *Appl. Math. Comput.* 154 (1) (2004) 279-288.
- [23] Y. Zhang, J. Sun: Eventual practical stability of impulsive differential equations with time delay in terms of two measurements, *J. Comput. and Appl. Math.* 176 (2005) 223-229.
- [24] V. Lakshmikantham, S. Leela: Stability theory of fuzzy differential equations via differential inequalities, *Mathematical Inequalities and Applications* 2 (1999) 551-559.
- [25] V. Lakshmikantham, S. Leela: Fuzzy differential systems and the new concept of stability, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 1 (2) (2001) 111-119.
- [26] V. Lakshmikantham, R. Mohapatra: Basic properties of solutions of fuzzy differential equations, *Nonlinear Studied* 8 (2001) 113-124.
- [27] C. Yakar, M. Cicek, M.B. Gučen: Practical stability, boundedness criteria and Lagrange stability of fuzzy differential systems, *J. Computers and Mathematics with Applications* 64 (2012) 2118-2127.
- [28] S. Zhang, J. Sun: Stability of fuzzy differential equations with the second type of Hukuhara derivative, *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* (2014).
- [29] B. Bede, S. G. Gal: Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Sys.* 151 (3) (2005) 581-599.
- [30] S. Sun, Z. Han, E. Akin-Bohner, P Zhao, Practical stability in terms of two measures for hybrid dynamic systems, *Bulletin of the Polish academy of sciences, Mathematics* (210) (2010).

طراحی یک کنترل کننده ترکیبی ANFIS+PID برای کنترل بازوی ربات شش درجه آزادی و تحلیل همگرایی خطای آن

مجتبی هادی برحق طلب^{۱*}، وحید میگلی^۲، ولی اله غفاری^۳

^۱ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی، گروه برق، دانشگاه خلیج فارس، mh.barhaghtalab@gmail.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه مهندسی برق، دانشگاه خلیج فارس، meigoli@pgu.ac.ir

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه مهندسی برق، دانشگاه خلیج فارس، vghaffari@pgu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۲

ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۰۱/۲۱

ویرایش اول: ۱۳۹۶/۱۱/۱۵

دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۳۱

چکیده: در این مقاله یک کنترل کننده ترکیبی ANFIS+PID برای کنترل یک بازوی ربات شش درجه آزادی طراحی شده و همگرایی خطای آن نیز مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله مزایای این ترکیب جدید نسبت به ساختار ANFIS معمول، قابلیت فرموله کردن و تخمین عدم قطعیت ها و اغتشاشات سیستم به همراه دینامیک های سیستم و حذف آن می باشد. بعلاوه با این ترکیب جدید می توانیم همگرایی به صفر خطای سیستم بازوی ربات تحت کنترل پیشنهادی را بررسی کرده و به اثبات برسانیم، که در ساختار ANFIS معمولی این امکان وجود ندارد. این کنترل کننده پیشنهادی از ترکیب موازی یک شبکه ANFIS معمولی با یک کنترل کننده خطی PID بوجود آمده و بطور موفقیت آمیزی برای کنترل یک سیستم بازوی ربات شش درجه آزادی بکار برده می شود. هم چنین با استفاده از قضیه شبه لیاپانوف (لم باربالات)، همگرایی به صفر خطای سیستم تحت کنترل، با وجود عدم قطعیت ها و اغتشاشات خارجی سیستم به اثبات می رسد.

کلمات کلیدی: ANFIS، کنترل کننده PID، همگرایی خطا، بازوی ربات شش درجه آزادی، قضیه شبه لیاپانوف.

ANFIS+PID Hybrid Controller Design for Controlling of a 6-DOF Robot Manipulator and its Error Convergence Analysis

Mojtaba Hadi Barhaghtalab, Vahid Meigoli, Valiollah Ghaffari

Abstract: In this paper, an ANFIS+PID hybrid control policy has been addressed to control a 6-degree-of freedom (6-DOF) robotic manipulator. Then its error convergence has been also evaluated. The ability to formulate and estimate the system uncertainties and disturbances along with system dynamics and rejecting the disturbances effect are some advantages of the proposed method in comparing with the conventional ANFIS structures. The error convergence could not be proved in the ordinary ANFIS structures. But in the proposed method, the error convergence of the robot manipulator can be established under considering some mathematical conditions. The proposed control law is realized via parallel combination of ordinary ANFIS network and PID controller. The suggested method has been successfully applied in a 6-DOF robot manipulator system. Furthermore, in presence of uncertainties and external disturbances error convergence would be justified using the Lyapunov-like theorem and Barbalat lemma.

Keywords: ANFIS, PID controller, error convergence, 6-DOF robot manipulator, Lyapunov-like theorem.

۱- مقدمه

در چند دهه اخیر به کنترل حرکت بازوی ربات توجه زیادی شده و کارهای زیادی بر روی کنترل بازوی ربات انجام گرفته است. روش های کنترلی متنوع و کنترلرهای زیادی بر روی بازوهای رباتیک پیاده سازی شده که هر یک محاسن و معایب خاص خود را دارند. از آن جمله می توان به روش های کنترلی ذیل اشاره کرد:

کنترل مقاوم [۱، ۲]، کنترل بهینه [۳، ۴]، کنترل تطبیقی [۵، ۶]، کنترل پیش بین^۱ [۷]، کنترل خطی PID [۸، ۹]، کنترل غیر خطی مد لغزشی^۲ [۱۰، ۱۱] و کنترل هوشمند شامل شبکه های عصبی و کنترل فازی نوع اول و دوم و غیره.

در این میان استفاده از کنترل های خطی PD و PID یکی از روش های کنترل متداول در کنترل بازوهای مکانیکی می باشند و بطور وسیعی در صنعت مورد استفاده قرار می گیرد. اما همانطور که می دانیم کنترل کننده های خطی در معرض عدم قطعیت ها و اغتشاشات سیستم ناکارآمد می باشند. در پژوهش های اخیر به عنوان یک جایگزین مناسب برای تکنیک های کنترل کلاسیک (شامل: کنترل خطی، کنترل غیرخطی و مد لغزشی، کنترل مقاوم و غیره)، تکنیک های کنترل هوشمند مورد توجه قرار گرفته است. مزیت روش های هوشمند فازی و عصبی نسبت به روش های کلاسیک در اینست که در روش های هوشمند اطلاع دقیق از مدل ریاضی و دینامیک سیستم که غالباً بدست آوردن آنها مشکل است، نیاز نمی باشد.

کنترل فازی بخاطر اینکه معمولاً نیازی به مدل ریاضی سیستم تحت کنترل ندارد، خیلی آسان بکار برده می شود و در سیستم هایی که پیچیده، بد تعریف، غیر خطی و متغیر با زمان هستند بسیار خوب عمل می کند. بطور کلی برتری کنترل فازی استفاده از دانش بشری (دانش و تجربیات یک فرد خبره) در روند کنترل می باشد [۱۲]. البته ایرادی را که می توان به کنترل کننده های فازی گرفت، اینست که در مقایسه با کنترل کننده های کلاسیکی چون کنترل کننده های خطی PID یا کنترل کننده های غیر خطی و غیره، بررسی و اثبات پایداری آنها سخت تر و پیچیده تر است. زیرا تحلیل پایداری آنها بصورت گسسته-زمان صورت می پذیرد و ریاضیات خاص خود را می طلبد. روش های کنترل فازی بطور موفقیت آمیزی در کنترل سیستم های غیرخطی و چند متغیره پیچیده چون بازوهای رباتیک و سیستم های تصمیم گیری به منظور فائق آمدن بر پیچیدگی های مختلف مورد استفاده قرار می گیرد. بعنوان نمونه در مراجع [۱۳، ۱۴] کنترل کننده فازی به ترتیب برای کنترل یک بازوی ربات SCARA و PUMA بکار رفته است. هم چنین در [۱۵] یک کنترل کننده فازی با استفاده از یک الگوریتم ابتکاری برای کنترل بازوی ربات طراحی شده است.

شبکه های عصبی توانایی ذاتی برای یادگیری و تخمین یک تابع غیرخطی با دقت دلخواه را دارند. این ویژگی در کنترل به منظور مدل کردن فرآیندهای پیچیده و جبران عدم قطعیت های ساختار نیافته، مورد استفاده قرار می گیرد [۱۶]. با این حال، روند آموزش اجتناب ناپذیر آن، عملکرد گذرای آن را در مواجهه با اغتشاشات و عدم قطعیت ها کاهش می دهد و برای برخی از سیستم ها همانند بازوی ربات، که در معرض عدم قطعیت ها قرار دارند و اطلاعات مربوط به مدل به اندازه کافی مورد استفاده قرار نمی گیرد، باعث تنزل عملکرد حالت گذرای سیستم می شود. کنترل موقعیت بازوی مکانیکی با استفاده از شبکه های عصبی در مراجع [۱۷-۱۹] بعنوان نمونه آورده شده است. هم چنین در مراجع [۲۰، ۲۱] کنترل شبکه عصبی تطبیقی بر روی بازوهای رباتیک ارائه شده است.

در [۲۲-۲۴] کنترل شبکه عصبی- فازی تطبیقی^۳ و در [۲۵، ۲۶] کنترل نورو-فازی تطبیقی^۴ بر روی بازوی های رباتیک صنعتی و آزمایشگاهی اعمال شده است. هم چنین در مرجع [۲۷] یک روش کنترل تطبیقی مقاوم جدید برای کنترل موقعیت بازوی ربات SCARA ارائه شده است و اخیراً نیز در پژوهش [۲۸] یک کنترل کننده نورو- تطبیقی مقاوم برای کنترل ربات های موازی کابلی توسط ما طراحی شده است.

سیستم استنتاج فازی- عصبی بر مبنای شبکه تطبیقی^۵ (ANFIS) [۲۹، ۳۰] تحقق شبکه عصبی سیستم استنتاج فازی تاکاگی-سوگنو^۶ می باشد. در مدل های فازی-عصبی مانند ANFIS، شبکه عصبی و سیستم فازی در یک ساختار هماهنگ با یکدیگر کار می کنند و ارتباطی تکمیلی با یکدیگر دارند. در واقع مدل ANFIS را می توان یک سیستم فازی با یادگیری توزیع شده دانست که از روش های آموزشی که در شبکه های عصبی متداول است، بهره می برد. شبکه ANFIS از مزایای شبکه های عصبی (یعنی یادگیری و تطبیق پذیری) و از مزایای منطق فازی (یعنی استفاده از دانش فرد خبره) برای دست یابی به هدف کنترل مقاوم در سیستم های دینامیکی، بطور همزمان استفاده می کند. شبکه ANFIS علاوه بر اینکه قادر است هر تابع غیر خطی را با دقت دلخواه تخمین بزند، بلکه دارای سرعت همگرایی بالا و خطای کم است. همچنین نیاز به داده های آموزش کمتری دارد. از اینرو انتخاب مناسبی بعنوان کنترل کننده برای بازوی مکانیکی ربات به نظر می رسد. در پژوهش های [۳۱-۳۳] از کنترل کننده ANFIS برای کنترل بازوی رباتیک استفاده شده است. در مرجع [۳۴] مقایسه ای بین کنترل کننده ANFIS و کنترل کننده PID معمولی برای یک بازوی ربات ۳ لینکی صلب صورت پذیرفته است که در آن به وضوح می توان دید که پاسخ پله کنترل کننده ANFIS از پاسخ پله کنترل کننده PID مناسبتر و بهتر است. هم چنین در مرجع [۳۵] کنترل کننده ANFIS با کنترل کننده فازی سوگنو نوع دوم و کنترل کننده PID، برای یک بازوی ۲ لینکی

³ Adaptive Fuzzy-Neural Network Control⁴ Adaptive neuro-fuzzy control⁵ Adaptive-Neural Network-based Neuro-Fuzzy Inference System⁶ Takagi-Sugeno Fuzzy Inference System¹ Predictive control² Sliding Mode Control (SMC)

نصب شده بر پایه نوسانی مقایسه شده است که نتایج حاصل برتری کنترل کننده ANFIS را نسبت به دو کنترل کننده دیگر نشان می دهد.

در این مقاله ما یک کنترل کننده ترکیبی ANFIS+PID برای کنترل یک بازوی ربات شش درجه آزادی طراحی کرده و همگرایی خطای آنرا نیز مورد بررسی قرار داده ایم. از جمله مزایای این ترکیب جدید نسبت به ساختار ANFIS معمول، قابلیت فرموله کردن و تخمین عدم قطعیت ها و اغتشاشات سیستم به همراه دینامیک سیستم و حذف آن می باشد. بعلاوه با این ترکیب جدید می توانیم همگرایی به صفر خطای سیستم بازوی ربات تحت کنترل کننده پیشنهادی را بررسی کرده و به اثبات برسانیم، که در ساختار ANFIS معمولی این امکان وجود ندارد. این کنترل کننده پیشنهادی از ترکیب موازی یک شبکه ANFIS معمولی با یک کنترل کننده خطی PID بوجود می آید. در کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی، سیستم ANFIS بعنوان یک شناساگر است که با اثبات همگرایی، بخشی از سیستم را تخمین می زند و بعد به صورت خطی سازی فیدبک^۱ (FL) [۳۶] در ساختار کنترلی پیشنهادی بکار گرفته می شود. روش کنترل خطی سازی فیدبک (FL) یک روش کنترلی غیر خطی و شناخته شده برای کنترل سیستم های دینامیکی غیر خطی است که ما در طراحی بخشی از ساختار کنترلی پیشنهادی از آن استفاده کرده ایم.

روش کنترلی پیشنهادی ما با روش کنترل آموزش فیدبک خطا^۲ (FEL) [۳۷، ۳۸] از نظر ساختاری و ظاهری شباهت هایی دارد، از جمله در هر دو روش از ترکیب موازی یک کنترل کننده هوشمند و یک کنترل کننده کلاسیک استفاده می شود. اما با این وجود این دو روش تفاوت های ماهوی و عمده ای دارند. روش کنترل FEL را می توان یک کنترل کننده تطبیقی در نظر گرفت که به آموزش پارامترهای مسیر پیشرو با استفاده از کنترل کننده مسیر فیدبک می پردازد. این ساختار کنترلی شامل یک کنترل کننده هوشمند در مسیر پیشرو (کنترل کننده پیشرو^۳) و یک کنترل کننده کلاسیک معمولاً PD یا PID در مسیر فیدبک (کنترل کننده فیدبک^۴) می باشد. با توجه ساختار و نحوه عملکرد روش کنترل FEL، برخی تفاوت های عمده این روش با روش کنترل پیشنهادی ما عبارتند از:

۱- در ساختار کنترل FEL، همواره یک کنترل کننده هوشمند در مسیر رو به جلو در نقش یک کنترل کننده پیشرو وجود دارد. در صورتیکه در روش کنترلی پیشنهادی ما، کنترل کننده هوشمند ANFIS بعنوان یک شناساگر فازی بوده و در نقش یک کنترل کننده پیشرو اصلاً عمل نمی کند.

۲- در ساختار کنترل FEL، معمولاً ورودی کنترل کننده پیشرو (کنترل کننده هوشمند) سیگنال مرجع می باشد. در صورتیکه در روش

کنترلی پیشنهادی ما، ورودی کنترل کننده هوشمند ANFIS متغیرهای حالت X و $\dot{X}$ می باشند.

۳- در روش کنترل FEL، آموزش پارامترهای کنترل کننده هوشمند در مسیر پیشرو با استفاده از کنترل کننده کلاسیک PD یا PID موجود در مسیر فیدبک صورت می پذیرد. در حالیکه در روش کنترلی پیشنهادی ما، فرآیند آموزش پارامترهای کنترل کننده هوشمند ANFIS از کنترل کننده کلاسیک PID مستقل بوده و ربطی به آن ندارد. در روش پیشنهادی ما آموزش پارامترهای کنترل کننده ANFIS با استفاده از الگوریتم آموزش هیبرید صورت می پذیرد که در بخش ۲ به آن اشاره خواهد شد.

۴- بطور کلی از نظر ساختار و عملکرد، روش کنترلی پیشنهادی ما بیشتر شباهت به روش های کنترل ترکیبی عصبی-PID در مراجع [۳۹-۴۱] دارد تا روش کنترل FEL.

در سال های اخیر پژوهش های نسبتاً زیادی در زمینه کنترل بازوهای ربات با استفاده از روش های ترکیبی فازی-PID و عصبی-PID انجام شده است. بعنوان نمونه در [۴۲-۴۵] روش های کنترل فازی-PID^۵ و در [۳۹-۴۱] روش های کنترل عصبی-PID^۶ برای بازوی های ربات بکار گرفته شده است.

بطور کلی تفاوت عمده روش ترکیبی ANFIS+PID پیشنهادی ما با روش های ترکیبی فازی-PID موجود، در استفاده از شبکه های عصبی و تطبیقی و بکارگیری قابلیت های آنها مانند آموزش شبکه های عصبی و انطباق با شرایط جدید در شبکه های تطبیقی می باشد. اما بطور خاص تفاوت روش پیشنهادی ما با روش های کنترل فازی-PID در مراجع [۴۲-۴۵]، بر این اساس است که در آنها از سیستم فازی برای تنظیم (tuning) گین های کنترل کننده PID استفاده می شود و از اینرو گین های کنترل کننده PID در آنها غیر خطی و متغیر است. در صورتیکه در روش پیشنهادی ما در طول فرآیند کنترلی، ضرایب کنترل کننده PID ثابت بوده و تنظیمی روی آنها صورت نمی گیرد. در بخش ۵ مقاله یک مقایسه بین روش کنترلی پیشنهادی ما با یکی از روش های کنترل فازی-PID صورت پذیرفته است که برتری روش ما را نشان می دهد. هم چنین تفاوت عمده روش ترکیبی پیشنهادی ما با روش های ترکیبی عصبی-PID موجود، در استفاده از سیستم های منطق فازی و قواعد زبانی ناشی از دانش بشری در ساختار آن می باشد. از نظر ساختار ظاهری، روش پیشنهادی ما با بعضی روش های شبکه عصبی با PID در مراجع [۳۹-۴۱] شباهت هایی دارد اما تفاوت اصلی روش ما با این روش ها در نوع شبکه عصبی مورد استفاده و نحوه آموزش آن و نیز پارامترهای ورودی کنترل کننده عصبی است. در مورد روش های ترکیبی عصبی-PID در مراجع [۴۶، ۴۷] نیز تفاوت در تنظیم گین های کنترل کننده PID با استفاده از شبکه عصبی و متغیر بودن این گین ها می باشد. در صورتیکه همانطور که

¹ Feedback Linearization (FL)

² Feedback Error Learning Control (FEL)

³ Feed-Forward Controller

⁴ Feedback Controller

⁵ Fuzzy-PID Control

⁶ Neuro-PID Control

گفته شد، در روش پیشنهادی ما ضرایب کنترل کننده PID همواره ثابت هستند.

در این پژوهش برای اعتبار سنجی روش کنترل ترکیبی پیشنهادی، آنرا بر روی یک بازوی ربات شش درجه آزادی IRB-120 پیاده سازی کرده و نتایج حاصل را در محیط سیمولینک متلب شبیه سازی و تست می کنیم. همانطور که خواهیم دید، نتایج حاصل تا حدود زیادی موفقیت آمیز و قابل قبول می باشند. هم چنین با استفاده از قضیه شبه لیاپانوف (لم باربالا) [۳۶]، همگرایی به صفر خطای سیستم تحت کنترل را با وجود عدم قطعیت ها و اغتشاشات خارجی سیستم بررسی و اثبات می کنیم. برخی ویژگی های منحصر بفرد این مقاله و نوآوری های روش کنترل پیشنهادی به شرح زیر می باشند:

- در این مقاله برای اولین بار است که برای بازوی ربات صنعتی IRB-120 یک کنترل کننده طراحی شده است. این پژوهش می تواند سرآغازی برای تحقیقات وسیع تر بعدی برای طراحی کنترل کننده ها بر روی بازوی ربات IRB-120 بجای بازوی ربات PUMA-560 که تمرکز بیشتر تحقیقات و آزمایش های رباتیک بر روی آن بوده است، باشد. در پژوهش های آینده قصد داریم روش های کنترلی ابتکاری دیگری را نیز بر روی این بازوی ربات تست و مقایسه کنیم.
- روش ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID یک روش ترکیبی ابتکاری هست که برای اولین بار ارائه شده و این ترکیب جدید بخصوص با شبکه ANFIS تا به حال در جای دیگری استفاده نشده است.
- مزیت بزرگ کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID نسبت به ساختار ANFIS معمول، قابلیت فرموله کردن و تخمین عدم قطعیت ها و اغتشاشات سیستم به همراه دینامیک سیستم و حذف آن می باشد.
- با این ترکیب جدید می توانیم همگرایی به صفر خطای سیستم تحت کنترل کننده پیشنهادی را بررسی کرده و به اثبات برسانیم، که در ساختار ANFIS معمولی این امکان وجود ندارد. هم چنین بر خلاف اثبات پایداری های معمول سیستم های تحت کنترل که عملاً با فرض نامتغیر با زمان بودن سیستم و استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف صورت می پذیرد؛ ما در این پژوهش با در نظر گرفتن شرایط واقعی برای سیستم تحت کنترل و با فرض متغیر با زمان بودن آن، اثبات پایداری و همگرایی خطای سیستم را با استفاده از قضیه شبه لیاپانوف و لم باربالا انجام داده ایم.
- همانطور که گفته شد، در اکثر روش های کنترل ترکیبی فازی-PID و عصبی-PID متداول، گین های کنترل کننده PID متغیر و غیر خطی است، در صورتیکه در روش ترکیبی پیشنهادی ما گین های کنترل کننده PID همواره ثابت اند و

نیازی به تنظیم (tuning) مداوم در طول فرآیند کنترلی ندارند، که این از مزیت های روش ماست. هم چنین در بخش ۵ مقاله هم عملاً برتری روش کنترلی پیشنهادی ما در مقایسه با یکی از این روش های ترکیبی متداول به نمایش گذاشته شده است.

- هم چنین روش کنترلی پیشنهادی ما با وجود بعضی شباهت های ظاهری با روش آموزش فیدبک خطا (FEL)، تفاوت های عمده ای از نظر ساختار، عملکرد و نحوه آموزش پارامترها دارد.

ساختار کلی مقاله به این صورت می باشد که: در بخش ۲ ابتدا ساختار و معماری شبکه ANFIS معمولی معرفی شده و سپس نحوه آموزش آن تشریح شده است. در بخش ۳ ابتدا کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID برای کنترل یک بازوی ربات معرفی و طراحی گردیده و سپس همگرایی به صفر خطای آن بررسی شده و به اثبات رسیده است. معرفی بازوی ربات شش درجه آزادی IRB-120 و بررسی مشخصات کیفی و کمی آن، به همراه طراحی مکانیکی آن در محیط نرم افزار Solidworks در بخش ۴ صورت پذیرفته است. در بخش ۵ پیاده سازی و شبیه سازی کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی بر روی بازوی ربات IRB-120 با استفاده از نرم افزار MATLAB ارائه شده است و در آخر در بخش ۶ نتیجه گیری کلی ارائه گردیده است.

۲- ساختار، معماری و آموزش شبکه ANFIS

هر کدام از سیستم های فازی و شبکه های عصبی دارای مزایا و نواقصی هستند. سیستم های فازی قادر به استفاده از قواعد زبانی بوده و می توانند از تجربیات بشری و افراد خبره استفاده کنند در حالیکه قادر به یادگیری نمی باشند، به عبارت دیگر با استفاده از داده های مشاهده ای نمی توان سیستم فازی را آموزش داد، ولی شبکه های عصبی با استفاده از مجموعه داده ها، قابلیت خودآموزش دهی دارند. در عین حال شبکه های عصبی نیز قادر به استفاده از قواعد زبانی نبوده و غیر صریح هستند [۲۹، ۳۰]. نخستین بار فردی به نام جانگ^۱ در سال ۱۹۹۳ توانست از قدرت زبانی سیستم های فازی و آموزش شبکه های عصبی استفاده نموده و سیستمی تحت عنوان سیستم های فازی بر پایه شبکه های عصبی- تطبیقی ارائه نماید [۴۸]. در اینجا شاخه ای از شبکه های تطبیقی که به عنوان چارچوب اساسی برای سیستم های استنتاج فازی- تطبیقی به شمار می رود، توضیح داده شده می شود. این نوع از شبکه ها با عنوان ANFIS که مخفف عبارت Adaptive-Network-based Fuzzy Inference System است و ترجمه آن «سیستم استنتاج فازی بر مبنای شبکه تطبیقی» می شود، شناخته می شوند [۲۹، ۳۰]. سیستم استنتاج فازی- عصبی بر مبنای شبکه تطبیقی (ANFIS) در واقع تحقق شبکه عصبی^۲ سیستم استنتاج فازی

¹ Jang

فلوجارت فرآیند آموزش شبکه ANFIS در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: فلوجارت فرآیند آموزش شبکه ANFIS

کنترل کننده ANFIS بخاطر قابلیت تنظیم پذیری پارامترهای تطبیقی (شامل پارامترهای فرضی اولیه^۱ و پارامترهای نتیجه^۲) بر سیستم های فازی معمولی برتری دارد. از جمله ویژگی مهم کنترل کننده ANFIS الگوریتم یادگیری هیبرید آن است. از ساختار ANFIS نشان داده شده در شکل ۲ مشاهده می کنیم، زمانیکه مقادیر پارامترهای فرضی اولیه (یعنی مقادیر x و y) ثابت نگه داشته می شود، خروجی کلی شبکه را می توان به صورت ترکیب خطی پارامترهای نتیجه فرض نمود. خروجی f در شکل ۲ را می توان به صورت رابطه (۱) زیر نوشت:

$$f = \frac{w_1}{w_1 + w_2} f_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2} f_2$$

$$= \bar{w}_1 f_1 + \bar{w}_2 f_2$$

$$= (\bar{w}_1 x) p_1 + (\bar{w}_1 y) q_1 + (\bar{w}_1) r_1$$

$$+ (\bar{w}_2 x) p_2 + (\bar{w}_2 y) q_2 + (\bar{w}_2) r_2$$

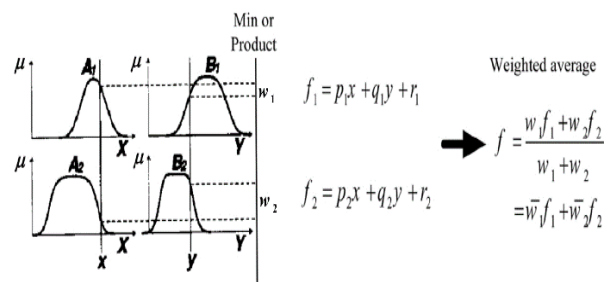
(۱)

که در آن پارامترهای نتیجه (یعنی مقادیر $r_2, q_2, p_2, r_1, q_1, p_1$) تشکیل یک ترکیب خطی را می دهند. در نتیجه چون خروجی شبکه ANFIS یک ترکیب خطی از پارامترهای گره نتیجه است، می توان روش الگوریتم یادگیری هیبرید را به طور مستقیم اعمال کرد. روش آموزش هیبرید، یکی از مهمترین روش های آموزش آنلاین سیستم های استنتاج فازی برپایه شبکه عصبی- تطبیقی می باشد. در این روش جهت آموزش پارامترها، در لایه اول که شامل پارامترهای فرضی اولیه می

تا کاکگی-سوگنو می باشد. در مدل های فازی-عصبی مانند ANFIS، شبکه عصبی و سیستم فازی در یک ساختار هماهنگ با یکدیگر کار می کنند و ارتباطی تکمیلی با یکدیگر دارند. در واقع مدل ANFIS را می توان یک سیستم فازی با یادگیری توزیع شده دانست که از روش های آموزشی که در شبکه های عصبی متداول است، بهره می برد. شبکه ANFIS از مزایای شبکه های عصبی (یعنی یادگیری و تطبیق پذیری) و از مزایای منطق فازی (یعنی استفاده از دانش فرد خبره) برای دست یابی به هدف کنترل مقاوم در سیستم های دینامیکی، بطور همزمان استفاده می کند. شبکه ANFIS علاوه بر اینکه قادر است هر تابع غیر خطی را با دقت دلخواه تخمین بزند، بلکه دارای سرعت همگرایی بالا و خطای کم است. همچنین نیاز به داده های آموزشی کمتر و زمان یادگیری کمتری نسبت به شبکه های عصبی معمولی دارد. از اینرو انتخاب مناسبی بعنوان کنترل کننده برای بازوی مکانیکی ربات به نظر می رسد.

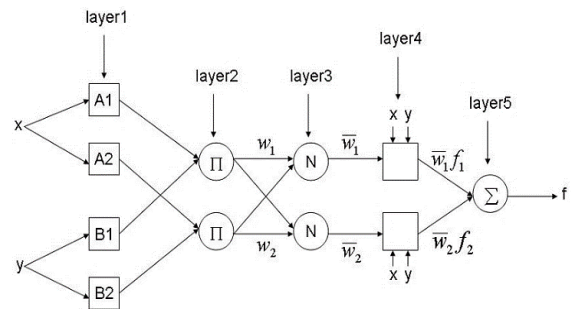
در ادامه بطور مختصر ساختار ANFIS و الگوریتم یادگیری آنرا برای مدل فازی سوگنو ارائه خواهیم کرد. خوانندگان می توانند جهت کسب اطلاعات بیشتر و جزئی تر در رابطه با ساختار و نحوه عملکرد شبکه ANFIS به مراجع [۲۹، ۳۰] مراجعه کنند.

شکل ۱ مکانیزم استنتاج فازی مدل سوگنو مرتبه اول را با دو ورودی و دو قانون فازی بیان می کند. همچنین ساختار معماری معادل آن برای شبکه ANFIS، در شکل ۲ نشان داده شده است که متشکل از پنج لایه بوده و در آن گره های هم لایه، دارای عملکردهای مشابه می باشند [۳۰].



شکل ۱: [۳۰] سیستم استنتاج فازی مدل سوگنو مرتبه اول با دو ورودی و دو

قانون فازی



شکل ۲: [۳۰] ساختار شبکه ANFIS معادل مدل فازی سوگنو مرتبه اول با دو

ورودی و دو قانون فازی

¹ Premise parameters

² Consequent parameters

شود، از روش پس انتشار خطا^۱ و در لایه چهارم سیستم که شامل پارامترهای نتیجه می شود، از روش تخمین حداقل مربعات^۲ استفاده می شود. فرآیند تطبیق پارامترهای ANFIS در روش الگوریتم یادگیری هیبرید در دو مرحله انجام می پذیرد. در مرحله اول در گذر رو به جلو^۳ از گره ورودی به گره خروجی، آموزش پارامترهای نتیجه با استفاده از روش تخمین حداقل مربعات صورت می پذیرد. در این مرحله پارامترهای فرضی اولیه ثابت اند. در مرحله دوم پس از آنکه پارامترهای نتیجه تنظیم شد، در گذر رو به عقب^۴ از گره خروجی به گره ورودی، سیگنال های خطای تخمین^۵ رو به عقب انتشار می یابند و پارامترهای فرضی اولیه با روش گرادینانزولی^۶ بروز رسانی می شوند. در این مرحله پارامترهای نتیجه ثابت اند [۲۹].

در جدول ۱ زیر، عملکردهای هر گذر را بطور خلاصه نشان داده ایم:

جدول ۱: دو مسیر گذر در فرآیند آموزش هیبرید شبکه ANFIS

گذر رو به عقب	گذر رو به جلو
پارامترهای فرضی اولیه	ثابت
پارامترهای نتیجه	تخمین حداقل مربعات
سیگنال ها	سیگنال های خطای تخمین

در روش آموزش هیبرید، پارامترهای نتیجه که از روش تخمین حداقل مربعات معین گردیدند، تحت شرایطی که پارامترهای فرضی اولیه ثابت شده باشند، به صورت بهینه می باشند. بر این اساس، الگوریتم یادگیری هیبرید از آنجایی که ابعاد فضای جستجوی را نسبت به روش پس انتشار اصلی کاهش می دهد، بسیار سریع تر همگرا شده و زمان یادگیری آن ده ها برابر کاهش می یابد.

۳- طراحی کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی (ANFIS+PID)

در این بخش به معرفی و طراحی یک کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID می پردازیم. از جمله مزایای این ترکیب جدید نسبت به ساختار ANFIS معمول (شکل ۲)، قابلیت فرموله کردن و تخمین اغتشاشات سیستم به همراه دینامیک سیستم و حذف آن می باشد. بعلاوه با این ترکیب جدید می توانیم همگرایی به صفر خطای سیستم بازوی ربات تحت کنترل پیشنهادی را بررسی کرده و به اثبات برسانیم، که در ساختار ANFIS معمولی این امکان وجود ندارد.

در اینجا یک ترکیب عصبی فازی-PID خاص برای کنترل سیستم های چند متغیره به خصوص سیستم بازوی ربات، معرفی می کنیم. این ترکیب جدید از دو قسمت خطی و غیر خطی تشکیل شده است (شکل ۴). در این ترکیب سعی شده است تا با تخمین دینامیک های سیستم در قسمت غیر خطی (کنترل کننده ANFIS)، یک مدل دکوپله^۷ از سیستم بدست آورده و با استفاده از قسمت خطی آن، یک کنترل کننده خطی معمولی PID را بر روی آن پیاده کنیم. همانطور که گفته شد، از جمله مزایای قابل توجه این ترکیب جدید نسبت به ساختار کنترل کننده ANFIS معمولی، قابلیت تخمین اغتشاش به همراه دینامیک سیستم و حذف آن می باشد. در کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی، سیستم ANFIS بعنوان یک شناساگر فازی است که با اثبات همگرایی، بخشی از سیستم را تخمین می زند و بعد به صورت خطی سازی فیدبک^۸ (FL) [۳۶] در ساختار کنترلی پیشنهادی بکار گرفته می شود. به بیان دقیق تر، در این مقاله یک سیستم ANFIS بر پایه کنترل کننده گشتاور محاسبه شده نوع PID^۹ برای مدل کردن دینامیک های سیستم بازوی ربات و کنترل آن ارائه شده است (لازم به توضیح است که روش گشتاور محاسبه شده یک کاربرد خاص از روش خطی سازی فیدبک سیستم های غیر خطی هست اما در بسیاری از مراجع این دو روش را یکسان در نظر می گیرند). در ادامه به تشریح مدل ریاضی و ساختار کنترل کننده پیشنهادی می پردازیم.

معادله دینامیکی یک سیستم بازوی ربات را می توان به فرم کلی سیستم های مرتبه دوم غیر خطی چند ورودی-چند خروجی (MIMO^{۱۰}) و متغیر بازمان در نظر گرفته و به صورت زیر نوشت [۴۹]:

$$\ddot{x}(t) = F(x, t) + G(x, t)u(t) + D(t) \quad (2)$$

که در آن $x = [x_1, \dot{x}_1, \dots, x_n, \dot{x}_n]^T$ برداری از حالت های قابل اندازه گیری سیستم است (x_i نشانگر موقعیت مکانی یا مسیر حرکت هر مفصل بازوی ربات است که بصورت یک تابع زمانی می باشد). و $\ddot{x} = [\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n]^T$ مشتق دوم بردار $[x_1, \dots, x_n]^T$ است. $u = [u_1, \dots, u_n]^T$ بردار ورودی کنترلی و $D(t)$ اغتشاشات خارجی نامعلوم اما کراندار با تابع معلوم بصورت $\|D(t)\| \leq \bar{D}$ است. $F(x, t)$ و $G(x, t)$ توابع پیوسته ماتریسی نامعلوم مربوط به دینامیک های سیستم هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$F(x, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, t) & \cdots & f_n(x, t) \end{bmatrix}^T$$

$$G(x, t) = \begin{bmatrix} g_{11}(x, t) & \cdots & g_{1n}(x, t) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x, t) & \cdots & g_{nn}(x, t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

⁷ Decoupling

⁸ Feedback Linearization (FL)

⁹ Computed torque controller (type PID)

¹⁰ Multi-Input Multi-Output (MIMO)

¹ The error Back-Propagation (BP) method

² The least squares estimate (LSE) approach

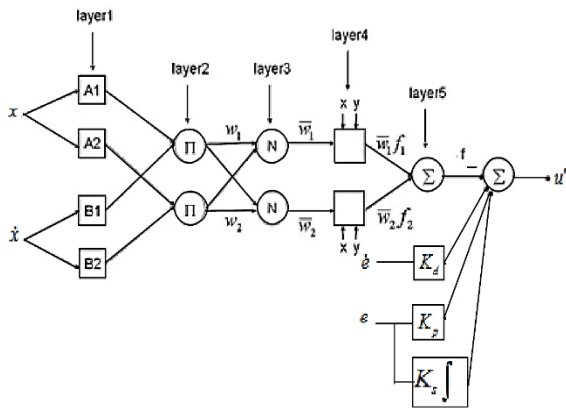
³ In the forward pass

⁴ In the backward pass

⁵ Approximation error signals

⁶ Gradient descent method

دو قسمت خطی و غیر خطی تشکیل شده است که از ترکیب موازی یک شبکه ANFIS معمولی با یک کنترل کننده خطی معمولی PID بوجود آمده است. ساختار حلقه-باز کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID بصورت شکل ۴ زیر است.



شکل ۴. ساختار حلقه-باز کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID
با توجه به معادلات (۵) و (۶)، قانون کنترلی غیرخطی معادل با ساختار پیشنهادی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u_{eq}(t) = G^{-1}(x, t)(-F(x, t) - D(x, t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (8)$$

بنا به این واقعیت که توابع سیستمی $F(x, t)$ و $G(x, t)$ و اغتشاش خارجی $D(t)$ در سیستم های عملی نامعلوم هستند، بدست آوردن قانون کنترلی (۸) اغلب دشوار است. به همین دلیل ما ساختار کنترلی شکل ۴ را برای کنترل ارائه کرده ایم، که در آن از منطق فازی برای تخمین توابع نامعلوم غیرخطی استفاده می کنیم و یک قانون بروز رسانی تطبیقی آنالین برای جبران خطاهای تخمین، طراحی می کنیم.

بر اساس قضیه تقریب یونیورسال^۷ [۵۰]، می توان از سیستم های منطق فازی برای تقریب زدن توابع برداری $F(x, t)$ و $D(t)$ و تابع ماتریسی $G(x, t)$ در رابطه (۸) استفاده کرد. فرض کنید $\hat{F}(x, \theta_f^t)$ و $\hat{G}(x, \theta_g^t)$ به ترتیب، تقریب های فازی-تطبیقی توابع برداری $F(x, t) + D(t)$ و تابع ماتریسی $G(x, t)$ باشند. بنابراین، معادله (۸) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$u_{eq}(t) = \hat{G}^{-1}(x, \theta_g^t)(-\hat{F}(x, \theta_f^t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (9)$$

از آن جایی که $\hat{F}(x, \theta_f^t)$ و $\hat{G}(x, \theta_g^t)$ به صورت آنالین و با تخمین آنالین پارامترهای θ_f^t و θ_g^t بدست می آیند، تضمینی برای

این توابع، به ترتیب با دینامیک های نامی معلوم $\hat{F}(x)$ و $\hat{G}(x)$ و با خطای تخمین محدود، تخمین زده می شوند. با در نظر گرفتن عدم قطعیت ها^۱، معادله دینامیکی سیستم (۲) را می توان به فرم تغییر یافته زیر نوشت:

$$\ddot{x}(t) = \hat{F}(x) + \hat{G}(x)u(t) + D(x, t) \quad (4)$$

که در آن $D(x, t)$ مجموع تمام عدم قطعیت ها و اغتشاشات سیستم است که کراندار فرض می شود (یعنی $\|D(x, t)\| < \rho$).

در این روش، فرضیات زیر در نظر گرفته می شوند:

فرض ۱: ماتریس $G(x, t)$ مثبت معین^۲ است؛ بنابراین $\delta_0 > 0, \delta_0 \in \square$ وجود دارد بطوریکه $G(x, t) > \delta_0 I_{n \times n}$ ، که در آن $I_{n \times n}$ یک ماتریس واحد $n \times n$ است.

فرض ۲: مسیر مطلوب^۳ $x_{d_i}(t)$ یک تابع زمانی کراندار معلوم با مشتقات مراتب بالاتر کراندار معلوم است و ضمناً فرض می شود، این سیگنال مرجع $x_{d_i}(t)$ ، دو بار و بیشتر مشتق پذیر باشد.

بدون از دست دادن کلیت مسئله، معادله دینامیکی سیستم (۴) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \hat{F}(x) + u'(t) + D(x, t) \\ u'(t) = \hat{G}(x)u(t) \end{cases} \quad (5)$$

یک قانون کنترلی غیرخطی معمولی که هدف کنترلی ما یعنی شرط همگرایی خطا را برای سیستم (۵) برآورده می سازد، مطابق زیر می باشد:

$$u'(t) = -\hat{F}(x) - D(x, t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (6)$$

که در آن K_s, K_d, K_p به ترتیب ضرایب تناسبی^۴ و مشتق گیر^۵ و انتگرالی^۶ مربوط به قسمت خطی کنترل کننده پیشنهادی می باشد و $\dot{e}(t), e(t)$ به ترتیب نشانگر خطای تعقیب موقعیت و خطای تعقیب سرعت هر مفصل بازوی ربات می باشند و از رابطه (۷) زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} e(t) = x_{d_i} - x_i \\ \dot{e}(t) = \dot{x}_{d_i} - \dot{x}_i \end{cases} \quad (7)$$

ساختار کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی متناسب با رابطه (۶)، بصورت شکل ۴ زیر می باشد. همانطور که قبلاً اشاره شد، این ترکیب جدید از

¹ Uncertainty

² Positive definite (p.d)

³ desired trajectory

⁴ Proportional coefficient

⁵ Derivative coefficient

⁶ Integral coefficient

⁷ Universal approximation theorem

فازی ساز سینگلتون^۷ و غیرفازی ساز میانگین مرکز جرم^۸ استفاده کنیم، خروجی سیستم منطق فازی را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$y = f(x) = \theta^T \psi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} \tilde{y}^i \left(\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j) \right)}{\sum_{i=1}^{n_r} \left(\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j) \right)} \quad (13)$$

که در آن n_r تعداد کل قوانین فازی و $\tilde{y}^i$ نقطه ای است که $\mu_{B^i}(\tilde{y}^i) = 1$ و $\mu_{A_j^i}(x_j)$ تابع عضویت گوسی متغیر فازی x_j است. همچنین $\theta = [\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \dots, \tilde{y}^{n_r}]^T$ یک بردار پارامتری قابل تنظیم و $\psi = [\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^{n_r}]^T$ یک بردار پایه فازی^۹ است که در آن ψ^i ها به صورت رابطه (۱۴) زیر تعریف می شوند:

$$\psi^i = \frac{\left(\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j) \right)}{\sum_{i=1}^{n_r} \left(\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j) \right)} \quad (14)$$

بنابراین، با اعمال سیستم های فازی معرفی شده به قانون فازی (۱۲)، تخمین فازی توابع $f_i(x, t) + d_i(x, t)$ و $g_{ij}(x, t)$ را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\hat{f}_i(x, \theta_{f_i}^t) = \theta_{f_i}^T \psi_{f_i}(x), \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\hat{g}_{ij}(x, \theta_{g_{ij}}^t) = \theta_{g_{ij}}^T \psi_{g_{ij}}(x); \quad i, j = 1, \dots, n \quad (16)$$

که در آن $\theta_{f_i}^t$ و $\theta_{g_{ij}}^t$ بردارهای پارامتری تطبیقی قابل تنظیم هستند. پارامترهای بهینه $\theta_{f_i}^*$ و $\theta_{g_{ij}}^*$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\theta_{f_i}^* = \arg \min_{\theta_{f_i}^t} \left\{ \sup_{x \in D_x} |f_i(x, t) + d_i(x, t) - \hat{f}_i(x, \theta_{f_i}^t)| \right\} \quad (17)$$

$$\theta_{g_{ij}}^* = \arg \min_{\theta_{g_{ij}}^t} \left\{ \sup_{x \in D_x} |g_{ij}(x, t) - \hat{g}_{ij}(x, \theta_{g_{ij}}^t)| \right\} \quad (18)$$

همچنین بردار خطای پارامترهای تطبیقی را به این صورت تعریف می کنیم:

$$\tilde{\theta}_{f_i} = \theta_{f_i}^* - \theta_{f_i}^t \quad (19)$$

$$\tilde{\theta}_{g_{ij}} = \theta_{g_{ij}}^* - \theta_{g_{ij}}^t \quad (20)$$

رگولار^۱ (معکوس پذیر) باقی ماندن ماتریس $\hat{G}(x, \theta_g^t)$ در حین تخمین وجود ندارد. برای حل این مشکل، از معکوس رگولار شده $\hat{G}(x, \theta_g^t)$ که به صورت زیر تعریف می شود، استفاده می کنیم [۴۹]:

$$\hat{G}^{-1}(x, \theta_g^t) = \hat{G}^T(x, \theta_g^t) [\varepsilon_0 I_n + \hat{G}(x, \theta_g^t) \hat{G}^T(x, \theta_g^t)]^{-1} \quad (10)$$

که در آن ε_0 یک ثابت مثبت کوچک می باشد. با جایگذاری رابطه (۱۰) در (۹) داریم:

$$u_{eq}(t) = \hat{G}^T(x, \theta_g^t) \hat{G}^T(x, \theta_g^t) [\varepsilon_0 I_n + \hat{G}(x, \theta_g^t) \hat{G}^T(x, \theta_g^t)]^{-1} (-\hat{F}(x, \theta_f^t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (11)$$

معکوس رگولاریزه شده (۱۰) حتی اگر $\hat{G}(x, \theta_g^t)$ سینگولار^۲ باشد، خوب تعریف شده است و بنابراین قانون کنترلی تعریف شده در (۱۱) همواره خوب تعریف شده خواهد بود.

برای تخمین توابع غیرخطی $F(x, t) + D(t)$ و $G(x, t)$ ، به تعداد $n(n+1)$ یک سیستم مستقل فازی از نوع سیستم استنتاج ممدانی^۴ به کار برده می شود. قوانین «اگر-آنگاه» فازی برای اعمال نگاشتی از بردار ورودی $x = [x_1, \dot{x}_1, \dots, x_n, \dot{x}_n]^T \in R^{2n}$ به یک خروجی $y \in R$ به کار برده شده اند. بر این اساس قانون فازی r -ام به صورت زیر نوشته می شود:

$$R^r : \text{if } x_1 \text{ is } A_1^r(x) \text{ and } \dots \text{and } x_n \text{ is } A_n^r(x_n), \text{ then } y \text{ is } B^r \quad (12)$$

که در آن A_i^r و B_i^r به ترتیب، مجموعه های فازی با توابع عضویت $\mu_{A_i^r}(x_i)$ و $\mu_{B_i^r}(y)$ هستند و x متعلق به یک مجموعه فشرده^۵ است.

ساختار یک سیستم منطق فازی از چهار قسمت: فازی ساز، سیستم استنتاج فازی، پایگاه قوانین فازی و غیرفازی ساز تشکیل شده است. بطور ویژه، اگر از پایگاه قوانین فازی «اگر-آنگاه»، موتور استنتاج ضرب^۶،

¹ Regular

² Singular

³ Well defined

⁴ Mamdani Inference System

⁵ Compact set

⁶ Product inference engine

⁷ Singleton Fuzzifier

⁸ Center-average defuzzifier

⁹ Fuzzy basis vector

بر این اساس حداقل خطاهای تخمین فازی^۱ توابع $f_i(x, t) + d_i(x, t)$ و $g_{ij}(x, t)$ مطابق روابط زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f_i}(x, t) &= f_i(x, t) + d_i(x, t) - \hat{f}_i(x, \theta_{f_i}^*) \\ \Rightarrow \varepsilon_f(x, t) &= F(x, t) + D(t) - \hat{F}(x, \theta_f^*) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{g_{ij}}(x, t) &= g_{ij}(x, t) - \hat{g}_{ij}(x, \theta_{g_{ij}}^*) \\ \Rightarrow \varepsilon_g(x, t) &= G(x, t) - \hat{G}(x, \theta_g^*) \end{aligned} \quad (22)$$

فرض می شود که حداقل خطاهای تخمین به ازای تمام $x \in D_x$ کراندار باشند. یعنی:

$$|\varepsilon_{f_i}(x, t)| \leq \bar{\varepsilon}_f, |\varepsilon_{g_{ij}}(x, t)| \leq \bar{\varepsilon}_g, x \in D_x \quad (23)$$

که در آن $\bar{\varepsilon}_f$ و $\bar{\varepsilon}_g$ ثابت های مثبت هستند.

برای تولید آنالاین تخمین های فازی $\hat{F}(x, \theta_f^*)$ و $\hat{G}(x, \theta_g^*)$ نیازمند ایجاد قوانین بروز رسانی تطبیقی به منظور تنظیم بردارهای پارامتری تطبیقی در (۱۵) و (۱۶) هستیم. در اینجا قوانین بروز رسانی تطبیقی به صورت زیر انتخاب شده اند [۴۹]:

$$\dot{\theta}_{f_i}^t = -\eta_{f_i} \psi_{f_i}(x)(e_i + \dot{e}_i) \quad (24)$$

$$\dot{\theta}_{g_{ij}}^t = -\eta_{g_{ij}} \psi_{g_{ij}}(x)(e_i + \dot{e}_i) u_{eqj} \quad (25)$$

که در آن $\eta_{f_i} > 0$ و $\eta_{g_{ij}} > 0$ ضرایب ثابت مثبت می باشند و e_i و $\dot{e}_i$ به ترتیب خطای تعقیب موقعیت و خطای تعقیب سرعت مربوط به هر مفصل بازوی ربات می باشند.

همچنین، یک کنترل کننده اصلاحگر نیز تعریف می شود تا همگرایی خطای سیستم کنترل حلقه-بسته را تضمین و خطاهای تخمین را جبران کند. برای این منظور یک ورودی کنترلی به صورت زیر انتخاب می شود:

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_c(t) \quad (26)$$

کنترل کننده فوق از مجموع دو ترم کنترلی تشکیل شده است: $u_{eq}(t)$ ترم کنترلی معادل قطعیت اصلاح شده سیستم^۲ که از معادله (۱۱) که در بالا بیان شد، بدست می آید و $u_c(t)$ یک ترم کمکی تحت عنوان ترم کنترل مقاوم^۳ که برای جبران عدم قطعیت موجود و حذف خطاهای تخمین بوده و به صورت زیر تعریف می شود [۴۹]:

$$u_c(t) = \frac{(e + \dot{e})|e + \dot{e}|^T (\bar{\varepsilon}_f + \bar{\varepsilon}_g |u_{eq}| + |u_0|)}{\delta_0 \|e + \dot{e}\|^2} \quad (27)$$

در معادله (۲۷) فوق، $\bar{\varepsilon}_f$ و $\bar{\varepsilon}_g$ ثابت های مثبت هستند و u_0 بصورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= -\varepsilon[\varepsilon_0 I_n \\ &+ \hat{G}(x, \theta_g^*) \hat{G}^T(x, \theta_g^*)]^{-1} \\ &(-\hat{F}(x, \theta_f^*) + K_d \dot{e}(t) \\ &+ K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) \end{aligned} \quad (28)$$

در اینجا برای دادن دید شهودی تر به خوانندگان، بلوک دیاگرام حلقه-بسته سیستم کنترل بازوی ربات IRB-120 با استفاده از کنترل کننده پیشنهادی ANFIS+PID، با ذکر تمامی جزئیات در شکل ۵ نمایش داده شده است.

در شکل ۵، $\dot{x}, x$ به ترتیب نشانگر موقعیت مکانی و سرعت حرکت هر مفصل بازوی ربات می باشد و $\dot{e}, e$ به ترتیب نشانگر خطای تعقیب موقعیت و خطای تعقیب سرعت هر مفصل بازوی ربات می باشد. هم چنین در این شکل SFS^۴ نشانگر سیستم فازی سوگنو (یا همان ANFIS) و MFS^۵ نشانگر سیستم فازی ممدانی است.

۳-۱- بررسی همگرایی خطای تعقیب سیستم بازوی

ربات تحت کنترل پیشنهادی ANFIS+PID

قضیه ۱ [۴۹] - برای سیستم چند متغیره و غیر خطی متغیر بازمان (۲) با توابع غیر خطی $F(x, t)$ و $D(t)$ و $G(x, t)$ که توسط معادلات (۱۵) و (۱۶) تخمین زده می شوند، اگر فرضیات ۱ و ۲ بیان شده در بالا برقرار باشند و همچنین ورودی کنترلی به صورت معادله (۲۶) باشد و قوانین تطبیقی به صورت (۲۴) و (۲۵) انتخاب شوند. آنگاه:

- تمام سیگنال ها در سیستم حلقه-بسته محدود و کراندار می باشند.

• در زمان بینهایت، خطای تعقیب سیستم و مشتق آن بطور

مجانبی به صفر همگرا می شوند. یعنی: $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$.

اثبات: تابع لیاپانوف $V(e, \theta, t)$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(e + \dot{e})^T (e + \dot{e}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_{f_i}} \tilde{\theta}_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta_{g_{ij}}} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \tilde{\theta}_{g_{ij}} \end{aligned} \quad (29)$$

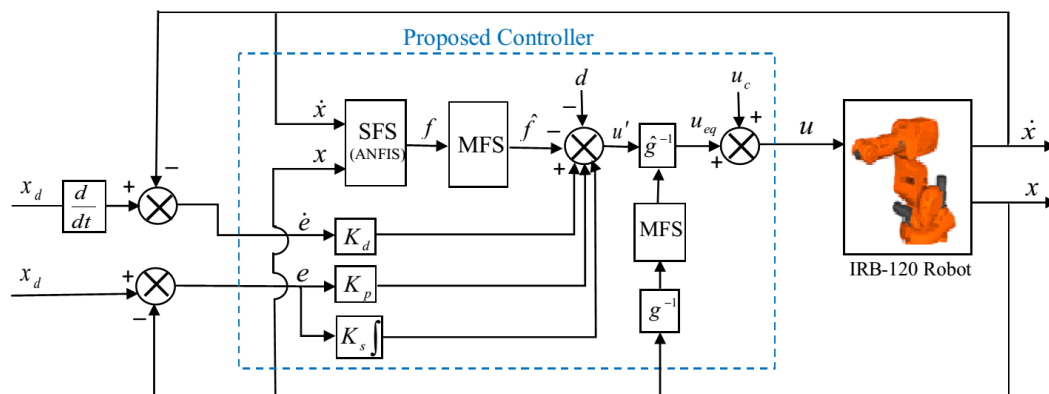
^۴ Sugeno Fuzzy System (SFS)

^۵ Mamdani Fuzzy System (MFS)

^۱ The minimum fuzzy approximation error

^۲ The modified certainty equivalent control term

^۳ The robustifying control term



شکل ۵. بلوک دیاگرام حلقه بسته سیستم کنترل بازوی ربات IRB-120 با استفاده از کنترل کننده پیشنهادی ANFIS+PID

$$\begin{aligned}
 (\dot{e} + \ddot{e}) &= \dot{e} + \ddot{x}_d - (F(x, t) + D(t)) - G(x, t)u_{eq} \\
 &+ (I_n - \varepsilon_0 [\varepsilon_0 I_n + \hat{G}(x, \theta_g^t) \hat{G}^T(x, \theta_g^t)]^{-1}) \\
 &(-\hat{F}(x, \theta_f^t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (34) \\
 &- I_n (-\hat{F}(x, \theta_f^t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) \\
 &- G(x, t)u_c
 \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۲۸) و حذف جملات اضافی رابطه فوق، رابطه (۳۵) زیر حاصل می گردد:

$$\begin{aligned}
 (\dot{e} + \ddot{e}) &= \dot{e} + \ddot{x}_d - (F(x, t) + D(t)) \\
 &- G(x, t)u_{eq} + u_0 - G(x, t)u_c \quad (35)
 \end{aligned}$$

حال با اضافه و کم کردن عبارت $\hat{G}(x, \theta_g^t)u_{eq}$ به معادله فوق و با توجه به رابطه (۹)، رابطه زیر در نهایت حاصل می گردد:

$$\begin{aligned}
 (\dot{e} + \ddot{e}) &= \dot{e} + \ddot{x}_d - K_d \dot{e} - K_p e - K_s \int_0^t e(\tau) d\tau \\
 &- (F(x, t) + D(t) - \hat{F}(x, \theta_f^t)) \quad (36) \\
 &- (G(x, t) - \hat{G}(x, \theta_g^t))u_{eq} \\
 &- G(x, t)u_c + u_0
 \end{aligned}$$

بدیهی است که با توجه به روابط (۲۱) و (۲۲) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 F(x, t) + D(t) - \hat{F}(x, \theta_f^t) &= \hat{F}(x, \theta_f^t) - \hat{F}(x, \theta_f^t) + \varepsilon_f(x) \\
 G(x, t) - \hat{G}(x, \theta_g^t) &= \hat{G}(x, \theta_g^t) - \hat{G}(x, \theta_g^t) + \varepsilon_g(x) \quad (37)
 \end{aligned}$$

با ضرب طرفین معادله (۳۶) در عبارت $(e + \dot{e})^T$ و با توجه به

روابط (۱۵)، (۱۶)، (۱۹) و (۲۰) داریم:

که در آن $\tilde{\theta}_{gij} = \theta_{gij}^* - \theta_{gij}^t$ و $\tilde{\theta}_{fi} = \theta_{fi}^* - \theta_{fi}^t$ می باشد. مشتق زمانی تابع فوق بصورت رابطه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= (e + \dot{e})^T (\dot{e} + \ddot{e}) \\
 &- \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_{fi}} \tilde{\theta}_{fi}^T \dot{\theta}_{fi}^t - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta_{gij}} \tilde{\theta}_{gij}^T \dot{\theta}_{gij}^t \quad (30)
 \end{aligned}$$

برای نرم $\dot{e} + \ddot{e}$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 (\dot{e} + \ddot{e}) &= \dot{e} + \ddot{x}_d - \ddot{x}(t) \\
 &= \dot{e} + \ddot{x}_d - (F(x, t) + D(t) + G(x, t)u(t)) \\
 &= \dot{e} + \ddot{x}_d - (F(x, t) + D(t)) \\
 &- (G(x, t) - \hat{G}(x, \theta_g^t))u_{eq} - \hat{G}(x, \theta_g^t)u_{eq} - G(x, t)u_c \quad (31)
 \end{aligned}$$

با جایگذاری نرم کنترلی (۹) در رابطه (۳۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 (\dot{e} + \ddot{e}) &= \dot{e} + \ddot{x}_d - (F(x, t) + D(t)) \\
 &- (G(x, t) - \hat{G}(x, \theta_g^t))u_{eq} \\
 &- I_n (-\hat{F}(x, \theta_f^t) + K_d \dot{e}(t) \\
 &+ K_p e(t) + K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) - G(x, t)u_c \quad (32)
 \end{aligned}$$

حال با جایگذاری نرم کنترلی (۱۱) در رابطه (۳۲) و با توجه به این حقیقت که:

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(x, \theta_g^t) \hat{G}^T(x, \theta_g^t) [\varepsilon_0 I_n + \hat{G}(x, \theta_g^t) \hat{G}^T(x, \theta_g^t)]^{-1} \\
 = I_n - \varepsilon_0 [\varepsilon_0 I_n + \hat{G}(x, \theta_g^t) \hat{G}^T(x, \theta_g^t)]^{-1} \quad (33)
 \end{aligned}$$

رابطه (۳۲) را می توان به فرم (۳۴) زیر نوشت:

$$(e + \dot{e})^T G(x, t) u_c > |e + \dot{e}|^T (\bar{\varepsilon}_f + \bar{\varepsilon}_g |u_{eq}| + |u_0|) \quad (46)$$

با توجه به رابطه (۲۳) می توانیم معادله (۴۲) را به صورت زیر به یک نامعادله تبدیل کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= (e + \dot{e})^T (-G(x, t) u_c + u_0 - \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x) u_{eq}) \\ &\leq -(e + \dot{e})^T G(x, t) u_c + |e + \dot{e}|^T (\bar{\varepsilon}_f + \bar{\varepsilon}_g |u_{eq}| + |u_0|) \end{aligned} \quad (47)$$

و با توجه به رابطه (۴۶) می توان نوشت:

$$\dot{V}_3 \leq -(e + \dot{e})^T G(x, t) u_c + |e + \dot{e}|^T (\bar{\varepsilon}_f + \bar{\varepsilon}_g |u_{eq}| + |u_0|) \leq 0 \quad (48)$$

در نهایت با توجه به روابط (۴۳)، (۴۴) و (۴۸) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \leq 0 \quad (49)$$

قضیه ۲: قضیه شبه لیاپانوف^۱ (لم باربالات^۲) [۳۶]: اگر تابع اسکالر

متغیر با زمان $V_m(x, t)$ سه شرط زیر را ارضا کند:

۱- $V_m(x, t)$ از پایین کراندار باشد.

۲- $\dot{V}_m(x, t)$ منفی نیمه معین (n.s.d) باشد.

۳- $\dot{V}_m(x, t)$ پیوسته یکنواخت^۳ در زمان باشد. (این شرط با کراندار بودن $\dot{V}_m(x, t)$ برقرار می شود).

در این صورت با گذشت زمان به سمت بینهایت، $\dot{V}_m(x, t)$ به

سمت صفر میل می کند (یعنی: $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_m(x, t) = 0$)

قضیه ۳ [۳۶]: هر تابعی که مشتق اول آن در ناحیه ای کراندار و محدود باشد، در آن ناحیه لپ شیتز محلی^۴ هست.

با توجه به رابطه (۴۹) چون $\dot{V}$ منفی نیمه معین است

(یعنی $\dot{V} \leq 0$)، در نتیجه بر طبق قضیه ۳ تابع لیاپانوف V لپ شیتز

محلی و کراندار خواهد بود؛ که این نشان می دهد سیگنال

های $e(t)$ ، $\dot{e}(t)$ ، $\tilde{\theta}_{f_i}(t)$ و $\tilde{\theta}_{g_{ij}}(t)$ کراندار بوده و در نتیجه

سیگنال های $\theta_{f_i}(t)$ ، $\theta_{g_{ij}}(t)$ ، $u(t)$ و x نیز کراندار می باشند.

بنابراین می توان نتیجه گرفت، تمامی سیگنال های موجود در این سیستم

حلقه-بسته محدود و کراندار هستند.

بر طبق قضیه ۲ چون تمام جملات تابع لیاپانوف $V(e, \theta, t)$ به

فرم درجه دوم^۵ و مثبت می باشند (یعنی $V(e, \theta, t) > 0$)، پس تابع

لیاپانوف V کراندار از پائین بوده و شرط اول قضیه ۲ برقرار می باشد. از

سوی دیگر طبق رابطه (۴۹) تابع مشتق $\dot{V}(e, \theta, t)$ منفی نیمه معین است

(یعنی $\dot{V}(e, \theta, t) \leq 0$)، پس شرط دوم قضیه ۲ نیز برقرار است.

همچنین با توجه به فرض ۲ (فرض مشتق پذیری و کراندار مشتقات

بالا تر) و اینکه تمامی سیگنال ها در سیستم حلقه-بسته مذکور محدود و

$$(e + \dot{e})^T (\dot{e} + \ddot{e}) =$$

$$(e + \dot{e})^T (\dot{e} + \ddot{e} - K_d \dot{e} - K_p e - K_s \int_0^t e(\tau) d\tau)$$

$$- \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T \psi_{f_i}(e_i + \dot{e}_i) \quad (38)$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta_{g_{ij}}} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \psi_{f_i}(e_i + \dot{e}_i) u_{eqj}$$

$$+ (e + \dot{e})^T (-G(x, t) u_c + u_0 - \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x) u_{eq})$$

بیا جایگذاری رابطه (۳۸) بالا در (۳۰) داریم:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (39)$$

که در آن:

$$\dot{V}_1 = (e + \dot{e})^T (\dot{e} + \ddot{e} - K_d \dot{e} - K_p e - K_s \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (40)$$

$$\dot{V}_2 = - \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_{f_i}^T (\psi_{f_i}(e_i + \dot{e}_i) + \frac{1}{\eta_{f_i}} \dot{\theta}_{f_i}^t) \quad (41)$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta_{g_{ij}}} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T (\psi_{g_{ij}}(e_i + \dot{e}_i) u_{eqj} + \frac{1}{\eta_{g_{ij}}} \dot{\theta}_{g_{ij}}^t)$$

$$\dot{V}_3 = (e + \dot{e})^T (-G(x, t) u_c + u_0 - \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x) u_{eq}) \quad (42)$$

رابطه (۴۰) بالا مشتق تابع لیاپانوف^۲ $V_1 = \frac{1}{2}(e + \dot{e})^2$ برای سیستم

خطی $\ddot{x} = u$ کنترل شده با یک کنترل کننده PID می باشد. از اینرو،

واضح است با انتخاب ضرایب مناسب K_p, K_d, K_s برای کنترل

کننده PID می توان به یک سیستم حلقه بسته پایدار دست یافت. به

عبارت دیگر با انتخاب مناسب ضرایب K_p, K_d, K_s ، $\dot{V}_1$ کمتر یا

مساوی صفر شده و خواهیم داشت:

$$\dot{V}_1 \leq 0 \quad (43)$$

با جایگذاری قوانین بروز رسانی تطبیقی (۲۴) و (۲۵) در معادله (۴۱)

نتیجه می شود:

$$\dot{V}_2 = 0 \quad (44)$$

با توجه به فرض ۱ (یعنی مثبت معین بودن ماتریس G) که قبلا بیان شد،

می توان نوشت:

$$(e + \dot{e})^T G(x, t) (e + \dot{e}) > \delta_0 \|e + \dot{e}\|^2 \quad (45)$$

با ضرب دو طرف معادله (۴۵) در عبارت

$$\frac{|e + \dot{e}|^T (\bar{\varepsilon}_f + \bar{\varepsilon}_g |u_{eq}| + |u_0|)}{\delta_0 \|e + \dot{e}\|^2}$$

و با توجه به رابطه (۲۷) داریم:

¹ Lyapunov-like theorem

² Barbalat lemma

³ Uniformly Continuous

⁴ Locally Lipschitz

⁵ Quadratic form

۴- معرفی بازوی ربات شش درجه آزادی IRB-120 و مشخصات آن

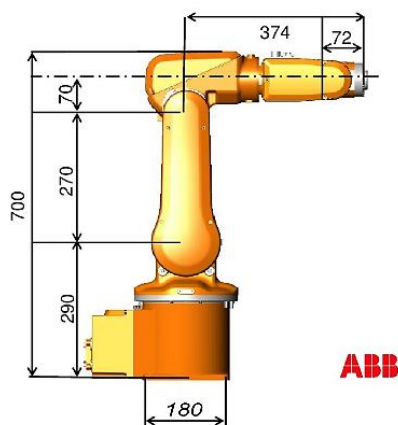
در این مقاله قصد داریم کنترل کننده پیشنهادی ANFIS+PID را بر روی بازوی ربات صنعتی شش درجه آزادی IRB-120 به عنوان نمونه ای از بازوهای مکانیکی صنعتی، اعمال و نتایج را شبیه سازی و تست کنیم. به همین منظور در این بخش ابتدا به بررسی مشخصات کیفی و کمی بازوی ربات IRB-120 و طراحی مکانیکی آن می پردازیم. سپس در بخش بعد به شبیه سازی و پیاده سازی کنترل کننده پیشنهادی بر روی بازوی ربات IRB-120، توسط نرم افزار MATLAB می پردازیم.

۴-۱- مشخصات کیفی و کمی بازوی ربات

IRB-120

در اکتبر ۲۰۰۹، کوچکترین ربات صنعتی چند منظوره، با عنوان IRB-120 توسط شرکت ABB ارائه شد. بازوی رباتی با ۶ درجه آزادی که تمامی قابلیت ها و ویژگی های طراحی پیشرفته ربات های بزرگ شرکت ABB را دارا می باشد و در عین حال بسیار سبک وزن بوده و از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه است. این ربات تنها دارای ۲۵ کیلوگرم جرم است؛ قابلیت دسترسی به ۵۸۰ میلیمتر اطراف خود و توانایی رسیدن به ۱۱۲ میلیمتر زیر پایه خود را دارا می باشد. ربات IRB-120 یک انتخاب مقرون به صرفه برای جابجایی مواد، مونتاژ قطعات کوچک بوده و در صنایع مختلفی از جمله الکترونیک، خورشیدی، مواد غذایی و آشامیدنی، ماشین آلات، دارویی- پزشکی و تحقیقات کاربرد دارد.

ربات IRB-120 یک ربات با ۶ درجه آزادی است که در آن از ساختار بازوی چرخشی و ساختار میج کروی استفاده شده و ساختاری شبیه ربات PUMA-560 دارد. ابعاد مهم ربات IRB-120 در شکل ۶ آورده شده و بازه تغییرات هر کدام از محورهای مفاصل آن در جدول ۲ ارائه شده است.



شکل ۶. ابعاد مهم ربات IRB-120

کراندار هستند؛ تابع مشتق دوم $\ddot{V}(e, \theta, t)$ کراندار بوده و در نتیجه تابع $\dot{V}(e, \theta, t)$ پیوسته یکنواخت می گردد. پس شرط سوم قضیه ۲ نیز برقرار خواهد بود.

با توجه به برقراری هر سه شرط قضیه ۲ (قضیه شبه لیاپانوف) برای تابع متغیر با زمان $V(e, \theta, t)$ ، مشتق این تابع در زمان بینهایت همگرا به صفر می گردد، یعنی داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{V}(e, \theta, t)) = 0 \quad (50)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) و اینکه $\dot{V}_2 = 0$ می باشد؛ می توان مشتق تابع لیاپانوف $V(e, \theta, t)$ را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \theta, t) = & (e + \dot{e})^T (\dot{e} + \ddot{x}_d - K_d \dot{e} - K_p e - K_s \int_0^t e(\tau) d\tau \\ & - G(x, t) u_c + u_0 - \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x) u_{eq} \end{aligned} \quad (51)$$

با توجه به اینکه $\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{V}(e, \theta, t)) = 0$ و با توجه به غیر صفر بودن ترم دوم معادله (۵۱) می توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e + \dot{e}) = 0 \quad (52)$$

با توجه به رابطه (۵۲) که بیانگر یک معادله دیفرانسیل خطی است، می توان نوشت:

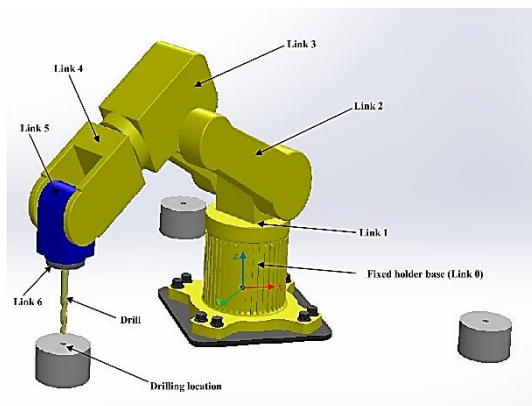
$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i(t) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

مشاهده می کنیم با گذشت زمان به سمت بی نهایت خطای تعقیب $e_i = x_{d_i} - x_i$ و مشتق آن، بطور مجانبی به صفر همگرا می شوند. پس در نتیجه مسیر حرکت مفصل بازوی x_i ، مسیر مطلوب x_{d_i} را به خوبی تعقیب می کند.

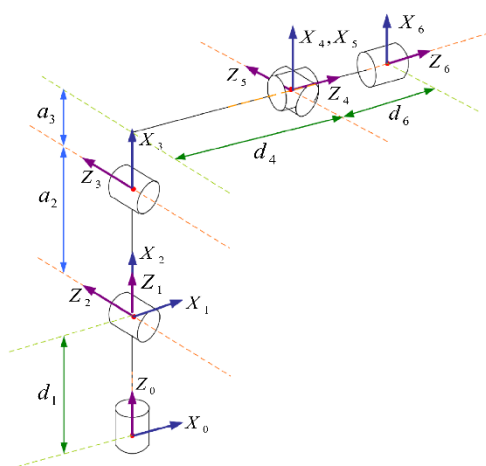
توجه: سیستم فوق پایدار مجانبی نیست. چون از $\dot{V} \rightarrow 0$ نمی توان نتیجه گرفت که $V \rightarrow 0$ باشد؛ زیرا در معادله (۲۹) با وجودیکه $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0$ می باشد اما مشخص نیست که $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_{gij}(t) = 0$ باشد.

نتیجه: با توجه به مطالب فوق، همگرا به صفر بودن سیگنال خطای سیستم بازوی ربات با اعمال کنترل کننده ANFIS پیشنهادی و با وجود عدم قطعیت ها و اغتشاشات خارجی، به کمک قضیه شبه لیاپانوف (لم باربالات) به اثبات رسید.

را در یک بازوی مکانیکی توصیف می کند، در نظر می گیریم و محورهای مفصلی را در فضا به وسیله خطوط تعریف می کنیم [۵۱، ۵۲]. با توجه به شکل های ۶ و ۸، پارامترهای دناویت- هارتنبرگ^۴ برای ربات IRB-120 در جدول ۴ استخراج شده است [۵۱، ۵۲]. پارامترهای دناویت- هارتنبرگ (D-H) آورده شده در جدول ۴ به ترتیب عبارتند از a_i طول لینک^۵، α_i زاویه پیچش لینک^۶، d_i آفست لینک^۷، و θ_i زاویه مفصلی^۸. لازم به توضیح است، چون تمامی مفصل ربات IRB-120 از نوع مفصل لولایی می باشند، بنابراین این ربات دارای مکانیزم (Revolute) R 6 می باشد، که در سه مفصل بازوی آن محورهای مفصل دوم و سوم با هم موازی بوده و بر محور مفصل اول عمود می باشند و در سه مفصل میج آن محورهای مفصل چهارم و پنجم بر هم عمود بوده و مفصل چهارم با مفصل ششم موازی می باشند (مطابق شکل ۸).



شکل ۷. شماتیک مدل شبیه سازی شده ربات IRB-120 توسط نرم افزار solidworks



شکل ۸. مدل سینماتیکی ساده شده ربات IRB-120

جدول ۱: بازه تغییرات محورهاى مفصل ربات IRB-120

Axis movements	Working range (degree)
Axis 1 Rotation	+165 to -165
Axis 2 Arm	+110 to -110
Axis 3 Arm	+70 to -110
Axis 4 Wrist	+160 to -160
Axis 5 Bend	+120 to -120
Axis 6 Turn	+400 to -400

۲-۴- طراحی مکانیکی بازوی ربات IRB-120 در محیط نرم افزار Solidworks

برای پیاده سازی کنترل کننده پیشنهادی بر روی بازوی ربات IRB-120 و شبیه سازی نتایج آن توسط نرم افزار MATLAB، نیاز به مرکز جرم^۱ و ممان اینرسی^۲ هر یک از لینک های ربات می باشد. از آنجا که از مرکز جرم و ممان اینرسی ربات اطلاعات دقیقی در اختیار نبود، از مدل شبیه سازی شده آن در محیط نرم افزار Solidworks برای بدست آوردن مرکز جرم و ممان اینرسی هر کدام از لینک های ربات استفاده کردیم. اطلاعات مربوط به مرکز جرم و ممان اینرسی ربات را از خروجی نرم افزار Solidworks از بخش mass properties استخراج می کنیم. شماتیک مدل شبیه سازی شده این ربات با نرم افزار Solidworks بصورت شکل ۷ می باشد. مدل شبیه سازی شده ربات در شکل ۷، از هفت تکه شامل شش لینک و یک پایه ثابت نگهدارنده تشکیل شده است. هم چنین از آنجا که تمامی مفصل ربات IRB-120 از نوع مفصل دورانی (لولایی)^۳ می باشند، بنابراین ۶ درجه آزادی دورانی برای این ربات در نظر گرفته شده است.

جدول ۳ ویژگی های کل ربات و مشخصات دینامیکی لینک های آنرا به طور خلاصه نشان می دهد. این جدول شامل اطلاعاتی همچون طول هر لینک به متر، وزن هر لینک به کیلوگرم، ممان اینرسی حول مرکز جرم هر یک از لینک ها بر حسب کیلوگرم در مترمربع و مرکز جرم هر لینک نسبت به دستگاه مختصات مرجع بر حسب متر می باشد.

مدل سینماتیکی ساده شده بازوی ربات IRB-120 به همراه چارچوب های متصل به آن در

شکل ۸ آورده شده است. در مدل سینماتیکی ساده شده ربات، هر لینک تنها بصورت جسمی صلب که رابطه بین دو محور مفصلی همسایه

^۴ Denavit- Hartenberg (D-H) parameters

^۵ Link length

^۶ Link twist

^۷ Link offset

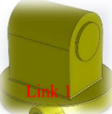
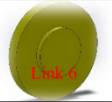
^۸ Joint angle

^۱ Center of Mass

^۲ Moment of inertia

^۳ Revolute joint

جدول ۳. مشخصات دینامیکی کل اجزا و لینک های ربات IRB-120 در یک نگاه

Links of IRB-120 robot simulated by solidworks	Link length (m)	Link weight (kg)	Moments of inertial (kg.m ²) for center of mass and expressed in the center of mass coordinate frame									Center of mass (m) expressed in the base coordinate frame		
			I_{xx}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yx}	I_{yy}	I_{yz}	I_{zx}	I_{zy}	I_{zz}	x	y	z
	0.29	3.36	0.012	0	0	0	0.011	0	0	0	0.01	0	0	-0.05
	0.27	6.8	0.064	0	0	0	0.012	0	0	0	0.064	0.124	0	0
	0.07	6.22	0.35	-0.23	0	-0.23	0.18	0	0	0	0.37	0.058	0.024	0
	0.347	2	0.01	0	0	0	0.008	0	0	0	0.006	0	0	-0.09
	0.07	1.3	0.0023	0	0	0	0.0015	0	0	0	0.0023	0	0.06	0
	0.002	0.11	0.0004	0	0	0	0.0004	0	0	0	0.0008	0	0	-0.09

جدول ۴. پارامترهای D-H ربات IRB-120

Joint i	a_i (mm)	α_i (°)	d_i (mm)	θ_i (°)
1	0	-90	290	θ_1
2	270	0	0	θ_2
3	70	+90	0	θ_3
4	0	-90	302	θ_4
5	0	+90	0	θ_5
6	0	0	72	θ_6

که برای یک ربات ۶ لینکی، $D(q)$ یک ماتریس 6×6 مثبت معین و متقارن است که با نام ماتریس اینرسی^۱ شناخته می شود، $C(q, \dot{q})$ یک ماتریس 6×6 مربوط به ترم های کریولیس^۲ و گریز از مرکز^۳ است و $G(q)$ یک بردار 6×1 مربوط به ترم گرانش است. هم چنین u یک بردار 6×1 مربوط به گشتاورهای ورودی مفاصل ربات است و $q, \dot{q}, \ddot{q}$ بردارهای 6×1 به ترتیب مربوط به مکان، سرعت و شتاب مفاصل ربات می باشد. (در واقع $\ddot{q}, \dot{q}, q$ همان بردارهای $\ddot{X}, \dot{X}, X$ در معادله (۲) می باشند).

اکنون به شبیه سازی و پیاده سازی کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID بر روی بازوی ربات IRB-120، با استفاده از نرم افزار MATLAB می پردازیم. همانطور که قبلاً مشاهده کردید، بلوک دیاگرام حلقه-بسته سیستم کنترل بازوی ربات IRB-120 با استفاده از کنترل کننده پیشنهادی ANFIS+PID، در شکل ۵ ارائه شد.

برای شبیه سازی و پیاده سازی کنترل کننده پیشنهادی بر روی سیستم بازوی ربات IRB-120، ابتدا باید پارامترهای کنترل کننده پیشنهادی را بطور مناسب تنظیم کنیم. پارامترهای ثابت کنترل کننده

۵- پیاده سازی کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی

ANFIS+PID بر روی بازوی ربات IRB-120

در حالت کلی معادلات دینامیکی یک بازوی ربات به فرم ماتریسی زیر قابل بیان است [۵۱، ۵۲]:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u \quad (54)$$

¹ Inertia matrix

² Coriolis

³ Centrifugal

های بازوی ربات شامل 113 سطر کد متلب با زمان اجرای تقریبی 29 sec ثانیه می باشد.

توجه: در فرض ۲ از بخش ۳ مقاله، ما فرض کرده ایم که سیگنال مرجع $x_d(t)$ یک تابع زمانی کرندار و مشتق پذیر است. برای آنکه این فرض تأمین گردد و تناقضی بین بخش تئوری و شبیه سازی های ما پیش نیاید. ما برای محاسبه پاسخ پله سیستم بجای یک ورودی پله واحد ساده از یک پله واحد فیلتر شده استفاده کردیم. برای این منظور ما یک فیلتر پائین گذر مرتبه اول با تابع تبدیل $T(s) = \frac{1}{1+0.2s}$ به سیگنال مرجع پله $x_d(t)$ اعمال کرده ایم. با این کار بجای یک سیگنال مرجع مشتق ناپذیر پله، ما یک سیگنال مرجع $x_d(t)$ مشتق پذیر و هموار که شبیه پاسخ پله سیستم مرتبه اول است، خواهیم داشت و فرض ۲ در قضیه ۱ نیز تأمین می گردد.

شکل ۱۱ پاسخ پله شبیه سازی شده کنترل کننده پیشنهادی ANFIS+PID در مفاصل ۱ تا ۶ ربات IRB-120 را نشان می دهد. در شکل های ۱۲ و ۱۳ به ترتیب شبیه سازی خطای تعقیب موقعیت و خطای تعقیب سرعت کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل ۱ تا ۶ ربات IRB-120 آورده شده است. همچنین شکل ۱۴ سیگنال گشتاور ورودی کنترلی مربوط به کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل ۱ تا ۶ ربات IRB-120 را نمایش می دهد. همانطور که در شکل ۱۱ مشاهده می شود، پاسخ حالت گذرای سیستم در استفاده از کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی، مناسب و سریع می باشد. زیرا خروجی سیستم در یک زمان نسبتاً کوتاه (در حدود ۱ یا ۲ ثانیه) به سیگنال مرجع می رسد. همچنین با توجه به شکل های ۱۲ و ۱۳ می توان گفت که سیستم در حالت ماندگار رفتار مناسبی از خود نشان می دهد و سیستم دارای خطای حالت ماندگار نمی باشد (یعنی: $e_{ss} = 0$)، زیرا پس از مدت زمان کوتاهی سیگنال خطا به صفر همگرا می شود. علاوه بر این سیگنال گشتاور ورودی کنترلی سیستم در شکل ۱۴ بیش از اندازه تیز و ناهموار نیست و قابل قبول می باشد زیرا محرک های عملی (درايو موتورها) می توانند آنرا بعنوان سیگنال ورودی به سیستم اعمال کنند.

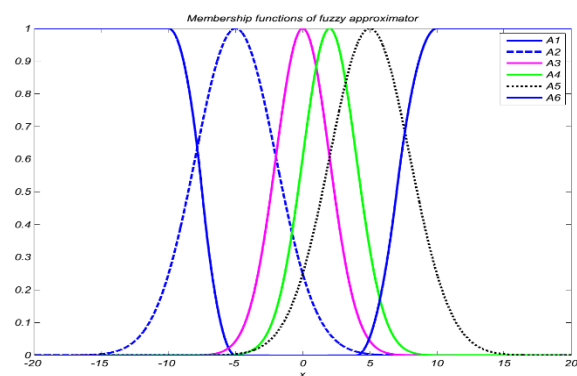
برای بررسی میزان مقاومت روش کنترلی پیشنهادی در برابر اعمال نویز، ما یک نویز اندازه گیری بصورت: $0.0002 * \text{randn}$ به ورودی کنترل کننده اعمال کردیم. نتایج شبیه سازی های حاصل، که در شکل های ۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ آورده شده است، نشان می دهد که روش کنترلی پیشنهادی نسبت به اعمال نویز اندازه گیری تا حدودی مقاوم است. البته لازم به توضیح است بخاطر وجود مشتقگیر در ورودی کنترل کننده، این روش نسبت به نویزهای قوی تر حساس می باشد. اثر اعمال نویز اندازه گیری بر سیگنال های پاسخ سیستم کنترلی را می توانید به وضوح در شکل های ۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ مشاهده کنید.

ترکیبی ANFIS+PID یعنی پارامترهای η_{fi} , η_{gij} در روابط (۲۴) و (۲۵) و پارامترهای $\bar{\epsilon}_f$, $\bar{\epsilon}_g$, δ_0 در رابطه (۲۷) و پارامترهای K_p , K_d , K_s , ϵ_0 در رابطه (۱۱) و (۲۸)، با استفاده از روش سعی و خطا بر اساس بهترین پاسخ های سیستم، بصورت زیر تنظیم می شوند:

$$\eta_{fi} = \eta_{gij} = 0.45, \quad \bar{\epsilon}_f = \bar{\epsilon}_g = 5, \quad \delta_0 = 0.6 \quad (55)$$

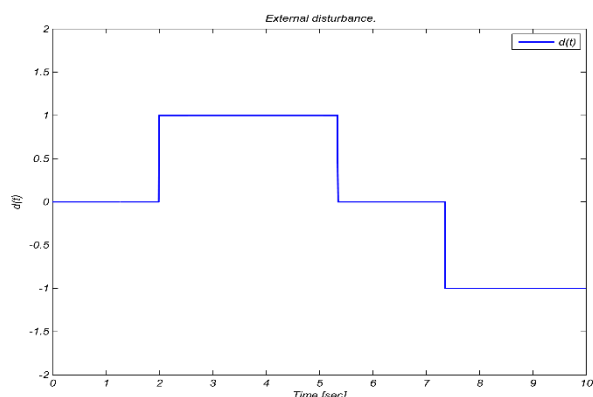
$$K_p = 10, \quad K_d = 10, \quad K_s = 0.1, \quad \epsilon_0 = 0.01$$

برای سادگی به منظور تخمین فازی توابع غیر خطی $F(x,t) + D(t)$ و $G(x,t)$ در رابطه (۱۳)، توابع عضویت تخمینگرهای فازی ورودی برای تمام پارامترهای قابل تنظیم یکسان و مطابق با شکل ۹ زیر در نظر گرفته می شود.



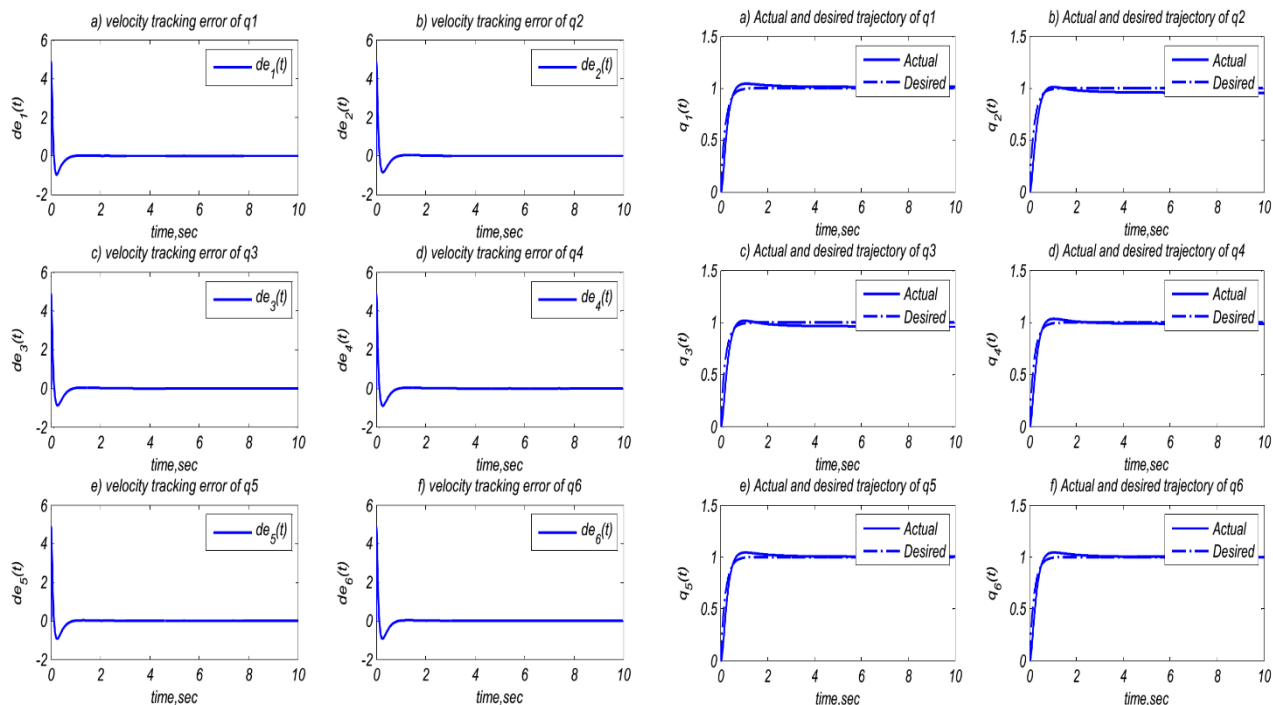
شکل ۹. توابع عضویت تخمینگرهای فازی کنترل کننده پیشنهادی

برای کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی، سیگنال اغتشاش خارجی $D(t)$ با تغییرات پله ای بصورت شکل ۱۰ بصورت زیر شبیه سازی شده است. این اغتشاش می تواند بیانگر گشتاور اعمالی به مفاصل ربات ناشی از عدم قطعیت های سیستم باشد.



شکل ۱۰. سیگنال اغتشاش شبیه سازی شده اعمالی به هر کدام از مفاصل ربات

همچنین در این شبیه سازی حجم محاسباتی روش کنترلی پیشنهادی بدین شرح است: m-file مربوط به شبیه سازی نتایج کنترل کننده پیشنهادی در متلب شامل 422 سطر کد متلب با زمان اجرای تقریبی 59 sec می باشد و m-file مربوط به محاسبه دینامیک

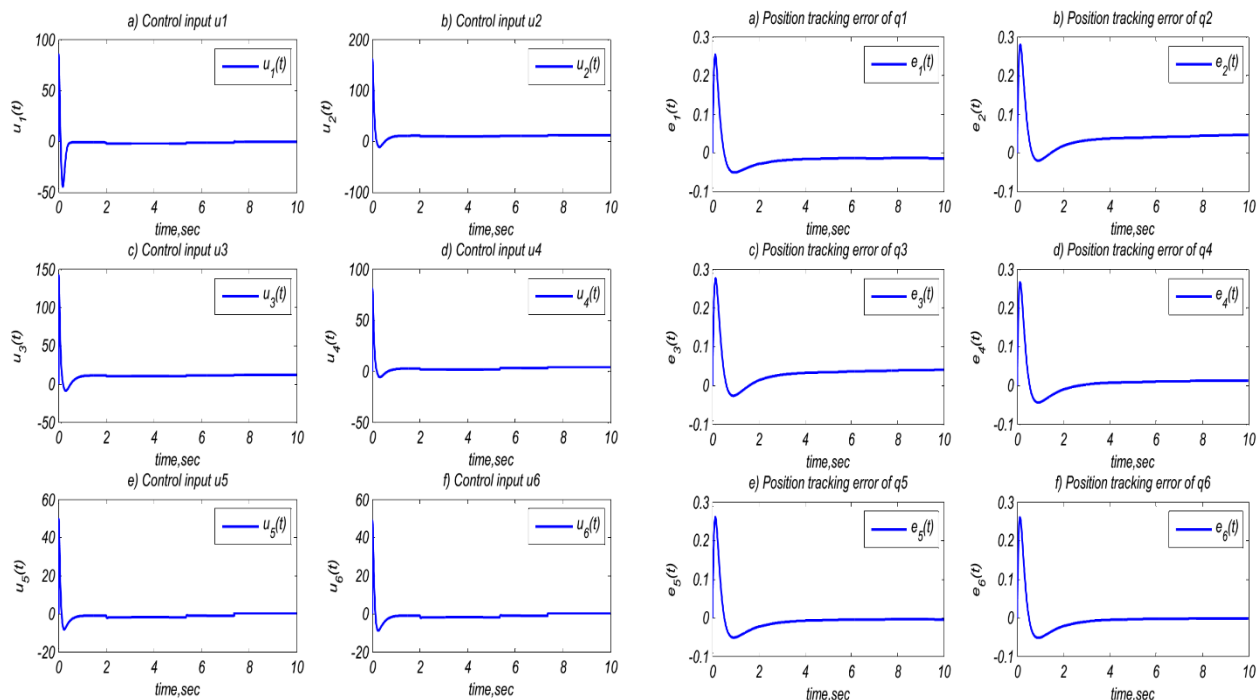


شکل ۱۱. پاسخ به کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل ۱ تا ۶

ربات IRB-120

شکل ۱۳. خطای تعقیب سرعت کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل

۱ تا ۶ ربات IRB-120

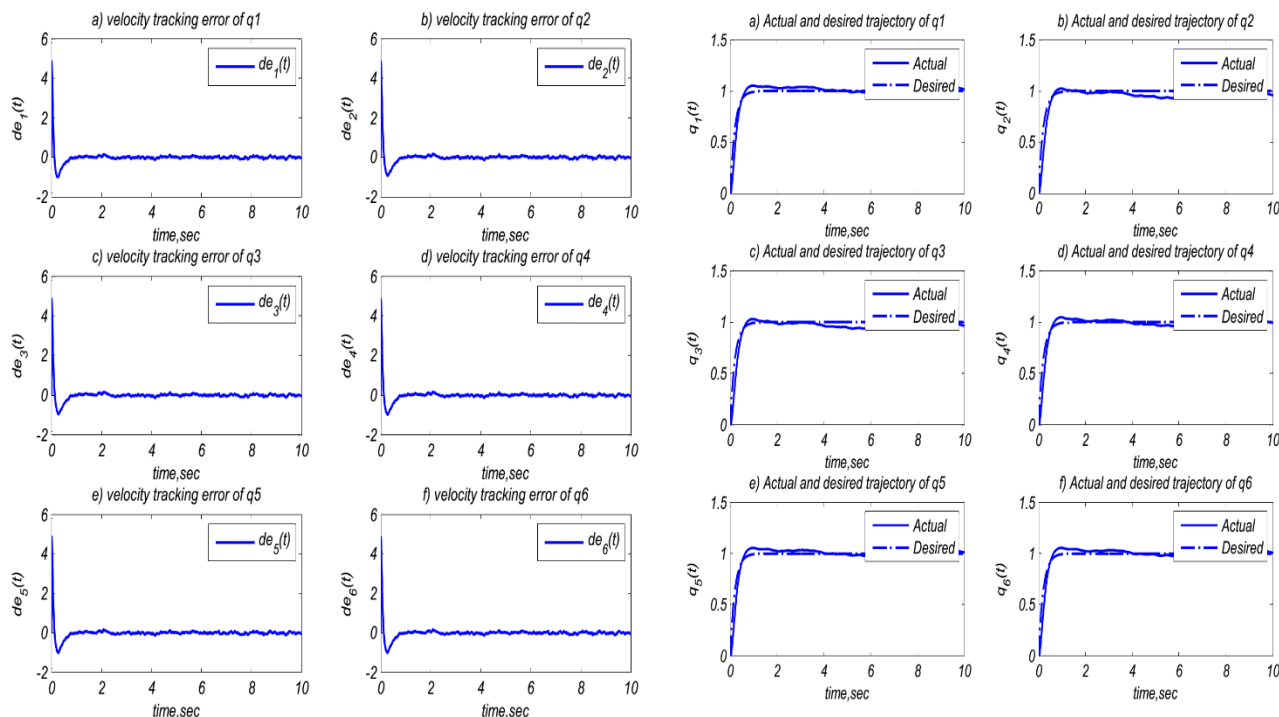


شکل ۱۲. خطای تعقیب موقعیت کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل ۱ تا ۶

ربات IRB-120

شکل ۱۴. گشتاور ورودی کنترلی کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل

۱ تا ۶ ربات IRB-120

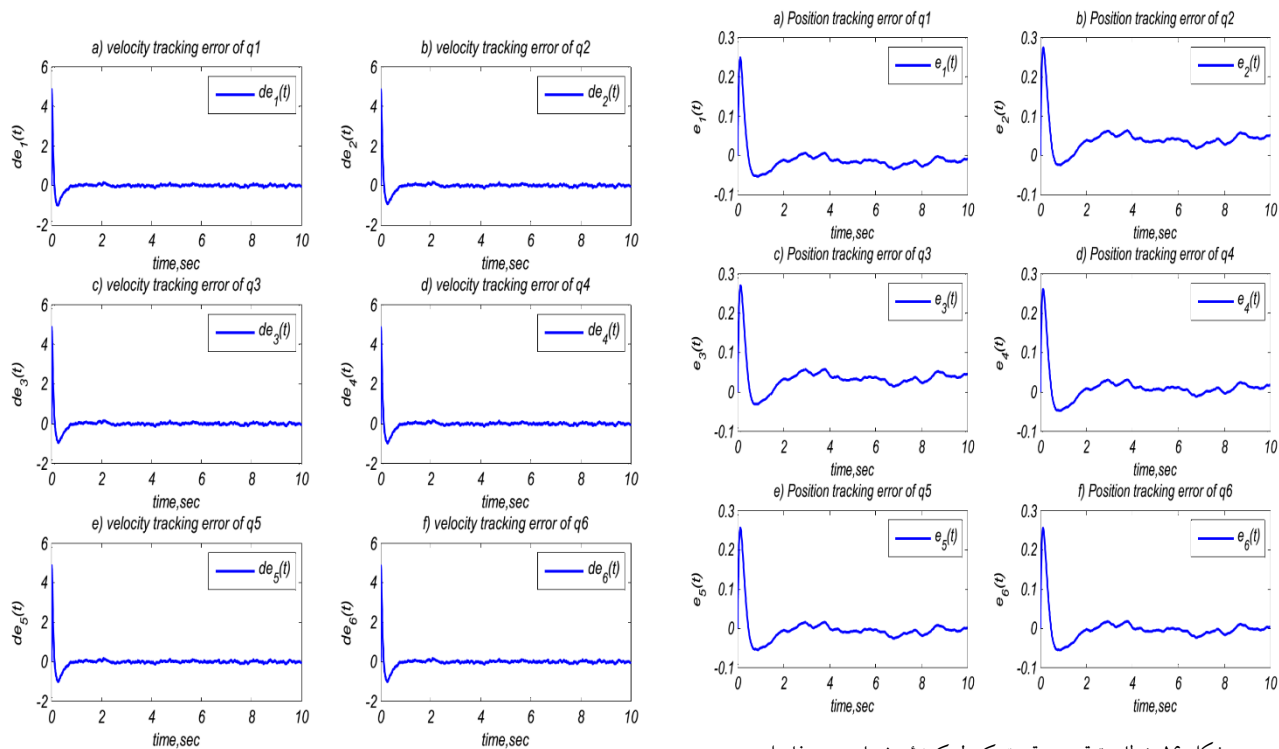


شکل ۱۵. پاسخ پله کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل ۱ تا ۶ ربات

۱ تا ۶ ربات IRB-120 با اعمال نویز اندازه گیری

شکل ۱۷. خطای تعقیب سرعت کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل

۱ تا ۶ ربات IRB-120 با اعمال نویز اندازه گیری



شکل ۱۶. خطای تعقیب موقعیت کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل

۱ تا ۶ ربات IRB-120 با اعمال نویز اندازه گیری

شکل ۱۸. گشتاور ورودی کنترلی کنترل کننده پیشنهادی در مفاصل

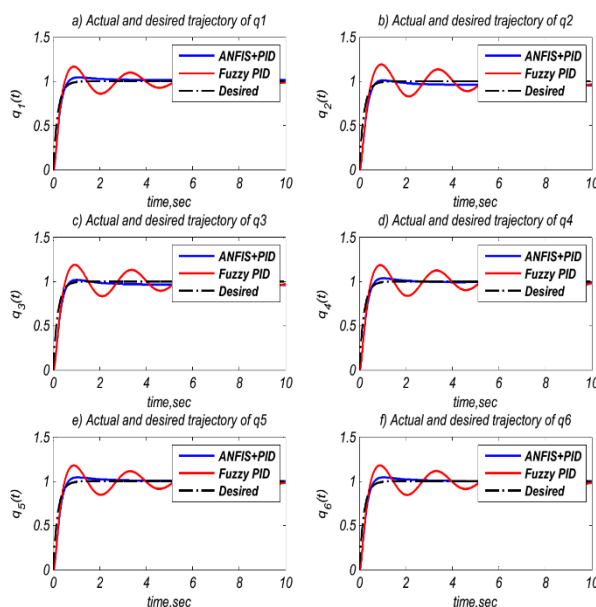
۱ تا ۶ ربات IRB-120 با اعمال نویز اندازه گیری

با استفاده از قضیه شبه لیاپانوف (لم باربالات)، همگرا به صفر بودن خطای سیستم کنترل پیشنهادی را بررسی کرده و به اثبات رساندیم. از جمله مزایای این ترکیب جدید نسبت به ساختار ANFIS معمول، قابلیت فرموله کردن و تخمین عدم قطعیت ها و اغتشاشات سیستم به همراه دینامیک سیستم و حذف آن می باشد. علاوه بر این ترکیب جدید می توانیم همگرا به صفر بودن خطای سیستم بازوی ربات تحت کنترل کننده پیشنهادی را به اثبات برسانیم، که در ساختار ANFIS معمولی این امکان وجود ندارد. همانطور که از بررسی نتایج شبیه سازی با نرم افزار MATLAB مشاهده می شود، پاسخ حالت گذرای سیستم در استفاده از کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی، مناسب و سریع می باشد و علاوه بر این سیستم در حالت ماندگار نیز رفتار مناسبی از خود نشان داده و دارای خطای حالت ماندگار نمی باشد. از سوی دیگر سیگنال مربوط به گشتاور ورودی کنترلی سیستم بیش از اندازه تیز و ناهموار نیست و محرک های عملی می توانند آنرا بعنوان سیگنال ورودی به سیستم اعمال کنند. بطور کلی نتایج شبیه سازی کارایی و مناسب بودن کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی را برای کنترل بازوی ربات IRB-120 تایید می کند.

مراجع

- [1] J. P. Kolhe, M. Shaheed, T. Chandar, and S. Talole, "Robust control of robot manipulators based on uncertainty and disturbance estimation," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 23, pp. 104-122, 2013.
- [2] A. Mishkat and N. Verma, "ROBUST CONTROL OF ROBOTIC MANIPULATOR," 2014.
- [3] M. Mehdi Fateh and M. Baluchzadeh, "Discrete optimal control for robot manipulators," *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 33, pp. 423-444, 2013.
- [4] A. Olivares and E. Staffetti, "Embedded optimal control of robot manipulators with passive joints," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 2015.
- [5] Y. Yanling, "Model free adaptive control for robotic manipulator trajectory tracking," *Open Automation and Control Systems Journal*, vol. 7, pp. 358-365, 2015.
- [6] H. Wang, "Adaptive control of robot manipulators with uncertain kinematics and dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, pp. 948-954, 2017.
- [7] Y. Zhao, "Study on Predictive Control for Trajectory Tracking of Robotic Manipulator," *Journal of Engineering Science & Technology Review*, vol. 7, 2014.
- [8] I. Cervantes and J. Alvarez-Ramirez, "On the PID tracking control of robot manipulators," *Systems & control letters*, vol. 42, pp. 37-46, 2001.
- [9] V. Hernández-Guzmán and J. Orrante-Sakanassi, "Global PID Control of Robot Manipulators

برای اعتبار سنجی بیشتر روش کنترلی پیشنهادی، ما آنرا با یک روش کنترل فازی-PID با ساختار موازی [۵۳] مقایسه کردیم. روش کنترل فازی-PID که ما بعنوان روش مقایسه ای از آن استفاده کردیم، در واقع یک روش کنترلی برای تنظیم گین های کنترل کننده PID با استفاده از سیستم های فازی می باشد. در این روش کنترل فازی-PID، بجای استفاده از یک کنترل کننده PID سری از ترکیب موازی کنترل کننده های PI و PD استفاده شده است، تا با کاهش تعداد کمیت های ورودی، عملکرد کنترلی بهتر و پاسخ مناسب تری حاصل گردد (خوانندگان می توانند برای آشنایی بیشتر با این روش به مرجع [۵۳] مراجعه کنند). نتایج شبیه سازی مقایسه کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی ANFIS+PID با کنترل کننده فازی-PID در شکل ۱۹ زیر آورده شده است. همان طور که در شکل ۱۹ زیر مشاهده می شود، پاسخ پله کنترل کننده پیشنهادی ما نسبتاً سریع بوده و در زمان تقریبی ۱ تا ۲ ثانیه به سیگنال مرجع رسیده و پایدار می گردد. اما پاسخ پله کنترل کننده فازی-PID دارای آورشوت^۱ و نوسانی بوده و زمان نشست^۲ آن در حدود ۸ ثانیه می باشد. از اینرو پاسخ گذرای آن نسبتاً کند و نامناسب بوده و برای کنترل این بازوی ربات که به پاسخ سریع و غیر نوسانی نیاز است، کارایی لازم را ندارد.



شکل ۱۹. مقایسه پاسخ پله کنترل کننده پیشنهادی ANFIS+PID و

کنترل کننده فازی-PID در مفاصل ۱ تا ۶ ربات

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک کنترل کننده ترکیبی ANFIS+PID برای کنترل بازوی ربات شش درجه آزادی IRB-120 طراحی کردیم و هم چنین

¹ Overshoot
² Setting time

- control theory & applications, vol. 4, pp. 1079-1093, 2010.
- [23] B. O. Mushage, J. C. Chedjou, and K. Kyamakya, "Fuzzy neural network and observer-based fault-tolerant adaptive nonlinear control of uncertain 5-DOF upper-limb exoskeleton robot for passive rehabilitation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 87, pp. 2021-2037, 2017.
- [24] W. He and Y. Dong, "Adaptive fuzzy neural network control for a constrained robot using impedance learning," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017.
- [25] D. C. Theodoridis, Y. S. Boutalis, and M. A. Christodoulou, "A new adaptive neuro-fuzzy controller for trajectory tracking of robot manipulators," *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 26, p. 64, 2011.
- [26] A. Farrage and A. B. Sharkawy, "Experimental Investigation of an Adaptive Neuro-Fuzzy Control Scheme for Industrial Robots," *J. Eng. Sci. Fac. Eng. Univ*, vol. 42, pp. 703-721, 2014.
- [27] S. M. Ahmadi and M. M. Fateh, "Robust control of electrically driven robots using adaptive uncertainty estimation," *Computers & Electrical Engineering*, vol. 56, pp. 674-687, 2016.
- [28] M. H. Barhaghtalab, H. Bayani, A. Nabaei, H. Zarrabi, and A. Amiri, "On The Design of The Robust Neuro-Adaptive Controller for Cable-driven Parallel Robots," *Automatika: časopis za automatiku, mjerenje, elektroniku, računarstvo i komunikacije*, vol. 57, pp. 724-735, 2017.
- [29] J.-S. Jang, "ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system," *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 23, pp. 665-685, 1993.
- [30] J.-S. Jang and C.-T. Sun, "Neuro-fuzzy modeling and control," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, pp. 378-406, 1995.
- [31] O. Bachir and A.-F. Zoubir, "Adaptive neuro-fuzzy inference system based control of puma 600 robot manipulator," *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 2, p. 90, 2012.
- [32] F. Z. Baghli, Y. Lakhal, L. El Bakkali, and O. Hamdoun, "Design and simulation of Adaptive Neuro Fuzzy Inference System (ANFIS) controller for a robot manipulator," in *Complex Systems (WCCS), 2014 Second World Conference on*, 2014, pp. 298-303.
- [33] P. Agnihotri, V. Banga, and E. G. Singh, "ANFIS Based Forward and inverse Kinematics of Robot Manipulator with five Degree of Freedom," 2015.
- [34] R. K. Gupta and S. Chauhan, "Comparision of PID controller & adaptive neuro fuzzy controller for robot manipulator," in *Computational Intelligence and Computing Research (ICCIC), 2015 IEEE International Conference on*, 2015, pp. 1-4.
- [35] J. Lin and C.-C. Lin, "Hybrid fuzzy position/force control by adaptive network-based fuzzy inference system for robot manipulator mounted on oscillatory
- Equipped with PMSMs," *Asian Journal of Control*, 2018.
- [10] F. Piltan, S. Emamzadeh, Z. Hivand, F. Shahriyari, and M. Mirazaei, "PUMA-560 Robot Manipulator Position Sliding Mode Control Methods Using MATLAB/SIMULINK and Their Integration into Graduate/Undergraduate Nonlinear Control, Robotics and MATLAB Courses," *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 106-150, 2012.
- [11] F. Moldoveanu, "SLIDING MODE CONTROLLER DESIGN FOR ROBOT MANIPULATORS," *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Engineering Sciences. Series I*, vol. 7, p. 97, 2014.
- [12] L.-X. Wang, *A course in fuzzy systems*: Prentice-Hall press, USA, 1999.
- [13] F. Piltan, S. T. Haghighi, N. Sulaiman, I. Nazari, and S. Siamak, "Artificial control of PUMA robot manipulator: A-review of fuzzy inference engine and application to classical controller," *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 401-425, 2011.
- [14] D. W. Bertol, V. Barasuol, E. R. De Pieri, and N. A. Martins, "FUZZY MAPPING OF DYNAMIC FUNCTIONS TO CONTROL ROBOT MANIPULATORS IN THE OPERATIONAL SPACE," 2012.
- [15] M. Aghajarian, K. Kiani, and M. M. Fateh, "Design of Fuzzy Controller for Robot Manipulators Using Bacterial Foraging Optimization Algorithm," *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*, vol. 4, p. 53, 2012.
- [16] L. Fausett, *Fundamentals of neural networks: architectures, algorithms, and applications*: Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [17] L. Wang, T. Chai, and C. Yang, "Neural-network-based contouring control for robotic manipulators in operational space," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 20, pp. 1073-1080, 2012.
- [18] L. Yu, S. Fei, J. Huang, and Y. Gao, "Trajectory switching control of robotic manipulators based on RBF neural networks," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 33, pp. 1119-1133, 2014.
- [19] L. Yu, S. Fei, J. Huang, Y. Li, G. Yang, and L. Sun, "Robust neural network control of robotic manipulators via switching strategy," *Kybernetika*, vol. 51, pp. 309-320, 2015.
- [20] M. M. Fateh, S. M. Ahmadi, and S. Khorashadizadeh, "Adaptive RBF network control for robot manipulators," *Journal of AI and Data Mining*, vol. 2, pp. 159-166, 2014.
- [21] P. Van Cuong and W. Y. Nan, "Adaptive trajectory tracking neural network control with robust compensator for robot manipulators," *Neural Computing and Applications*, vol. 27, pp. 525-536, 2016.
- [22] R.-J. Wai, Y.-C. Huang, Z.-W. Yang, and C.-Y. Shih, "Adaptive fuzzy-neural-network velocity sensorless control for robot manipulator position tracking," *IET*

- [44] Y. Tao, J. Zheng, Y. Lin, T. Wang, H. Xiong, G. He, et al., "Fuzzy PID control method of deburring industrial robots," *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 29, pp. 2447-2455, 2015.
- [45] R. H. Mohammed, F. Bendary, and K. Elserafi, "Trajectory Tracking Control for Robot Manipulator using Fractional Order-Fuzzy-PID Controller," *International Journal of Computer Applications*, vol. 134, 2016.
- [46] J. Armendariz, V. Parra-Vega, R. García-Rodríguez, and S. Rosales, "Neuro-fuzzy self-tuning of PID control for semiglobal exponential tracking of robot arms," *Applied Soft Computing*, vol. 25, pp. 139-148, 2014.
- [47] S. Z. S. Al-Khayyt, "Tuning PID Controller by Neural Network for Robot Manipulator Trajectory Tracking," *Al-Khwarizmi Engineering Journal*, vol. 9, pp. 19-28, 2017.
- [48] C.-T. Sun and J.-S. Jang, "A neuro-fuzzy classifier and its applications," in *Fuzzy Systems*, 1993., Second IEEE International Conference on, 1993, pp. 94-98.
- [49] S. Labiod, M. S. Boucherit, and T. M. Guerra, "Adaptive fuzzy control of a class of MIMO nonlinear systems," *Fuzzy sets and systems*, vol. 151, pp. 59-77, 2005.
- [50] L.-X. Wang, *Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis*: Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [51] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*: John Wiley & Sons, 2008.
- [52] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Robotics: modelling, planning and control*: Springer Science & Business Media, 2010.
- [53] J.-X. Xu, C.-C. Hang, and C. Liu, "Parallel structure and tuning of a fuzzy PID controller," *Automatica*, vol. 36, pp. 673-684, 2000.
- base," *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, pp. 1930-1945, 2015.
- [36] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control* vol. 199: prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [37] M. Mansouri, M. Teshnehlab, and S. M. Aliyari, "Desiging Hierarchical Fuzzy Contoller with Feedback Error Learning based on Lyapunov FUNCTION for a Class of High Order Nonlinear Systems," 2015.
- [38] F. A. Yaghmaie, F. Bakhshande, and H. D. Taghirad, "Feedback error learning control of trajectory tracking of nonholonomic mobile robot," in *Electrical Engineering (ICEE)*, 2012 20th Iranian Conference on, 2012, pp. 889-893.
- [39] S. Pezeshki, S. Badalkhani, and A. Javadi, "Performance Analysis of a Neuro-PID Controller Applied to a Robot Manipulator," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 9, p. 163, 2012.
- [40] S. E. Shafiei and M. R. Soltanpour, "Neural network sliding-model-PID controller design for electrically driven robot manipulators," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 7, pp. 511-524, 2011.
- [41] W. Yu and J. Rosen, "Neural PID control of robot manipulators with application to an upper limb exoskeleton," *IEEE Transactions on cybernetics*, vol. 43, pp. 673-684, 2013.
- [42] M. I. AL-Saedi, H. Wu, and H. Handroos, "ANFIS And fuzzy tuning of PID controller for trajectory tracking of a flexible hydraulically driven parallel robot machine," *Journal of Automation and Control Engineering*, vol. 1, pp. 70-77, 2013.
- [43] F.-C. Liu, L.-H. Liang, and J.-J. Gao, "Fuzzy PID control of space manipulator for both ground alignment and space applications," *International Journal of Automation and computing*, vol. 11, pp. 353-360, 2014.

طراحی و تحلیل پایداری رؤیتگر و کنترل کننده بهینه تصادفی برای سیستم تعلیق فعال مبتنی بر مدل نامعین ایتو

علیرضا رمضانی مقدم^۱، حامد کبریایی^۲

^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، a.ramezany@ut.ac.ir

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، kebriyai@ut.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۲۷

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۳/۲۰

دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۲۸

چکیده: این مقاله به بررسی طراحی یک کنترل کننده خطی تصادفی برای مدل نامعین تعلیق خودرو می‌پردازد. برای سیستم یک چهارم خودرو که پارامترهای میرایی و سختی آن متأثر از اغتشاشات تصادفی است مدل تصادفی ایتو به دست آمده است. به منظور مقابله با عدم قطعیت مدل، قانون کنترلی بهینه تصادفی با استفاده از معادلات تصادفی همیلتون-جاکوبی-بلمن استخراج شده است. در ادامه با استفاده از لم ایتو و تعمیم تصادفی پایداری لیاپانوف، پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته اثبات می‌شود. کنترل کننده تصادفی طراحی شده، برای فرم کلی سیستم‌های نامعین ایتو که در آن نویزهای سفید گوسی مستقل در چندین کانال روی پارامترهای سیستم تأثیر می‌گذارند، استخراج شده است که در ادامه بر روی مدل تصادفی تعلیق خودرو پیاده‌سازی می‌شود. همچنین در این مقاله نشان خواهیم داد قانون استقلال طراحی رؤیتگر از کنترل کننده برای چنین سیستم‌های نامعینی که نویز در پارامترها ضرب می‌شود برقرار نخواهد بود. در نتیجه تمهیدی جهت طراحی رؤیتگر خطی برای این سیستم‌ها با استفاده از معادلات سیستم افزونه به دست آمده است. در نهایت نتایج شبیه‌سازی‌های عددی جهت صحت‌گذاری بر کارآمدی روش ارائه شده آورده شده است.

کلمات کلیدی: معادلات تصادفی ایتو، عدم قطعیت ضرب‌شونده، سیستم تعلیق فعال، پایداری تصادفی، رؤیتگر حالت.

Design and stability analysis of optimal controller and observer for Itô stochastic model of active vehicle suspension system

Alireza Ramezani Moghadam; Hamed Kebriyai

Abstract: This paper investigates Itô-type stochastic linear quadratic controller design for uncertain model of vehicle suspension. The Itô stochastic model of quarter-car is constructed considering parametric stochastic perturbations in stiffness and damping characteristics of suspension. To tackle with uncertainties of model, a stochastic optimal control law is obtained applying stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equation. By means of Itô lemma and stochastic extension of Lyapunov method, stochastic stability of the closed-loop system is guaranteed. The stochastic optimal controller is designed for a general form of Itô uncertain model which is comprised multi-dimensional multiplicative perturbations and then it is implemented on perturbed model of vehicle suspension. Furthermore, it is shown that the separation principal does not hold for the system with state multiplicative noise; therefore, the synthesized observer-based controller guarantees the stability of augmented dynamic consists of system and estimation error dynamics. A simulation study is performed to evaluate the effectiveness of stochastic optimal control approach in satisfying objectives of active suspension. To this end, time and frequency responses of ride comfort and road holding characteristics are demonstrated for two specific road cases including sinusoidal bump and ISO random profile.

Keywords: Itô stochastic equations; multiplicative perturbation, Active suspension system; stochastic stability; Observer.

۱) مقدمه

سیستم تعلیق نقشی اساسی در شکل دهی دینامیک خودرو و فراهم آوردن یک مصالحه مطلوب میان شاخصه‌های خوش سواری و فرمان‌پذیری خودرو ایفا می‌کند. تعلیق یک سامانه واسط است که بین چرخ‌های خودرو و کابین سرنشینان قرار دارد و مسئولیت اصلی آن، جذب نوسانات نامعین و نامطلوب پروفیل جاده است تا از انتقال آن‌ها به سرنشین جلوگیری به عمل آید. از این منظر می‌توان گفت تعلیق مهمترین عامل در فراهم آوردن راحتی سرنشین در طی حرکت خودرو است. همچنین این سیستم وظیفه نگهداری وزن خودرو، برقراری فاصله معین میان چرخ‌ها و بدنه و همچنین فرمان‌پذیری خودرو بر سطح جاده را نیز بر عهده دارد [۱]. به طور ذاتی، سیستم تعلیق غیرفعال در بازه محدودی قادر به نشان دادن عملکرد مطلوب است. در نتیجه جهت ایجاد مشخصه‌های سواری مناسب نیازمندیم به روش‌های فعال‌سازی تعلیق به وسیله استراتژی‌های مختلف کنترلی متوسل شویم [۲، ۳].

سیستم تعلیق خودرو تحت تاثیر عدم قطعیت‌های تصادفی قرار دارد که یا از اغتشاشات خارجی و یا از نامعینی‌های پارامتری ناشی می‌شوند. وجود عدم قطعیت می‌تواند خروجی سیستم را دستخوش تغییرات ناخواسته کند که به کاهش عملکرد سیستم حلقه بسته منجر می‌شود. در نتیجه برخورد صحیح با چنین نامعینی‌هایی از مهمترین چالش‌های پیش‌رو مهندسين خودرو است. از جمله مهمترین نامعینی‌های وارد بر سیستم تعلیق که یکی از چالش‌های کنترلی مهم در برخورد با این سیستم نیز محسوب می‌شود، وجود نامعینی پروفیل جاده است که به صورت یک عدم قطعیت نامتناسب خود را وارد معادلات سیستم می‌کند [۴]. همچنین، سیستم تعلیق خودرو مانند هر سیستم دیگری در طبیعت، علاوه بر نامعینی‌های خارجی در معرض نامعینی‌های داخلی و یا پارامتری نیز قرار دارد. در سیستم خودرو عوامل متعددی همچون وجود دینامیک‌های مدل‌نشده، ذات غیرخطی مشخصه‌های سختی و میرایی موجود در تعلیق، شرایط محیطی و فرسودگی قطعات باعث تحمیل نامعینی پارامتری به سیستم می‌شوند. با توجه به تاثیر این نامعینی‌ها بر روی پارامترهای سیستم‌های ارتعاشی، بسیاری از مطالعات در زمینه فعال‌سازی تعلیق بر اهمیت مقابله با نامعینی‌های پارامتری تاکید کرده‌اند [۵، ۶]. به طور مثال جهت مقابله با عدم قطعیت پارامتری [۷] از کنترل مقاوم و [۸] از کنترل تطبیقی بر روی سیستم تعلیق خودرو استفاده کرده‌اند. علی‌رغم اینکه نامعینی‌های

پارامتری در سیستم‌های ارتعاشی به صورت فرآیندهای تصادفی قابل مدل شدن هستند [۹، ۱۰]، در تمامی این مطالعات نامعینی پارامتری به صورت یک سیگنال نامعلوم نرم-محدود مدل شده است. باید توجه داشت که قرار دادن حد بالا برای سیگنال به جای اینکه از توزیع احتمال آن استفاده کنیم، ریسک محافظه کاری را بالاتر برده و در نتیجه عملکرد سیستم افت خواهد کرد.

با در نظرگیری معادلات دینامیکی سیستم تعلیق به صورت معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو قادر خواهیم بود با دسته وسیعی از عدم قطعیت‌ها به فرم فرآیند تصادفی وینر^۱ مقابله کنیم. مدل‌های تصادفی ایتو یکی از کاربردی‌ترین مدل‌های تصادفی در زمینه‌هایی همچون اقتصاد، کنترل پرواز، مهندسی سازه و سیستم‌های ارتعاشی است [۱۰-۱۲]. مطالعات زیادی در زمینه پایداری‌سازی و طراحی استراتژی کنترلی برای مدل‌های تصادفی ایتو انجام شده است که به طور مثال کار [۱۳، ۱۴] در زمینه پایداری‌سازی و [۱۵-۱۷] در بحث طراحی کنترلی‌کننده قابل ملاحظه است.

از طرفی کنترل‌کننده خطی درجه دو یک روش بهینه کارا در زمینه فعال سازی سیستم تعلیق خودرو به حساب می‌آید. با توجه به ویژگی‌های کنترل‌کننده‌های بهینه همچون ایجاد مصالحه‌ای مطلوب بر پایه کمینه-کردن تابع هزینه‌ای شامل معیارهای عملکردی و نیز میزان انرژی کنترلی، علاقه‌مندی به این کنترل‌کننده‌ها به شکل چشم‌گیری افزایش یافته است. [۳] از یک روش مقاوم تطبیقی جهت کنترل سیستم تعلیق استفاده کرده است که یک کنترل درجه دو خطی در حلقه اصلی کنترلی آن به کار رفته است. [۱۸] با استفاده از یک کمک فتر مغناطیسی توانسته سیستم تعلیق را با استفاده از استراتژی درجه دو خطی کنترل نماید. [۱۹] به مدل‌سازی و شبیه‌سازی تعلیق فعال خودرو به کمک روش کنترلی ترکیبی H_{∞} / LQR پرداخته است. از طرفی تمامی متغیرهای حالت در سیستم تعلیق در دسترس نیستند و یا اندازه‌گیری همه آن‌ها هزینه‌بر است. بنابراین استفاده از رُینگر حالت در سیستم تعلیق فعال بسیار متداول است. به عنوان نمونه کارهای [۲۰، ۲۱] با استفاده از روش کنترلی درجه دو خطی و نیز یک فیلتر کالمن به عنوان رُینگر توانسته یک سیستم تعلیق فعال برای خودرو طراحی کند. اگرچه کنترل‌کننده درجه دو خطی به طور گسترده‌ای در سیستم تعلیق فعال استفاده شده است، همچنان چه در بحث طراحی کنترل بهینه و چه رُینگر حالت جای خالی تحلیل وجود عدم قطعیت‌های پارامتری تصادفی در سیستم تعلیق کاملاً مشهود است.

¹ Wiener process

بودن M است. $\lambda(M)$ معرف مقادیر ویژه ماتریس M و $\|g(t)\|$ نماد نرم اقلیدسی $g(t)$ است. همچنین مولد^۴ $L(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

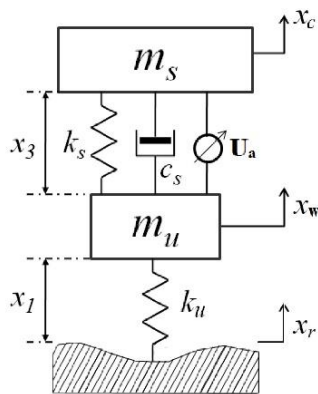
$$L \cdot = \frac{\partial(\cdot)}{\partial(x)} f(x, t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[g(x, t) g^T(x, t) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial(x)^2} \right], \quad (1)$$

که در آن مدل تصادفی ایتو مطابق زیر است:

$$\begin{cases} d\vec{X} = f(X(t), u(t), t)dt + g(X(t), u(t), t)dw \\ \vec{X}(0) = \vec{X}_0 \end{cases} \quad (2)$$

۲) مدل نامعین یک چهارم خودرو

جهت مطالعه رفتاری ارتعاشی خودرو، یک مدل یک چهارم تعلیق شامل جسم‌های صلب بدنه (جسم معلق) و تایر (جسم نامعلق) و عناصر سختی و میرایی مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۱) مدل یک چهارم خودرو

این مدل یکی از شناخته‌شده‌ترین مدل‌ها جهت مطالعه سیستم تعلیق خودرو است که در کاربردهای طراحی کنترل‌کننده تا امروز استفاده شده است [۲۲، ۲۳]. نکته حائز اهمیت در این مطالعه این است که با مدلسازی یک سیستم تعلیق غیرخطی به صورت خطی بسیاری از نکات ریز در مدلسازی آن را نادیده می‌گیریم. از جمله اینکه مشخصه‌های فتری و دمپری در تعلیق خودرو اساساً دارای ماهیتی غیرخطی و وابسته به تغییرات جابه جایی عمودی و سرعت عمودی چرخ‌ها (که خود از تغییرات جابه جایی عمودی جاده پیروی می‌کند) می‌باشند. از طرفی می‌دانیم خود جاده ماهیتی کاملاً تصادفی دارد که این امر در مدلسازی‌های ایزو جاده مشخص است [۲۴]. بنابراین می‌توان اینگونه بیان کرد که عدم قطعیت‌های تصادفی خود را درون مقدار پارامترهای فتری و دمپری نیز نشان

هدف این مقاله طراحی یک کنترل‌کننده درجه دو خطی بهینه برای سیستم تعلیق فعالی است که در معرض عدم قطعیت تصادفی ضرب شونده قرار دارد. نوآوری‌های موجود در این مطالعه عبارت است از: ۱) استفاده از یک مدل تصادفی ایتو برای سیستم تعلیق خودرو با در نظرگیری عدم قطعیت‌های تصادفی در مشخصه‌های سختی و میرایی مدل ۲) طراحی کنترل درجه دو خطی تصادفی برای سیستم‌های تصادفی دارای نویز پارامتریک چند بعدی و اعمال آن به سیستم تعلیق خودرو ۳) بررسی پایداری تصادفی قانون کنترل بهینه تصادفی با استفاده از لم ایتو و انتخاب تابع لیاپانوف مناسب و مستقل از شرایط کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری. به این ترتیب نشان داده شده است که کنترل درجه دو خطی غیر تصادفی در صورت اعمال به سیستم دارای نویز پارامتریک (ضرب شونده در حالت)، حتی در صورت برقراری شرایط کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری تحت شرایطی وابسته به شدت نویز، منجر به ناپایداری سیستم حلقه بسته می‌شود. در حالی که کنترل درجه دو خطی تصادفی که براساس ریاضیات ایتو گسترش یافته است قادر است سیستم حلقه بسته را پایدار سازد ۴) نشان داده شده است که در سیستم دارای نویز پارامتریک قانون تفکیک‌پذیری برای طراحی مستقل رُیتگر خطی و کنترل‌کننده برقرار نیست. به این ترتیب راهکاری برای طراحی رُیتگر حالت با استفاده از سیستم افزوده^۲ پیشنهاد شده است و حاصل کار بر روی مدل تعلیق خودرو پیاده‌سازی شده است.

در ادامه روند این مقاله به این شرح است: مدل تصادفی ایتو سیستم تعلیق در بخش ۲ استخراج می‌شود. مساله کنترل بهینه تصادفی در بخش ۳ فرمول‌بندی می‌شود و پایداری سیستم حلقه بسته در فصل ۴ بررسی گردیده است. فصل ۵ به چالش‌های پیش رو در طراحی رُیتگر برای سیستم تصادفی می‌پردازد و نیز در همین فصل رُیتگر خطی تصادفی برای سیستم طراحی شده است. جهت ارزیابی استراتژی بهینه-تصادفی ارائه شده، فصل ۶ نتایج شبیه‌سازی‌های عددی را در بر می‌گیرد. در نهایت جمع‌بندی در بخش ۷ ارائه گردیده است.

نمادگذاری: $\Phi(\Omega, F, P)$ یک فضای احتمالاتی است با فضای نمونه Ω که F یک سیگما الجبرا^۳ از زیرمجموعه‌های فضای نمونه و p اندازه احتمالاتی است. $E(\cdot)$ معرف عملگر امید متناسب با اندازه p است. برای یک ماتریس متقارن حقیقی، $M > 0$ نشان‌دهنده مثبت معین

^۴ infinitesimal generator

^۲ augmented system

^۳ sigma algebra

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_s}{m_u} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_s}{m_u} & 0 & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_u}{m_u} & 0 \end{bmatrix}$$

پارامترهای مدل در جدول ۱ آورده شده است. همچنین $\vec{W}$ ها فرآیندهای وینر هستند که بر روی فضای احتمالاتی Φ تعریف شده‌اند و داریم:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} dw_1 & dw_2 & dw_3 \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} v_1 dt & v_2 dt & v_3 dt \end{bmatrix}^T$$

همچنین در معادلات (۳) $\dot{r} = \dot{X}_r$ عدم قطعیت ورودی است.

قابل توجه است که متغیرهای حالت انتخاب شده در این بخش در عین مستقل بودن از هم دارای این خاصیت نیز هستند که معیارهای شناخته-شده‌ای در ارزیابی عملکرد سواری خودرو به شمار می‌روند. $X_c - X_w$ فاصله بین کابین و تایلر است که سنجشی بر معیار یکپارچگی تعلیق است و $X_r - X_w$ نیز نشان‌دهنده میزان قرار خودرو بر روی جاده و یا همان کنترل پذیری خودرو است. کنترل‌پذیری خودرو البته با میزان فشاری که تایلر بر روی جاده وارد می‌کند ارتباط مستقیم دارد که در صورت مدل کردن تایلر با یک فنر خطی با تقریب خوبی می‌توان گفت این نیرو نیز با فاصله میان تایلر و جاده با همان $X_r - X_w$ ارتباط مستقیم دارد. مهم‌ترین شاخصه عملکرد تعلیق خوش سواری است که با شتاب وارد بر کابین $\ddot{X}_c$ رابطه مستقیم دارد. اگرچه این شاخصه جایش در میان متغیرهای حالت خالی است اما می‌توان آن را به صورت خروجی سیستم در نظر گرفت و در شبیه‌سازی‌های پیش رو از آن جهت ارزیابی و مقایسه استفاده کرد. به این ترتیب معادله خروجی به صورت زیر است.

$$\ddot{X}_c = MX + N_1 X_{v1} + N_2 X_{v2} + P U_a \quad (6)$$

که در این رابطه:

می‌دهد [۹، ۱۰]. جهت مطالعه عدم قطعیت‌ها در تعلیق، این مدل را به واسطه در نظر گرفتن نامعینی‌های پارامتری تصادفی و نیز عدم قطعیت پروفیل جاده، به مدل نامعین خودرو گسترش می‌دهیم. به این منظور با استفاده از اعمال قانون دوم نیوتن به دو جسم صلب، معادلات دیفرانسیل زیر برای دینامیک‌های این مدل به دست می‌آید.

$$\ddot{X}_c = \frac{1}{m_s} [k_s(1+v_1) X_w - X_c + c_s(1+v_2) \dot{X}_w - \dot{X}_c + U_a] \quad (3)$$

$$\ddot{X}_w = \frac{1}{m_u} [k_s(1+v_1) X_c - X_w - c_s(1+v_2) \dot{X}_w - \dot{X}_c - U_a + k_u(1+v_3) X_r - X_w]$$

که در معادلات (۳) m_s و m_u به ترتیب نشان‌دهنده جرم جسم معلق یا کابین و جسم غیرمعلق یا تایلر است، X_w و X_c جابه‌جایی بدنه و تایلر است، k_s و k_u ضریب سختی جسم‌های معلق و غیرمعلق را نمایندگی می‌کند، c_s ضریب میرایی سیستم است، X_r جابه‌جایی عمودی جاده است و U_a ورودی کنترلی است که به وسیله یک عملگر به سیستم اعمال می‌شود. در معادلات (۳) نامعینی‌های تصادفی به صورت ۳ فرآیند نوین سفید گوسی که مستقل و دارای توزیع یکسان^۵ هستند مدل را تحت تأثیر قرار داده‌اند. این سه فرآیند تصادفی v_1 ، v_2 و v_3 به ترتیب در سختی جسم معلق، میرایی جسم معلق و سختی جسم نامعلق وجود دارد.

به این ترتیب و با انتخاب متغیرهای حالت به شکل زیر:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_c - X_w, \dot{X}_c, X_w - X_r, \dot{X}_w \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

خواهیم داشت:

$$d\vec{X} = A\vec{X} + B U_a + C r \, dt \quad (5)$$

$$+ D\vec{X} \, d\vec{w}_1 + E\vec{X} \, d\vec{w}_2 + F\vec{X} \, d\vec{w}_3,$$

که ماتریس‌های مدل در آن به قرار زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

⁵ independent and identically distributed (IID)

که در آن $K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $f, g, L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ با اعمال برنامه‌ریزی پویا بر روی این تابع هزینه و نیز استفاده از لم ایتو [۲۵] معادله تصادفی همیلتون-جاکوبی-بلمن به صورت زیر درخواست خواهد آمد [۲۶].

$$-\frac{\partial J(x, t)}{\partial t} = \max_{u \in U} \left\{ L(x, u, t) + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ g(x, u, t) g^T(x, u, t) \frac{\partial^2 J(x, t)}{\partial x^2} \right\} \right\} \quad (۱۲)$$

اکنون سیستم تصادفی با مدل ایتو (۷) و تابع هزینه (۸) را در نظر بگیرید که بیانگر یک مساله ردیابی است. می‌توان نشان داد این تابع هزینه با قید دینامیکی مدل سیستم توسط قانون کنترلی زیر کمینه می‌شد (حالت دارای عدم قطعیت چندبعدی از قضیه بیان شده در [۲۷]).

$$u^*(\hat{X}, t) = -R^{-1} B^T K(t) \hat{X}(t) + \varphi(t) \quad (۱۳)$$

توجه شود که استفاده از ترم $\hat{X}$ به جای X به این دلیل است که اساساً به دلیل تصادفی بودن حالت‌ها، در طراحی و شبیه‌سازی از حالت‌های تخمین زده شده $\hat{X}$ که توسط یک رُینگر تصادفی بازسازی شده‌اند استفاده می‌کنیم. همچنین تابع هزینه بهینه مطابق زیر است.

$$J^*(\hat{x}, t) = \frac{1}{2} \hat{X}^T(t) K(t) \hat{X}(t) + \varphi^T(t) \hat{X}(t) + \psi(t), \quad (۱۴)$$

که پارامترهای $K(t)$ ، $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ در آن از حل معادلات دیفرانسیل ماتریسی زیر به دست می‌آید.

$$\dot{K} = -Q + KBR^{-1}B^TK - A^TK - KA - \sum_{i=1}^r D_i^TKD_i \quad (۱۵)$$

$$K(T) = \Gamma$$

$$\dot{\varphi} = -A - BR^{-1}B^TK^T \varphi - Kb \quad (۱۶)$$

$$\varphi(T) = \Upsilon$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2} \varphi^T BR^{-1}B^T \varphi - b^T \varphi \quad (۱۷)$$

$$\psi(T) = 0$$

نکته ۱: معادله دیفرانسیل ماتریسی (۱۵) در افق نامحدود به معادله جبری ریکاتی تعمیم یافته تبدیل می‌شود که مطابق (۱۸) است. شایان ذکر است که شرایط یقراری و صحت این معادله در [۲۷] بحث شده است:

$$-Q + KBR^{-1}B^TK - A^TK - KA - \sum_{i=1}^r D_i^T \Sigma D_i = 0 \quad (۱۸)$$

نکته ۲: عبارت $b(t)$ در معادله (۱۶) می‌تواند اغتشاش ورودی و یا ورودی مرجع در سیستم باشد. در صورت صرف نظر کردن از این

$$M = \begin{bmatrix} -k_s & -c_s & 0 & c_s \\ M_s & M_s & & M_s \end{bmatrix}; N_1 = \begin{bmatrix} -k_s & 0 & 0 & 0 \\ M_s & & & \end{bmatrix};$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c_s & 0 & c_s \\ M_s & M_s & & \end{bmatrix}; P = \frac{1}{M_s}$$

۳) فرمولاسیون مساله درجه دوم خطی تصادفی

سیستم تصادفی خطی دارای عدم قطعیت پارامتری، که روی فضای احتمالاتی $W(\Omega, F, P)$ بنا شده است، به فرم معادلات دیفرانسیل ایتو زیر مفروض است.

$$dX = AX + BU(t) + b(t) dt + \sum_{i=1}^r D_i X dw_i(t), \quad (۷)$$

در دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق $X(t) \in \mathbb{R}^n$ حالت‌های سیستم هستند، $U(t) \in \mathbb{R}^m$ ورودی کنترلی، $b(t)$ ورودی اغتشاشی و یا ورودی مرجع در مدل و $w_i(t)$ ها فرآیندهای وینر مستقل دارای توزیع یکسان هستند. فرآیند وینر در $\mathbb{R}^r$ تعداد کانال پارامترهای سیستم را دچار اغتشاش کرده است. بنابراین مشخص است که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ که همگی ماتریس‌های حقیقی ثابت هستند.

تابع هزینه درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم

$$J_s = E \left[\left(\frac{1}{2} X^T(T) \Gamma X(T) + \Upsilon^T X(T) \right) + \frac{1}{2} \int_0^T X^T(t) Q X(t) + u^T R u dt \right] \quad (۸)$$

که در آن $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس‌های مثبت معین یا نیمه معین و $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ مثبت معین است و همچنین $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. اکنون مساله کنترل بهینه تصادفی عبارت است از یافتن $u^*(t): 0, T \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ چنان که تابع هزینه (۸) کمینه گردد یا به عبارتی:

$$J(u^*(t)) = \min_{u: 0, T \rightarrow U} J(u(t)) \quad (۹)$$

لم ۱: تابع هزینه زیر را در نظر بگیرید.

$$J_s = E \left(K(X(T)) + \int_0^T L(X(t), u(t), t) dt \right) \quad (۱۰)$$

و همچنین مدل تصادفی ایتو زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} dX = f(X(t), u(t), t) dt + g(X(t), u(t), t) dw \\ X(0) = X_0 \end{cases}, \quad (۱۱)$$

درجه دو، برای همه شرایط اولیه داشته باشیم $\lim_{t \rightarrow \infty} E|x(t)|^2 = 0$ آنگاه گوییم سیستم دارای پایداری مجانبی متوسط درجه دو است.

لم ۲: اگر تابع مثبت معین $V \in C^{2,1}(S_h \times [t_0, \infty); R_+)$ و ثابت‌های $C_1 > 0$ و $C_2 > 0$ چنان یافت شود که برای هر $t \geq t_0$ و $X \neq 0$ شرایط زیر برقرار شود:

$$(i) \quad c_1 |x| \leq V(x, t) \leq c_2 |x| \quad (20)$$

$$(ii) \quad L(V(x, t)) \leq 0$$

برای تمامی $(x, t) \in S_h \times [t_0, \infty)$ ، آنگاه سیستم (۷) پایدار متوسط درجه دو است. همچنین اگر مولد خرد فوق منفی معین شود آنگاه سیستم به صورت مجانبی پایدار متوسط درجه دو خواهد بود.

قضیه ۱: معادله تصادفی (۷) را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد در صورت وجود جواب برای معادله ریکاتی جبری تعمیم یافته^۶ (۱۸)، کنترل‌کننده درجه دو خطی تصادفی با قانون کنترلی (۱۹) و پارامتر K به دست آمده از معادله ریکاتی مذکور سیستم حلقه بسته را پایدار متوسط درجه دو می‌کند.

اثبات: تابع کاندید لیاپانوف را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$V = \frac{1}{2} X^T \Sigma X, \quad (21)$$

که در آن Σ ماتریس مثبت معین است. به کمک لم ایتو، دیفرانسیل تصادفی زیر به دست می‌آید.

$$dV(x(t)) = L V(x(t)) dt + \sum_{i=1}^r X^T \Sigma D_i X dw_i,$$

که

$$L V(x(t)) = X^T \Sigma A X + B u^* + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ D_1 X \quad \dots \quad D_r X \begin{bmatrix} X^T D_1^T \\ \vdots \\ X^T D_r^T \end{bmatrix} \Sigma \right\}$$

با جاگذاری $u^*(t)$ از (۱۹) خواهیم داشت:

$$L V(x(t)) = X^T \Sigma A - B R^{-1} B^T K X + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r X^T D_i^T \Sigma D_i X \quad (22)$$

$$= X^T \left\{ \Sigma A - B R^{-1} B^T K + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r D_i^T \Sigma D_i \right\} X$$

عبارت، قانون کنترلی در افق نامحدود به صورت زیر در خواهد آمد که از آن در تحلیل‌های مربوط به پایداری استفاده می‌کنیم.

$$u^*(x, t) = -R^{-1} B^T K \hat{X}(t), \quad (19)$$

در معادله فوق ماتریس ثابت K از حل معادله جبری ریکاتی (۱۸) تعیین می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود در این حالت ترم‌های $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ در معادله ورودی بهینه و تابع هزینه بهینه ظاهر نمی‌شود. وجود این ترم‌ها به این دلیل است که ورودی کنترلی بتواند نیاز ما را در ردیابی ورودی مرجع و یا حذف اغتشاشات ورودی برطرف سازد. در حالت‌هایی که مساله کنترلی ما صرفاً تنظیم و حفظ پایداری سیستم است دیگر نیازی به این ترم‌ها نیست.

۴) پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته

با توجه به تعیین قانون کنترل بهینه برای سیستم‌های تصادفی دارای عدم قطعیت پارامتریک اکنون قصد داریم پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته را تحقیق نماییم. به این منظور از روابط به دست آمده فوق در افق نامحدود استفاده می‌کنیم. در استفاده از کنترل درجه دو خطی برای سیستم‌های معین و یا حتی سیستم‌های دارای نویز جمع شونده برقراری شروط کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری کافی بود تا ادعا کنیم سیستم حلقه بسته پایدار خواهد شد. اما وجود نویز ضرب شونده در معادلات دینامیک، ذات سیستم را دستخوش تغییر می‌کند و دیگر تنها با اتکا به شرط کنترل‌پذیری نمی‌توان پایداری سیستم را نتیجه گرفت. در این بخش بدون استفاده از مفاهیم کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری حالت و با تکیه بر وجود جواب معادله ریکاتی جبری تعمیم یافته به تحلیل پایداری سیستم تصادفی خواهیم پرداخت. نشان خواهیم داد که در صورت وجود جواب این معادله، سیستم حلقه بسته مستقل از شدت نویز سفید پایدار در مفهوم متوسط درجه دو خواهد بود. همچنان نشان می‌دهیم در صورت استفاده از کنترل‌کننده درجه دو خطی قطعی برای سیستم تصادفی (۷) سیستم تحت شرایطی که وابسته به شدت نویز است ناپایدار تصادفی می‌شود. ابتدا مفهوم پایداری تصادفی که در [۲۸] به صورت کامل بررسی شده است را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲: سیستم تصادفی نامی به فرم (۷) با ورودی صفر را دارای پایداری متوسط درجه دو گویند اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که $E|x(t)|^2 < \varepsilon$ ، $\forall t$ هرگاه $\sup_{-t \leq s \leq 0} E|\varphi(s)| < \delta(\varepsilon)$. همچنین اگر علاوه بر پایداری متوسط

$$L(V(x(t))) = X^T \left\{ P A - B R^{-1} B^T P + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r D_i^T P D_i \right\} X$$

برای اثبات ناپایداری تصادفی کافی است نشان دهیم:

$$P A - B R^{-1} B^T P + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r D_i^T P D_i \geq 0 \quad (26)$$

با استفاده از روابط (24) و (26) شرط ناپایداری سیستم به قرار زیر است:

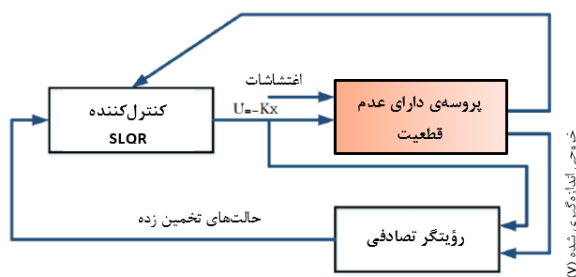
$$Q + P B R^{-1} B^T P - \sum_{i=1}^r D_i^T P D_i \leq 0; \quad P > 0$$

مهمترین نتیجه قضیه ۲ این است که نشان می‌دهد کنترل کننده درجه دو خطی که برای سیستم‌های معین کاربرد دارد در برخورد با سیستم‌های تصادفی، وابسته به واریانس نویز پارامتری است و در نتیجه در شرایطی حتی نمی‌تواند سیستم را پایدار کند. توجه داریم که حتی در صورت برقراری شرایط کنترل پذیری و رؤیت پذیری همچنان این کنترل کننده سنتی ممکن است در پایداری سازی سیستم ناکارآمد باشد و در نتیجه باید از نسخه تصادفی آن که پیش‌تر معرفی شد استفاده کرد. همچنین در شرایطی که هر دو کنترل کننده بهینه تصادفی و غیر تصادفی قادر به پایداری سازی سیستم حلقه بسته هستند نتایج شبیه سازی حاکی از عملکرد بهتر استراتژی تصادفی است.

۵) کنترل کننده تصادفی ایتو مبتنی بر رؤیت

حالت

هدف از این بخش، طراحی یک رؤیتگر تصادفی برای مدل نامعین ایتو است. ساختار رؤیتگر تصادفی به همراه کنترل کننده فیدبک بهینه تصادفی در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل (۲) شماتیک کنترل کننده بهینه مبتنی بر رؤیت حالت

به منظور طراحی رؤیتگر تصادفی برای سیستم (۷)، فرض می‌کنیم خروجی سیستم به صورت (۲۷) تعریف شود.

$$y = F X + \gamma U + \sum_{i=1}^r G_i X v_i \quad (27)$$

جهت اثبات پایداری سیستم حلقه بسته، کافی است نشان دهیم (۲۲) منفی است. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\Sigma = K > 0$ ، در نتیجه:

$$X^T \left\{ K A - B R^{-1} B^T K + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r D_i^T \Sigma D_i \right\} X \leq 0$$

$$\Rightarrow K A - K B R^{-1} B^T K + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r D_i^T \Sigma D_i \leq 0$$

با استفاده از رابطه (۱۸) و رابطه فوق شرط پایداری تصادفی سیستم به قرار زیر در خواهد آمد.

$$Q + K B R^{-1} B^T K \geq 0$$

باتوجه به فرض‌های $R > 0$ و $Q \geq 0$ شرط بالا ارضا شده است و سیستم حلقه بسته پایدار تصادفی است.

همانطور که ملاحظه شد شرط پایداری در اینجا مستقل از واریانس نویز که در ماتریس D ظاهر می‌شود به دست آمد. جهت تعیین کنترل کننده بهینه تصادفی پایداری ساز کافی است معادله جبری ریکاتی تعمیم یافته جواب داشته باشد.

قضیه ۲: سیستم تصادفی با دینامیک ایتو (۷) را در نظر بگیرید. فرض کنید قانون کنترل بهینه قطعی به شکل زیر را به سیستم تصادفی اعمال کنیم [۲۹]:

$$u_D^*(t) = -R^{-1} B^T P X, \quad (23)$$

که ماتریس مثبت P از حل معادله جبری ریکاتی^۷ زیر به دست می‌آید.

$$-Q + P B R^{-1} B^T P - A^T P - P A = 0 \quad (24)$$

می‌توان نشان داد در شرایطی که D_i ها در ناتساوی ماتریسی زیر صدق کند سیستم ناپایدار تصادفی است.

$$Q + P B R^{-1} B^T P - \sum_{i=1}^r D_i^T P D_i \leq 0; \quad P > 0 \quad (25)$$

اثبات: تابع لیاپانوف (۲۱) را در نظر بگیرید. با استفاده از مولد خرد داریم:

$$L V(x(t)) = X^T \Sigma A X - B u_D^* + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^r D_i X X^T D_i^T \right\}$$

$$= X^T \left\{ \Sigma A - \Sigma B R^{-1} B^T P + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r D_i^T \Sigma D_i \right\} X$$

با جاگذاری $\Sigma = P > 0$ خواهیم داشت:

⁷ Algebraic Riccati equation

$$d\tilde{X} = dX - d\hat{X} = \left\{ (A-LF)\tilde{X} \right\} dt + \sum_{i=1}^r \left\{ D_i X - LG_i X \right\} dw_i \quad (32)$$

با در نظر گرفتن $\tilde{X} = [X \quad \hat{X}]^T$ دینامیک سیستم افزوده به شکل (۲۹) در می آید. تابع لیپانف زیر را در نظر می گیریم:

$$V = \frac{1}{2} \tilde{X}^T \Sigma \tilde{X} \quad (33)$$

معادله دینامیک افزوده را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$d\tilde{X} = \begin{bmatrix} A-B\Psi & B\Psi \\ 0 & A-LF \end{bmatrix} \tilde{X} dt + \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_1 \tilde{X} & \dots & \Delta_r \tilde{X} \end{bmatrix}}_g \begin{bmatrix} dw_1 \\ \vdots \\ dw_r \end{bmatrix} \quad (34)$$

با توجه به رابطه (۳۴) و (۱) مولد خرد برای تابع لیپانوف (۳۳) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} L(V(x(t))) &= \tilde{X}^T \Sigma \begin{bmatrix} A-B\Psi & B\Psi \\ 0 & A-LF \end{bmatrix} \tilde{X} + \\ &\frac{1}{2} tr \left\{ \tilde{X}^T \begin{bmatrix} D_1 & \bar{O} & \dots & D_r & \bar{O} \\ D_1-LG_1 & \bar{O} & \dots & D_r-LG_r & \bar{O} \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} D_1 & \bar{O} & \dots & D_r & \bar{O} \\ D_1-LG_1 & \bar{O} & \dots & D_r-LG_r & \bar{O} \end{bmatrix} \tilde{X} \right\} \\ &= \tilde{X}^T \left\{ \Sigma \begin{bmatrix} A-B\Psi & B\Psi \\ 0 & A-LF \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\Delta_1 \tilde{X} \quad \dots \quad \Delta_r \tilde{X}]^T \Sigma [\Delta_1 \tilde{X} \quad \dots \quad \Delta_r \tilde{X}] \right\} \tilde{X} \quad (35) \end{aligned}$$

برای اثبات پایداری سیستم افزوده، کافی است نشان دهیم (۳۵) منفی است یا

$$\Sigma \begin{bmatrix} A-B\Psi & B\Psi \\ 0 & A-LF \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \Delta^T \Sigma \Delta < 0$$

بنابراین تخمین دینامیک خطا پایدار نمایی با قطعیت بالا است و خطا به سمت صفر همگرا می شود.

براساس قضیه ۳، شرط پایداری دینامیک سیستم افزوده شده را می توان به عنوان مسئله امکان پذیری LMI ها مطرح کرد و تابع هزینه مربوطه را به شکل زیر تعریف نمود:

$$\min J(\tilde{X}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{X}^T S \tilde{X} dt \quad (36)$$

که در آن V_i ها نویزهای سفید ضرب شونده مستقل و دارای توزیع یکسان هستند. یک روتینگر حالت خطی به شکل زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} d\hat{X} = \{A\hat{X} + BU\} dt + L\{y - \hat{y}\} dt \\ \hat{y} = F\hat{X} + \gamma U \end{cases} \quad (28)$$

که در آن $\hat{X}$ ، y و L به ترتیب بردار حالت تخمین زده شده، خروجی تخمین زده شده و بهره روتینگر می باشند. حال با در نظر گرفتن خطای تخمین به شکل $\tilde{X} = X - \hat{X}$ و تعریف سیستم افزوده و خطای تخمین به وسیله $\tilde{X} = [X \quad \hat{X}]^T$ و همچنین با در نظر گرفتن $U = -\Psi X$ به صورت قاعده کنترلی فیدبک خواهیم داشت:

$$d\tilde{X} = \begin{bmatrix} A-B\Psi & B\Psi \\ 0 & A-LF \end{bmatrix} \tilde{X} dt + \sum_{i=1}^r \Delta_i \tilde{X} dw_i \quad (29)$$

که در آن:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} D_i & 0 \\ D_i-LG_i & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به دینامیک افزوده فوق و حضور عامل Δ_i می توان مشاهده کرد که در حضور نویز ضرب شونده، خطای تخمین وارد کانال حالت های سیستم شده است. به همین دلیل نمی توان کنترل کننده فیدبک حالت و روتینگر را به صورت جدا و مستقل از هم طراحی کرد. به عبارت دیگر، برای مدل سیستم ایتو با نویز حالت ضرب شونده، قاعده تفکیک پذیری قابل پیاده سازی نیست. در قضیه ی بعدی، یک شرط کافی برای بهره روتینگر و قانون کنترلی به دست آورده می شود که به طور هم زمان پایداری نمایی خطای تخمین و سیستم حلقه بسته را با قطعیت بالا اثبات می کند.

قضیه ۳: مدل تصادفی ایتو (۷) و دینامیک روتینگر در (۲۸) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس های $\Sigma > 0$ ، L و Ψ به گونه ای وجود داشته باشند که در رابطه زیر صدق کنند:

$$\Sigma \begin{bmatrix} A-B\Psi & B\Psi \\ 0 & A-LF \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \Delta^T \Sigma \Delta < 0 \quad (30)$$

که در آن

$$\Delta = [\Delta_1 \quad \dots \quad \Delta_r] = \begin{bmatrix} D_1 & \bar{O} & \dots & D_r & \bar{O} \\ D_1-LG_1 & \bar{O} & \dots & D_r-LG_r & \bar{O} \end{bmatrix} \quad (31)$$

در این صورت دینامیک روتینگر تصادفی با قطعیت بسیار بالا به صورت نمایی پایدار است.

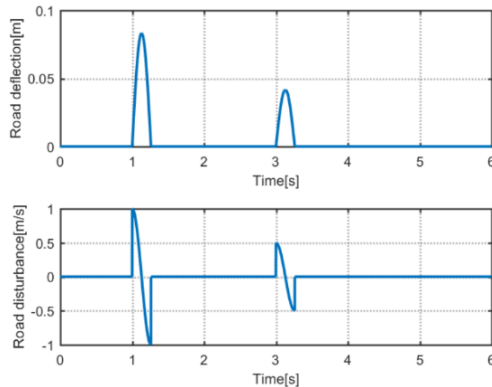
اثبات: با در نظر گرفتن خطای تخمین به صورت $X = X - \hat{X}$ و محاسبه مشتق هایش، دینامیک خطا به صورت زیر به دست می آید:

شکل (۳) اغتشاشات تصادفی در مشخصه‌های سختی و میرایی

جاده نمونه اول:

در این قسمت یک پروفیل که دارای دو سرعت گیر سینوسی در طول خود است به عنوان جاده انتخاب شده است. وجود این گونه ناهمواری‌ها در جاده‌ها بسیار متداول است و خودرو باید بتواند در مواجهه با آن‌ها، نامعینی‌ها را هضم کرده و سواری مطلوبی نشان دهد. تغییرات عمودی شکل پروفیل جاده و نیز تغییرات سرعت عمودی جاده در شکل (۴) آورده شده است.

$$x_r = \begin{cases} \frac{1}{12} \sin(12t) & 1 \leq t \leq \frac{\pi}{12} \\ \frac{1}{24} \sin(12t) & 3 \leq t \leq 3 + \frac{\pi}{12} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



شکل (۴) تغییرات عمودی مکان و سرعت جاده (نمونه ۱)

شکل (۵) عملکرد سیستم تعلیق فعال شده با کنترل درجه دو خطی تصادفی را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم حلقه بسته با وجود عدم قطعیت‌های جاده و اغتشاشات تصادفی در پارامترها، مقاوم است. حالت‌های سیستم نشان می‌دهند خودرو از جانمایی تعلیق و فرمان-پذیری مناسبی برخوردار است. طبق این شکل تغییرات نسبی جابه‌جایی تعلیق در بازه $\pm 5\text{cm}$ محدود شده است و فاصله میان چرخ و جاده نیز در بازه $\pm 1\text{cm}$ حفظ می‌شوند.

در این صورت مسئله، به یک مسئله کمیته‌سازی با تابع هدف درجه دو (۳۶) و قید LMI (۳۰) تبدیل می‌شود. بهره فیدبک Ψ و بهره روتینگر L به گونه‌ای محاسبه می‌شوند که خطای تخمین حداقل شود. یک راه دیگر این است که بهره Ψ با استفاده از روش کنترل بهینه تصادفی محاسبه و سپس مقدار L با کمیته کردن تابع هزینه (۳۶) به دست آورده شود.

۶ نتایج شبیه‌سازی

در این بخش جهت شبیه‌سازی عددی و مقایسه نتایج کار، از گسسته-سازی معادلات تصادفی به روش مایل اشتین^۸ که یک تخمین مرتبه دو است به صورت زیر استفاده می‌کنیم [۳۰].

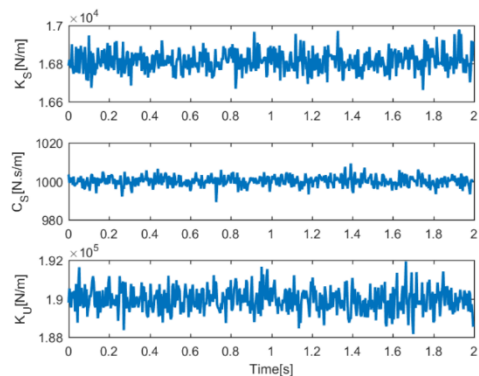
$$\begin{aligned} X(t_k) = & X(t_{k-1}) + \\ & (AX(t_{k-1}) + BU(t_{k-1}) + f(t_{k-1}))\Delta t + \\ & (DX(t_{k-1}))\Delta w_1(t_k) + \\ & \frac{1}{2}D(DX(t_{k-1}))(\Delta w_1(t_k) - \Delta t) + \dots \end{aligned}$$

که در آن نمو فرآیند وینر به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\Delta w_i(t_k) = wgn * \sqrt{\Delta t}$$

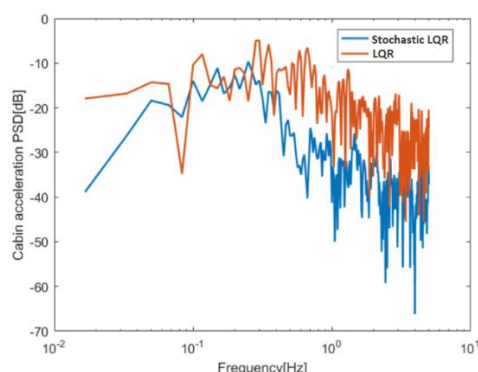
در معادله فوق wgn یک پروسه نویز سفید گسسته با میانگین صفر است. این تخمین مرتبه دو سرعت همگرایی بالاتری نسبت به تخمین مرتبه اول دارد. همچنین باید توجه داشت که در شبیه‌سازی‌های مربوط به پاسخ‌ها با توجه به ذات تصادفی سیستم هر بار اجرای کدها تنها یک تحقق و یا مسیر نمونه از منحنی پاسخ را ارائه می‌دهد. در نتیجه همه پاسخ‌ها به صورت میانگین صد بار اجرای کد به تصویر کشیده شده است.

جهت ارزیابی روش پیشنهادی شبیه‌سازی‌ها برای دو نمونه جاده مختلف انجام می‌شود. در هر دو نمونه پارامترها به یک شکل دچار عدم قطعیت می‌شوند. شکل (۳) یک تحقق از پارامترها در حالت آشسته را نشان می‌دهد.

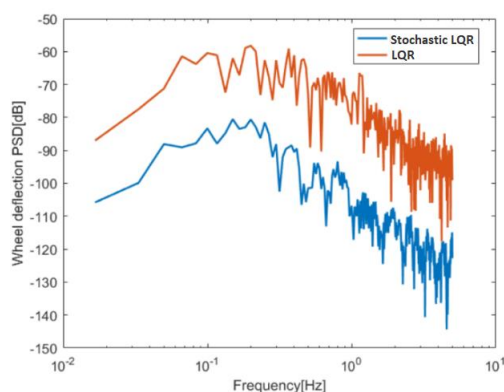


⁸ Milstein approximation

نماینده راحتی سفر است) کنترل کننده تصادفی پایین کنترل کننده غیر- تصادفی است.



شکل (۷) چگالی طیفی توان شتاب کابین برای فعال سازی تصادفی و غیر تصادفی (جاده نمونه ۱)



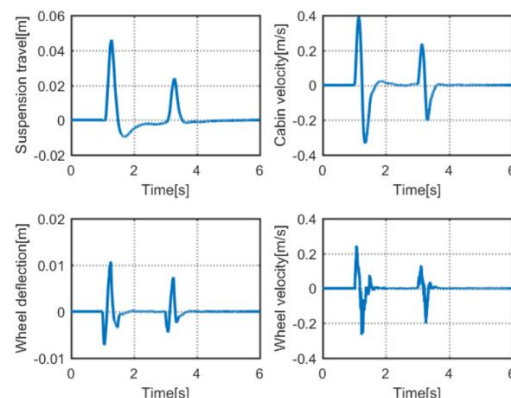
شکل (۸) چگالی طیفی توان فاصله نسبی چرخ تا جاده برای فعال سازی تصادفی و غیر تصادفی (جاده نمونه ۱)

جاده نمونه دوم:

در این قسمت یک جاده واقعی براساس استاندارد ایزو انتخاب شده است. اطلاعات جمع آوری شده توسط موسسه استاندارد ایزو از جاده‌های مختلف به شکل جاده‌هایی در کلاس‌های مختلف شکل گرفته است که هر کدام دارای چگالی طیف توان^۹ مشخصی هستند [۳۱]. جاده استاندارد در نظر گرفته شده برای شبیه سازی در این بخش دارای چگالی طیفی توان زیر است.

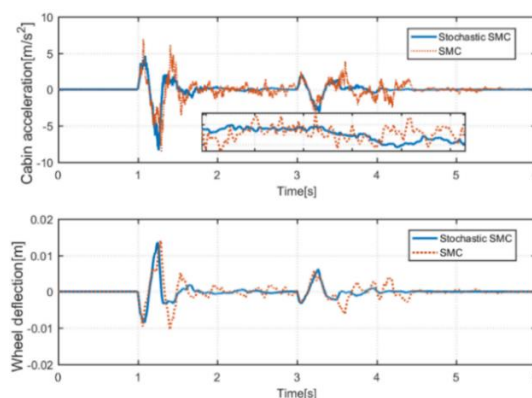
$$G_q(f) = 4\pi^2 G_q(n_0) n_0^2 v,$$

که در آن، $G_q(n_0)$ ضریب ناهمواری جاده، n_0 فرکانس فضایی مرجع و v سرعت پیشروانه خودرو است. شکل جاده تصادفی ایزو با انتخاب



شکل (۵) پاسخ حالت‌های سیستم نامعین (جاده نمونه ۱)

شکل (۶) نشان‌دهنده عملکرد سیستم نامعین است که توسط کنترل کننده تصادفی و غیر تصادفی فعال شده است. در این شکل دو شاخصه مهم سواری یعنی خوش سواری که با شتاب وارد بر بدنه سنجیده می‌شود و فرمان‌پذیری خودرو که با فاصله میان چرخ و جاده مورد سنجش قرار می‌گیرد به تصویر کشیده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم کنترل کننده درجه دو خطی تصادفی توانسته سواری مطلوبی را نسبت به کنترل کننده درجه دو خطی غیر تصادفی فراهم کند و نسبت به نوسانات پارامترها مقاومت بیشتری نشان دهد.

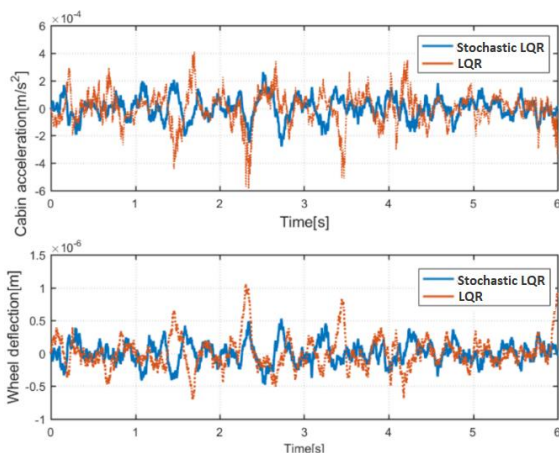


شکل (۶) عملکرد تعلیق نامعین در حالت استفاده از کنترل درجه دو خطی تصادفی و غیر تصادفی (جاده نمونه ۱)

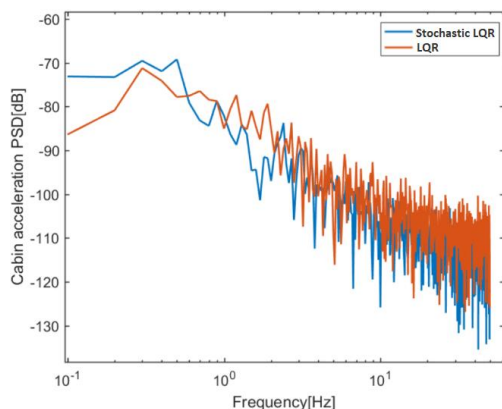
اما یکی از مهم‌ترین معیارها در تعیین عملکرد سواری خودرو، چگالی طیفی توان پاسخ است که در فرکانس‌های مختلف رسم می‌شود. این معیار در شکل (۷) و شکل (۸) به ترتیب برای شتاب وارد به کابین و فاصله چرخ و جاده به تصویر کشیده شده است. مشخص است چه در فرکانس‌های نزدیک ۱ (که براساس مطالعات فرکانس نماینده کنترل-پذیری خودرو است) و چه در فرکانس‌های نزدیک ۱۰ (که فرکانس

⁹ Power spectral density(PSD)

همچنین چگالی طیفی توان در فرکانس‌های مختلف در شکل (۱۲) برای شتاب وارد به کابین به تصویر کشیده شده است. مشخص است چه در فرکانس‌های نزدیک ۱ و چه در فرکانس‌های نزدیک ۱۰ کنترل کننده تصادفی پایین کنترل کننده غیر تصادفی است.



شکل (۱۱) عملکرد تعلیق نامعین در حالت استفاده از کنترل درجه دو خطی تصادفی و غیر تصادفی (جاده نمونه ۲)

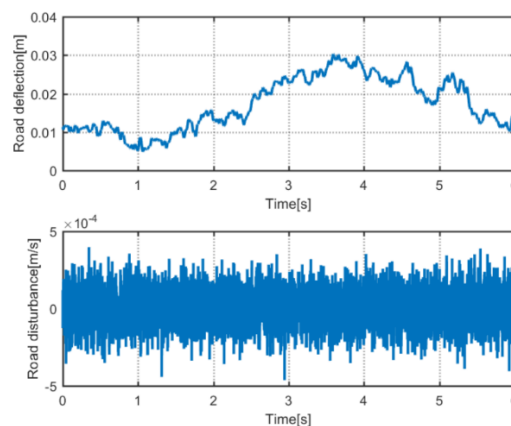


شکل (۱۲) چگالی طیفی توان شتاب کابین برای فعال سازی تصادفی و غیر تصادفی (جاده نمونه ۲)

۷ جمع بندی

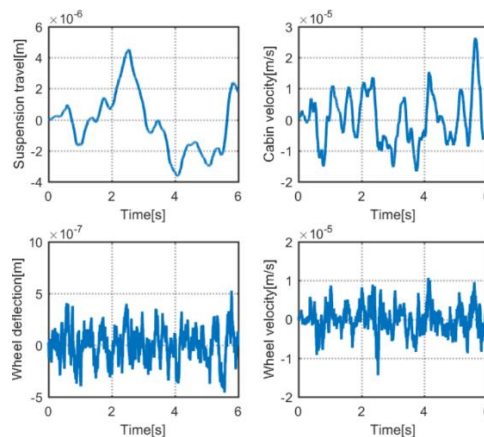
در این مقاله، مساله کنترل بهینه سیستم تعلیق با معادلات تصادفی ایتو که در معرض عدم قطعیت‌های پارامتری قرار دارد بررسی شد. در مدل ریاضی سیستم، نامعینی‌های پارامتری به صورت سه فرآیند تصادفی مستقل وینر در نظر گرفته شد. براساس مدل نامعین لحاظ شده از تعلیق و با استفاده از معادلات تصادفی همیلتون-جاکوبی-بلمن، کنترل کننده تصادفی درجه دو خطی به منظور مقابله با عدم قطعیت‌های ضرب شونده طراحی شد. جهت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته، تحلیل‌های لازم جهت اثبات پایداری تصادفی ارائه گردید. همچنین یک ساختار حلقه بسته شامل کنترل کننده و روتینگر چنان طراحی شد که سیستم حلقه بسته

در شکل (۹) آورده شده است. $n_0 = 0.1$ و $G_q(n_0) = 32 \times 10^{-6} m^3$



شکل (۹) تغییرات عمودی مکان و سرعت جاده (جاده نمونه ۲)

شکل (۱۰) عملکرد سیستم تعلیق فعال شده با کنترل درجه دو خطی تصادفی را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم حلقه بسته با وجود عدم قطعیت‌های نامتناسب جاده و اغتشاشات تصادفی در پارامترها، مقاوم است. حالت‌های سیستم نشان می‌دهند خودرو از جانمایی تعلیق و کنترل پذیری مناسبی برخوردار است. طبق این شکل تغییرات نسبی جابه جایی تعلیق و فاصله میان چرخ و جاده در بازه مشخصی حفظ می‌شوند.



شکل (۱۰) پاسخ حالت‌های سیستم نامعین (جاده نمونه ۲)

شکل (۱۱) نشان دهنده عملکرد سیستم نامعین است که توسط کنترل کننده تصادفی و غیر تصادفی فعال شده است. همان طور که ملاحظه می‌کنیم کنترل کننده درجه دو خطی تصادفی توانسته سواری مطلوبی را نسبت به مدل‌گزینی غیر تصادفی فراهم کند و نسبت به نوسانات پارامترها مقاومت بیشتری نشان دهد.

- suspension systems," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 44, pp. 1111-1126, 2014.
- [7] M. S. Fallah, R. B. Bhat, and W. F. Xie, "Optimized Control of Semiactive Suspension Systems Using H_∞ Robust Control Theory and Current Signal Estimation," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 17, pp. 767-778, 2012.
- [8] Y. Huang, J. Na, X. Wu, X. Liu, and Y. Guo, "Adaptive control of nonlinear uncertain active suspension systems with prescribed performance," *ISA transactions*, vol. 54, pp. 145-155, 2015.
- [9] R. A. Ibrahim, *Parametric random vibration*: Courier Dover Publications, 2008.
- [10] C. W. To, *Nonlinear random vibration*: Swets & Zeitlinger, 2000.
- [11] V. Capasso and D. Bakstein, "An introduction to continuous-time stochastic processes," *Birkhax user Boston*, p. 1, 2005.
- [12] J. L. Speyer and W. H. Chung, *Stochastic processes, estimation, and control*: SIAM, 2008.
- [13] H. Schioler, M. Simonsen, and J. Leth, "Stochastic stability of systems with semi-Markovian switching," *Automatica*, vol. 50, pp. 2961-2964, 2014.
- [14] F. Li and Y. Liu, "Global stability and stabilization of more general stochastic nonlinear systems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 413, pp. 841-855, 2014.
- [15] Q. Wang and C. Wei, "Decentralized robust adaptive output feedback control of stochastic nonlinear interconnected systems with dynamic interactions," *Automatica*, vol. 54, pp. 124-134, 2015.
- [16] A. Mesbah, S. Streif, R. Findeisen, and R. D. Braatz, "Stochastic nonlinear model predictive control with probabilistic constraints," in *American Control Conference (ACC), 2014*, 2014, pp. 2413-2419.
- [17] J. Hu, Z. Wang, H. Gao, and L. K. Stergioulas, "Robust sliding mode control for discrete stochastic systems with mixed time delays, randomly occurring uncertainties, and randomly occurring nonlinearities," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, pp. 3008-3015, 2012.
- [18] K. D. Rao and S. Kumar, "Modeling and simulation of quarter car semi active suspension system using LQR controller", in *Proceedings of the 3rd International Conference on Frontiers of Intelligent Computing: Theory and Applications (FICTA) 2014*, 2015, pp. 441-448.
- [19] J.-l. Yao, W.-k. Shi, J.-q. Zheng, and H.-p. Zhou, "Development of a sliding mode controller for semi-active vehicle suspensions," *Journal of Vibration and Control*, vol. 19, pp. 1152-1160, 2013.
- [20] A. Ulsoy, D. Hrovat, and T. Tseng, "Stability robustness of LQ and LQG active suspensions,"

حاصل پایدار تصادفی گردد. نتایج شبیه‌سازی‌ها حاکی از این است که سیستم حلقه بسته شامل کنترل‌کننده تصادفی بهینه توانسته عملکرد بهتری از کنترل‌کننده غیرتصادفی بهینه در زمینه کمینه کردن شاخصه‌های خوش سواری نشان دهد.

۸ ضمیمه

جدول ۱. پارامترهای سیستم تعلیق

Parameter	Value
m_s	280[kg]
m_u	55[kg]
c_s	1000[N / (m/s)]
k_s	18800[N / m]
k_u	190000[N / m]

جدول ۲. پارامترهای کنترل‌کننده

Parameter	Value
Q	$diag[1 \ 10^{-2} \ 1 \ 10^{-2}]$
R	10^{-6}
Γ	$diag[1 \ 0 \ 1 \ 0]$
Υ	$10^{-18}[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

۹ مراجع

- [1] W. Sun, H. Gao, and O. Kaynak, "Finite Frequency H_∞ Control for Vehicle Active Suspension Systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, pp. 416-422, 2011.
- [2] H. Du, K. Y. Sze, and J. Lam, "Semi-active H_∞ control of vehicle suspension with magneto-rheological dampers," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, pp. 981-996, 2005.
- [3] S. Chantranuwathana and H. Peng, "Force tracking control for active suspensions-theory and experiments," in *Control Applications, 1999. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on*, 1999, pp. 442-447.
- [4] Y. M. Sam, J. H. Osman, and M. R. A. Ghani, "A class of proportional-integral sliding mode control with application to active suspension system," *Systems & control letters*, vol. 51, pp. 223-17, 2004.
- [5] W. Sun, H. Pan, Y. Zhang, and H. Gao, "Multi-objective control for uncertain nonlinear active suspension systems," *Mechatronics*, vol. 24, pp. 318-327, 2014.
- [6] H. Li, X. Jing, H.-K. Lam, and P. Shi, "Fuzzy sampled-data control for uncertain vehicle

- Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 116, pp. 123-131, 1994.
- [21] H.-C. Sohn, K.-T. Hong, K.-S. Hong, and W.-S. Yoo, "An adaptive LQG control for semi-active suspension systems," *International Journal of Vehicle Design*, vol. 34, pp. 309-326, 2004.
- [22] B. Assadsangabi, M. Eghtesad, F. Daneshmand , and N. Vahdati, "Hybrid sliding mode control of semi-active suspension systems," *Smart Materials and Structures*, vol. 18, p. 125027, 2009.
- [23] M. A. R. Ramezaney, E. Fathi, and M. M. Ansarey, "Optimum synthesis of sensory layout in active suspension based on linear observer," in *Electrical Engineering (ICEE), 2013 21st Iranian Conference on*, 2013, pp. 1-6.
- [24] L. Xiao and Y. Zhu, "Sliding-mode output feedback control for active suspension with nonlinear actuator dynamics," *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, pp. 2721-2738, 2015.
- [25] J.-Q. Sun, *Stochastic dynamics and control* vol. 4: Elsevier, 2006.
- [26] J. Yong and X. Y. Zhou, *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations* vol. 43: Springer Science & Business Media, 1999.
- [27] M. A .Rami and X. Y. Zhou, "Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 1131-1143, 2000.
- [28] X. Mao, *Stochastic differential equations and applications*: Elsevier, 2007.
- [29] F. Lin, *Robust control design: an optimal control approach* vol. 18: John Wiley & Sons, 2007.
- [30] E. Platen, "An introduction to numerical methods for stochastic differential equations," *Acta numerica*, vol. 8, pp. 197-246, 1999.
- [31] J. C. Dixon, *Suspension geometry and computation*: Wiley Online Library, 2009.

پایدارسازی کلاسی از سیستم‌های پارامتر متغیر با استفاده از کنترل کننده مبتنی بر رؤیتگر بازه‌ای

مصطفی فرامین^۱، بهروز رضایی^۲، زهرا رحمانی^۳

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، mostafa.faramin@gmail.com

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، brezaie@nit.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، zrahmani@nit.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۲۱

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۱/۳۰

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۲۴

چکیده: هدف از این مقاله ارائه یک روش جدید برای کنترل کلاسی از سیستم‌های پارامتر متغیر از طریق کنترل رؤیتگر بازه‌ای می‌باشد. رؤیتگرهای بازه‌ای برای سیستم‌های دارای نامعینی کاربرد دارند و به جای تخمین حالت‌ها، کران‌هایی را برای آنها تعیین می‌کنند. نشان داده شده است که اگر بتوان با طراحی ورودی‌های کنترلی مناسب کران‌های رؤیتگر بازه‌ای را کنترل نمود، با همان ورودی‌های کنترلی حالت‌های سیستم نیز کنترل می‌شوند. در این راستا ابتدا یک رؤیتگر بازه‌ای مناسب برای سیستم پارامتر متغیر طراحی می‌شود و شرایط لازم برای یکنواخت بودن معادله دینامیکی شامل کران‌های پایین و بالای خطا ارائه می‌گردد. سپس برای پایدارسازی سیستم، کنترل کننده جدیدی برای رؤیتگر بازه‌ای طراحی می‌گردد تا کران‌های روی حالت‌ها را پایدار سازد و در نتیجه حالت‌های سیستم نیز پایدار شوند. کنترل کننده پیشنهادی مبتنی بر روش کنترل مد لغزشی تطبیقی می‌باشد که برای مقابله با تغییرات بعضی از پارامترهای رؤیتگر بازه‌ای و کاهش اثرات اغتشاشات موجود در سیستم استفاده می‌شود. با انتخاب یک تابع لیاپانوف مناسب شرایط پایداری و محدوده پایداری رؤیتگر تعیین می‌شود. نتایج شبیه‌سازی این روش برای یک سیستم نمونه نشان‌دهنده کارایی روش پیشنهادی است.

کلمات کلیدی: رؤیتگر بازه‌ای، سیستم پارامتر متغیر، کنترل مبتنی بر رؤیتگر، کنترل مد لغزشی تطبیقی.

Stabilizing a class of parameter-varying systems using interval observer-based controller

Mostafa Faramin, Behrooz Rezaie, Zahra Rahmani

Abstract: The aim of this paper is to propose a novel method for controlling a class of parameter-varying systems by controlling interval observer. The interval observers, that are applicable for the systems with uncertainty, estimate bounds on the states instead of estimating the states. It has been shown that by designing appropriate control inputs for controlling the bounds of the interval observer, the states of the system can be also controlled using the same control inputs. For this purpose, a suitable interval observer is firstly designed for the parameter-varying system and the required conditions, for which the dynamical system consisting of lower and upper bounds on error is monotone, are presented. Then, a novel controller is designed for stabilizing the interval observer such that the bounds on the states are stabilized and thereby the states are also stabilized. The proposed controller is based on adaptive sliding mode control method that is utilized to tackle the effects of variations in some parameters of the interval observers as well as the existing disturbances in the system. By choosing an appropriate Lyapunov function, the conditions and areas for the stability of

the observer are determined. Simulation results, obtained by applying the method to a sample system, show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Interval observer, parameter-varying systems, observer-based control, adaptive sliding mode control.

۱- مقدمه

طراحی رویتگر یکی از مسائل پرکاربرد و چالش برانگیز در علم مهندسی کنترل می باشد که تاثیر زیادی در بهبود عملکرد سیستم و کاهش هزینه های طراحی دارد. رویتگرها ابزارهایی هستند که برای تخمین متغیرهای حالت سیستم، زمانی که به دلایلی از جمله هزینه ی زیاد، محدودیت های فناوری و معایب حسگرها امکان اندازه گیری آنها وجود نداشته باشد، استفاده می شوند. مطابق با مرجع [۱] رویتگرها را می توان به کلاس های مختلفی شامل رویتگرهای لیونبرگر [۲]، رویتگرهای سیستم های ابعاد مشخص [۳]، تخمینگرهای بیزین [۴]، رویتگرهای اغتشاش و تشخیص خطا [۵]، رویتگرهای هوش مصنوعی [۶] دسته بندی نمود. معمولاً با توجه به اطلاعات موجود و ویژگی های دینامیکی سیستم و همچنین مزیت ها و محدودیت های رویتگرهای معرفی شده، می توان رویتگرهای ترکیبی به صورت ترکیبی از چند رویتگر [۷] را برای رسیدن به هدف مورد نظر انتخاب نمود. در این میان رویتگرهای بازه ای^۱ که اولین بار در [۸] معرفی شدند، نوع جدیدی از رویتگرها هستند که می توان آنها را به عنوان ترکیبی از رویتگرهای لیونبرگر و رویتگرهای سیستم های ابعاد مشخص در نظر گرفت. این رویتگرها زمانی کاربرد دارند که توصیف دقیقی از مدل سیستم در دسترس نیست و سیستم شامل بخش های نامشخص زیادی است. ساختار این رویتگرها به گونه ای است که به جای تخمین حالت های سیستم، کران هایی برای آنها تعیین می شوند به نحوی که حالت های اصلی سیستم همواره بین این کران ها قرار گیرند [۸]. مدت زمان زیادی نیست که مطالعه بر روی رویتگرهای بازه ای آغاز شده است، لذا مسئله ی طراحی این نوع رویتگر و کاربردهای آن به عنوان یک مسئله ی باز برای تحقیق شناخته می شود. در [۹] مسئله ی تعیین کران های حالت با استفاده از رویتگر بازه ای در یک سیستم زیستی وقتی که مدل سینماتیکی مشخص می باشد، ولی پارامترها و غلظت ورودی های فرآیند دارای عدم قطعیت است، در نظر گرفته شد. در مقاله ی [۱۰] برای اولین بار یک رویتگر بازه ای مقاوم برای تخمین و همزمان سازی متغیرهای نامشخص سیستم آشوبی چوآ که دارای عدم قطعیت است، طراحی شد. در [۱۱-۱۳] طراحی رویتگر بازه ای برای سیستم خطی پارامتر متغیر مورد مطالعه قرار گرفت و روش هایی برای بهینه سازی فاصله ی بین کرانهای بالا و پایین در این رویتگر ارائه گردید. در [۱۴، ۱۵] ساختاری برای تعیین رویتگرهای بازه ای برای سیستم های خطی ارائه شد و سپس برای شرایطی که سیستم دینامیکی خطا شرایط یکنواخت بودن را نداشته باشد، نوعی روش بر مبنای تغییر مختصات برای حل مشکل پیشنهاد گردید.

کنترل سیستم های دینامیکی بر اساس رویتگر موضوعی است که در بسیاری از مقالات، مورد بررسی قرار گرفته است. با این وجود تضمین پایداری حالت ها توسط کنترل کننده و همگرایی تخمین آنها توسط رویتگر در سیستم حلقه بسته، خصوصاً زمانی که سیستم دارای بخش های غیرخطی و نامعینی زیاد باشد، از منظر تئوری بسیار دشوار است [۱۶]. از طرفی طراحی کنترل کننده بر اساس رویتگر بازه ای، این مزیت را دارد که تنها با کنترل کرانهای بالا و پایین حالت های مستخرج از رویتگر بازه ای، به صورت همزمان و طی یک فرآیند غیرمستقیم حالت های سیستم اصلی نیز کنترل شود. چنین مزیتی برای این روش باعث می شود تا برخلاف روش های کنترل مبتنی بر رویتگرهای معمول، کمتر درگیر مشکلات تئوری شود. با این وجود، به دلیل جدید بودن مسئله، تا به امروز مطالعات چندان در این زمینه صورت نگرفته است و تمرکز اصلی مقالات تنها بر روی طراحی رویتگر برای سیستم های دینامیکی بوده است. در [۱۷، ۱۸] ابتدا نوعی رویتگر بازه ای برای یک نوع سیستم پارامتر متغیر غیرخطی طراحی شد. در این مقاله ثابت شد که برای برقراری شرایط رویتگر بازه ای، ماتریس های خطا باید متزلزل باشند. پس از آن از طریق روش فیدبک حالت، کنترل کننده ای مشترک برای سیستم ارائه شد که سیستم را در تمام نواحی کاری پایدار نماید. در [۱۹] روشی برای پایدارسازی یک سیستم بیولوژیکی با استفاده از حالت های استخراج شده از رویتگر بازه ای ارائه گردید. برای سیستم هایی که امکان متزلزل کردن ماتریس حالت در سیستم دینامیکی خطا برای آنها وجود ندارد از دو ماتریس کمکی استفاده شد. در [۲۰] الگوریتمی مبتنی بر نامساوی های ماتریسی خطی^۲ برای برآورده سازی شرط متزلزل بودن ماتریس خطای رویتگر بازه ای برای یک سیستم سویچینگ ارائه شد و یک کنترل کننده ی فیدبک حالت معرفی شد تا بتواند با کنترل حالت های رویتگر بازه ای، به صورت همزمان، حالت های سیستم اصلی را نیز کنترل نماید. اثبات پایداری مجانبی روش کنترلی پیشنهادی منجر به دسته ای از نامساوی های ماتریسی خطی گردید. با این حال، روش نامساوی های ماتریس خطی ارائه شده در این مقالات چنان محافظه کارانه است که در بسیاری از موارد امکان دست یافتن به پاسخ را غیرممکن می سازد. لذا ارائه ی روشی جدید، که بتواند بر این مشکلات غلبه کند، لازم و حائز اهمیت است.

در این مقاله یک روش مقاوم بر اساس کنترل رویتگرهای بازه ای برای کلاسی از سیستم های پارامتر متغیر ارائه می شود. در این راستا رویتگر بازه ای مناسب به همراه شرایط لازم برای سیستم مورد نظر توصیف می شود تا حالت های اصلی سیستم به ازای هر ورودی کنترلی

² Linear Matrix Inequality (LMI)

¹ Interval Observer

به طوری که رابطه‌ی $x_i \leq y_i$ برای $i=1, \dots, n$ و $a_{ij} \leq b_{ij}$ برای $i, j=1, \dots, n$ به صورت متناظر برقرار است.

تعریف: ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ هر ویتز^۱ گفته می‌شود، اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن سمت چپ محور موهومی قرار گرفته باشند. همچنین این ماتریس متزلز^۲ نامیده می‌شود، اگر همه‌ی درایه‌های خارج قطر اصلی آن نامنفی باشند.

لم ۱ [۲۱]: برای سیستم $\dot{e}(t) = Me(t) + r(t)$ که $e(t), r(t) \in \mathbb{R}^n$ است، اگر ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ متزلز و $r(t) \geq 0$ باشد، آنگاه سیستم یکخواخت^۳ نامیده می‌شود و برای $e(0) \geq 0$ ، پاسخ‌های نامنفی دارد. به بیان دیگر، برای $t \geq 0$ ، $e(t) \geq 0$ است.

لم ۲ [۲۲]: برای هر اسکالر $\chi \in \mathbb{R}$ و عدد مثبت ε نامساوی زیر برقرار می‌باشد:

$$0 \leq |\chi| - \chi \tanh\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right) \leq \kappa \varepsilon, \quad \kappa = 0.2785 \quad (۱)$$

۲-۲- توصیف سیستم

کلاسی از سیستم‌های پارامتر متغیر به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(\theta)u(t) + f(x, y, \theta) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۲)$$

در این رابطه $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ، $x(t) \in \mathbb{R}^n$ به ترتیب متغیرهای حالت سیستم، ورودی‌های کنترلی و خروجی‌های قابل اندازه‌گیری سیستم محسوب می‌شوند. همچنین $\theta \in \mathbb{R}^q$ بردار پارامترهای متغیر سیستم، $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس ورودی پارامتر متغیر، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ نیز ماتریس‌های ثابت هستند. $f(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^n$ نیز بردار توابع غیرخطی می‌باشد که می‌تواند شامل اغتشاشات و بخش‌های نامشخص سیستم باشد.

۲-۳- فرضیات

قبل از معرفی رویکرد بازه‌ای برای سیستم (۲)، لازم است تعدادی از فرضیاتی که برای بیان مسئله ضروری می‌باشد، بیان گردند.

فرض ۱: تابع $f(x, y, \theta)$ شرایط لپشیتز را برآورده می‌کند و سیستم (۲) حداقل به صورت محلی دارای پاسخ یکتایی است. همچنین بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض شده است که برای همه‌ی $\theta \in \mathbb{R}^q$ ، $f(0, 0, \theta) = 0$ است.

فرض ۲: تابع غیرخطی $f(x, y, \theta)$ و ماتریس $B(\theta)$ از بالا و پایین کراندارند و برای هر $\theta \in \mathbb{R}^q$ ، بردارهای $\underline{f}, \bar{f} \in \mathbb{R}^n$ و $\underline{B}, \bar{B} \in \mathbb{R}^n$ وجود دارند، به طوری که داریم:

بین کران‌های بالا و پایین قرار گیرد. سپس با انتخاب یک تابع لیاپانف مناسب و با توجه به ساختار رویکرد بازه‌ای، یک کنترل کننده‌ی مد لغزشی تطبیقی برای مقابله با عوامل غیرخطی و اغتشاش موجود در رویکرد بازه‌ای پیشنهاد می‌شود. مزیت روش ارائه شده این است که به جای کنترل یک سیستم پارامتر متغیر شامل بخش‌های نامشخص، با کنترل رویکرد بازه‌ای مربوط به آن، که دینامیک کاملاً مشخصی دارد، به صورت غیرمستقیم حالت‌های سیستم اصلی نیز کنترل می‌شود. روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های پیشین مطرح شده در این زمینه برتری‌های زیر را دارد:

- برای اولین بار یک روش کنترل غیرخطی برای کنترل سیستم‌های پارامتر متغیر، از طریق کنترل رویکرد بازه‌ای ارائه شده است.
- روش ارائه شده به علت ماهیت تطبیقی، قابلیت تطبیق با ساختار متغیر سیستم رویکرد بازه‌ای را دارا می‌باشد.
- نیازی به حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی بر اساس نابرابری ماتریسی خطی نمی‌باشد.

ابتدا در بخش دوم این مقاله، با معرفی سیستم پارامتر متغیر مورد نظر، بعضی از تعاریف و پیش‌زمینه‌هایی که برای معرفی رویکرد بازه‌ای لازم است، بیان می‌شوند. سپس در بخش سوم یک رویکرد بازه‌ای مناسب برای سیستم معرفی می‌شود و شرایط مورد نیاز برای طراحی این رویکرد بیان می‌گردد. در بخش چهارم با انتخاب یک تابع لیاپانف مناسب، یک کنترل کننده‌ی مد لغزشی تطبیقی برای رویکرد بازه‌ای طراحی می‌شود تا با استفاده از کنترل حالت‌های رویکرد، به صورت غیرمستقیم حالت‌های سیستم اصلی کنترل شوند. در بخش پنجم نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌شوند که این نتایج برتری روش پیشنهادی را در مقایسه با روش‌های کنترلی دیگر نشان می‌دهد. در بخش آخر نیز نتیجه‌گیری مقاله آورده می‌شود.

۲- توصیف سیستم و مقدمات ریاضی

۲-۱- تعاریف و مقدمات ریاضی

تعریف: برای دو بردار $x, y \in \mathbb{R}^n$ و دو ماتریس $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، روابط $x \leq y$ و $A \leq B$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \leq B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

³ Monotone

¹ Hurwitz

² Metzler

$$\dot{\tilde{e}} = M\tilde{e} + \tilde{B}u + \tilde{f} \quad (۷)$$

که هر کدام از ماتریسهای M ، $\tilde{B}$ و $\tilde{f}$ به صورت (۸) تعریف می‌شوند.

$$M = \begin{bmatrix} A - LC + F_1 & F_1 \\ F_2 & A - LC + F_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B(\theta) - B_1 \\ B_2 - B(\theta) \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} f(x, y, \theta) - \underline{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) \\ \bar{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) - f(x, y, \theta) \end{bmatrix} \quad (۸)$$

مطابق با لم ۱، برای آنکه به ازای همهی $t \geq 0$ رابطه‌ی $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$ یا $\underline{e}(t) \geq 0$ برقرار باشد، لازم است تا سیستم رابطه‌ی (۷) یک سیستم یکنواخت باشد. با توجه به فرض ۲، $\tilde{f} \geq 0$ می‌باشد، لذا برای یکنواخت بودن رابطه‌ی (۷) پارامترهای طراحی به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

- برای آنکه $(B(\theta) - B_1)u \geq 0$ و $(B_2 - B(\theta))u \geq 0$ باشد، ماتریسهای B_1 و B_2 به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$B_1^i = \begin{cases} \underline{B}^i & u_i \geq 0 \\ \bar{B}^i & u_i < 0 \end{cases}, \quad B_2^i = \begin{cases} \bar{B}^i & u_i \geq 0 \\ \underline{B}^i & u_i < 0 \end{cases} \quad (۹)$$

که اندیس بالای i برای ماتریس به معنای i امین ستون ماتریس می‌باشد و u_i بیان کنندهی i امین ورودی می‌باشد [۱۷].

- یکی دیگر از الزامات یکنواخت بودن سیستم (۷) متزلز بودن ماتریس M می‌باشد. برای دستیابی به این هدف، ماتریسهای $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ با درایه‌های غیرمنفی و ماتریس $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ باید به گونه‌ای انتخاب شوند که $A - LC + F_1$ و $A - LC + F_2$ متزلزل باشند. برای حالت خاصی که بتوان یک ماتریس L پیدا کرد که $A - LC$ متزلزل باشد، آنگاه می‌توان $F_1 = F_2 = 0_n$ در نظر گرفت که یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های صفر می‌باشد (در [20] الگوریتمی برای انتخاب پارامترهای طراحی جهت متزلزل بودن ماتریس M ارائه شده است).

$$\underline{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) \leq f(x, y, \theta) \leq \bar{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) \quad (۳)$$

$$\underline{B} \leq B(\theta) \leq \bar{B}$$

در این صورت می‌توان با ورودی محدود تمام حالت‌های سیستم برای هر $t \geq 0$ در محدوده‌ی $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$ قرار داد [۱۷].

فرض ۳: ثابت‌های $\underline{a}_i \geq 0$ ، $\bar{a}_i \geq 0$ برای $i = 1, \dots, 4$ وجود دارند به طوری که برای هر $\underline{x}(t), \bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} |\underline{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta)| &\leq \underline{a}_1 |\bar{x}| + \underline{a}_2 |\underline{x}| + \underline{a}_3 |y| + \underline{a}_4 \\ |\bar{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta)| &\leq \bar{a}_1 |\bar{x}| + \bar{a}_2 |\underline{x}| + \bar{a}_3 |y| + \bar{a}_4 \end{aligned} \quad (۴)$$

که در رابطه فوق $|\cdot|$ نرم القایی بردار می‌باشد.

۳- رویکرد بازه‌ای

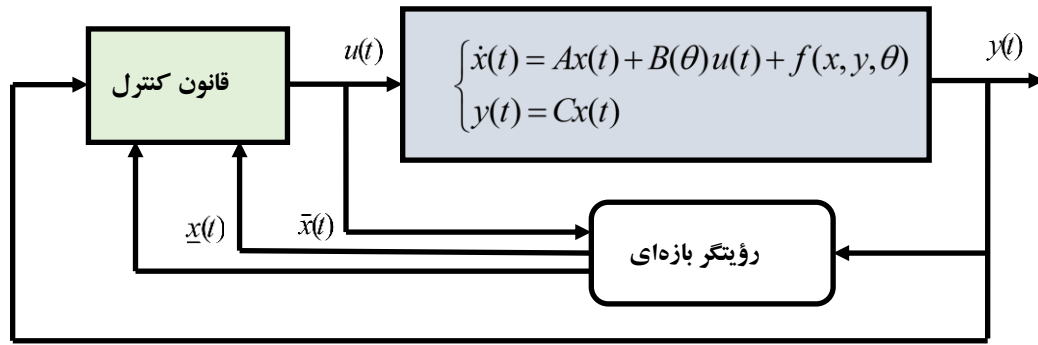
همانطور که گفته شد رویکرد بازه‌ای نوعی رویکرد است که به جای تخمین حالت‌های سیستم، کرانه‌هایی را برای آن‌ها تعیین می‌نماید و تضمین می‌کند که حالت‌های اصلی همواره در بین این کرانه‌ها قرار می‌گیرند. با توجه به فرضیات ۱ الی ۳ رویکرد بازه‌ای برای سیستم (۲) به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B_1 u + \underline{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) + L(y - C\underline{x}) - F_1(\bar{x} - \underline{x}) \\ \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B_2 u + \bar{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) + L(y - C\bar{x}) + F_2(\bar{x} - \underline{x}) \end{cases} \quad (۵)$$

در رابطه (۵)، $\underline{x}(t), \bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ کرانه‌های بالا و پایین رویکرد، $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ماتریس بهره‌ی رویکرد، $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریسهای طراحی می‌باشند که برای برقراری شرایط عملیاتی مناسب برای این نوع رویکرد انتخاب می‌شوند. اگر $\underline{e} = \bar{x} - \underline{x}$ و $\underline{e} = \underline{x} - \bar{x}$ به ترتیب خطای کران پایین و بالا باشند، با مشتق‌گیری از آن‌ها و جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۵) و پس از انجام ساده‌سازی داریم:

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}} = \dot{\bar{x}} - \dot{\underline{x}} = (A - LC + F_1)\underline{e} + F_1\bar{e} + (B(\theta) - B_1)u + f(x, y, \theta) - \underline{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) \\ \dot{\bar{e}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\bar{x}} = (A - LC + F_2)\bar{e} + F_2\underline{e} + (B_2 - B(\theta))u + \bar{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta) - f(x, y, \theta) \end{cases} \quad (۶)$$

با تعریف $\tilde{e} = [\underline{e} \quad \bar{e}]^T$ به عنوان بردار خطا، رابطه‌ی (۶) به صورت (۷) بازنویسی می‌شود:



شکل ۱: بلوک دیاگرام سیستم کنترل بر اساس رؤیتگر بازه‌ای برای یک سیستم پارامتر متغیر

• اعمال رؤیتگر بازه‌ای برای تعیین کران‌های حالت‌های سیستم.

• طراحی یک قانون کنترلی بر اساس مدل رؤیتگر بازه‌ای طراحی شده. لازم است که این قانون کنترل پایداری حالت‌های رؤیتگر بازه‌ای و فرآیند اصلی را به صورت همزمان تضمین نماید.

به منظور طراحی کنترل کننده، رابطه‌ی (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\bar{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - LC + F_1 & -F_1 \\ -F_2 & A - LC + F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \bar{f} \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در این رابطه $\bar{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta)$ و $\underline{f}(\underline{x}, \bar{x}, y, \theta)$ کران‌های

قسمت غیرخطی سیستم (۲) است. با فرض $z = \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \bar{x}^T \end{bmatrix}^T$ معادله‌ی دینامیکی رابطه‌ی (۱۱) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{z} = A_z z + B_z u + L_z y + \bar{f}_z \quad (12)$$

که y و $\bar{f}_z$ توابع مشخصی هستند و ماتریس‌های $A_z \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ، $B_z \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ ، $L_z \in \mathbb{R}^{2n \times p}$ و $\bar{f}_z \in \mathbb{R}^{2n}$ با معادل قرار دادن طرف راست رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) قابل استخراج می‌باشند. از این معادله در فرآیند طراحی کنترل کننده استفاده می‌شود. وجود جمله غیرخطی $L_z y + \bar{f}_z$ که می‌تواند به صورت یک ترم اغتشاش کراندار در نظر گرفته شود، سبب می‌شود تا استفاده از یک قانون کنترل کننده مقاوم قابل توجه باشد. کنترل کننده پیشنهادی مبتنی بر روش کنترل مد لغزشی تطبیقی است که از عملکرد مناسبی در مواجهه با اغتشاشات و نامعینی‌های موجود در سیستم برخوردار است.

۴-۱- کنترل مد لغزشی تطبیقی

در روش کنترل مد لغزشی، ابتدا یک سطح لغزش را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

با برقراری دو شرط بالا ماتریس M متزلزل و عبارت $\tilde{B}u + \tilde{f}$ نیز مثبت می‌باشد و یکنواخت بودن سیستم رابطه‌ی (۷) ثابت می‌شود. لذا تضمین می‌شود که حالت‌های اصلی سیستم $\underline{x}(t)$ همواره و به ازای هر ورودی کنترلی، بین کران‌های پایین $\underline{x}(t)$ و بالا $\bar{x}(t)$ قرار می‌گیرند. مطابق با شرایط بیان شده، با وجود قرار گرفتن $\underline{x}(t)$ بین $\underline{x}(t)$ و $\bar{x}(t)$ نمی‌توان کراندار بودن $\underline{x}(t)$ را تضمین کرد، مگر اینکه خود $\underline{x}(t)$ و $\bar{x}(t)$ کراندار باشند. لذا اگر بتوان کنترل کننده‌ای طراحی نمود که همزمان بتواند کران‌های بالا و پایین رؤیتگر بازه‌ای $\underline{x}(t)$ و $\bar{x}(t)$ را کنترل نماید، $\underline{x}(t)$ نیز کنترل می‌شود. هدف از این مقاله ارائه‌ی یک کنترل کننده مناسب برای پایدارسازی سیستم (۵) می‌باشد که با کنترل این سیستم به طور همزمان سیستم (۲) را نیز کنترل نماید.

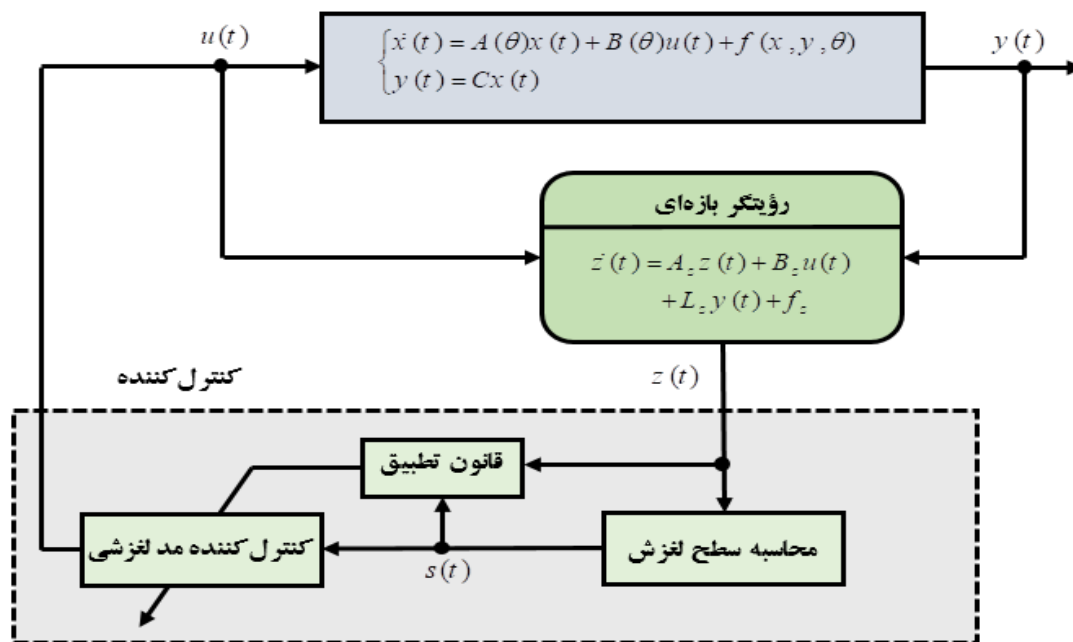
۴- طراحی کنترل کننده

در این قسمت قانون کنترلی طراحی می‌شود که بتواند با استفاده از کران‌های مستخرج از رؤیتگر بازه‌ای، حالت‌های سیستم اصلی را کنترل نماید. در واقع از آنجا که در بخش قبل تضمین شد که با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی، حالت‌های اصلی سیستم همواره و به ازای هر ورودی بین کران‌های بالا و پایین رؤیتگر بازه‌ای قرار می‌گیرند، اگر بتوان کنترل کننده‌ای طراحی نمود که مطابق رابطه‌ی (۱۰) این کران‌ها را به سمت یک مقدار مطلوب هدایت نماید، آنگاه حالت اصلی متناظر با این کران‌ها نیز قطعاً به سمت آن مقدار مطلوب میل می‌کند [۱۸].

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}(t) \rightarrow x_d \\ \bar{x}(t) \rightarrow x_d \end{cases} \Rightarrow x(t) \rightarrow x_d \quad (10)$$

عدم نیاز به متغیرهای اصلی سیستم و همچنین مشخص بودن کامل مدل رؤیتگر سبب می‌شود که استفاده از این رؤیتگر برای کنترل سیستم اصلی یک مزیت قابل توجه محسوب شود.

در شکل ۱ بلوک دیاگرام مربوط به روش پیشنهادی برای مدل دینامیکی رابطه‌ی (۲) نشان داده شده است. همانطور که از این شکل مشخص است طراحی کنترل کننده شامل دو مرحله می‌باشد:



شکل ۲. بلوک دیاگرام روش کنترلی پیشنهادی

چپ ماتریس A_z متناظر با مقدار ویژه صفر باشد و طوری انتخاب شود که $h^T B_z$ یک بردار غیر صفر باشد. آنگاه ورودی کنترلی (۱۵) سیستم (۱۲) را پایدار می‌کند که به معنی پایداری حالت‌های سیستم (۲) می‌باشد.

اثبات. ابتدا تابع زیر را به عنوان تابع لیپانف به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V = \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\eta}^2 \quad (16)$$

که در آن $\tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}$ خطای تنظیم پارامتر و $\hat{\eta}$ مقدار نامی پارامتر تطبیقی است که مقداری ثابت و مثبت دارد. همچنین γ نیز یک پارامتر ثابت مثبت می‌باشد که سرعت همگرایی پارامتر تطبیقی را تعیین می‌نماید. مشتق این تابع لیپانف به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{V} = S\dot{S} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\eta}\dot{\tilde{\eta}} \quad (17)$$

با جایگذاری (۱۴) در (۱۷) داریم:

$$\dot{V} = Sh^T A_z z + Sh^T B_z u + Sh^T L_z y + Sh^T f_z + \frac{1}{\gamma}\tilde{\eta}\dot{\tilde{\eta}} \quad (18)$$

از آنجا که h بردار ویژه سمت چپ متناظر با مقدار ویژه صفر ماتریس A_z می‌باشد، لذا $h^T A_z = 0$ می‌باشد. با جایگذاری قانون کنترل (۱۵) در (۱۸) و استفاده از رابطه $\tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}$ داریم:

$$\dot{V} = -\eta \left(S \text{sign}(S) - \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\eta}} \right) - \frac{1}{\gamma}\tilde{\eta}\dot{\tilde{\eta}} \quad (19)$$

قانون کنترل تطبیقی به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$S = h^T z \quad (13)$$

که در این رابطه $S \in \mathbb{R}$ و $h \in \mathbb{R}^{2n}$ بردار ضرایب لغزشی می‌باشد. با مشتقگیری از رابطه S و جایگذاری (۱۲) در آن خواهیم داشت:

$$\dot{S} = h^T \dot{z} = h^T A_z z + h^T B_z u + h^T L_z y + h^T f_z \quad (14)$$

در نتیجه ورودی کنترلی به صورت زیر خواهد بود:

$$u = -\frac{(h^T B_z)^T}{\|h^T B_z\|^2} (h^T L_z y + h^T f_z + \eta \text{sign}(S)) \quad (15)$$

که η پارامتر تنظیم است که برای تضمین پایداری مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های متفاوتی برای تعیین پارامتر η وجود دارد که در این مقاله از یک قانون تطبیقی برای تخمین آن استفاده می‌شود. در بخش بعد نشان داده می‌شود که قانون کنترلی (۱۵) پایداری سیستم (۱۲) را تضمین می‌کند. بلوک دیاگرام شکل ۲ ساختار روش کنترلی پیشنهادی را نشان می‌دهد.

۲-۴- تحلیل پایداری

قضیه ۱. فرض کنید برای سیستم (۲)، فرض‌های ۱ الی ۳ برقرار باشند و پارامترهای رؤیتگر بازه‌ای به گونه‌ای انتخاب شوند که مدل دینامیکی شامل خطای کران بالا و پایین سیستم (۷) یکنواخت باشد. همچنین فرض کنید سیستم (۱۲) کنترل‌پذیر باشد و ماتریس A_z به گونه‌ای باشد که یکی از مقادیر ویژه‌اش در نقطه صفر قرار داشته باشد (یا بتوان با کنترل فیدبک در نقطه صفر قرار داد) و h بردار ویژه سمت

$$\dot{\eta} = \gamma S \text{sign}(S) \quad (20)$$

با جایگذاری قوانین تطبیق بدست آمده در مشتق تابع لیاپانف، (۱۹) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\dot{V} = -S (\hat{\eta} \text{sign}(S)) = -\hat{\eta} |S| \leq 0 \quad (21)$$

مشتق تابع لیاپانف نسبت به زمان منفی نیمه‌معین است که نشان دهندهی پایداری لیاپانف سیستم می‌باشد. بنابراین مطابق با تئوری لیاپانف حالت‌های $\bar{x}$ و $\underline{x}$ و در نتیجه حالت X پایدار محلی خواهد بود و پارامتر تخمین نیز کران‌دار خواهد بود. در واقع از آنجا که حالت‌های اصلی سیستم بین کران‌های بالا و پایین رویتگر بازه‌ای قرار دارند، لذا از آنجا که با گذشت زمان این کران‌ها پایدار می‌شوند، حالت‌های اصلی سیستم نیز پایدار خواهند شد.

تکته ۱: همانطور که در بخش ۳ بیان شد، اگر یک ماتریس L وجود نداشته باشد که ماتریس M در رابطه‌ی (۷) را متزلزل نماید، می‌توان از ماتریس‌های F_1 و F_2 استفاده نمود. با این وجود حتی اگر ماتریس L به تنهایی بتواند متزلزل بودن ماتریس M را تضمین نماید، در بعضی از موارد می‌توان از ماتریس‌های F_1 و F_2 به عنوان ماتریس‌های کمکی جهت کنترل‌پذیری جفت (A_z, B_z) استفاده کرد.

تکته ۲: برای کاهش میزان چترینگ در روش مد لغزشی از روش‌های متفاوتی استفاده می‌شود که استفاده از تابع $\tanh(S/\phi)$ به جای تابع $\text{sign}(S)$ یکی از این روش‌ها است که ϕ میزان تندی شیب تابع $\tanh$ را تنظیم می‌نماید [۲۳]. بنابراین قانون ورودی کنترلی به صورت زیر در خواهد آمد:

$$u = -\frac{(h^T B_z)^T}{\|h^T B_z\|^2} \left(h^T L_z y + h^T f_z + \eta \tanh\left(\frac{S}{\phi}\right) \right) \quad (22)$$

قضیه فرعی ۱: تحت شرایط تئوری ۱، کنترل‌کنندهی پیشنهادی رابطه‌ی (۲۲) پایداری حالت‌های سیستم (۱۲) را تحت شرایط $|h^T z| \geq \kappa \phi$ که $\kappa = 0.2785$ می‌باشد، تضمین می‌کند.

اثبات: با جایگذاری رابطه‌ی (۲۲) در مشتق تابع لیاپانف رابطه‌ی (۱۸) و پس از انجام محاسبات، با استفاده از لم ۲ داریم:

$$\dot{V} = -S \hat{\eta} \tanh\left(\frac{S}{\phi}\right) \leq -\hat{\eta} |S| + \hat{\eta} \kappa \phi \quad (23)$$

اگر $|S| \geq \kappa \phi$ ، آنگاه $\dot{V} \leq 0$ می‌باشد. بنابراین پایداری سیستم (۱۲) با برقراری شرط $|h^T z| \geq \kappa \phi$ تضمین می‌شود.

روش کنترلی پیشنهادی از اطلاعات خروجی‌های اندازه‌گیری شده و کران‌های تعیین شده برای پایدارسازی همه‌ی حالت‌های سیستم استفاده می‌کند و در مقایسه با روش‌های موجود در مقابل اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها مقاوم‌تر می‌باشد.

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش روش پیشنهادی را بر روی یک مدل دینامیکی برگرفته از [۱۷] اعمال می‌کنیم تا عملکرد روش پیشنهادی بررسی گردد. شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و با زمان‌نمونه‌برداری ۰/۰۱ انجام شده است. برای این منظور سیستم پارامتر متغیر یک پاندول را در نظر می‌گیریم که با استفاده از رابطه‌ی زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega^2(t) \sin(x_1(t)) - \kappa(t)x_2(t) + b(t)u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (24)$$

در این رابطه $x_1(t)$ زاویه‌ی پاندول نسبت به محور عمودی و $x_2(t)$ سرعت زاویه‌ای پاندول می‌باشد. پارامترهای این سیستم با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= 0.5(\omega_m + \omega_m + (\omega_m - \omega_m) \cos(t)), \\ \kappa(t) &= \kappa_a + \delta_k \sin(t), \\ b(t) &= 0.5(b_m + b_m + (b_m - b_m) \cos(2t)), \\ \omega_m &= 0.1, \quad \omega_M = 1.2, \quad 0 \leq \omega_m \leq \omega \leq \omega_M \\ \kappa_m &= 0.4, \quad \kappa_M = 1.5, \quad \kappa_m \leq \kappa \leq \kappa_M, \\ b_m &= 0.5, \quad b_M = 2.5, \quad b_m \leq b(t) \leq b_M \end{aligned} \quad (25)$$

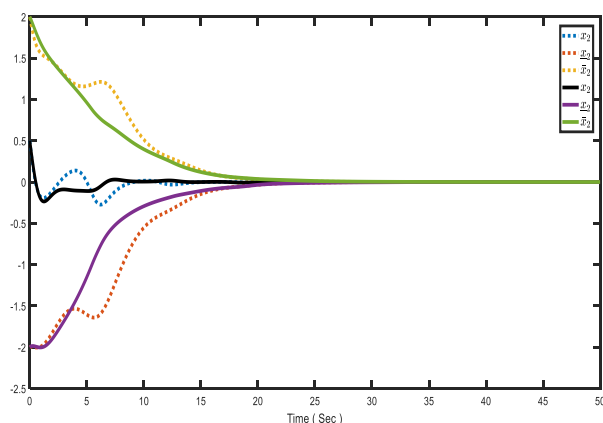
بردارها و ماتریس‌های زیر مدل (۲۴) را به صورت رابطه‌ی (۲) درمی‌آورند.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\kappa_a \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ f(t, x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega(t) \sin(x_1) - \delta_k \sin(t)x_2 \end{bmatrix} \\ \kappa_a &= 0.5(\kappa_m + \kappa_M), \quad \Delta \kappa(t) = \kappa(t) - \kappa_a, \\ |\Delta \kappa(t)| &\leq \delta_k = 0.5(\kappa_M - \kappa_m) \end{aligned} \quad (26)$$

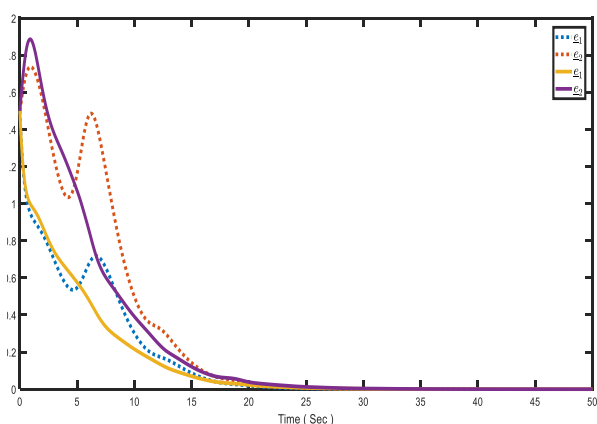
کران‌های بالا و پایین بردارهای $B(t)$ و $f(t, x)$ که در طراحی رویتگر بازه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \begin{cases} -\omega_m^2 \sin(y) & \sin(y) > 0 \\ -\omega_m^2 \sin(y) & \sin(y) \leq 0 \end{cases} - \delta_k \max\{|x_2|, |\bar{x}_2|\} \\ \bar{f} &= \begin{cases} -\omega_m^2 \sin(y) & \sin(y) \leq 0 \\ -\omega_m^2 \sin(y) & \sin(y) > 0 \end{cases} + \delta_k \max\{|x_2|, |\bar{x}_2|\} \\ \underline{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

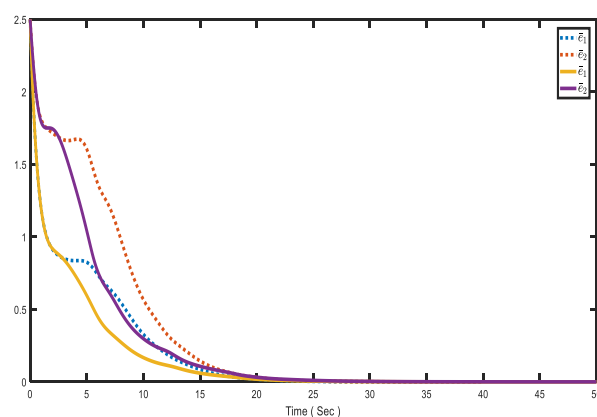
شرایط اولیه‌ی سیستم اصلی $x(0) = [0.5 \quad 0.5]^T$ و شرایط اولیه‌ی رویتگر بازه‌ای $\underline{x}(0) = [-2 \quad 2]^T$ و $\bar{x}(0) = [2 \quad 2]^T$ در نظر گرفته شده است. برای آنکه ماتریس M در رابطه‌ی (۷) متزلزل



شکل ۴: پایدارسازی حالت $x_2(t)$ با استفاده از روش پیشنهادی (خط پر) در مقایسه با روش ارائه شده در [۱۷] (خط چین)



شکل ۵: کرانهای پایین خطای تخمین $e_1(t)$ و $e_2(t)$ با استفاده از روش پیشنهادی (خط پر) در مقایسه با روش ارائه شده در [۱۷] (خط چین)

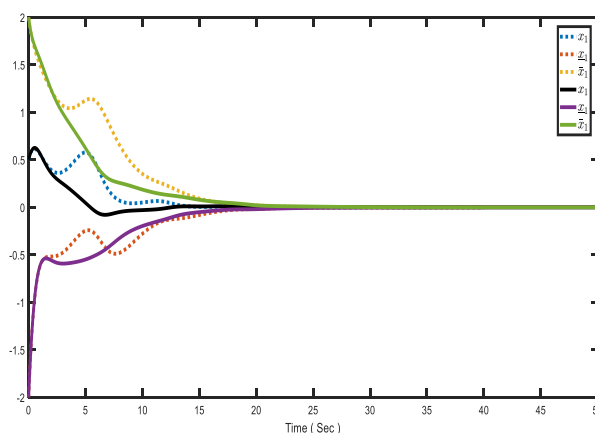


شکل ۶: کرانهای بالای خطای تخمین $e_1(t)$ و $e_2(t)$ با استفاده از روش پیشنهادی (خط پر) در مقایسه با روش ارائه شده در [۱۷] (خط چین)

باشد، پارامترهای طراحی رویکرد بازه‌ای به صورت $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$

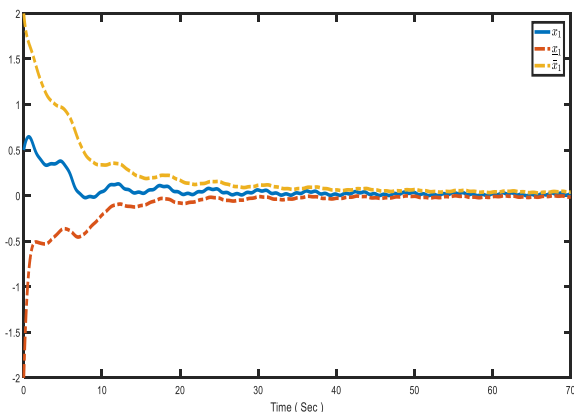
ماتریس نهایی M برای سیستم دینامیکی خطای رویکرد بیان شده به صورت $F_1 = 0_2$ ، $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$ انتخاب می‌شوند. در این صورت

دهنده‌ی یک ماتریس متزلز می‌باشد. همچنین در قانون تطبیق (۲۰)، $\gamma = 0.001$ در نظر گرفته شده است. عملکرد روش پیشنهادی در این مقاله با روش طراحی کنترل کننده‌ی فیدبک حالت بر اساس رویکرد بازه‌ای براساس LMI که در مقاله‌ی [۱۷، ۱۸] ارائه شده است، مقایسه می‌شوند. شکل ۳ و شکل ۴ نتایج حالت‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را در صورتی که ورودی پیشنهادی به سیستم اعمال شود، در مقایسه با روش ارائه شده در [۱۷]، نشان می‌دهند. این شکل‌ها نشان می‌دهد که همزمان با پایداری کران‌های رویکرد بازه‌ای، حالت‌های اصلی سیستم نیز با سرعت و به صورت هموار به سمت صفر همگرا می‌شوند. شکل ۵ و شکل ۶ مثبت بودن خطاهای کران پایین و بالا را نشان می‌دهد که توصیف کننده‌ی این واقعیت است که حالت‌های اصلی سیستم همواره بین کران‌های طراحی شده قرار دارند. شکل ۷ نیز ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم جهت پایدارسازی رویکرد بازه‌ای را نشان می‌دهد که با سرعت بهتری نسبت به روش ارائه شده در [۱۷] به صفر همگرا می‌شود و دارای دامنه‌ی کمی است. همچنین شکل ۸ همگرایی پارامتر تطبیقی η ، به ازای چند مقدار γ ، را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌گردد که با تغییر γ مقادیر همگرایی و سرعت همگرایی تغییر می‌کند و در حالت کلی تضمینی برای همگرایی پارامتر تطبیق به یک مقدار ثابت وجود ندارد و پارامترهای تخمین صرفاً کراندار می‌باشند. بر اساس نتایج کنترل تطبیقی برای همگرایی پارامترهای تخمین به مقدار واقعی، لازم است تا ورودی سیستم به اندازه‌ی کافی غنی باشد.

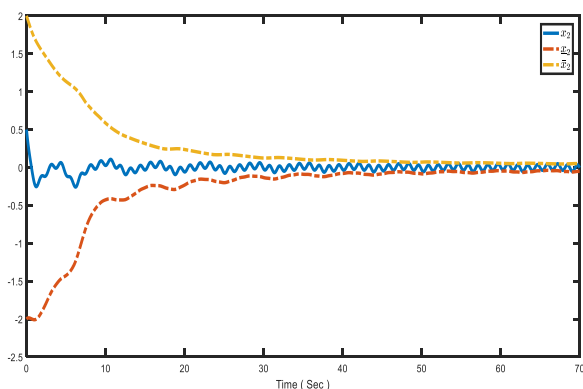


شکل ۳: پایدارسازی حالت $x_1(t)$ با استفاده از روش پیشنهادی (خط پر) در مقایسه با روش ارائه شده در [۱۷] (خط چین)

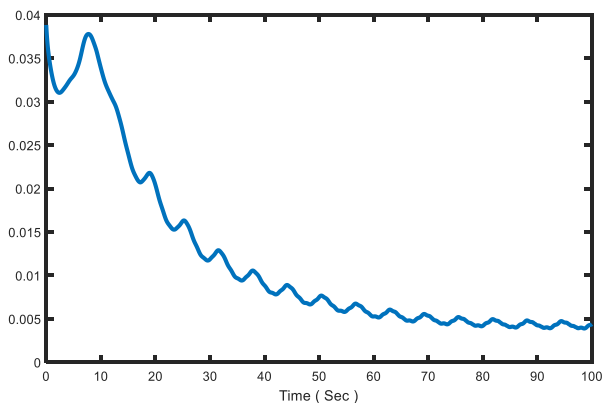
فاصله‌ای وجود داشته باشد، با این وجود پایداری سیستم دچار مشکل نشده است و حالت‌های سیستم به خوبی پایدار شده‌اند.



شکل ۹: پایدارسازی حالت $x_1(t)$ در حضور اغتشاش.



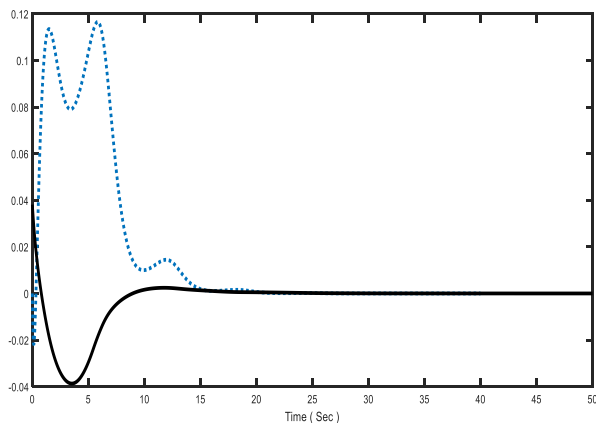
شکل ۱۰: پایدارسازی حالت $x_2(t)$ در حضور اغتشاش.



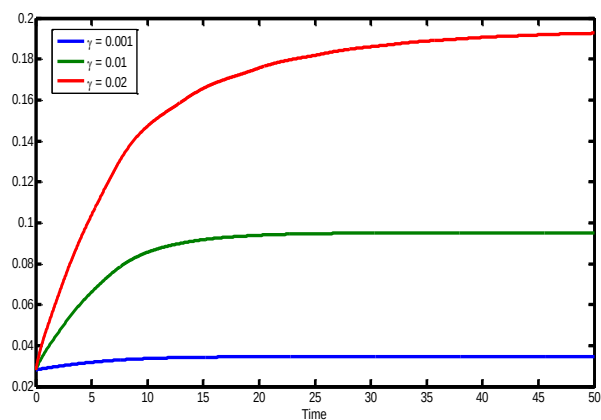
شکل ۱۱: ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم در حضور اغتشاش.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جدید برای کنترل سیستم‌های پارامتر متغیر از طریق کنترل رویتگر بازه‌ای مربوط به آن ارائه گردید. ابتدا جهت تأمین شرایط لازم برای طراحی رویتگر بازه‌ای و با تعیین رابطه‌ای برای کران‌های بالا و پایین، شرایط لازم برای یکنواخت بودن سیستم بیان شد. در مرحله‌ی طراحی کنترل‌کننده، سیستم رویتگر به عنوان یک مدل با



شکل ۷: ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم با استفاده از روش پیشنهادی (خط پر) در مقایسه با روش ارائه شده در [۱۷] (خط چین)



شکل ۸: همگرایی پارامترهای تطبیقی η در روش پیشنهادی.

علاوه بر شکلهای بالا جدول ۱ نیز به خوبی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در مقایسه با روش ارائه شده قبل عملکرد بهتری دارد. نتایج این جدول بر اساس معیار میانگین ریشه‌ی دوم خطا می‌باشد که خطای مورد نظر در واقع اختلاف بین کرانهای بالا و پایین حالتها نسبت به حالت‌های اصلی سیستم می‌باشد.

جدول ۱. مقایسه‌ی عملکرد روش پیشنهادی با روش ارائه شده در [۱۷] با در نظر گرفتن معیار میانگین ریشه‌ی دوم (RMS) برای کرانها بالا و پایین خطا

	$\bar{e}_1$	$\underline{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\underline{e}_2$
روش ارائه شده در [۱۷]	۰/۴۵۲۶	۰/۷۵۱۴	۰/۳۶۰۰	۰/۶۴۸۶
روش پیشنهادی	۰/۳۶۱۸	۰/۵۶۳۰	۰/۳۰۰۳	۰/۵۲۹۸

شکل های ۹ الی ۱۱ تاثیر روش پیشنهادی زمانی که به سیستم اغتشاشی به صورت $d(t) = 0.2 \sin(5t)$ اعمال شود را نشان می‌دهد. بدیهی است که ترم اغتشاش باید به تابع غیرخطی $f(x, y, \theta)$ در رابطه‌ی (۲) اضافه شود. این شکل‌ها نشان می‌دهد که اثر اغتشاش سبب شده است تا بین حالت‌های اصلی و کران‌های آن

- [10] Moisan, M. and O. Bernard, 'Robust interval observers for uncertain chaotic systems', in *45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA*, 2006.
- [11] Rami, M.A., C.H. Cheng, and C. de Prada, 'Tight robust interval observers: An LP approach', in *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, 2008.
- [12] McCarthy, P.J., C. Nielsen, and S.L. Smith, 'Cardinality constrained robust optimization applied to a class of interval observers', in *American Control Conference (ACC)*, 2014, 2014, IEEE, p. 5337-5342.
- [13] Chebotarev, S., et al., 'Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance', *Automatica*, 2015, **58**: p. 82-89.
- [14] Mazenc, F. and O. Bernard, 'Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances', *Automatica*, 2011, **47**(1): p. 140-147.
- [15] Efimov, D., et al., 'Interval estimation for lpv systems applying high order sliding mode techniques', *Automatica*, 2012, **48**(9): p. 2365-2371.
- [16] Atassi, A.N. and H.K. Khalil, 'A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(9): p. 1672-1687.
- [17] Efimov, D., T. Raissi, and A. Zolghadri, 'Control of Nonlinear and LPV Systems: Interval Observer-Based Framework', *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2013, **58**(3): p. 773-778.
- [18] Efimov, D., T. Raissi, and A. Zolghadri, 'Stabilization of nonlinear uncertain systems based on interval observers', in *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, 2011.
- [19] Cai, X., G. Lv, and W. Zhang, 'Stabilisation for a class of non-linear uncertain systems based on interval observers', *IET Control Theory & Applications*, 2012, **6**(13): p. 2057-2062.
- [20] Zhongwei, H. and X. Wei, 'Control of non-linear switched systems with average dwell time: interval observer-based framework', *Control Theory & Applications, IET*, 2016, **10**(1): p. 10-16.
- [21] Smith, H.L., 'Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems', 2008: American Mathematical Soc.
- [22] Polycarpou, M.M. and P.A. Ioannou, 'A robust adaptive nonlinear control design', *Automatica*, 1996, **32**(3): p. 423-427.
- [23] Liu, J., 'Sliding Mode Control Using MATLAB', 1st ed. 2017: Academic Press.

جمله‌های مشخص در نظر گرفته شد. با تعریف یک تابع لیاپانف مناسب، کنترل کننده مد لغزشی تطبیقی طراحی شد تا کران‌های سیستم رویتگر را کنترل نماید. از آنجا که حالت‌های سیستم همواره بین کران‌های بالا و پایین رویتگر بازه‌ای قرار دارد، با کنترل این کران‌ها می‌توان به صورت همزمان حالت‌های سیستم اصلی را نیز کنترل نمود. روش پیشنهادی در مرحله‌ی شبیه‌سازی به یک سیستم آونگ معکوس اعمال گردید تا کارایی روش پیشنهادی نشان داده شود. نتایج نشان می‌دهد که حالت‌های سیستم با سرعت خوبی همگرا می‌شوند و در مقابل اثرات اغتشاش نیز مقاوم می‌باشند. از طرفی روش پیشنهادی برای رسیدن به اهداف مورد نظر تلاش کمی به خرج می‌دهد. طراحی کنترل کننده برای این سیستم‌ها با کاهش تعداد فرضیات و متغیر بودن ماتریس A از جمله موضوعات در دست مطالعه می‌باشد.

قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب قدردانی خود را از حمایت دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل از طریق اعتبار پژوهشی شماره BNTU/370632/97 اعلام می‌دارند.

مراجع

- [1] Mohd Ali, J., et al., 'Review and classification of recent observers applied in chemical process systems', *Computers & Chemical Engineering*, 2015, **76**(0): p. 27-41.
- [2] Luenberger, D., 'An introduction to observers', *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1971, **16**(6): p. 596-602.
- [3] Postoyan, R. and D. Nešić, 'On emulated nonlinear reduced-order observers for networked control systems', *Automatica*, 2012, **48**(4): p. 645-652.
- [4] Chen, T., J. Morris, and E. Martin, 'Particle filters for state and parameter estimation in batch processes', *Journal of Process Control*, 2005, **15**(6): p. 665-673.
- [5] Li, S., et al., 'Disturbance observer-based control: methods and applications', 2014: CRC press.
- [6] Theocharis, J. and V. Petridis, 'Neural Network Observer', *vectors*, 1994, **27**.
- [7] Gao, Z., X. Shi, and S.X. Ding, 'Fuzzy state/disturbance observer design for T-S fuzzy systems with application to sensor fault estimation', *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, **38**(3): p. 875-880.
- [8] Gouzé, J.L., A. Rapaport, and M.Z. Hadj-Sadok, 'Interval observers for uncertain biological systems', *Ecological Modelling*, 2000, **133**(1-2): p. 45-56.
- [9] Rapaport, A. and D. Dochain, 'Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs', *Mathematical Biosciences*, 2005, **193**(2): p. 235-253.



Journal of Control

ISSN (print) 2008-8345

ISSN (online) 2538-3752



A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology, Vol. 13, No. 3, Fall 2019.

Publisher: **Iranian Society of Instrumentation and Control Engineers**

Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia

Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh

Tel: 84062317

Email: sedigh@kntu.ac.ir

Assistant Editor: Prof. Hamid Khaloozadeh, Dr. Alireza Fatehi, Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli

Executive Director: Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli, Tel: 84062403, Email: aliyari@kntu.ac.ir

Editorial Board:

Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. I. Goodarznia, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghafari, Dr. H.R. Momeni (Associate Prof), Prof. S.K. Nikraves, Prof. M. Shafiee, Prof. B. Moshiri.

Advisory Board:

Dr. H.R. Momeni, Prof. B. Moshiri, Prof. M. Shafiee, Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghaffari, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. H.R. Taghirad, Dr. K. Masroori, Dr. M.T. Bathaei, Dr. M.T. Hamidi-Beheshti, Dr. F. Jafarkazemi, Dr. R. Amjadifard, Prof. S.A. Moosavian, Prof. M. Teshnelab, Prof. M. Haeri, Prof. S.A. Safavi, Prof. H. Seyfi, Dr. A. Fatehi, Prof. M.R. Akbarzadeh- Toutounchi, Prof. M. Golkar, Prof. N. Pariz, Dr. M. Javadi, Dr. J. Heirani-Nobari, Prof. F. Hossein- Babaei, Dr. B. Moaveni, Dr. M. Aliyari Sh., Dr. M. Arvan , Prof. M. Tavakoli-Bina, Dr. F. Farivar, Dr. M. Ayati, Dr. M. Mansouri, Dr. R. Havangi, Dr. A. Ramezani, Dr. A. Ghasemi, Prof. M. Farrokhi, Dr. Y. Batmani.

Website Manager: Nasibeh Farahani



**A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and
the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology**

Vol. 13, No. 3, Fall 2019

Contents

- Optimal Observer Path Planning For Bearings-Only Moving Targets Tracking
Using Chebyshev Polynomials** 1
Mahdi Ardeshiri, Alireza Alfi
- Enlarging Domain of Attraction for a Special Class of Continuous-time
Quadratic Lyapunov Function Piecewise Affine Systems based on Discontinuous
Piecewise** 15
Farideh Cheraghi Shami , Ali Akbar Gharaveisi, Malihe M. Farsangi, Mohsen Mohammadian
- Persian sign language detection based on normalized depth image information** 29
Shahab Rajabi, Amir Mousavinia
- Stability analysis of nonlinear hybrid delayed systems described by impulsive
fuzzy differential equations** 41
David Naseh, Naser Pariz , Ali Vahidian Kamyad
- ANFIS+PID Hybrid Controller Design for Controlling of a 6-DOF Robot
Manipulator and its Error Convergence Analysis** 51
Mojtaba Hadi Barhaghtalab , Vahid Meigoli, Valiollah Ghaffari
- Design and stability analysis of optimal controller and observer for Itô stochastic
model of active vehicle suspension system** 71
Alireza Ramezani Moghadam, Hamed Kebriaei
- Stabilizing a class of parameter-varying systems using interval observer-based
controller** 85
Mostafa Faramin, Behrooz Rezaie , Zahra Rahmani