

# نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های $L_1$ , $S_1$ , $T_1$ و $R_1$ و تعمیم این ابزارها

سید کمال الدین موسوی مشهدی<sup>۱</sup>، رجب اصغریان قناد یزدی<sup>۲</sup> و اسد عازمی<sup>۳</sup>

<sup>۱,۲</sup>دانشکده‌مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران، <sup>۳</sup>دانشکده‌مهندسی، دانشگاه پن‌استیت، آمریکا

k\_mousavi@yahoo.com

**چکیده:** مقاله حاضر به تعمیم و به کاربری ابزارهای آنالیز متداول سیستم خطی شامل ماتریس‌های توابع تبدیل گین حلقه  $L_1$ ,  $S_1$ , سیستم کنترل  $T_1$  و کنترل شده  $R_1$  به کلاس سیستم‌های کنترل غیرخطی نرم می‌پردازد. این روش امکان استفاده از اطلاعاتی را برای ما فراهم می‌آورد که بطور معمول در طریق خلی سازی یک سیستم غیرخطی نرم از بین می‌روند و از آنها در طراحی یک کنترل کننده خطی برای سیستم و یا آنالیز سیستم کلی بهره‌برداری می‌شود. کلیه محاسبات و تعمیم‌ها براساس حالت MIMO و در هر دو حوزه زمان و تبدیل لابلس چندبعدی صورت گرفته است. در پایان، اثر ابزارهای تحلیل ذکر شده، در یک سیستم غیرخطی بیان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های غیرخطی، توابع تبدیل تعمیم یافته، سری ولتا، ضرب کرونکر.

**Abstract:** Balanced realization has the advantage of producing some valuable information on controllability and observability (C/O) of the plant. This specification was used in pairing of MIMO plants to some SISO subplants. Using balanced realization, the pairs with better C/O are selected. In this paper the problem of pairing based on balanced realization is interpreted as an assignment problem. Therefore the Hungarian algorithm can utilize to solve the pairing problem. The algorithm is fully systematic and may be utilized in online and adaptive pairing. The pairing algorithm is also developed to reject any undesired pair like uncontrollable and/or unobservable pairs. With some modification, it is also applied to nonsquare plants.

**Keywords:** nonlinear systems, extended transfer functions, Volterra series, Kronecker product.

برای تقریب خطی دستگاه تحت کنترل کرده، که در پی آن، در حوزه کاری مورد علاقه، بروی دستگاه تحت کنترل واقعی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در صورت نامطلوب بودن میزان انجام صحیح وظایف سیستم کنترل، طراح مجدداً به مرحله طراحی کنترل کننده بازمی‌گردد (شکل ۱). اما در پاره‌های از سیستم‌های کنترل، اهمیت توجه به رفتار غیرخطی دستگاه‌های تحت کنترل، به مراتب بیشتر از آن است که در آخرین مرحله این روند صورت پذیرد [۲-۷]. در این وضعیت، کنترل کننده مقاوم خطی [۱۲-۸] یا کلاسیک خطی که بروی سیستم خطی شده نامی، بهترین عملکرد را دارد، هنگام بکارگیری بروی سیستم غیرخطی، در اکثر مواقع عملکرد مناسبی را ندارد. توجه به رفتارهای غیرخطی دستگاه‌های تحت کنترل علاوه‌بر اینکه می‌تواند سبب کاهش تعداد سعی و خطاهای در روند طراحی کنترل کننده خطی [۵,۶,۱۳] شود، می‌تواند سبب بهره‌برداری از سیستم کنترل در شرایط استرس [۲]، افزایش حوزه مقاوم بودن [۸]، تعیین دقیق‌تر حوزه پایداری و افزایش آن

## ۱. مقدمه

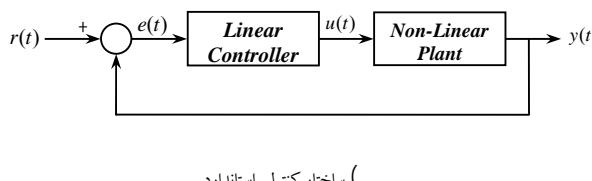
سیستم‌های فیزیکی، بطور ذاتی غیرخطی هستند، لذا تمامی دستگاه‌های تحت کنترل نیز در یک حوزه معین، غیرخطی هستند. از طرف دیگر، دستیابی به تمام اهداف مطلوب عملکردی برای سیستم‌های کنترل غیرخطی امکان‌پذیر نبوده و یک سیستم کنترل خوب را فقط می‌توان براساس سعی و خطاهای مؤثر بر حسب پایداری/ مقاوم بودن، پایداری/ عملکرد، هزینه/ عملکرد و نظایر آنها، بدست آورد. ولی، اگر غیرخطی‌ها نرم باشند و اگر وظایف سیستم کنترل در حوزه کوچک باشد و یا حرکت‌ها کند باشند، می‌توان از اثرات غیرخطی در دینامیک‌ها مرتفع نظر کرد و دستگاه تحت کنترل را بطور قابل قبولی بوسیله یک سیستم خطی شده، تقریب زد [۱]. در اینجا، با استفاده از تئوری‌های آسان کنترل خطی، می‌توان اقدام به طراحی کنترل کننده خطی

## نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های $L_1, S_1, T_1$ و $R_1$ و تعمیم این ابزارها، ک.موسوي، ر.اصغریان، ا.عازمی

این مقاله، روشی را معرفی می‌نماید که براساس آن می‌توان اطلاعات مفید موجود در سیستم غیرخطی نرم را حفظ کرد. ویژگی مثبت این روش آن است که با استفاده از تعمیم ماتریس‌های توابع تبدیل شناخته شده در کنترل خطی، می‌توان از مفاهیم سیستمی آنها در آنالیز و طراحی بهره برد. ارتباط بین مفاهیم کنترلی ردبایی مناسب و کاهش خطای ترکینگ و افزایش مقاومت‌بودن یک سیستم کنترل خطی با ماتریس‌های توابع تبدیل ( $s_1$ ،  $L_1(s_1)$ ،  $S_1(s_1)$ ،  $T_1(s_1)$ ،  $R_1(s_1)$ )، کاملاً شناخته شده و دارای کاربردهای فراوانی می‌باشد. این مقاله سعی دارد، این مفاهیم و ماتریس‌های توابع تبدیل آنها را به سیستم‌های کنترل غیرخطی تعمیم داده و ضمن معرفی یک گروه از ماتریس‌های توابع تبدیل  $L$ ،  $S$ ،  $T$  و  $R$ ، ایده‌ها و مفاهیم کنترلی آنها را نیز مورد استفاده قرار می‌دهد. بدین ترتیب، طراحان آشنا به روش و مفاهیم کنترل خطی، به راحتی قادر به استفاده از دانش و تجارب قبلی خود در زمینه آنالیز و طراحی سیستم‌های کنترل خطی بوده، ضمن آنکه امکان تنظیم پیچیدگی معادلات تعمیم‌یافته براساس شدت غیرخطی بودن سیستم، جهت حداقل استفاده از اطلاعات موجود در مدل غیرخطی فراهم می‌شود. مقاله با بیان صورت مسئله مورد بحث شروع می‌شود. توابع تبدیل تعمیم یافته و مبانی ریاضی بخش بعدی است. پس از این، بترتیب در بخش‌های بعدی، اقدام به تعیین نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی بر ماتریس‌های توابع تبدیل گین حلقه، خطای ترکینگ، سیستم کنترل و کنترل شده می‌شود. بر این اساس، برخی روابط بین آنها را محاسبه می‌کنیم. و در بخش بعد، در حالیکه به جای دستگاه غیرخطی تحت کنترل در شکل موردنظر، یک سیستم غیرخطی قرار می‌دهیم، ابزارهای تحلیل و طراحی را برای آن تعیین می‌کنیم.

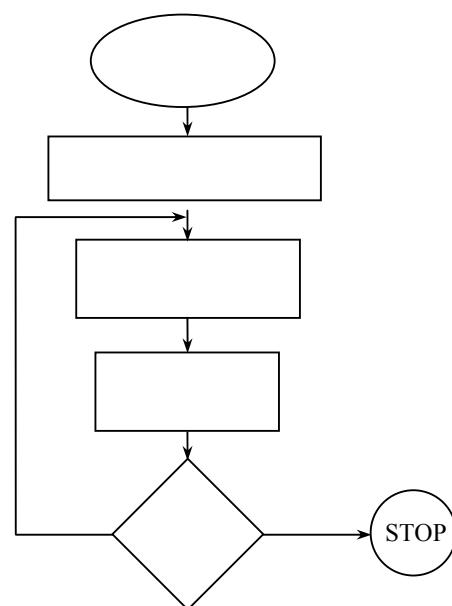
## ۲. مسئله ریاضی مورد بحث

در این مقاله مفاهیم، ابزارها و روش‌های آنالیزی سیستم‌های کنترل خطی که مبتنی بر ماتریس‌های توابع تبدیل ( $L_1(s_1)$ ،  $S_1(s_1)$ ،  $T_1(s_1)$  و  $R_1(s_1)$ ) هستند به سیستم‌های کنترل غیرخطی نرم تعمیم می‌یابند. ساختار در نظر گرفته شده برای این کار، ساختار کنترلی استاندارد ذیل است که هدف در آن، طراحی یک رگولاتور خطی به منظور برآورده ساختن نیازهای خطی و تاثیر کمتر عوامل غیرخطی دستگاه تحت کنترل بر عملکرد خطی است.



فرض می‌کنیم در این ساختار، دستگاه تحت کنترل یک سیستم ولتا با مجموعه پاسخ‌های ضربه‌منقارن ذیل بوده:

[۱۴,۱۵]، کاهش درجه کنترل کننده، قابلیت مانور بیشتر در طراحی [۳]، تامین بیشتر رفتار مطلوب سیستم کنترل [۲,۱۴,۱۶] و بالاخره، صرفه جویی در استفاده از منابع و امکانات [۱۵,۱۷] گردد. از این‌رو، روند طراحی کنترل کننده خطی فوق الذکر ناکافی بوده و نیاز به اصلاحات مناسبی دارد. اخیراً شاهد تحقیقات جدید درباره داخل کردن اطلاعات بیشتر از غیرخطی‌های دستگاه تحت کنترل، در پروسه‌های تحلیل و طراحی بوده‌ایم. دراین روش‌ها به عنوان مدل، به جای اینکه صرفاً عبارت خطی سیستم در نظر گرفته شود، سیستم غیرخطی اصلی و با تقریبی غیرخطی از آن، استفاده شده و تحلیل و طراحی سیستم کنترل دارای کنترل کننده خطی، براساس آن انجام می‌شود [۲,۴-۲۶,۱۶,۱۳,۱۸]. بدین ترتیب امکان استفاده از کنترل کننده‌های خطی در محدوده‌ای فراتر از حوزه کار خطی ولی - در داخل چهارچوبه عملکرد دستگاه غیرخطی تحت کنترل فراهم می‌شود. در واقع این روش‌ها، منجر به افزایش دقیق سیستم کنترل می‌شوند و ضمناً امکان چشم پوشی از اطلاعات بی‌ارزش درباره غیرخطی‌های سیستم را فراهم می‌آورند.



( ) روند طراحی کنترل کننده خطی، برای تقریب خطی سیستم غیرخطی

رفتار غیرخطی سیستم را می‌توان در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس مورد بررسی قرار داد. در حوزه زمانی، می‌توان از نرمال فرم و سری‌های ولتا و نظایر آن استفاده کرد [25,27-32] در حالیکه در حوزه فرکانس، می‌توان از تبدیلات لاپلاس کرنل‌های ولتا استفاده کرد [29,30]. عدمه تحقیقات صورت گرفته با سری‌های ولتا، بر حل مسائل خاص است و حداقل ارائه ابزارهای خاص برای حل مسائل خاص است. در این میان، فقادان ابزارهای عمومی که بتوان بوسیله آنها رفتارهای غیرخطی را مشابه با رفتارهای خطی بیان کرد، مشهود است [19-21,23,24].

## نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های $\mathbf{L}_1, \mathbf{S}_1$ و $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{R}_1$ و تعمیم این ابزارها، که موسوی، راصغریان، اعزمی

در رابطه (۳) نیز،  $y_1(t)$  همان پاسخ سیستم خطی شده به ورودی  $u(t)$  می‌باشد و  $y_2(t), \dots, y_n(t)$  بترتیب نشان‌دهنده عملکرد غیرخطی درجه دوم، ... و درجه  $n$  ام سیستم مورد نظر به‌ازای ورودی  $u(t)$  می‌باشند. در اینجا،  $\mathbf{h}_1(\tau_1)$  همان پاسخ ضربه سیستم خطی شده می‌باشد. از طرف دیگر، رابطه (۴) بنام سری ولترا خوانده می‌شود. در عمل، این نوع نمایش وقتی بیشترین کاربرد را دارد که بتوان با یک تقریب مناسب، فقط از چند جمله اول آن استفاده کرد. بدین ترتیب، اگر فقط  $N$  جمله اول سری در نظر گرفته شوند، پاسخ کلی سیستم غیرخطی، عبارت از مجموع  $N$  پاسخ منحصر بفرد است. عبارت دیگر، این روش و تحلیل‌هایی که انجام می‌شود، برای سیستم‌های کنترل غیرخطی کلاس  $k$  (پیوسته از مرتبه  $k$ ) قابل استفاده و پیاده‌سازی است و درحالی اخیر، سری‌ها و توابع تبدیل تعمیم‌یافته‌ای که بدست می‌آیند، تا درجه  $k$  خواهد بود.

با استفاده از تبدیل لاپلاس چند بعدی، تبدیل لاپلاس رابطه (۴) بصورت ذیل خواهد بود:

$$Y_n(s_1, s_2, \dots, s_n) = \mathbf{H}_n(s_1, s_2, \dots, s_n) [U(s_1) \otimes U(s_2) \otimes \dots \otimes U(s_n)] \quad (4)$$

جاییکه  $U(s)$  تبدیل لاپلاس  $u(t)$  و  $\mathbf{H}_n(s_1, s_2, \dots, s_n)$  تبدیل لاپلاس چند بعدی  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  می‌باشد. همچنین  $y_n(t)$ ، از رابطه ذیل و پس از جایگزینی  $t$  بجای  $t_1, \dots, t_n$  قابل محاسبه خواهد بود:

$$y_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi j)^n} \int_{c_1-j\infty}^{c_1+j\infty} \int_{c_2-j\infty}^{c_2+j\infty} \dots \int_{c_n-j\infty}^{c_n+j\infty} Y_n(s_1, s_2, \dots, s_n) e^{s_1 t_1 + s_2 t_2 + \dots + s_n t_n} ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad (5)$$

روش دیگر، استفاده از اشتراک متغیرها است. برطبق این روش  $Y_n(s_1, \dots, s_n)$ ، مرحله به مرحله معکوس می‌شود تا به  $(s)$  برسد و از آنجا  $y_n(t)$  بدست خواهد آمد.

همانگونه که مشاهده می‌شود، با استفاده از کرنل‌های ولترا و تبدیلات لاپلاس آنها، به نوعی می‌توان از تلاش‌هایی که برروی سیستم‌های خطی صرف شده است، برای مطالعه سیستم‌های غیرخطی استفاده کرد.<sup>۱</sup>

از آنجاییکه کرنل‌های ولترا به طرز واحدی نمایش داده نمی‌شوند، لذا بمنظور ایجاد یکتایی، از شکل متقاضن که یک شکل استاندارد است و مانند

---

[30]

$$\mathbf{s}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \{\mathbf{s}_1(\tau_1), \mathbf{s}_2(\tau_1, \tau_2), \dots, \mathbf{s}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \dots\} \quad (6)$$

که مجموعه ماتریس‌های توابع تبدیل آنها برابر:

$$\mathbf{H}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \{\mathbf{H}_1(s_1), \mathbf{H}_2(s_1, s_2), \dots, \mathbf{H}_n(s_1, s_2, \dots, s_n), \dots\} \quad (7)$$

است،  $y(t)$  و  $u(t)$  نیز بترتیب بردارهای ورودی و خروجی دستگاه تحت کنترل بوده که با رابطه (۸) به یکدیگر مربوط هستند و  $r(t)$  نیز بردار ورودی مرجع دلخواه می‌باشد. همچنین در آن،  $\mathbf{C}(s)$  پاسخ ضربه کنترل کننده خطی و  $\mathbf{C}(s)$  ماتریس تابع تبدیل آن است بطوریکه ماتریس معکوس  $\mathbf{C}(s)^{-1}$  وجود دارد و علی است. فرض تقارن پاسخ‌های ضربه، خلی ب کلیت مستله وارد نمی‌سازد.

مبانی ریاضی برای تعیین نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی بر سیستم کنترل مورد نظر، بخش بعدی این مقاله است.

### ۳. مبانی ریاضی

بمنظور نمایش کامل رفتارهای ورودی – خروجی دستگاه بزرگ از سیستم‌های غیرخطی، بدون نیاز به اطلاع قبلي درباره ورودی، می‌توان از سری‌های ولترا استفاده کرد [29,30,33]. این سری‌ها را می‌توان برای نمایش سیستم‌های با غیرخطی‌های نرم بکاربرد [19]. این نوع نمایش، درواقع یک تعمیم مستقیم پاسخ ضربه حالت خطی است که با این دید، سیستم‌های خطی، یک زیرکلاس از سیستم‌های غیرخطی می‌باشند. در این تحقیق، دستگاه تحت کنترل یک سیستم ولترا است، بدین معنی که اگر  $y(t)$  و  $u(t)$  بترتیب بردارهای ورودی و خروجی دستگاه تحت کنترل باشند، آنها با رابطه (۳) ذیل به یکدیگر مربوط هستند:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (8)$$

هریک از اجزاء از رابطه (۸) ذیل بدست می‌آیند (بافرض‌های شرایط اولیه صفر، نامتغیر بازمان، علیت و  $0 = u(t)$  برای  $t < 0$ ):

$$y_n(t) = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{h}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) [u(t-\tau_1) \otimes u(t-\tau_2) \otimes \dots \otimes u(t-\tau_n)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (9)$$

در رابطه (۹)،  $\otimes$  نماد ضرب کرونکر بوده [34] و ماتریس‌های  $\mathbf{h}_n$  دارای ابعاد مناسب هستند. در رابطه (۹)، به عبارت  $\mathbf{h}_n$ ، پاسخ ضربه درجه  $n$  ام گفته می‌شود. اگرچه به پاسخ ضربه  $\mathbf{h}_n$ ، کرنل ولترا نیز گفته می‌شود.

## نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های $L_1, S_1, T_1$ و $R_1$ و تعمیم این ابزارها، ک.موسوي، ر.اصغریان، ا.عازمی

جاییکه هر یک از اعضاء مجموعه در رابطه<sup>(۱۳)</sup>، بصورت ذیل بدست می‌آیند:

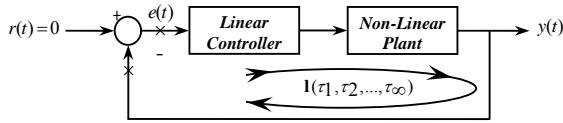
$$L_1(s_1) = H_1(s_1)C(s_1) \quad (1)$$

$$L_2(s_1, s_2) = H_2(s_1, s_2)[C(s_1) \otimes C(s_2)] \quad (2)$$

$$L_i(s_1, s_2, \dots, s_i) = H_i(s_1, s_2, \dots, s_i)[C(s_1) \otimes C(s_2) \otimes \dots \otimes C(s_i)] \quad (3)$$

**تومینولوژی:** در رابطه<sup>(۱۲)</sup>، به عبارت  $I_n$ ، گین یا پاسخ ضربه‌یا کرنل ولترای درجه  $n$  ام حلقه گفته و به مجموعه  $I(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\infty)$  مجموعه پاسخ‌های ضربه‌حلقه می‌گوییم. همچنین در رابطه<sup>(۱۳)</sup>، به عبارت  $L_n$  ماتریس تابع تبدیل‌گین  $n$  ام حلقه‌یا ماتریس تابع تبدیل درجه  $n$  ام حلقه گفته و به مجموعه  $L(s_1, s_2, \dots, s_\infty)$  مجموعه ماتریس‌های توابع تبدیل حلقه می‌گوییم.

علت نامگذاری  $I_n$ ، بنام گین  $n$  ام حلقه یا پاسخ ضربه درجه  $n$  ام حلقه این است که آن در شکل<sup>(۲)</sup>، برابر با گین مسیری دایره‌وار است که از خروجی جمع‌کننده شروع شده و تا نقطه ورود به آن امتداد می‌یابد(شکل<sup>(۳)</sup>).



(ساختار کنترلی استاندارد برای تعریف گین یا گین‌های حلقه

با توجه به تعریف سری ولترا (رابطه<sup>(۳)</sup>) و (رابطه<sup>(۱۲)</sup>)، سیگنال نهایی حلقه در شکل<sup>(۳)</sup> (خروچی سیستم در ساختار شکل<sup>(۲)</sup>) بر حسب ورودی  $e(t)$  می‌تواند بصورت ذیل نوشته شود.

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t I_1(\tau_1) e(t - \tau_1) d\tau_1 + \\ & + \int_0^t \int_0^t I_2(\tau_1, \tau_2) [e(t - \tau_1) \otimes e(t - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ & + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t I_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) [e(t - \tau_1) \otimes e(t - \tau_2) \otimes \dots \\ & \otimes e(t - \tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

در این رابطه ویا بطور متاظر رابطه<sup>(۳)</sup>، اولین عبارت، حاصل عملکرد سیستم خطی شده به ورودی  $e(t)$  می‌باشد و عبارت‌های دیگر نیز، نمایانگر اثرات عملکرد‌های غیرخطی حلقه، به‌ازای ورودی  $e(t)$  می‌باشند(شکل<sup>(۳)</sup>. ضمناً،

$I_1(\tau_1)$  همان پاسخ ضربه حلقة سیستم خطی شده می‌باشد (به طبع آن

$L_1(s_1)$  ماتریس تابع تبدیل گین حلقة سیستم خطی شده می‌باشد).

از این‌رو، برای کاهش عملکرد غیرخطی حلقه، به‌ازای ورودی  $e(t)$ ، کافی است که هر یک از اجزاء درجه ۲ به بالا در رابطه<sup>(۳)</sup> و یا بطور متاظر

آن استفاده می‌شود [۲۹]. بر طبق تعریف، کرنل ولترای متقارن در رابطه ذیل صدق می‌کند:

$$H_n(s_1, s_2, \dots, s_n) = H_n(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \dots, s_{\pi(n)}) \quad (5)$$

جاییکه  $\pi$  نشان‌دهنده هر جایگشتی از اعداد صحیح  $1, 2, \dots, n$  است. همچنین کرنل‌های ولترای می‌توان به شکل ذیل متقارن ساخت:

$$H_{n_{sym}}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{n!} \{ H_n(s_1, s_2, \dots, s_n) + \dots + H_n(s_n, s_{n-1}, \dots, s_1) \} \quad (6)$$

دیگر تحقیقات انجام شده بر روی سیستم‌های ولترا درباره همگرایی (Controllability)، مشاهده‌پذیری (Convergence)، قابلیت پیاده‌سازی (Realizability) و نظایر آن است که می‌توان آنها را در [۲۹, ۳۰] مشاهده کرد.

## ۴. تعیین نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی بر ماتریس تابع تبدیل گین حلقه

برای این‌منظور، گین مسیر از  $y(t)$  به  $e(t)$  را تعیین می‌نماییم. بین  $e(t)$  و  $u(t)$  روابط ذیل وجود دارد:

$$u(t) = \int_0^t c(\tau) e(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

$$U(s) = C(s) E(s) \quad (8)$$

از طرف دیگر، بین  $u(t)$  و  $y(t)$  نیز روابط<sup>(۳)</sup> و (۴) برقرار است. پس از جایگذاری رابطه<sup>(۱۰)</sup> در رابطه<sup>(۵)</sup> و بازنویسی آن با توجه به خواص ضرب کرونکر، رابطه ذیل بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} Y_n(s_1, s_2, \dots, s_n) = & H_n(s_1, s_2, \dots, s_n) [C(s_1) \otimes C(s_2) \otimes \dots \otimes C(s_n)] (9) \\ & [E(s_1) \otimes E(s_2) \otimes \dots \otimes E(s_n)] \end{aligned}$$

بدین ترتیب،  $y(t)$  با یک مجموعه از پاسخ‌های ضربه با  $e(t)$  مرتبط است. اگر این مجموعه را بصورت ذیل در نظر بگیریم:

$$I(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\infty) = \{I_1(\tau_1), I_2(\tau_1, \tau_2), \dots, I_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \dots\} \quad (10)$$

تبدیل لایاس چند بعدی آنها بصورت ذیل خواهد بود:

$$L(s_1, s_2, \dots, s_\infty) = \{L_1(s_1), L_2(s_1, s_2), \dots, L_n(s_1, s_2, \dots, s_n), \dots\} \quad (11)$$

## نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های $\mathbf{T}_1$ , $\mathbf{S}_1$ , $\mathbf{L}_1$ و $\mathbf{R}_1$ و تعمیم این ابزارها، ک.موسوی، ر.اصغریان، ا.عازمی

و کافی، وجود  $(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}$  است. برای وجود این معکوس نیز، تنها وجود معکوس اپراتور خطی کافی است. علاوه بر این اگر آن علی باشد جواب از لحاظ تئوری کنترل جذاب است. مطابق با فرض مسئله، این هر دو شرط وجود دارد و لذا در حالت کلی،  $e(t)$  یک سری است که با یک مجموعه از پاسخ‌های ضربه با  $r(t)$  مرتبط می‌باشد. یعنی داریم:

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \quad (1)$$

که با مجموعه پاسخ‌های ضربه ذیل:

$$\begin{aligned} s(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\infty) = \\ \{s_1(\tau_1), s_2(\tau_1, \tau_2), \dots, s_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \dots\} \end{aligned} \quad (2)$$

با  $r(t)$  مرتبط است و تبدیل لاپلاس چند بعدی آنها بصورت ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} S(s_1, s_2, \dots, s_\infty) = \\ \{S_1(s_1), S_2(s_1, s_2), \dots, S_n(s_1, s_2, \dots, s_n), \dots\} \end{aligned} \quad (3)$$

**پروپوزیشن ۱:** توابع تبدیل  $S_i$  از دسته معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$S_1(s_1) = [I + L_1(s_1)]^{-1} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S_2(s_1, s_2) = \\ -S_1(s_1 + s_2)L_2(s_1, s_2)[S_1(s_1) \otimes S_1(s_2)] \end{aligned} \quad (5)$$

---


$$\begin{aligned} S_i(s_1, s_2, \dots, s_i) = -S_1(s_1 + s_2 + \dots + s_i) \frac{1}{i!} \sum_{m=2}^i \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = i \\ 1 \leq k_1, k_2, \dots, k_m}} \sum_{\pi_i} \\ L_m(s_{j_1} + \dots + s_{j_{k_1}}, s_{j_{(k_1+1)}} + \dots + s_{j_{(k_1+k_2)}}, \dots, s_{j_{(k_1+\dots+k_{m-1}+1)}} + \dots + s_{j_i}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left[ S_{k_1}(s_{j_1}, \dots, s_{j_{k_1}}) \otimes S_{k_2}(s_{j_{(k_1+1)}}, \dots, s_{j_{(k_1+k_2)}}) \otimes \dots \otimes S_{k_m}(s_{j_{(k_1+\dots+k_{m-1}+1)}}, \dots, s_{j_i}) \right]$$

**اثبات:** ابتدا  $y(t)$  را از رابطه (۱۷) در رابطه (۱۸) جایگذاری کرده و سپس با جابجایی عبارت‌های مربوط به  $e(t)$ , رابطه ذیل بدست می‌آید:

رابطه (۱۷)، کاهش یابند. برای کاهش هر عبارت صرفنظر از ورودی  $e(t)$ ، کافی است که پاسخ ضربه حلقة مربوط به آن عبارت، به نحو مناسبی کاهش یابد. اما در تمامی  $L_i(s_1, s_2, \dots, s_i)$ , مضارب کنترل کننده خطی بصورت  $C(s_1) \otimes C(s_2) \otimes \dots \otimes C(s_i)$  وجود دارد. لذا برای تغییر در اندازه هر یک از  $L_i(s_1, s_2, \dots, s_i)$  کافی است رگولاتور خطی بگونه‌ای طراحی شود که  $C(s_1) \otimes C(s_2) \otimes \dots \otimes C(s_i)$  به نحو مناسبی تغییر یابد. خوشبختانه این بیانگر این نکته است که شکل دهنده  $C(s)$  که موضوع روش‌های طراحی کنترل کننده خطی است (نتیر مسئله حساسیت مخلوط وزن)، منجر به نوعی کنترل بر عوامل غیرخطی حلقة خواهد شد.

## ۵. تعیین نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی بر ماتریس تابع تبدیل خطای ترکینگ

برای این‌منظور، کافی است که سیگال خطای ترکینگ ( $e(t)$ ) را در سیستم شکل (۲)، بر حسب ورودی مرجع ( $r(t)$ ) محاسبه نماییم زیرا بوسیله آن، می‌توان ماتریس‌های توابع انتقال از  $r(t)$  به  $e(t)$  را بدست آورد.

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (7)$$

$$e(t) = r(t) - I[e(t)] \quad (8)$$

بنابراین،  $r(t)$  بوسیله یک سری و باکمک یک مجموعه از پاسخ‌های ضربه با  $e(t)$  مرتبط است. اما برای تعیین  $e(t)$  بر حسب  $r(t)$ ، شرط لازم

---


$$\sum_{\pi_i} \text{نشان‌دهنده جمع بر روی همه } j_1, j_2, \dots, j_i \text{ است} \quad (\text{جاویکه})$$

بطوریکه  $j_1, j_2, \dots, j_i$  یک جایگشتی از اعداد  $i, 2, 1$  هستند.

---


$$\begin{aligned} r(t) = e(t) + \int_0^t I_1(\tau_1) e(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t I_2(\tau_1, \tau_2) [e(t - \tau_1) \otimes e(t - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t I_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) [e(t - \tau_1) \otimes e(t - \tau_2) \otimes \dots \otimes e(t - \tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i + \dots \end{aligned} \quad (\text{راحت})$$

اما با استفاده ازتابع ضربه، می‌توان  $e(t)$  را زیر انتگرال برد و با جایگذاری  $e(t)$  از رابطه (۲۰)، داریم:

$$r(t) = \int_0^t [\delta(\tau_1) + \mathbf{I}_1(\tau_1)] \sum_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1}(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t \mathbf{I}_2(\tau_1, \tau_2) \left[ \sum_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1}(t - \tau_1) \otimes \sum_{n_2=1}^{\infty} e_{n_2}(t - \tau_2) \right] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{I}_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) \left[ \sum_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1}(t - \tau_1) \otimes \sum_{n_2=1}^{\infty} e_{n_2}(t - \tau_2) \otimes \dots \otimes \sum_{n_i=1}^{\infty} e_{n_i}(t - \tau_i) \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i \quad ( )$$

و در آخر، با دسته‌بندی جملات هم درجه و با توجه به خواص ضرب کرونکر، روابط ذیل بدست خواهد آمد:

$$\int_0^t [\delta(\tau_1) + \mathbf{I}_1(\tau_1)] e_1(t - \tau_1) d\tau_1 = r(t) \quad ( )$$

$$\int_0^t [\delta(\tau_1) + \mathbf{I}_1(\tau_1)] e_2(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t \mathbf{I}_2(\tau_1, \tau_2) [e_1(t - \tau_1) e_1(t - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = 0 \quad ( )$$

$$\int_0^t [\delta(\tau_1) + \mathbf{I}_1(\tau_1)] e_i(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t \mathbf{I}_2(\tau_1, \tau_2) \sum_{n_1+n_2=i} [e_{n_1}(t - \tau_1) \otimes e_{n_2}(t - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{I}_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) [e_1(t - \tau_1) \otimes e_1(t - \tau_2) \otimes \dots \otimes e_1(t - \tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i = 0 \quad ( )$$

اکنون، از دسته معادلات (۲۸) تا (۳۰)، تبدیل لاپلاس چند بعدی می‌گیریم و پس از مرتب کردن آنها، ماتریس‌های توابع تبدیل از  $r(t)$  به  $e(t)$ ، با توجه به رابطه (۸) و خواص ضرب کرونکر، بصورت روابط متقارن (۲۳) تا (۲۵) بدست می‌آیند.

**ترمینولوژی :** در رابطه (۲۱) به عبارت  $\mathbf{S}_n$ ، پاسخ ضربه یا کرنل ولترای درجه  $n$  ام خطای ترکینگ گفته و به مجموعه  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  مجموعه پاسخ‌های ضربه خطای ترکینگ می‌گوییم. همچنین در رابطه (۲۲)، به عبارت  $\mathbf{S}_n$  ماتریس تابع تبدیل درجه  $n$  ام با توجه به تعریف سری ولترا (رابطه (۳۳)) و روابط (۲۰) و (۲۱)، سیگنان خطای ترکینگ (۲) در شکل (۲) بر حسب ورودی مرجع  $r(t)$  می‌تواند بصورت ذیل نوشته شود:

$$e(t) = \int_0^t \mathbf{s}_1(\tau_1) r(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t \mathbf{s}_2(\tau_1, \tau_2) [r(t - \tau_1) \otimes r(t - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{s}_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) [r(t - \tau_1) \otimes r(t - \tau_2) \otimes \dots \otimes r(t - \tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i \quad ( )$$

رابطه (۳۱)، تقلیل یابند. برای کاهش هر عبارت صرفنظر از ورودی مرجع  $r(t)$ ، کافی است که پاسخ ضربه خطای ترکینگ مربوط به آن عبارت به نحو مناسبی کاهش یابد.

در این رابطه و یا بطور متناظر رابطه (۲۰)، اولین عبارت، خطای ترکینگ پاسخ سیستم خطی شده به ورودی مرجع  $r(t)$  است و عبارت‌های دیگر نیز، نمایانگر خطاهای ترکینگ حاصل از عملکرد غیرخطی سیستم مورد نظر بازای ورودی مرجع  $r(t)$  می‌باشند (شکل ۲). ضمناً،  $\mathbf{s}_1(\tau_1)$  همان پاسخ ضربه خطای ترکینگ در سیستم خطی شده می‌باشد (به طبع آن  $\mathbf{S}_1(s_1)$  ماتریس تابع تبدیل خطای ترکینگ در سیستم خطی شده می‌باشد).

از اینرو، برای کاهش خطاهای ترکینگ حاصل از عملکرد غیرخطی، کافی است که هر یک از اجزاء درجه ۲ به بالا در رابطه (۲۰) و یا بطور متناظر

نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{L}_1$  و  $\mathbf{T}_2$  و تعمیم این ابزارها، که موسوی، راصغریان، اعازمی

$$\mathbf{t}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\infty) = \{\mathbf{t}_1(\tau_1), \mathbf{t}_2(\tau_1, \tau_2), \dots, \mathbf{t}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \dots\} \quad (1)$$

با  $r(t)$  مرتبط است و تبدیل لاپلاس چند بعدی آنها بصورت ذیل خواهد بود:

$$\mathbf{T}(s_1, s_2, \dots, s_\infty) = \{\mathbf{T}_1(s_1), \mathbf{T}_2(s_1, s_2), \dots, \mathbf{T}_n(s_1, s_2, \dots, s_n), \dots\} \quad (2)$$

**پروپوزیشن ۲:** توابع تبدیل  $\mathbf{T}_i$  از دسته معادلات زیر بدهست می‌آیند:

## ۶. تعیین نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی بر ماتریس تابع تبدیل سیستم کنترل

برای این منظور، کافی است که در سیستم شکل (۲)، سیگنال خروجی  $y(t)$  را بر حسب ورودی مرجع  $r(t)$  محاسبه نماییم تا بوسیله آن بتوان، ماتریس‌های توابع انتقال از  $r(t)$  به  $y(t)$  را بدست آورد. با توجه به رابطه (۱۸)، رابطه (۳۱) را می‌توان بصورت ذیل بازنویسی کرد:

$$y(t) = r(t) - \mathbf{s}[r(t)] \quad (3)$$

لذا در حالت کلی،  $y(t)$  یک سری است که با یک مجموعه از پاسخ‌های ضربه با  $r(t)$  مرتبط می‌باشد. یعنی سری نشان‌داده شده در رابطه (۳)، با مجموعه پاسخ‌های ضربه ذیل:

$$\mathbf{T}_1(s_1) = \mathbf{L}_1(s_1) [I + \mathbf{L}_1(s_1)]^{-1} \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_2(s_1, s_2) = \mathbf{S}_1(s_1 + s_2) \mathbf{L}_2(s_1, s_2) [\mathbf{S}_1(s_1) \otimes \mathbf{S}_1(s_2)] \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_i(s_1, s_2, \dots, s_i) = \mathbf{S}_1(s_1 + s_2 + \dots + s_i) \frac{1}{i!} \sum_{m=2}^i \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = i \\ 1 \leq k_1, k_2, \dots, k_m}} \sum_{\pi_i}$$

$$\mathbf{L}_m(s_{j_1} + \dots + s_{j_{k_1}}, s_{j_{(k_1+1)}} + \dots + s_{j_{(k_1+k_2)}}, \dots, s_{j_{(k_1+\dots+k_{m-1}+1)}} + \dots + s_{j_i}) \quad (6)$$

$$\left[ \mathbf{S}_{k_1}(s_{j_1}, \dots, s_{j_{k_1}}) \otimes \mathbf{S}_{k_2}(s_{j_{(k_1+1)}}, \dots, s_{j_{(k_1+k_2)}}) \otimes \dots \otimes \mathbf{S}_{k_m}(s_{j_{(k_1+\dots+k_{m-1}+1)}}, \dots, s_{j_i}) \right]$$

**اثبات:** ابتدا  $e(t)$  را از رابطه (۲۰) در رابطه (۱۷) جایگذاری کرده و سپس با دسته‌بندی جملات هم درجه و نیز با توجه به رابطه (۳) و خواص ضرب کرونکر، می‌توان روابط ذیل را نوشت:

$$y_1(t) = \int_0^t \mathbf{l}_1(\tau_1) e_1(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (7)$$

$$y_2(t) = \int_0^t \mathbf{l}_1(\tau_1) e_2(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t \mathbf{l}_2(\tau_1, \tau_2) [e_1(t - \tau_1) \otimes e_1(t - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2$$

$$y_i(t) = \int_0^t \mathbf{l}_1(\tau_1) e_i(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t \mathbf{l}_2(\tau_1, \tau_2) \sum_{n_1+n_2=i} [e_{n_1}(t - \tau_1) \otimes e_{n_2}(t - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad (8)$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{l}_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) [e_1(t - \tau_1) \otimes e_1(t - \tau_2) \otimes \dots \otimes e_1(t - \tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i \quad (9)$$

## نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های $L_1, S_1, T_1$ و $R_1$ و تعمیم این ابزارها، ک.موسوي، راصغریان، اعازمی

مجموعه پاسخ‌های ضربه سیستم کنترل می‌گوییم. همچنین در رابطه (۳۴)، به عبارت  $T_n$  ماتریس تابع تبدیل درجه  $n$  ام سیستم کنترل گفته و به مجموعه  $(T_{s_1, s_2, \dots, s_\infty})$  مجموعه ماتریس‌های توابع تبدیل سیستم کنترل می‌گوییم.

علت نامگذاری  $t_n$ ، بنام پاسخ ضربه درجه  $n$  ام سیستم کنترل این است که آن در شکل (۲)، برابر با پاسخ ضربه سیستم کنترل با ورودی منطبق بر ورودی مرجع ساختار کنترلی و خروجی منطبق بر سیگال خروجی ساختار کنترلی می‌باشد.

با توجه به تعریف سری ولترا (رابطه (۳)) و (رابطه (۳۳)، سیگال خروجی سیستم کنترل در شکل (۲) برحسب ورودی مرجع  $r(t)$  می‌تواند بصورت ذیل نوشته شود:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t t_i(\tau_i) r(t - \tau_i) d\tau_i + \\ &\quad \int_0^t \int_0^t t_i(\tau_i, \tau_r) [r(t - \tau_i) \otimes r(t - \tau_r)] d\tau_i d\tau_r + \dots + \\ &\quad \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t t_i(\tau_i, \tau_r, \dots, \tau_i) [r(t - \tau_i) \otimes r(t - \tau_r) \otimes \dots \otimes r(t - \tau_i)] d\tau_i d\tau_r \dots d\tau_i + \dots \\ y_2(t) &= -e_2(t) \\ &\vdots \\ y_i(t) &= -e_i(t) \end{aligned} \quad (۱)$$

**اثبات:** از مقایسه مجموعه روابط (۳۵) تا (۳۷) با مجموعه روابط (۲۳) تا (۲۵)، مشاهده می‌شود که این دو مجموعه، به شکل مجموعه روابط (۴۳) تا (۴۵) با یکدیگر منطبق هستند. همچنین روابط متناظر با این دسته از معادلات را می‌توان با استفاده از جایگذاری دسته معادلات (۳۸) تا (۴۰) در مجموعه روابط (۲۸) تا (۳۰)، بصورت مجموعه روابط (۴۶) تا (۴۸) نوشت.

بدیهی است که دسته معادلات (۴۶) تا (۴۸)، نسبت به دسته معادلات (۳۸) تا (۴۰)، به مرتبه ساده‌تر هستند.

## ۷. تعیین نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی بر ماتریس تابع تبدیل کنترل شده

برای این منظور کافی است که در سیستم شکل (۲)، سیگال خروجی کنترل کننده  $(u(t))$  را بر حسب ورودی مرجع  $(r(t))$  محاسبه نمود تا بعداً بتوان بوسیله آن، ماتریس‌های توابع انتقال از  $(u(t))$  به  $(r(t))$  را بدست آورد. با توجه به شکل (۲) و رابطه (۹)، خروجی  $(u(t))$  بصورت  $e(t) = \mathbf{c}[e(t)]$  مربوط می‌شود. اما  $(e(t))$  بر طبق رابطه (۳۱)، برابر است با:  $e(t) = \mathbf{s}[r(t)]$ . پس در حالت کلی،  $u(t) = \mathbf{s}[r(t)]$  یک سری

اکنون از دسته معادلات (۳۸) تا (۴۰)، تبدیل لاپلاس چند بعدی می‌گیریم و با استفاده از روابط (۲۳) تا (۲۵) و پس از فاکتور گیری و توجه به رابطه شناخته شده  $S_1(s) + T_1(s) = I$  و نیز خواص ضرب کرونکر و رابطه (۸)، ماتریس‌های توابع تبدیل از  $r(t)$  به  $y(t)$ ، بصورت روابط متقابن (۳۵) تا (۳۷) بدست می‌آیند.

**تذکر:** به راحتی ثابت می‌شود که رابطه  $S_1(s) + T_1(s) = I$  در سیستم‌های خطی برقرار بود، در ساختار کنترلی شکل (۲) نیز برقرار است. یعنی اگر روابط (۲۳) و (۳۵) را با هم جمع نماییم:

$$S_1(s_1) + T_1(s_1) = I \quad (۲)$$

**ترمینولوژی:** در رابطه (۳۳) به عبارت  $t_n$ ، پاسخ ضربه یا کرنل ولترای درجه  $n$  ام سیستم کنترل گفته و به مجموعه  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\infty)$  مراجع نماییم:

در این رابطه و یا بطور متناظر رابطه (۳)، اولین عبارت، پاسخ سیستم کنترل خطی شده به ورودی مرجع  $r(t)$  می‌باشد و عبارت‌های دیگر نیز، نمایانگر اثرات عملکرد غیرخطی، در خروجی  $y(t)$  سیستم کنترل مورد نظر به ازای ورودی مرجع  $r(t)$  می‌باشند (شکل (۲)). ضمناً،  $t_1(s_1)$  نیز ماتریس تابع تبدیل سیستم کنترل خطی شده می‌باشد (به طبع آن  $T_1(s_1)$  نیز ماتریس کنترل  $r(t)$  می‌باشد).

از اینرو، برای کاهش عملکرد غیرخطی خروجی  $y(t)$ ، به ازای ورودی مرجع  $r(t)$ ، کافی است که هر یک اجزاء درجه ۲ به بالا در رابطه (۳) و یا بطور متناظر رابطه (۴۲)، کاهش یابند. برای کاهش هر عبارت صرفظیر از ورودی مرجع  $r(t)$ ، کافی است که پاسخ ضربه سیستم کنترل مربوط به آن عبارت، به نحو مناسبی کاهش یابد.

**پروپوزیشن ۳:**  $S_i$  ها و  $T_i$  ها به شکل ذیل با یکدیگر ارتباط دارند:

$$T_1(s_1) = L_1(s_1) S_1(s_1) \quad (۳)$$

$$T_2(s_1, s_2) = -S_2(s_1, s_2) \quad (۴)$$

$$T_i(s_1, s_2, \dots, s_i) = -S_i(s_1, s_2, \dots, s_i) \quad (۵)$$

علاوه بر این،  $(e_i(t))$  ها و  $(y_i(t))$  ها نیز به شکل ذیل با یکدیگر ارتباط دارند:

$$y_1(t) = r(t) - e_1(t) \quad (۶)$$

نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های  $\mathbf{R}_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{L}_1$  و  $\mathbf{C}_1$  و تعمیم این ابزارها، که موسوی، راصغریان، اعازمی

است که با یک مجموعه از پاسخ‌های ضربه با  $r(t)$  مرتبط می‌باشد. یعنی با  $r(t)$  مرتبط است و تبدیل لاپلاس چند بعدی آنها بصورت ذیل خواهد بود:

$$\mathbf{R}(s_1, s_2, \dots, s_\infty) = \{\mathbf{R}_1(s_1), \mathbf{R}_2(s_1, s_2), \dots, \mathbf{R}_n(s_1, s_2, \dots, s_n), \dots\} \quad ( )$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \quad ( )$$

**پروپوزیشن ۴:** توابع تبدیل  $\mathbf{R}_i$  از دسته معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\mathbf{t}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\infty) = \{\mathbf{t}_1(\tau_1), \mathbf{t}_2(\tau_1, \tau_2), \dots, \mathbf{t}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \dots\} \quad ( )$$

$$\mathbf{R}_1(s_1) = \mathbf{C}(s_1) [I + \mathbf{L}_1(s_1)]^{-1} \quad ( )$$

$$\mathbf{R}_2(s_1, s_2) = -\mathbf{C}(s_1 + s_2) \mathbf{S}_1(s_1 + s_2) \mathbf{L}_2(s_1, s_2) [\mathbf{S}_1(s_1) \otimes \mathbf{S}_1(s_2)] \quad ( )$$

$$\mathbf{R}_i(s_1, s_2, \dots, s_i) = -\mathbf{C}(s_1 + s_2 + \dots + s_i) \mathbf{S}_1(s_1 + s_2 + \dots + s_i) \frac{1}{i!} \sum_{m=2}^i \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=i \\ 1 \leq k_1, k_2, \dots, k_m}} \sum_{\pi_i} \mathbf{L}_m(s_{j_1} + \dots + s_{j_{k_1}}, s_{j_{(k_1+1)}} + \dots + s_{j_{(k_1+k_2)}}, \dots, s_{j_{(k_1+\dots+k_{m-1}+1)}} + \dots + s_{j_i}) \quad ( )$$

$$\mathbf{L}_m(s_{j_1} + \dots + s_{j_{k_1}}, s_{j_{(k_1+1)}} + \dots + s_{j_{(k_1+k_2)}}, \dots, s_{j_{(k_1+\dots+k_{m-1}+1)}} + \dots + s_{j_i}) \quad ( )$$

$$\left[ \mathbf{S}_{k_1}(s_{j_1}, \dots, s_{j_{k_1}}) \otimes \mathbf{S}_{k_2}(s_{j_{(k_1+1)}}, \dots, s_{j_{(k_1+k_2)}}) \otimes \dots \otimes \mathbf{S}_{k_m}(s_{j_{(k_1+\dots+k_{m-1}+1)}}, \dots, s_{j_i}) \right]$$

ماتریس‌های توابع تبدیل از  $r(t)$  به  $u(t)$ ، بصورت روابط متقارن(۵۲) تا (۵۴) بدست می‌آیند.

**توضیحات:** در رابطه (۵۰) به عبارت  $\mathbf{r}_n$ ، پاسخ ضربه یا کرنل ولترای درجه  $n$  ام کنترل شده گفته و به مجموعه  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\infty)$  مجموعه پاسخ‌های ضربه کنترل شده می‌گوییم. همچنین در رابطه (۵۱)، به عبارت  $\mathbf{R}_n$  ماتریس تابع تبدیل درجه  $n$  ام کنترل شده گفته و به مجموعه  $\mathbf{R}(s_1, s_2, \dots, s_\infty)$  مجموعه ماتریس‌های تابع تبدیل کنترل شده می‌گوییم.

علت نامگذاری  $\mathbf{r}_n$ ، بنام پاسخ ضربه درجه  $n$  ام کنترل شده این است که آن در شکل (۲)، برابر با پاسخ ضربه سیستمی با ورودی منطبق بر ورودی مرجع ساختار کنترلی و خروجی منطبق بر سیگنال خروجی کنترل کننده ساختار کنترلی می‌باشد.

با توجه به تعریف سری ولترا (رابطه (۳)) و روابط (۴۹) و (۵۰)، سیگنال خروجی کنترل کننده در شکل (۲) بر حسب ورودی مرجع  $r(t)$  می‌تواند بصورت ذیل نوشته شود:

**اثبات:**  $e(t)$  را از رابطه (۴۰) در رابطه (۴) می‌گذاریم:

$$u(t) = \int_0^t \mathbf{c}(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t-\tau) d\tau \quad ( )$$

سپس، با جایگذاری  $u(t)$  از رابطه (۴۹) در (۵۵) و با دسته‌بندی جملات همدرجه، روابط ذیل را می‌نویسیم:

$$u_1(t) = \int_0^t \mathbf{c}(\tau) e_1(t-\tau) d\tau \quad ( )$$

$$u_2(t) = \int_0^t \mathbf{c}(\tau) e_2(t-\tau) d\tau \quad ( )$$

$$u_i(t) = \int_0^t \mathbf{c}(\tau) e_i(t-\tau) d\tau \quad ( )$$

اکنون از دسته معادلات (۵۶) تا (۵۸)، تبدیل لاپلاس چند بعدی می‌گیریم و با استفاده از روابط (۲۳) تا (۲۵) و با توجه به خواص ضرب کرونکر،

نحوه تأثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{S}_1$  و  $\mathbf{R}_1$  و تعمیم این ابزارها، ک.موسوي، ر.اصغریان، ا.عازمی

$$u(t) = \int_0^t \mathbf{r}_1(\tau_1) r(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t \mathbf{r}_2(\tau_1, \tau_2) [r(t-\tau_1) \otimes r(t-\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{r}_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) [r(t-\tau_1) \otimes r(t-\tau_2) \otimes \dots \otimes r(t-\tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i + \dots \quad (1)$$

جایگذاری این عبارت‌ها از رابطه<sup>(۳)</sup>، در معادله دیفرانسیل بدست آمده و دسته‌بندی جملات هم درجه، معادله ذیل بدست خواهد آمد:

$$(y_1 - \lambda y_1 - bu(t)) + (y_3 - \lambda y_3 + y_1^2 u(t)) + \\ (y_5 - \lambda y_5 + 2y_1 y_3 u(t)) + \dots = 0$$

سپس با توجه به لزوم برقراری آن به‌ازای هر ورودی  $u(t)$ ، چنین نتیجه می‌شود که رابطه باید برای هر دسته برقرار باشد. در آخر، اولین دو تابع تبدیل غیر صفر این سیستم، با استفاده از تبدیل لاپلاس چند بعدی برابر است با

$$H_1(s_1) = \frac{b}{s_1 - \lambda} \quad \text{و}$$

$$\cdot H_3(s_1, s_2, s_3) = -\frac{1}{b} H_1(s_1 + s_2 + s_3) H_1(s_1) H_1(s_2)$$

### مثال (تعیین گین‌های حلقه):

اگر دستگاه تحت کنترل در ساختار کنترلی شکل<sup>(۲)</sup>، مثال مورد بررسی باشد و از  $H_{3_{sym}}(s_1, s_2, s_3)$  نیز استفاده شود، اولین دو گین حلقه

$$\text{غیرصفر، برابر است با} \quad L_1(s_1) = \frac{bC(s_1)}{s_1 - \lambda}$$

$$L_3(s_1, s_2, s_3) = -\frac{1}{3b} H_1(s_1 + s_2 + s_3)$$

$$[L_1(s_1)L_1(s_2)C(s_3) + L_1(s_1)C(s_2)L_1(s_3) + C(s_1)L_1(s_2)L_1(s_3)]$$

سیگنال نهایی حلقه، علاوه‌بر سیگنال خطی، دارای سیگنال غیرخطی (درجه<sup>(۳)</sup> نیز می‌باشد که با توجه به رابطه بدست آمده، هر عمل کنترلی که گین کنترل کننده را کاهش می‌دهد، منجر به کاهش این سیگنال نیز می‌شود. برای توضیح بیشتر، به دو پاراگراف انتهایی بخش ۴، رجوع شود.

### مثال (تعیین توابع تبدیل خطای ترکینگ):

اگر دستگاه تحت کنترل در ساختار کنترلی شکل<sup>(۲)</sup>، مثال مورد بررسی

$$\text{باشد و از } H_{3_{sym}}(s_1, s_2, s_3) \text{ نیز استفاده شود، اولین دو تابع تبدیل} \\ \text{غیرصفر خطای ترکینگ، برابر است با}$$

$$S_1(s_1) = \frac{s_1 - \lambda}{s_1 - \lambda + bC(s_1)} \quad \text{و}$$

در این رابطه و یا بطور متناظر رابطه<sup>(۴۹)</sup>، اولین عبارت، پاسخ کنترل کننده در سیستم خطی شده به ورودی مرجع  $r(t)$  می‌باشد و عبارت‌های دیگر نیز نمایانگر اثرات عملکرد غیرخطی سیستم کنترل مورد نظر در خروجی کنترل کننده، به‌ازای ورودی مرجع  $r(t)$  می‌باشند(شکل<sup>(۲)</sup>). ضمناً،  $\mathbf{r}_1$  همان پاسخ ضربه کنترل شده در سیستم خطی می‌باشد (به طبع آن  $\mathbf{R}_1(s_1)$  نیز ماتریس تابع تبدیل کنترل شده خطی می‌باشد).

از این‌رو، برای کاهش عملکرد غیرخطی در خروجی کنترل کننده، به‌ازای ورودی مرجع  $r(t)$ ، کافی است که هر یک از اجزاء درجه ۲ به بالا در رابطه<sup>(۴۹)</sup> و یا بطور متناظر رابطه<sup>(۵۹)</sup>، کاهش یابند. برای کاهش هر عبارت صرف‌نظر از ورودی مرجع  $r(t)$ ، کافی است که پاسخ ضربه مربوط به آن عبارت، به‌نحو مناسبی کاهش یابد.

از طرف دیگر، با مقایسه مجموعه روابط<sup>(۵۲)</sup> تا<sup>(۵۴)</sup> با مجموعه روابط<sup>(۲۳)</sup> تا<sup>(۲۵)</sup>، مشاهده می‌شود که این دو مجموعه به شکل ذیل با یکدیگر مرتبط هستند:

$$\mathbf{R}_1(s_1) = \mathbf{C}(s_1) \mathbf{S}_1(s_1) \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_2(s_1, s_2) = \mathbf{C}(s_1 + s_2) \mathbf{S}_2(s_1, s_2) \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_i(s_1, s_2, \dots, s_i) = \mathbf{C}(s_1 + s_2 + \dots + s_i) \mathbf{S}_i(s_1, s_2, \dots, s_i) \quad (4)$$

نحوه ارتباط بین  $\mathbf{S}_i$  ها،  $\mathbf{T}_i$  ها و  $\mathbf{R}_i$  ها، افق مناسبی را در زمینه چگونگی تأثیر کنترل عوامل غیرخطی، بر خطای ترکینگ، عملکرد سیستم کنترل و سیگنال خروجی کنترل کننده به‌دست می‌دهد.

## ۸. مثال‌ها

**مثال :** فرض کنید معادله حاکم بر یک دستگاه تحت کنترل، با شرط اولیه صفر و  $y^2(g(y)) = -y$ ، بصورت ذیل است:

$$\dot{y} = \lambda y + (b + g(y))u(t)$$

از آنجاییکه معادله دیفرانسیل فقط شامل غیرخطی ضعیف است، پس  $y(t)$  را می‌توان با یک سری، مشابه رابطه<sup>(۳)</sup> نمایش داد. اما با یک بررسی ساده، می‌توان فهمید که  $y(t)$  فقط شامل عبارتهای فرد است. پس با

نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{L}_1$  و  $\mathbf{R}_1$  و تعمیم این ابزارها، که موسوی، راصغریان، اعازمی

$$\begin{aligned} S_3(s_1, s_2, s_3) = & \frac{1}{3b} S_1(s_1 + s_2 + s_3) H_1(s_1 + s_2 + s_3) [L_1(s_1)L_1(s_2)C(s_3) \\ & + L_1(s_1)C(s_2)L_1(s_3) + C(s_1)L_1(s_2)L_1(s_3)] S_1(s_1)S_1(s_2)S_1(s_3) \end{aligned}$$

نیز می‌شود و البته، در اینجا آزادی عمل بیشتری داریم. برای توضیح بیشتر، به دو پاراگراف انتهایی بخش ۵، رجوع شود.

### مثال (تعیین توابع تبدیل سیستم کنترل):

اگر دستگاه تحت کنترل در ساختار کنترلی شکل(۲)، مثال مورد بررسی باشد و از  $H_{3_{sym}}(s_1, s_2, s_3)$  نیز استفاده شود، اولین دوتابع تبدیل غیرصرف سیستم کنترل، برابر است با

$$T_1(s_1) = \frac{bC(s_1)}{s_1 - \lambda + bC(s_1)}$$

اگر روابط(۴۳) و (۶۰) در نظر گرفته شود،  $S_3(s_1, s_2, s_3)$  بصورت ذیل خلاصه نویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} S_3(s_1, s_2, s_3) = & \frac{S_1(s_1 + s_2 + s_3)H_1(s_1 + s_2 + s_3)}{3b} \\ & [T_1(s_1)T_1(s_2)R_1(s_3) + T_1(s_1)R_1(s_2)T_1(s_3) + R_1(s_1)T_1(s_2)T_1(s_3)] \end{aligned}$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، سیگنال خطای ترکینگ شامل خطای ترکینگ خطی و خطای ترکینگ غیرخطی (درجه ۳) می‌باشد. از این‌و برای بررسی خطای ترکینگ، علاوه بر اینکه باید حداقل بودن  $\mathbf{S}_1$  را مدنظر قرارداد، باید حداقل بودن  $\mathbf{S}_3$  را نیز تحلیل کرد. همچنین با توجه به رابطه بدست آمده، هر عمل کنترلی که  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{S}_1$  و  $\mathbf{R}_1$  را کاهش می‌دهد منجر به کاهش  $S_3$

$$\begin{aligned} T_3(s_1, s_2, s_3) = & -\frac{1}{3b} S_1(s_1 + s_2 + s_3) H_1(s_1 + s_2 + s_3) [T_1(s_1)T_1(s_2)C(s_3)S_1(s_3) \\ & + T_1(s_1)C(s_2)S_1(s_2)T_1(s_3) + C(s_1)S_1(s_1)T_1(s_2)T_1(s_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(s_1, s_2, s_3) = & \frac{T_1(s_1 + s_2 + s_3)}{3b} \\ & [T_1(s_1)T_1(s_2)R_1(s_3) + T_1(s_1)R_1(s_2)T_1(s_3) + R_1(s_1)T_1(s_2)T_1(s_3)] \end{aligned}$$

خروجی کنترل کننده، شامل پاسخ کنترل کننده در سیستم خطی شده و اثرات عملکرد غیرخطی (درجه ۳) در خروجی کنترل کننده می‌باشد که در تحلیل‌ها باید هردو را مدنظر قرار داد. در همین‌راستا، برای کاهش سیگنال خروجی از کنترل کننده، در این سیستم کنترل، اضافه بر اینکه باید  $\mathbf{R}_1$  را کاهش داد، باید  $\mathbf{R}_3$  را نیز کاهش داد که با توجه به رابطه فوق، هر عمل کنترلی که  $\mathbf{T}_1$  و  $\mathbf{R}_1$  را کاهش می‌دهد، منجر به کاهش اثرات  $R_3$  در خروجی کنترل کننده خواهد شد که البته، در اینجا آزادی عمل بیشتری داریم. برای توضیح بیشتر، به توضیح رابطه(۵۹) و پاراگراف بعدی آن، در بخش ۷، رجوع شود. همچنین، بمنظور مشخص شدن برتری‌های هر یک از شاخص‌های تعیین‌یافته نسبت به شاخص‌های خطی و تاثیر کنترل کننده‌های مختلف، اگرچه این ابزارها توانایی‌های زیادی دارند، در شکل‌های(۴) و (۵) و (۶) نموده، بترتیب اندازه هارمونیک‌های اول و سوم رفتار غیرخطی نسبت به خطی خروجی  $u(t)$  را، به ازای کنترل کننده‌های مشابه  $\mathbf{R}_3$ ، که بوسیله ابزار تعیین‌یافته  $C(s) = K(s - z_0)/(s - p_0)$  بدست آمده، نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، اثرات عملکرد غیرخطی، بسته به دامنه ورودی و کنترل کننده مورد استفاده، می‌تواند بشدت موثر باشد و حتی رفتار نسبی حالت دائم خطی را به مقدار ۱۱dB

اگر روابط(۶۰) در نظر گرفته شود،  $T_3(s_1, s_2, s_3)$  بصورت ذیل خلاصه نویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} T_3(s_1, s_2, s_3) = & \frac{-S_1(s_1 + s_2 + s_3)H_1(s_1 + s_2 + s_3)}{3b} \\ & [T_1(s_1)T_1(s_2)R_1(s_3) + T_1(s_1)R_1(s_2)T_1(s_3) + R_1(s_1)T_1(s_2)T_1(s_3)] \end{aligned}$$

سیگنال خروجی سیستم کنترل، علاوه بر پاسخ سیستم کنترل خطی شده دارای اثرات عملکرد غیرخطی (درجه ۳) نیز می‌باشد. در این حالت برای رفتار ایده‌آل، علاوه بر اینکه باید  $\mathbf{T}_3$  یک باشد، باید  $\mathbf{T}_3$  نیز حداقل باشد. در همین‌راستا، با توجه به رابطه بدست آمده، هر عمل کنترلی که  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{R}_1$  و  $\mathbf{R}_3$  را کاهش می‌دهد، موجب کاهش اثرات آن نیز می‌شود. برای توضیح بیشتر، به توضیح رابطه(۴۲) و پاراگراف بعدی آن، در بخش ۶، رجوع شود.

### مثال (تعیین توابع تبدیل کنترل شده):

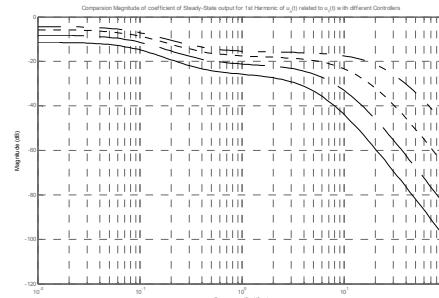
اگر دستگاه تحت کنترل در ساختار کنترلی شکل(۲)، مثال مورد بررسی باشد و از  $H_{3_{sym}}(s_1, s_2, s_3)$  نیز استفاده شود، اولین دوتابع تبدیل غیرصرف کنترل شده، برابر است با

$$R_1(s_1) = \frac{C(s_1)(s_1 - \lambda)}{s_1 - \lambda + bC(s_1)}$$

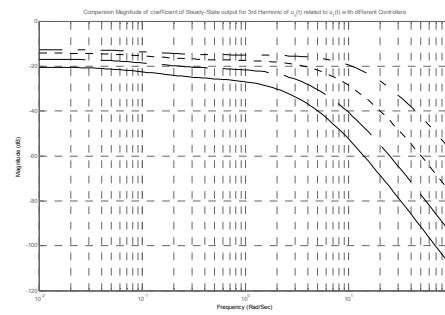
## نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های $L_1$ , $S_1$ , $T_1$ و $R_1$ و تعمیم این ابزارها، ک.موسوي، ر.اصغریان، ا.عازمی

که توجه به آنها برای حل صحیح مسئله، ضروری است. بعنوان مثال اگر سیستم کنترل دارای رفتار غیرخطی درجه دوم باشد، باید در آنالیز رفتارهای هم استفاده شود. در آخر، این  $(s_1, s_2)AS_2$  از ماتریس تابع تبدیل ابزارهای تحلیل برای یک سیستم غیرخطی تعیین شد. نهایتاً متذکر می‌شویم  $k$ ، که روابط و ماتریس‌های توابع تبدیل تعمیم‌یافته در این مقاله، تا درجه  $k$  برای سیستم‌های کنترل غیرخطی کلاس

تغییر دهد و در این صورت، شکل موج خروجی مورد نظر را دچار اعوجاج نماید و یا هارمونیک درجه سوم در آن ایجاد کند.



( اندازه هارمونیک اول رفتار غیرخطی نسبت به خطی مربوط به خروجی  $u(t)$  به ازای کنترل کننده‌های مختلف



( اندازه هارمونیک سوم رفتار غیرخطی نسبت به خطی مربوط به خروجی  $u(t)$  به ازای کنترل کننده‌های مختلف

## ۹. نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی مسئله ریاضی کنترلی تعمیم مفاهیم، ابزارها و روش‌های آنالیزی سیستم‌های کنترل خطی به سیستم‌های کنترل غیرخطی نرم پرداخته شد. ساختار در نظر گرفته شده برای اینکار، ساختار کنترل استاندارد بود. ابتدا با ارائه سه پروپوزیشن، نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی بر ماتریس‌های توابع تبدیل گین حلقه، خطای ترکینگ، سیستم کنترل و کنترل شده، با کمک سری ولترا تعیین شد. در این راستا با ارائه چهار  $L_1(s_1)$  ترمینولوژی، شکل تعمیم‌یافته ماتریس‌های توابع تبدیل  $S_1(s_1)$ ,  $T_1(s_1)$  و  $R_1(s_1)$ ، بمنظور بیان کمی اثرات عوامل، پس از آنها، مفاهیم کنترلی این غیرخطی با استفاده از سری‌ها، بدست آمد. پس از آنها، مفاهیم کنترلی این ماتریس‌های توابع تبدیل تعمیم‌یافته، متناظر با مفاهیم کنترل خطی شان تعیین شد و در طی یک پروپوزیشن و یک تذکر، برخی روابط بین آنها محاسبه شد

نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{L}_1$  و  $\mathbf{C}_1$  و تعمیم این ابزارها، ک.موسوی، ر.اصغریان، ا.عازمی

- [20] John W. Glass, Matthew A. Franchek, "Frequency Based Nonlinear Controller Design of Regulating Systems Subjected to Time Domain Constraints", Proceedings of the American Control Conference, pp. 2082-2086, June 1999.
- [21] John W. Glass, Matthew A. Franchek, "Stability of Nonlinear Feedback Systems in a Volterra Representation", International Journal of Robust and Nonlinear Control, pp. 799-819, Vol.10, 2000.
- [22] John W. Glass, Matthew A. Franchek, "NARMAX Modelling and Robust Control of Internal Combustion Engines", International Journal of Control, pp. 289-304, Vol.72, No. 4, 1999.
- [23] Chong Liu, Yi Shen, Jian Qiu Zhang, Zhiyan Liu, "Nonlinear System Control: a Volterra Approach", Proceedings of the 17th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC 2000), pp. 1314-1318, Vol. 3, IEEE, 2000.
- [24] Osamu Yamanaka, "Adaptive Control and Stability Analysis of Nonlinear Input-Output Models", Ph.D. Thesis, Electrical Engineering, Keio University, Yokohama, Japan, 1996.
- [25] Naser Pariz, Hasan Modir Shanechi, Ebrahim Vahedi, "Explaining and Validating Stressed Power Systems Behavior Using Modal Series", IEEE Transactions on Power Systems, pp. 778-785, Vol. 18, No. 2, May 2003.
- [26] Hasan Modir Shanechi, Naser Pariz, Ebrahim Vahedi, "General Nonlinear Modal Representation of Large Scale Power Systems", IEEE Transactions on Power Systems, pp. 1103-1109, Vol. 18, No. 3, August 2003.
- [27] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, An Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [28] P. B. Kahn, Y. Zarmi, Nonlinear Dynamics: Exploration Through Normal Forms, John Wiley & Sons, 1998.
- [29] W.J. Rugh, Nonlinear System Theory – The Volterra/Wiener Approach, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [30] Stephen P. Banks, Mathematical Theories of Nonlinear Systems, Prentice Hall International (UK) Ltd, 1988.
- [31] Erwin Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley & Sons, 1978.
- [32] Pieter Eykhoff, System Identification: Parameter and State Estimation, John Wiley & Sons, 1979.
- [۳۳] علی‌رضا فرجی ارمکی، "طراحی کنترل کننده مقاوم برای سیستم چند ماشینه قدرت"، پایان نامه کارشناسی ارشد برق، دانشگاه فردوسی مشهد، تابستان ۱۳۷۸.
- [10] Sigurd Skogestad, Ian Postlethwaite, Multivariable Feedback Control, John Wiley & Sons, 1997.
- [11] R. Asgharian, "A Robust Power System Stabilizer with no Adverse Effect on Shaft Torsional Modes", IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 9, No. 3, September 1994.
- [12] R. Asgharian, S. A. Tavakoli, "A Systematic Approach to Performance Weights Selection in Design of Robust PSS using Genetic Algorithms", IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 11, No. 1, March 1996.
- [13] Y. Ni, V. Vittal, W. Kliemann, "Investigation of Nonlinear Modal Behavior of HVDC/AC Power Systems Through a Scanning Tool via Normal Form Technique", Proceedings of 1997 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pp. 945-948, Vol. 2, June 1997.
- [14] S. Saha, V. Vittal, W. Kliemann, A. A. Fouad, "Local Approximation of Stability Boundary of a Power System Using the Real Normal Form of Vector Fields", Proceedings of 1995 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pp. 2330-2333, Vol. 3, May 1995.
- [15] Jyotika Thapar, Vijay Vittal, Wolfgang Kliemann, A. A. Fouad, "Application of the Normal Form of Vector Fields to Predict Interarea Separation In Power Systems", IEEE Transactions on Power Systems, pp. 844-850, Vol. 12, No. 2, May 1997.
- [16] S. Saha, A. A. Fouad, W. Kliemann, V. Vittal, "Stability Boundary Approximation of a Power System Using the Real Normal Form of Vector Fields", IEEE Transactions on Power Systems, pp. 797-802, Vol. 12, No. 2, May 1997.
- [17] Y. Ni, V. Vittal, W. Kliemann, "System Separation Mechanism in the Neighborhood of a Relevant Type-n UEP Using the Normal Form of Vector Fields", IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution, pp. 139-144, Vol. 145, No. 2, March 1998.
- [18] Arthur J. Krener, Sinan Karahan, Mont Hubbard, "Approximate Normal Forms of Nonlinear Systems", Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control, pp. 1223-1229, December 1988.
- [19] Jie Huang, "Asymptotic Tracking of Uncertain Volterra Systems", Systems & Control Letters, pp. 215-223, Vol.31, 1997.

نحوه تاثیرگذاری عوامل غیرخطی نرم بر ماتریس‌های  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{T}_1$  و  $\mathbf{R}_1$  و تعمیم این ابزارها، کک.موسوی، ر.اصغریان، ا.عازمی

[33] V. Volterra, Theory of Functionals and of Integral and Integro – Differential Equations, Dover, New York, 1958.

[34] Willi-Hans Steeb, Tan Kiat Shi, Matrix Calculus and Kronecker Product with Applications and Programs, World Scientific, Singapore, 1997.

# ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری

جعفر رضایی

بخش مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید رجایی

J-rezaei@alum.sharif.edu

**چکیده:** انکودرهای چرخان نوری عموماً بعنوان ابزار اندازه‌گیری زاویه چرخش با دقت، تفکیک پذیری و قابلیت اطمینان بالا شناخته می‌شوند. یکی از منابع مهم خطای این نوع انکودرها لنگی شعاعی الگوی کد دیسک می‌باشد. برای اندازه‌گیری خیلی دقیق در رنج "۱ ± ۵" لنگی شعاعی الگوی کد نتیجه از یاتاقانها و نصب باید بسیار کمتر از  $1 \mu\text{m}$  باشد و همچنین این مقدار لنگی باید تحت بارهایی نظیر نیروهای وزن یا فرایند تضمین گردد. در این مقاله ابزاری جهت نصب دیسک کدشده پیشنهاد می‌گردد که می‌تواند در خلال نصب و بعد از نصب موقعت دیسک کدشده مقدار لنگی شعاعی الگوی کد را خیلی دقیق و سریع اندازه‌گیری نماید. اصول اندازه‌گیری لنگی شعاعی الگوی کد توسط این ابزار با روابط ریاضی اثبات شده است. همچنین روابط خطای احتمالی این روش اندازه‌گیری محاسبه گردیده و با تحلیل نتایج آن مشخصات عملکردی ابزار پیشنهادی استخراج شده است. نمونه‌ای از طرح پیشنهادی ساخته شد و مورد آزمایش قرار گرفت. لنگی شعاعی الگوی کد یک دیسک نصب شده، توسط این ابزار اندازه‌گیری شد و با لنگی شعاعی محاسبه شده از تحلیل منحنی خطای اندازه‌گیری همان دیسک نصب شده وقتی از آن برای اندازه‌گیری زاویه چرخش استفاده می‌شد — مقایسه گردید. نتایج نشان می‌دهد که ابزار پیشنهادی قادر است تا لنگی شعاعی الگوی کد را با دقت و قابلیت اطمینان بالایی اندازه‌گیری نماید.

**واژه‌های کلیدی:** انکودر چرخان — نصب دیسک انکودر — دقت انکودر چرخان — خطای احتمالی — لنگی

**Abstract:** Optical rotary encoders are generally known as rotational angle measuring devices with high accuracy, resolution, and reliability. One of the important error sources of these encoders is code pattern radial runout of its disk. Usually, for high accuracy measurements in the range of  $\pm 1$  arc sec to  $\pm 5$  arc sec, the code pattern radial runout resulting from the bearing or during installation must be significantly less than  $1\mu\text{m}$ . These values must also be guaranteed under loads e.g. from workpiece weight and process forces. In this paper an instrument is proposed for installation of encoded disk that can measure radial runout of code pattern both during installation and after temporary installation of encoded disk with high accuracy and fast. The principle of code pattern radial runout measuring by this instrument is proven by mathematics equations and also probability of error equation of this measuring method is calculated. The performance characteristics of the proposed instrument are exploited by analyzing of the results. A prototype of the proposed instrument was fabricated and tested. Measured radial runout of a mounted disk by the fabricated instrument were compared with calculated radial runout resulting of error curve analyzing of the same mounted disk, when it is used for measurement of rotational angles. Results show that the proposed instrument is capable to measuring code pattern radial runout with high accuracy and reliability.

**Keywords:** Encoder Disk Mounting, Rotary Encoder Accuracy, Probability of Error, Runout, Optical Rotary Encoder

e

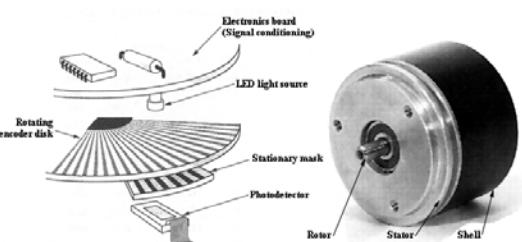
مقدار لنگی الگوی کد (mm)

سمبل‌ها، علائم و اختصارات و واحدها

λ

(Rad) زاویه چرخش شفت انکودر

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی

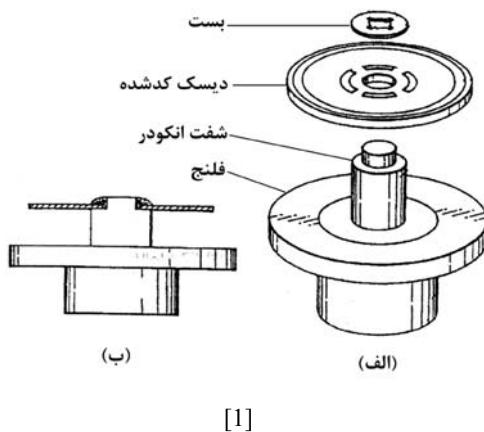
$U$	(بدون واحد) نسبت $e/S$	$e_{crit.1}$	$e$ بحرانی اول (mm)
$\sigma_U$	(بدون واحد) خطای احتمالی $U$	$e_{crit.2}$	$e$ بحرانی دوم (mm)
$\Delta R$	(خطای موقعیت هدها بروی شعاع دیسک کد شده (mm))	R	شعاع الگوی کد (mm)
	(بدون واحد) تعداد خطوط الگوی کد که می‌توانند بطور همزمان روی گیرنده نوری هدها قرار گیرند	$\gamma_1$	$\gamma$ (زاویه قرات شده توسط هد C (Rad))
$F_c$	(فرکانس ساعت اندازه‌گیری زمان (Hz))	$\gamma_2$	$\gamma$ (زاویه قرات شده توسط هد D (Rad))
	(بدون واحد) تفکیک پذیری ساعت اندازه‌گیری زمان در واحد فرکانس سیگنال خروجی هدها	Z	Tعداد سیکل خروجی انکودر در دور (CPR)
$K$	(بدون واحد) K بهینه	$V_1$	C ولتاژ تولید شده توسط هد (V)
$K_{opt.}$	(بدون واحد) K منیم	$V_2$	D ولتاژ تولید شده توسط هد (V)
$K_{min.}$		c	آنس DC (V)
n	(بدون واحد) تعداد دفعات اندازه‌گیری	a	AC (V) دامنه موج
<b>۱. مقدمه</b>			
<p>افزایش دقت موقعیت‌دهی در فرایندهایی که با ماشین‌های ابزار انجام می‌گیرند، نیازمند ابزاری برای اندازه‌گیری زاویه چرخش با تفکیک پذیری و دقت بالا می‌باشد. انکودرهای چرخان نوری عموماً پروندهای ابزار اندازه‌گیری زاویه چرخش با دقت، تفکیک پذیری و قابلیت اطمینان بالا شناخته می‌شوند [۱، ۲، ۳]. شکل ۱ ساختمان یک انکودر چرخان نوری مرسوم را اشان می‌دهد. این نوع انکودر شامل یک دیسک چرخان می‌باشد که روی آن یک الگوی کد شعاعی ایجاد شده است، این دیسک روی روتور انکودر قرار گرفته و محور بار به آن کوپل می‌شود یک ماسک نیز روی استاتور انکودر می‌باشد که شامل بخشی از الگوی کد دیسک چرخان است. یک منبع نور، پرتوی نوری لازم را جهت عبور از الگوی کد دیسک و ماسک مهیا می‌کند و چند گیرنده نوری پرتوی نور عبوری را به سیگنال‌های الکتریکی تبدیل کرده و سپس این سیگنال‌ها برای شمارش پردازش می‌شوند.</p>			
 <p>ساختمان یک انکودر چرخان نوری مرسوم</p>			
$S$	(linespacing) عرض متوسط خطوط الگوی کد (mm)	$S_{crit.1}$	$S$ بحرانی اول (mm)
		$S_{crit.2}$	$S$ بحرانی دوم (mm)
		$S_{opt.}$	بهینه $S$ (mm)
		$\psi$	زاویه بین هدهای C و D و محور دوران (Rad)
		N	سرعت دوران دیسک کدشده (RPM)
		M	(بدون واحد) حساسیت یا بزرگنمایی
		$\sigma_e$	خطای احتمالی $e$ (mm)
		$\sigma_{\Delta t}$	خطای احتمالی $\Delta t$ (s)
		$\sigma_T$	خطای احتمالی T (s)
		$\sigma_S$	خطای احتمالی S (mm)
		$\sigma_{\psi}$	خطای احتمالی $\psi$ (Rad)

## ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی

می‌باشد و بهترین سیستم‌ها با بلبرینگ‌های ABEC 7 یا مخصوص ساخته می‌شوند [۴]. یک بلبرینگ ABEC 7 با قطر داخلی ۸ mm که مناسب انکودرهای باشد می‌تواند ذاتاً دارای خطای لنگی شعاعی ماکزیمم  $2/5 \mu\text{m}$  باشد [۱۱]، که پرهیز از آن امکان‌پذیر نخواهد بود.

۳- لنگی شعاعی الگوی کد در اثر نصب نامناسب دیسک چرخان بروی شفت انکودر. برای نصب دقیق دیسک کد شده بر روی شفت انکودر معمولاً از میکروسکوپ استفاده می‌گردد و مرکز الگوی کد را به مرکز دوران شفت انتقال می‌دهد. در این روش نصب، بدليل اینکه الگوی کد دیسک در مرکز یاتاقانهای خودش قرار می‌گیرد و نه مرکز بلبرینگ‌ها، لذا لنگی شعاعی الگوی کد ناشی از لنگی شعاعی یاتاقانها نیز حذف خواهد گردید. عموماً برای اندازه‌گیری خیلی دقیق در رنج  $1 \pm 5 \mu\text{m}$  نتیجه از سه مؤلفه فوق باید بسیار کمتر از  $1 \mu\text{m}$  باشد [۲].

شکل ۲ روش معمول نصب دیسک کد شده را بروی شفت انکودر نشان میدهد، با توجه به شکل در روش معمول ابتدا شفت در یک فلنج یاتاقان‌بندی شده و سپس دیسک کد شده بر روی نشیمنگاه خود در روی شفت قرار داده می‌شود و توسط یک بست بصورت موقت به شفت محکم می‌گردد. چرخاندن شفت و مشاهده الگوی کد دیسک از طریق یک میکروسکوپ، دیسک به موقعیت انتقال می‌باید که مرکز الگوی کد منطبق بر محور دوران گردد. و نهایتاً دیسک توسط چسب به شفت اتصال دائم داده می‌شود.



(الف) اجزاء لازم جهت نصب دیسک کد شده، (ب) بعد از نصب اجزاء

بدليل اینکه عملیات نصب دیسک کد شده به کمک چشم انجام می‌گیرد، خستگی چشم و در نتیجه خطای اپراتور وجود خواهد داشت، از طرف دیگر اندازه گیری لنگی شعاعی الگوی کد قبل از نصب دائم دیسک کد شده لازم است، زیرا بعد از نصب دائم امکان جداسازی دیسک وجود ندارد. معمولاً تفکیک‌پذیری رتیکل درون چشمی میکروسکوپ نیز از ۰.۰۱mm تجاوز نمی‌کند؛ بنابراین بکمک چشمی میکروسکوپ نمی‌توان

دقت انکودرهای چرخان بصورت انحراف موقعیتی در یک دور چرخش انکودر و در یک دوره<sup>۱</sup> سیگنال خروجی تعریف می‌گردد [۲،۴]. انحراف موقعیتی در یک دور چرخش انکودر در اثر عواملی نظیر لنگی شعاعی<sup>۲</sup> الگوی کد دیسک و انحراف جهت‌دار الگوی کد شعاعی می‌باشد [۶،۲،۴،۵]. انحراف موقعیتی در یک دوره سیگنال مربوط به کیفیت آشکارسازی الگوی کد، تغییرات گام الگوی کد، نواقص محلی الگوی کد و واسطه دیسک انکودر می‌باشد [۷،۲،۴،۶،۷]. هر دو نوع انحراف موقعیتی تأثیر ذاتی روی مشخصات حرکتها<sup>۳</sup> دارند. خصوصاً در محركهایی که با کنترل سرعت دیجیتال می‌باشند، این تأثیر بسیار قدرتمند خواهد بود [۹،۲،۸].

دو روش اساسی برای بدست آوردن سرعت موتورها توسط انکودر وجود دارد: شمارش پالسهای انکودر در زمانی معین که فرکانس متر<sup>۴</sup> نامیده می‌شود، یا اندازه گیری عرض یک پالس که پریودمتر<sup>۵</sup> نامیده می‌شود [۸،۹،۱۰]. روش دوم اندازه گیری دقیقی را در سرعت پایین ارائه می‌دهد. این روش از روش اول دقیق‌تر است و به ما امکان می‌دهد تا کنترلر گشتاور نیرومندی را بدون مشکلات نویز و ارتعاش بکار ببریم، اما دقتش آن بستگی کاملی به دقتش انکودر مربوطه خواهد داشت [۹]. این انکودر باید سیگنالهایی با دقتش لبه تالبه خوبی را فراهم نماید [۸،۹].

## ۲. منابع خطای لنگی شعاعی الگوی کد و روش‌های کاهش این خطای

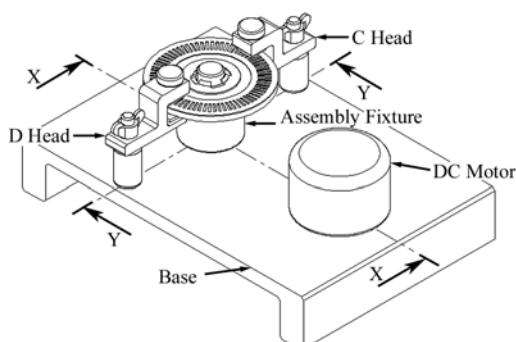
خطای لنگی شعاعی الگوی کد دارای سه مؤلفه زیر می‌باشد:

۱- لنگی شعاعی الگوی کد در اثر خیز شفت انکودر تحت بارهای خارجی (نیروهای وزن یا فرایند). اثر این مؤلفه لنگی با اتصال محور بار توسط کوپلینگ‌های انعطاف‌پذیر به شفت انکودر تقریباً حذف می‌گردد.

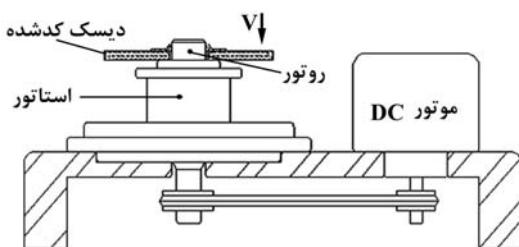
۲- لنگی شعاعی الگوی کد در اثر لنگی شعاعی یاتاقانهای انکودر. برای کاهش این مؤلفه لنگی، بلبرینگ‌های که در انکودرهای استفاده می‌شود باید از کلاس ترانسی بالایی برخوردار باشند. کلاس ترانس بلبرینگ‌ها دو نوع دقتش بلبرینگ‌ها را تشریح می‌کند: دقتش ابعادی که برای نصب سلامت بلبرینگ‌ها مهم می‌باشد و دقتش عملکردی که برای لنگی عضو چرخنده ماشین مهم است. پایین‌ترین کیفیت بلبرینگ‌ها که می‌تواند در انکودرهای بکار رود ABEC 4

1. Period
2. Radial Runout
3. Drives
4. Frequencimeter
5. Periodimeter

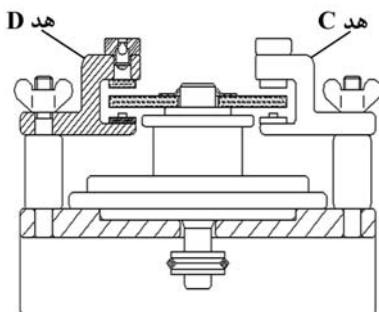
ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی



(ا) ابزار پیشنهادی جهت نصب دیسک کدشده



(الف) [۲]



(ب) [۳]

(الف) دید XX از ابزار شکل ۲، (ب) دید YY از ابزار شکل ۲

شکل ۶ هندسه موقعیت هدهای C و D که بترتیب با حروف C و D نشان داده شده را نسبت به الگوی کد نشان می‌دهد. مطابق شکل ۶ در صورتیکه الگوی کد دارای لنگی C باشد، اگر شفت انکودر که محور آن در نقطه O می‌باشد به اندازه  $\lambda$  بچرخد، الگوی کد حول مرکز خود O برای هد C به اندازه  $\gamma_1$  و برای هد D به اندازه  $\gamma_2$  چرخیده است. و مقدار خطای لنگی در موقعیت هد C،  $\alpha$  - در موقعیت هد D،  $\alpha'$  می‌باشد.

میزان لنگی شعاعی الگوی کد که معمولاً خیلی کمتر از این مقدار می‌باشد را اندازه‌گیری کرد. کمک گرفتن از میز میکروسکوپ (در صورتیکه میکروسکوپ ابزارسازی مورد استفاده قرار گیرد)، جهت اندازه‌گیری لنگی شعاعی الگوی کد وقت‌گیر، پرزحمت و غیردقیق می‌باشد، لذا برای اندازه‌گیری لنگی شعاعی الگوی کد نیازمند به روشنی دقیق و سریع هستیم.

### ۳. ابزار اندازه‌گیری لنگی شعاعی الگوی کد

در این مقاله ابزاری جهت نصب دیسک کدشده تشریح می‌گردد که می‌تواند در خلال نصب و یا بعد از نصب موقت دیسک کدشده مقدار لنگی را براحتی و خیلی دقیق اندازه‌گیری نماید. شکل ۳ تصویری از ابزار مورد نظر را نشان می‌دهد. این ابزار شامل بدنه، موتور DC، فیکسچر نصب دیسک کدشده و هدهای C و D می‌باشد. برای اینکه بتوانیم توسط این ابزار لنگی شعاعی یاتاقانها انکودر را نیز کاهش دهیم، فیکسچر نصب دیسک کدشده باید همان استاتور انکودر مربوطه باشد.

شکل ۴- (الف) دید XX از ابزار شکل ۲ بدون نصب هدهای C و D می‌باشد. در این شکل شفت انکودر (روتور) در فلنجی (استاتور) یاتاقان بندی شده است و دیسک کدشده بصورت موقت بست به شفت انکودر اتصال یافته و به کمک چرخ و تسمه دوراند در می‌آید. شکل ۴- (ب) نیز دید YY از شکل ۲ می‌باشد. در این شکل هد C در بر ش نشان داده شده است. در این شکل هدها مطابق با اصول نور هندسی الگوی کد را آشکار می‌کنند، به حال اگر گام الگوی کد کمتر از  $8 \mu\text{m}$  باشد هدها باید مطابق با اصول پراش و تداخل نور عمل کنند [۱۲]. هردو هد C و D مشابه اند و موقعیتی متقاض نسبت به محور شفت انکودر دارند و جهت آشکارسازی الگوی کد دیسک بکار می‌روند. این هدها می‌توانند در خلال نصب، الگوی کد را بصورت سیگنالهای آنالوگ یا دیجیتال آشکار نمایند. هدها توسط پیچ خروسوکی به پایه محکم شده اند. با شل کردن پیچ خروسوکی هدها می‌توانند از دیسک کدشده دور شوند تا فیکسچر نصب دیسک کدشده بتوانند روی ابزار نصب گردد و یا از آن جدا شود. ابزار فوق برای نصب دیسک کدشده می‌تواند توسط روینده روی میز یک میکروسکوپ ابزارسازی نظیر شکل ۵ نصب گردد.

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی

با توجه به روابط (۶) و (۷) اختلاف فاز  $\phi$  سیگنال  $V_1$  نسبت به  $V_2$  با توجه به روابط (۶) و (۷) اختلاف فاز  $\phi$  سیگنال  $V_1$  نسبت به  $V_2$  باشند:

$$\phi = (Z\lambda + Z\alpha + \eta) - (Z\lambda - Z\alpha) = 2Z\alpha + \eta \quad (1)$$

در رابطه بالا  $2Z\alpha$  از اختلاف فاز  $\phi$ ، خطای سرعت زاویه‌ای می‌باشد که در اثر لنگی شعاعی الگوی کد دیسک ایجاد شده است. به این تغییرات زاویه فاز Phase Jitter می‌گویند. به کمک رابطه (۱) مقدار  $\alpha'$  نیز بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\alpha' = \frac{e}{R} \sin(\lambda) \quad (2)$$

در رابطه (۸) واحد  $\alpha$  رادیان می‌باشد و مقدار ماکریم آن در زوایای  $\lambda = \pi/2$  و  $\lambda = \pi/2$  رخ می‌دهد که برابر خواهد بود با:

$$\alpha_{\max} = \pm \frac{e}{R} \quad (3)$$

بنابراین طبق رابطه (۸) تغییرات نسبی زاویه فاز در یک دور کامل انکودر از روابط زیر محاسبه می‌گردد:

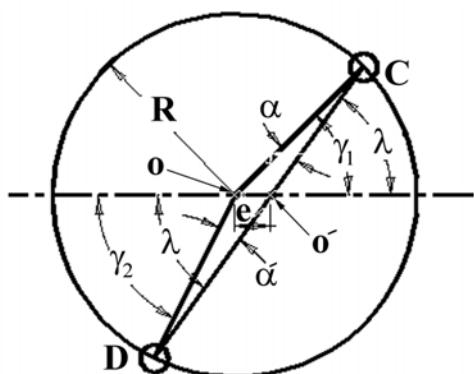
$$\Delta\phi = \left| \frac{2Ze}{R} \sin(\lambda) \right| \quad (4)$$

$$\Delta\phi_{\max} = \frac{2Ze}{R} \quad (5)$$

در روابط بالا  $\Delta\phi$  تغییرات نسبی زاویه فاز می‌باشد و واحد آن رادیان است.

در صورتیکه بتوانیم مقدار ماکریم تغییرات نسبی زاویه فاز را اندازه‌گیری کیم می‌توانیم مقدار لنگی شعاعی الگوی کد را مطابق رابطه زیر محاسبه نماییم:

$$e = \frac{\Delta\phi_{\max} R}{2Z} \quad (6)$$



( شماتیک الگوی کد همراه با دو هد C و D )

به کمک روابط (۱) و (۲) که بترتیب حاکم بر مثلثهای COO' می‌باشد می‌توان بصورت زیر اثبات نمود که مقادیر  $\alpha$  و  $\alpha'$  برای تمام مقادیر  $\lambda$  ها با هم برابر می‌باشند:

$$\sin(\lambda) = R \sin(\alpha')/e \quad (7)$$

$$\sin(\pi - \lambda) = R \sin(\alpha)/e \quad (8)$$

از آنجاییکه،  $\sin(\lambda) = \sin(\pi - \lambda)$  است، بنابراین داریم:

$$\alpha = \alpha' \quad (9)$$

$$\therefore \begin{cases} \gamma_1 = \lambda - \alpha \\ \gamma_2 = \lambda + \alpha \end{cases}$$

سیگنال‌های اولیه هدها آنالوگ هستند و دو رابطه نوعی آنها را با توجه به شکل ۶ می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$V_1 = c_1 + a_1 \sin(Z\gamma_1) \quad (10)$$

$$V_2 = c_2 + a_2 \sin(Z\gamma_2 + \eta) \quad (11)$$



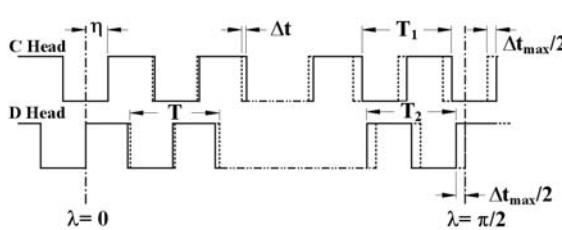
( یک نمونه میکروسکوپ ابزارسازی برای نصب دیسک کدشده )

در روابط بالا  $c$  مؤلفه DC و  $a$  دامنه مؤلفه AC سیگنال‌های خروجی است.  $\eta$  اختلاف فاز دو سیگنال هدها می‌باشد و هنگامی بوجود می‌آید که موقعیت هدها روی الگوی کد دیسک از نظر فازی در نقاط مشابهی قرار نگرفته باشند. با جایگزین کردن مقادیر  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  از رابطه (۳) در روابط (۴) و (۵) داریم:

$$V_1 = c_1 + a_1 \sin(Z\lambda - Z\alpha) \quad (12)$$

$$V_2 = c_2 + a_2 \sin(Z\lambda + Z\alpha + \eta) \quad (13)$$

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی



(اندازه‌گیری زمان  $\Delta t$  و  $T$  توسط دو سیگنال خروجی دیجیتال هدها (خط پر سیگنال واقعی و خط چین سیگنال نوری را نشان می‌دهند).

## ۵. تعمیم روابط بدست آمده برای هر موقعیت هندسی هدها نسبت به الگوی کد

در شکل ۶ موقعیت هدایت C و D نسبت به محور دوران متقارن بوده و زاویه‌ای که نسبت به مرکز دوران تشکیل می‌دهند  $180^\circ$  درجه می‌باشد. شکل ۷ حالت عمومی موقعیت هدایت را بروی الگوی کد نشان می‌دهد. در این شکل هدایت C و D نسبت به محور دوران زاویه  $\lambda$  تشکیل می‌دهند.

مطابق شکل ۸ اگر شفت انکودر که محور آن  $O$  می‌باشد به اندازه  $\lambda$  بچرخد مقدادیر  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  که توسط هدایت را بروی الگوی کد شود به کمک روابط زیر محاسبه می‌گرددند:

$$\gamma_1 = \lambda - \alpha_1 \quad (6)$$

$$\gamma_2 = \lambda - \alpha_2 \quad (7)$$

در روابط بالا داریم:

$$\alpha_1 = \frac{e}{R} \sin(\lambda) \quad (8)$$

$$\alpha_2 = \frac{e}{R} \sin(\lambda + \psi) \quad (9)$$

از طرفی روابط نوعی سیگنالهای دو هد برابر خواهد بود با:

$$V_1 = c_1 + a_1 \sin(Z\gamma_1) \quad (10)$$

$$V_2 = c_2 + a_2 \sin(Z\gamma_2 + \eta) \quad (11)$$

با ترکیب روابط (۱۷)، (۱۹)، (۲۱)، (۲۰) و (۱۸)، (۲۰)، (۲۲) بترتیب داریم:

$$V_1 = c_1 + a_1 \sin(Z\lambda - Z \frac{e}{R} \sin(\lambda)) \quad (12)$$

$$V_2 = c_2 + a_2 \sin(Z\lambda - Z \frac{e}{R} \sin(\lambda + \psi) + \eta) \quad (13)$$

## ۴. اندازه‌گیری تغییرات نسبی زاویه فاز

دقیق‌ترین روش اندازه‌گیری ماکریم تغییرات نسبی زاویه فاز، اندازه‌گیری تغییرات فاصله زمانی مابین لبه‌های متناظر دو سیگنال خروجی دیجیتال هدایت ( $\Delta t$ ) و همچنین اندازه‌گیری زمان یک دوره کامل سیگنالها ( $T$ ) توسط یک ساعت فرکانس بالا می‌باشد(شکل ۷)، و سپس توسط رابطه زیر مقدار  $\Delta\phi_{\max}$  را می‌توان بصورت زیر محاسبه نمود:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 2\pi \quad (14)$$

$$\therefore \Delta\phi_{\max} = \frac{\Delta t_{\max}}{T} \cdot 2\pi \quad (15)$$

با ترکیب روابط (۱۳) و (۱۴) مقدار لنگی شعاعی الگوی کد را می‌توان بصورت زیر تعیین کرد:

$$e = \frac{\Delta t_{\max}}{T} \cdot S \quad (16)$$

در این رابطه  $S = 2\pi R / 2Z$  عرض متوسط خطوط الگوی کد (Line Spacing) می‌باشد و واحد آن میلیمتر است. بدليل وجود خطای تغییرات سرعت زاویه‌ای، زمان  $T$  اندازه‌گیری شده از یک سیکل سیگنال خروجی دارای ماکریم خطای  $\pm \Delta t/4$  می‌باشد. برای حذف این خطای باید زمان  $T_1$  و  $T_2$  را از دو سیکل مجاور هم از دو سیگنال خروجی اندازه‌گیری کرد و سپس میانگین ریاضی آنرا محاسبه نمود.

مطابق روابط (۶) و (۷) زمان سیکلهای دو سیگنال خروجی هدایت در هر لحظه بصورت زیر بیان می‌گرددند:

$$T_1 = \left( \frac{1}{Z} - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{60}{N} \quad (17)$$

$$T_2 = \left( \frac{1}{Z} + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{60}{N} \quad (18)$$

$$\therefore T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{60}{NZ} \quad (19)$$

در روابط بالا N سرعت دوران دیسک کدشده می‌باشد.

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی

() شماتیک عمومی الگوی کد همراه با دو دسته D و C

## ۶. قابلیت اطمینان و خطای احتمالی

خطاهای تصادفی در اندازه‌گیری معمولاً دارای توزیع نرمال می‌باشند. با استفاده از رابطه (۲۷) می‌توان احتمال خطای اندازه‌گیری  $\epsilon$  را بصورت زیر محاسبه نمود.

$$\sigma_e = e \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta t_{\max}}^2}{\Delta t_{\max}^2} + \frac{\sigma_T^2}{T^2} + \frac{\sigma_S^2}{S^2} + \frac{\sigma_{\psi}^2}{4 \tan^2(\psi/2)}} \quad ( )$$

در رابطه بالا  $\sigma_e$  خطای احتمالی  $e$  می‌باشد.  $\sigma_{\Delta t_{\max}}$  خطای احتمالی  $\Delta t_{\max}$  و  $\sigma_T$  خطای احتمالی  $T$  می‌باشد اگر فرکانس ساعت اندازه‌گیری زمان را  $F_c$  بنامیم، خطای احتمالی  $\sigma_{\Delta t_{\max}}$  برابر با  $\sigma_{\Delta t_{\max}} = F_c \cdot \sigma_T$  می‌باشد. اگر  $F_c = 2\sqrt{2}F_c$  و  $\sigma_T = \pm 1/(2F_c)$  باشد، آنگاه  $\sigma_{\Delta t_{\max}} = \pm 1/(2\sqrt{2}F_c)$ .  $\sigma_{\Delta t_{\max}}$  احتمالی S می‌باشد که مربوط به فرایند تولید دیسک انکودر است. چون در تولید دیسکهای انکودر نوری از تکنیکهای لیتوگرافی استفاده می‌گردد، مقدار  $\sigma_{\Delta t_{\max}}$  بسیار کم است. اگر  $\sigma_{\Delta t_{\max}} = 0.01$  باشد، آنگاه  $\sigma_{\Delta t_{\max}} = 0.01 \cdot \sqrt{2} \approx 0.14$ . همچنین اگر هدایت در اثر تلرانس‌های ساخت یا انبساط حرارتی ابزار پیشنهادی در شعاع دلخواه روی الگوی کد قرار نگیرند مقدار  $S$  دارای خطای سیستماتیک  $\pi \cdot \Delta R / Z$  خواهد بود. توزیع این خطای کنواخت بوده و باعث خطای  $(e \cdot \Delta R) / R$  در اندازه‌گیری لنگی شعاعی الگوی کد خواهد شد که در انکودرها بکار می‌رود. جمع گردد. خوب‌بختانه بهترین گیرنده نوری که در انکودرها بکار می‌رود سلول خورشیدی (solar cell) می‌باشد [۱۲]. می‌توان اندازه سطح این گیرنده‌ها را برای هدهای C و D بزرگتر از طول خطوط الگوی کد انتخاب کرد، در اینصورت دقت اندازه‌گیری مستقل از موقعیت شعاعی هدایت بر روی الگوی کد خواهد شد. همچنین بدليل اینکه این نوع گیرنده نوری میانگین S نور عبوری از تعداد زیادی خطوط الگوی کد را دریافت می‌کند عملاً مقدار میانگین عرض تعداد زیادی از خطوط الگوی کد می‌باشد [۱۳] و خطای احتمالی  $\sigma_e$  باندازه  $n_z / 30$  خواهد شد.  $n_z$  تعداد خطوط الگوی کد می‌باشد اینکه این مولفه از خطای اندازه‌گیری برابر صفر خواهد شد. اگر  $\pi = \pi$  باشد این مولفه از خطای اندازه‌گیری ادامه می‌دهیم. اگر  $\pi = \pi$  باشد،  $\sigma_e$  باید از رابطه (۱۵) محاسبه گردد. با توجه به اینکه با تغییر  $F_c$  می‌توان مقادیر  $\sigma_T$  و  $\sigma_{\Delta t_{\max}}$  را تغییر داد، خطاهای احتمالی را به دو دسته

بنابراین تغییرات نسبی زاویه فاز بین سیگنالها برابر خواهد بود با:

$$\Delta\phi = \left| \frac{Ze}{R} [\sin(\lambda + \psi) - \sin(\lambda)] \right| \quad ( )$$

سپس با ماکریم کردن رابطه بالا  $\Delta\phi_{\max}$  را بدست می‌آوریم:

$$\Delta\phi_{\max} = \frac{2Ze}{R} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad ( )$$

ولنگی شعاعی الگوی کد نیز می‌تواند از رابطه زیر محاسبه گردد:

$$e = \frac{\Delta\phi_{\max} R}{2Z \sin(\psi/2)} \quad ( )$$

همچنین فرم عمومی رابطه (۱۵) نیز بصورت زیر بدست می‌آید:

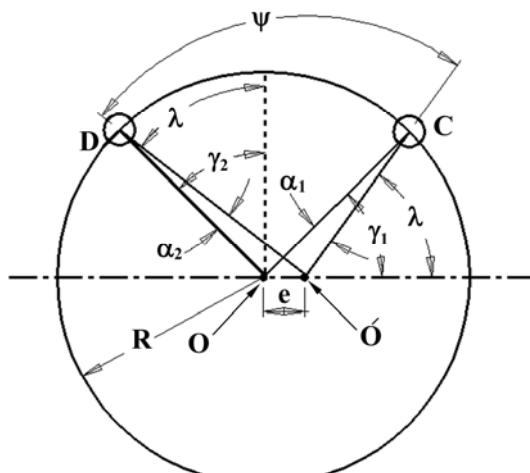
$$e = \frac{\Delta t_{\max}}{T} \cdot \frac{S}{\sin(\psi/2)} \quad ( )$$

زمان T می‌تواند از میانگین ریاضی زمانهای  $T_1$  و  $T_2$  محاسبه گردد، بشروط اینکه  $T_2$  در اختلاف زاویه‌ای به اندازه  $\psi - 180^\circ$  نسبت به  $T_1$  اندازه‌گیری شده باشد.

مقدار حساسیت یا بزرگنمایی سیستم طراحی شده توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

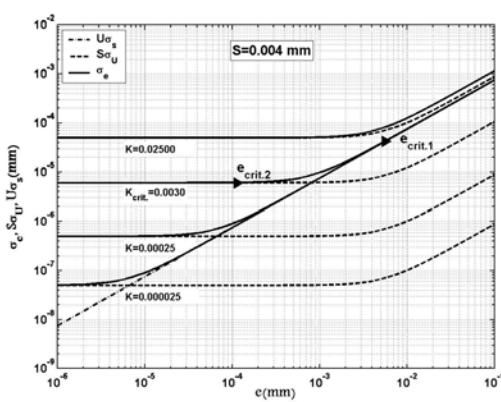
$$M = \frac{d(\Delta\phi_{\max})}{de} = \frac{2Z}{R} \sin(\psi/2) \quad ( )$$

با توجه به رابطه (۲۷) بزرگنمایی با  $Z$  رابطه مستقیم و با  $R$  معکوس دارد. همچنین با افزایش  $\psi$  تا مقدار  $\pi$  بزرگنمایی افزایش می‌یابد.



ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی

$$e_{crit.1} = 3.51 \cdot \frac{KS^2}{\sigma_S} \quad (1)$$



(خطای احتمالی اندازه‌گیری ( $\sigma_e$ ) مؤلفه ثابت خطای احتمالی ( $U\sigma_S$ ) و مؤلفه قابل تغییر خطای احتمالی ( $S\sigma_U$ ) در مقابل لنگی شعاعی الگوی کد (۱) با مقدار K مختلف)

برای این بخش از خطای احتمالی بدليل اینکه دقت اندازه‌گیری تنها تا مقدار  $\pm(e/S)\sigma_S$  می‌تواند بهبود یابد می‌توان برای هر مقدار لنگی شعاعی مجاز (e) K بهینه‌ای محاسبه کرد. مشابهًا اگر خطای محاسبه  $\sigma_e$  را از مقدار واقعی آن ۱٪ در نظر بگیریم می‌توان K بهینه ( $K_{opt}$ ) را از رابطه (۳۸) بدست آورد. بنابرین  $K_{opt}$  مقداریست که اگر ابزار پیشنهادی را با K‌های سیار کوچکتر از  $K_{opt}$  نیز بکار ببریم، تنها باید انتظار ۱٪ بهبود در دقت اندازه‌گیری داشته باشیم.

$$K_{opt.} = 0.285 \cdot \frac{e\sigma_S}{S \cdot \sqrt{0.5e^2 + S^2}} \quad (2)$$

شکل ۱۰ K<sub>opt.</sub> و خطای احتمالی مطابق با آن را برای S‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل با افزایش e K<sub>opt.</sub> ها نهایتاً می‌توانند تا K<sub>crit.</sub> افزایش یابند. و همچنین بازی مقدار معین ۵، برای مقادیر S‌های بزرگتر K<sub>opt.</sub> ها کوچکتر می‌باشند. خوب‌بختانه امروزه تکنولوژی الکترونیکی اجازه بکارگیری K‌های خیلی کوچک را فراهم کرده است، به حال نباید فراموش کرد که K حداقلی نیز وجود دارد. اگر کمترین K قابل انتخاب توسط ابزار پیشنهادی را K<sub>min.</sub> بنامیم، بازی هر مقدار خطای مجاز لنگی شعاعی، ۵٪ می‌توان مطابق رابطه (۴۰) S بحرانی محاسبه نمود که برای مقادیر کوچکتر از S بحرانی دقت اندازه‌گیری برابر با  $\pm(e/S)\sigma_S$  می-

ثبت و قابل تغییر دسته بندی می‌کنیم. برای سادگی تحلیل  $\Delta t_{max}/T$  را تعريف می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$e = U \cdot S \quad (3)$$

، برابر است با:  $\sigma_e$  و خطای احتمالی ،

$$\sigma_e = \sqrt{S^2 \sigma_U^2 + U^2 \sigma_S^2} \quad (4)$$

همچنین  $\sigma_U$  برابر است با :

$$\sigma_U = \frac{e}{S} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta t_{max}}^2}{\Delta t_{max}^2} + \frac{\sigma_T^2}{T^2}} \quad (5)$$

با جایگزین کردن مقادیر هریک از پارامترهای رابطه (۳۳) و ساده کردن این رابطه خواهیم داشت:

$$\sigma_U = \frac{1}{2} \cdot \frac{ZN}{60F_c} \cdot \sqrt{1 + \frac{e^2}{2S^2}} \quad (6)$$

اگر  $K = (ZN)/(60F_c)$  باشد، داریم:

$$\sigma_U = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \sqrt{1 + \frac{e^2}{2S^2}} \quad (7)$$

مقدار K تفکیک‌پذیری ساعت در واحد فرکانس سیگنال خروجی هدایا می‌باشد، که با کاهش مقدار آن می‌توان خطای احتمالی U را کاهش داد. اثر K در کاهش مؤلفه قابل تغییر خطای احتمالی  $S\sigma_U$  و خطای احتمالی e را می‌توان در شکل ۹ مشاهده کرد. همچنین شکل نشان می‌دهد که اگر K از مقدار معینی که ما آنرا  $K_{crit.}$  می‌نامیم کوچکتر گردد بازی مقادیری از e که بزرگتر از  $e_{crit.1}$  باشند، خطای احتمالی  $\sigma_e$ ، تنها تا مقدار  $K_{crit.}$  می‌تواند کاهش یابد و لذا می‌توان برای K‌هایی که کوچکتر از  $K_{crit.}$  باشند، با تقریب خوبی رابطه  $\sigma_e$  را بصورت زیر نوشت:

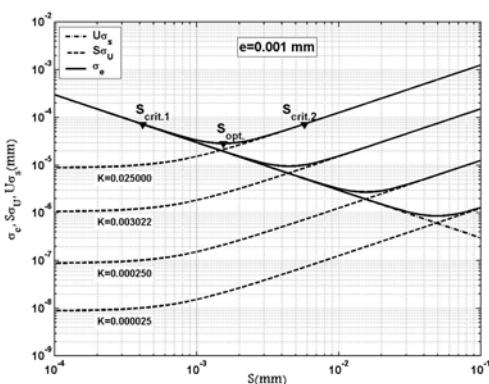
$$\sigma_e = U\sigma_S = \frac{e}{S} \cdot \sigma_S \quad (8)$$

اگر ماکریم ۱٪ خطای احتمالی واقعی مجاز بدانیم،  $K_{crit.}$  را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$K_{crit.} = 0.403 \cdot \frac{\sigma_S}{S} \quad (9)$$

همچنین مقدار  $e_{crit.1}$  از رابطه زیر محاسبه می‌گردد و موقعیت آن نیز برای K<sub>crit.</sub> در شکل ۹ نشان داده شده است.

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی



(خطای احتمالی اندازه‌گیری ( $\sigma_e$ )، مؤلفه ثابت خطای احتمالی ( $U\sigma_S$ ) و  $S\sigma_U$ ) در مقابل عرض متوسط خطوط الگوی کد (S) با مقادیر مختلف K

برای مقادیر S هایی که بین دو بحرانی قرار می‌گیرند، خطای احتمالی از رابطه (۳۱) محاسبه می‌گردد. شکل ۱۱ مقادیر S ها را در مقابل  $K_{min}$ ،  $\sigma_e$  و  $U\sigma_S$  و  $S\sigma_U$  با مقادیر مختلف  $K_{min}$  نشان می‌دهد. با توجه به شکل برای هر معین S بهینه‌ای وجود دارد که بازی آن  $\sigma_e$  نمی‌نماید می‌گردد. اگر S بهینه را  $S_{opt.}$  بنامیم خواهیم داشت:

$$S_{opt.} = \sqrt{\frac{2e\sigma_s}{K_{min}}} \quad (6)$$

جدول ۱ و ۲ بطور خلاصه حالت‌های مختلف استفاده از ابزار پیشنهادی را به ترتیب برای اندازه‌گیری لنگی شعاعی الگوی کد دیسک و نصب دیسک انکودر تشریح می‌کند.

اگر از ابزار پیشنهادی مطابق جدول ۱ استفاده کنیم، برای اندازه‌گیری مقدار معین e بازی تمام مقادیر S نامساوی زیر همیشه برقرار می‌باشد.

$$0.5KS < \sqrt{S\sigma_U + U\sigma_S} < (e/S)\sigma_S$$

بنابراین بهترین دقت اندازه‌گیری لنگی الگوی کد را هنگامی خواهیم داشت که نامساوی  $e \leq e_{crit.2}$  برقرار باشد. و اگر برای نصب دیسکی با معین از جدول ۲ استفاده کنیم بازی تمام مقادیر e نامساوی زیر همیشه برقرار است.

$$0.5KS > \sqrt{S\sigma_U + U\sigma_S} < (e/S)\sigma_S$$

بنابراین بهترین دقت نصب دیسک را هنگامی خواهیم داشت که نامساوی  $S_{crit.1} < S < S_{crit.2}$  برقرار باشد. همچنین شاخص کلی

باشد. اما برای S های بزرگتر از S بحرانی دقت اندازه‌گیری تابعی از  $K_{min}$

می‌گردد. اگر این S بحرانی را  $S_{crit.1}$  بنامیم داریم:

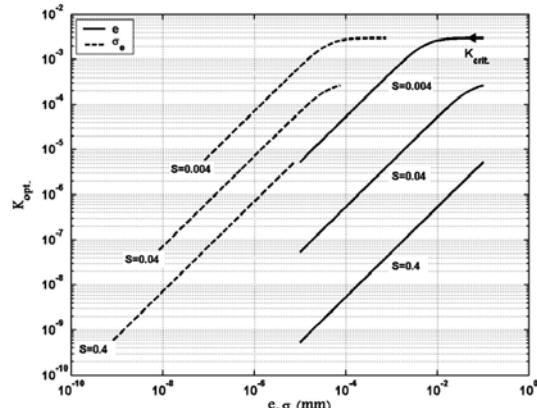
$$S_{crit.1} = 0.5 \cdot e \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{1.3\sigma_s^2}{K_{min}^2 e^2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

باتوجه به شکل ۶ می‌توان e بحرانی دومی بدست آورد که برای S های کوچکتر از آن بتوان خطای احتمالی را با تقریب خوبی بصورت  $\pm 0.5KS$  نوشت. اگر e بحرانی دوم را  $e_{crit.2}$  بنامیم و خطای محاسبه  $\sigma_e$  را از مقدار واقعی آن ۱٪ در نظر بگیریم، می‌توان مطابق رابطه زیر  $e_{crit.2}$  را محاسبه نمود.

$$e_{crit.2} = 0.071 \cdot \frac{KS^2}{\sigma_s} \quad (8)$$

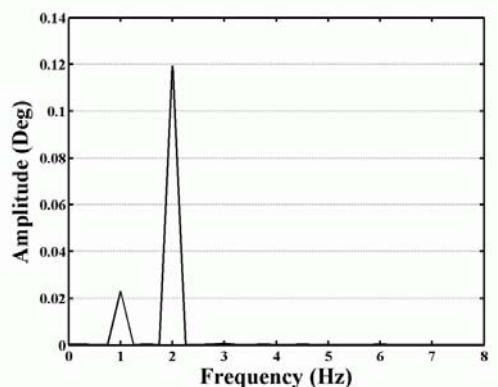
مشابهًا برای هر مقدار خطای مجاز لنگی شعاعی e، می‌توان به کمک رابطه (۴۲) S بحرانی دومی برای S های بزرگتر از آن بتوان خطای احتمالی را با تقریب خوبی بصورت  $\pm 0.5KS$  نوشت.

$$S_{crit.2} = 3.51 \cdot e \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{1.3\sigma_s^2}{K_{min}^2 e^2}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

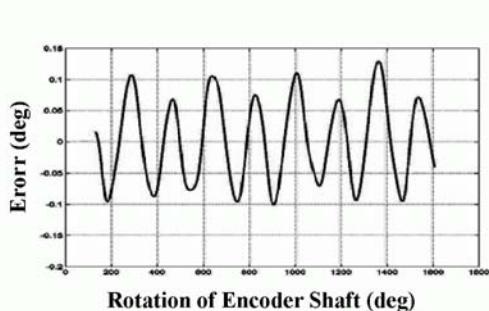


- مقادیر e و  $\sigma_e$  مطابق آن در مقابل  $S_{opt.}$ ، بازی مقادیر مختلف S

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی



( ) - طیف فرکانسی منحنی خطای



( ) - منحنی خطای خروجی انکودر

شکل ۱۰ منحنی خطای زاویه اندازه‌گیری شده توسط هدایات C و D را نشان می‌دهد. برای تفکیک هارمونیک‌های مختلف آن از آن FFT گرفته شده و طیف فرکانسی آن در شکل ۱۱ نشان داده شده است. در این شکل دامنه هارمونیک ۱Hz مربوط به خطای لنگی شعاعی الگوی کد  $\alpha_{\max}$  باشد دامنه آن برابر  $0.023^{\circ}$  است. حال توسط رابطه (۱۰) مقدار e را محاسبه می‌کنیم:

$$e = 17.5 \times 0.00040 = 0.0070 \text{ mm}$$

نرديکي مقدار لنگي بدست آمده از منحنی خطای با مقدار لنگی اندازه‌گیری شده توسط سیستم طراحی شده صحت عملکرد این سیستم را نشان می‌دهد. بخشی از اختلاف موجود مربوط به دقت اندازه‌گیری است و بخش بيشتری از این اختلاف در اثر نشتی فرایند FFT بر روی منحنی خطای بوده است. بطوريکه در شکل ۱۱ نيز مشاهده می‌گردد مقداری از انرژي هارمونیک ۱Hz روی فرکانسهاي اطراف آن توزيع شده است؛ و لذا دامنه هارمونیک ۱Hz کمتر از مقدار واقعی نشان داده شده است.

ابزار  $K_{\min}$  می‌باشد، هر چه مقدار آن کمتر باشد کارایی ابزار بیشتر خواهد بود.

بدليل قابلیت اندازه‌گیری با سرعت بالا، توسط ابزار پیشنهادی می‌توان مقدار لنگی شعاعی الگوی کد را با رها اندازه‌گیری کرده و سپس مقدار میانگین ریاضی آن را محاسبه نمود. در این صورت دقت اندازه‌گیری بهتری خواهیم داشت که بصورت  $\bar{x} \pm \sigma_e / \sqrt{n}$  بیان می‌گردد. در این رابطه n تعداد دفعات اندازه‌گیری می‌باشد.

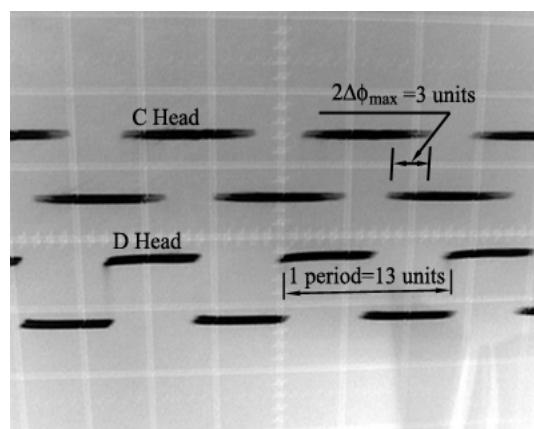
## ۷. نتایج تجربی

یک نمونه از طرح پیشنهادی با زاویه  $\psi = 90^{\circ}$  ساخته شد و جهت اندازه‌گیری لنگی شعاعی الگوی کد یک دیسک کد شده افزایشی که داری شاع الگوی کد  $Z = 1200$  و  $R = 17.5\text{mm}$  بوده مورد استفاده قرار گرفت. شکل ۹ تصویری از دو سیگنال دیجیتال خروجی هدایا را بر روی صفحه نمایش اسیلوسکوپ نشان می‌دهد. در این شکل تغییرات نسبی زاویه فاز  $41.54\text{Deg}$  معادل  $0.725\text{Rad}$  قرائت شد. به کمک رابطه (۲۶) مقدار لنگی شعاعی الگوی کد (e) بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$e = \frac{0.725 \times 17.5}{2 \times 1200 \times \sin(\pi/4)} = 0.00748 \text{ mm}$$

حساسیت ابزار ساخته شده برابر است با:

$$M = \frac{2 \times 1200}{17.5} \times \sin(\pi/4) = 96.97$$



( ) - سیگنالهای خروجی هدایات C و D

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی ساعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی

که این ابزار با درجه بالایی از دقت قادر به اندازه‌گیری لنگی الگوی کد می‌باشد. سپس نمونه‌ای از طرح پیشنهادی ساخته شده و جهت اندازه‌گیری لنگی ساعی الگوی کد دیسک کدشده‌ای با  $R = 17.5\text{mm}$  و  $Z = 1200$  بکاربرده شد. مقدار لنگی اندازه‌گیری شده توسط این ابزار با مقدار لنگی محاسبه شده توسعه منحنی خط مقایسه گشت. نتایج صحت عملکرد ابزار پیشنهادی را نشان می‌دهد. با انتقال اطلاعات بدست آمده از دو هد به یک کامپیوتر شخصی و شیوه‌سازی چرخش و لنگی دیسک توسط یک نرم افزار می‌توان از کاربرد میکروسکوپ برای نصب دیسک کاملاً بیناز شد. همچنین برای نصب خودکار و کنترل کیفیت خودکار نصب دیسک می‌توان از این روش بهره جست.

## ۸. جمع‌بندی

یکی از منابع خطای انکودرهای چرخان نوری، لنگی الگوی کد دیسک آنها می‌باشد. قسمت عمده‌ای از این خطای مربوط به یاتاقانها و نصب دیسک کدشده می‌باشد، توسط ابزار پیشنهادی در این مقاله می‌توان در خلال نصب یا بعد از نصب موقع دیسک کدشده مقدار لنگی را خیلی سریع و دقیق اندازه‌گیری کرد. اندازه‌گیری این خطای قبل از نصب دائم دیسک کدشده از لحاظ هزینه تولید بسیار مهم می‌باشد؛ زیرا بعد از نصب دائم دیسک کدشده، تصحیح این خطای امکان‌پذیر نمی‌باشد. عملکرد ابزار بصورت ریاضی بیان شده و همچنین با تحلیل خطای احتمالی اندازه‌گیری توسط ابزار پیشنهادی مشخصات عملکردی ابزار استخراج شده است. این مشخصات نشان می‌دهند

جدول ۱- مشخصات ابزار پیشنهادی برای اندازه‌گیری ساعی الگوی کد یک دیسک نصب شده

مقادیر e	S مقادیر	مقادیر	دقت اندازه‌گیری	مقدار K تنظیمی	برای بهبود دقت باید
تمام مقادیر e	تمام مقادیر S		$\pm \sqrt{S\sigma_U + U\sigma_S}$	$K > K_{crit.}$	$\sigma_S$ و K را کاهش داد
$e \geq e_{crit.1}$	تمام مقادیر S		$\pm (e/S)\sigma_S$	$K_{opt.}$ یا $K_{min.}$	$\sigma_S$ را کاهش داد
$e_{crit.2} < e < e_{crit.1}$	تمام مقادیر S		$\pm \sqrt{S\sigma_U + U\sigma_S}$	$K_{min.}$	$\sigma_S$ و K را کاهش داد
$e \leq e_{crit.2}$	تمام مقادیر S		$\pm 0.5KS$	$K_{min.}$	را کاهش داد $K_{min.}$

جدول ۲- مشخصات ابزار پیشنهادی برای نصب دیسک انکودر

S مقادیر	e مقادیر	دقت اندازه‌گیری	مقدار K تنظیمی	برای بهبود دقت باید
$S \leq S_{crit.1}$	تمام مقادیر e	$\pm (e/S)\sigma_S$	$K_{opt.}$ یا $K_{min.}$	$\sigma_S$ را کاهش داد
$S_{crit.1} < S < S_{crit.2}$	تمام مقادیر e	$\pm \sqrt{S\sigma_U + U\sigma_S}$	$K_{min.}$	$\sigma_S$ و K را کاهش داد
$S \geq S_{crit.2}$	تمام مقادیر e	$\pm 0.5KS$	$K_{min.}$	را کاهش داد $K_{min.}$

[7] N. Dumbrăvescu, S. Schiaua, "Possibilities to Increase The Resolution of Photoelectric Incremental Rorary Encoders", Materials Science in Semiconductor Processing 3, pp.557-561, 2000

[8] Asad M. Madni and Roger F. Wells, "An Advanced Steering Wheel Sensor", Industrial Technology, 2000

[9] F. Briz, J. A. Cancelas and A. Diez, "Speed Measurement Using Rotary Encoders for High Performance ac Drives", IEEE, 1994, pp.538-542

[10] Pierre R. Bélanger, "Estimation of Angular Velocity and Acceleration from Shaft Encoder Measurement", Proceeding of the IEEE, International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, May 1992, pp. 585-592

[11] FAG Rolling Bearings Standards programme, 1992

## مراجع

- [1] S. Orlosky and G. Avolio, "Basics of Rotary Optical Encoder", Control Engineering, 1997, pp.75-82
- [2] Hagl, R., "Position encoder without integral bearing for hollow shafts", Heidenhaininfo, vol. 5, no. 2, pp. 1-6, June 1999.
- [3] Rick Korte (President of Heidenhain), "The Basics of Encoder", www.heidenhain.com
- [4] Charkey, E. S., *Electromechanical Systems Component*, John Wiley, 1980.
- [5] Yo Ikebe and Hideaki Oku, "Deflection-Insensitive Optical Rotary Encoder", U.S. Patent #4,928,009
- [6] Heidenhain General Catalogue, 1990

ابزاری برای اندازه‌گیری دقیق و سریع مقدار لنگی شعاعی الگوی کد دیسک انکودرهای چرخان نوری، ج. رضایی

- [14] G. F. W. Galyer, “Metrology for Engineer”, Caffell Publisher Ltd., 1980
- [12] Alfons Ernst, “Digital Linear and Angular Metrology”, Verlag Modern Industrie AG &Co.,1990
- [13] Badih El-Kareh, “Fundamentals of Semiconductor Processing Technology”, Kluwer Academic Publishers, 1995

# طراحی کنترلگر تطبیقی مقاوم برای سیستم های حرکت از راه دور

سید کمال حسینی ثانی<sup>۱</sup>، حمید رضا مومنی<sup>۲</sup>

دانشجوی دکتری کنترل دانشگاه تربیت مدرس<sup>۱</sup>، دانشیار گروه کنترل دانشگاه تربیت مدرس<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>Kamal\_hosseini@yahoo.com, <sup>۲</sup>Momeni\_h@modares.ac.ir

**چکیده:** کاربرد وسیع سیستمهای حرکت از راه دور در صنعت باعث شده که در این مقاله با ارائه روشنی مناسب، پایداری و عملکرد این سیستم‌ها در مقابل تاخیر زمانی خط انتقال بهبود یابد. به همین منظور از دو کنترلگر تطبیقی مدل مرجع مستقل برای سایت فرمانبر و فرمانده استفاده شده است. کنترلگر فرمانبر مطابق کار قبلی نویسنده‌گان مقاله [۱۰] طراحی و به سایت فرمانبر اعمال شده اما برای سایت فرمانده بدليل تاخیر زمانی خط انتقال ابتدا سعی شده که توسط جبرانساز فیدفوروارد فرآیند تحت کنترل تبدیل به یک فرآیند همیشه اکیدا حقیقی مثبت شود و سپس با طراحی کنترلگر تطبیقی ردیاب مولد فرمان، کارایی مطلوب و پایداری مناسب برای آن حاصل گردد.

**واژه‌های کلیه‌ی:** سیستم حرکت از راه دور، تاخیر زمانی، سیستم همیشه اکیدا حقیقی مثبت، کنترلگر ردیاب مولد فرمان، جبرانساز فیدفوروارد

**Abstract:** The widespread application of teleoperation systems in the industry has obliged this paper to improve system stability due delay over transmission line for these systems, through presenting a suitable method which gives desired stability and functionality. For this purpose it has opted two independent model reference adaptive controllers for slave and master sites. The slave site controller designed based on our last paper[10] but because the master site includes time delay over transmission line, initially it has been tried with the help of feedforward compensator, the system to be transformed into a system which is an almost strictly positive real and proceeds with designing a command generator tracker, to achieve desired operation and proper stability for the process involved.

**Keywords:** Teleoperation System, Time Delay, Command Generator Tracker, Feedforward Compensator.

در سال ۱۹۸۹ اندرسون و اسپانگ[۱] با ارائه مدل غیرفعال<sup>۱</sup> برای کاتال انتقال باعث بهبود پایداری سیستم در مقابل مقادیر بزرگ تاخیر زمانی شدند. به هر حال الگوریتم کنترلی نمی توانست در مقابل تغییرات پارامترهای محیط، ربات فرمانده و ربات فرمانبر پاسخ مناسبی بدست دهد. در سال ۲۰۰۲ ماریوان و لیرافان[۲] با بکارگیری بهره متغیر، کاتال انتقال را در هر لحظه از زمان غیرفعال کردند و در نتیجه پایداری سیستم بهبود پیدا کرد اما پاسخ سیستم دارای ردیابی مناسبی نبود. ریو و هانافور[۳] با بکارگیری کنترلگر و رویتگر جهت غیرفعال سازی سیستم را مطرح کردند. وظیفه رویتگر، گزارش سیگال‌های مورد نیاز برای بررسی غیرفعال بودن ( $F_s, V_s - F_m, V_m$ ) سیستم بود در حالیکه کنترلگر، باعث غیرفعال کردن کل سیستم می‌شد.

<sup>۱</sup>Passive Model

## ۱. مقدمه

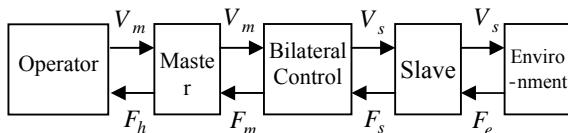
با توجه به پیشرفت روز افزون رباتها در صنعت و لزوم استفاده از آنها در محیط‌های با شرایط خاص که امکان حضور انسان در آنها ممکن نیست، بحث کنترل رباتها و استفاده مناسب آنها در فواصل دور، تحت عنوان سیستمهای حرکت از راه دور<sup>۱</sup> به عنوان یکی از دانشگاه‌های روز، مورد مطالعه و بررسی بسیاری از محققین قرار گرفته است. اکتشافات زیر آب، انجام تحقیقات در محیط‌های شیمیایی، تحقیقات فضایی، جراحی از راه دور و مانیتورینگ و نگهداری دستگاه‌ها از جمله این موارد هستند.

<sup>۱</sup>Teleoperation

## طراحی کنترلگر تطبیقی مقاوم برای سیستم های حرکت از راه دور، سید کمال حسینی ثانی<sup>۱</sup>، حمید رضا مومنی<sup>۲</sup>

استفاده می شود. ربات فرمانده<sup>۴</sup> که مشابه ربات فرمانده است و اپراتور، عملکرد مورد نظرش را بر روی آن پیاده می کند و در نهایت محیط، که کار توسط ربات فرمانبر بر روی آن انجام می شود.

شکل (۳) نمونه ای از سیستم حرکت از راه دور را نمایش می دهد. همانطور که در شکل مشاهده می شود سیگنال هایی از ربات فرمانده به فرمانبر و برعکس فرستاده می شوند که خود باعث تعریف دو نوع سیستم حرکت از راه دور به نام های یکطرفه<sup>۵</sup> و دو طرفه<sup>۶</sup> می شود. در سیستمهای یکطرفه معمولاً سیگنالی از ربات فرمانبر به فرمانده ارسال نمی شود در حالیکه در سیستمهای دو طرفه معمولاً برگشت سیگنال را داریم و حلقه به طور کامل بسته می شود. در اکثر این سیستمهای معمولاً نیروی ربات فرمانبر حس می شود و توسط ربات فرمانده به دست اپراتور منتقل می گردد و باعث تصمیم گیری بهتر اپراتور می شود.



(بلوک دیاگرام یک سیستم حرکت از راه دور)

در اکثر سیستمهای حرکت از راه دور، ربات فرمانبر و فرمانده مشابه هم هستند ولی ممکن است از لحاظ اندازه<sup>۷</sup> با هم متفاوت باشند.

با توجه به اینکه خط انتقال اینترنت که وظیفه انتقال سیگنال را بر عهده دارد، به دلایل مختلفی از جمله اشغال بودن خط و فاصله بین ربات فرمانده و فرمانبر دارای تاخیر زمانی است و با توجه به اینکه تاخیر زمانی باعث ناپایداری سیستمهای کنترلی می شود به همین دلیل توجه بسیاری از محققین به پیدا کردن راه حل هایی جهت رفع این مشکل معطوف شده است.

### ۳. مدل سازی سیستم

سیستم حرکت از راه دور مورد بررسی در این مقاله، یک سیستم از نوع ردبایی نیرو/ سرعت است و با توجه به اینکه در اکثر مقالات از ربات یک درجه آزادی برای سایت فرمانده و فرمانبر استفاده شده ما نیز به منظور مقایسه نتایج از همان مدل استفاده می کیم. معادلات (۱) تا (۴) دینامیک ربات فرمانده و فرمانبر را نشان می دهند.

$$J_m \dot{I}_m = F_h + \tau_m \quad (1)$$

پاسخ های شبیه سازی نشان می داد که رویت کردن سیگنال ها به صورت زمان حقيقی برای نرم افزار مشکل بود و نیاز به تحقیق بیشتر دارد. در سال ۱۹۹۱ اسلوتنین و نایمیر<sup>[۴]</sup>، از متغیرهای موج برای غیرفعال کردن کانال انتقال استفاده کردند و در سال ۱۹۹۷، آنها با بکار گیری فیلتر در مسیر متغیرهای موج خطای ردبایی موقعیت بین ربات فرمانده و فرمانبر را کاهش دادند و برای این منظور به همراه متغیرهای موج، انتگرال آنها را نیز ارسال کردند. حدود یک سال بعد توجه به این نکته که خراب شدن سیگنال موج به دلیل تغییرات زمان تاخیر کانال باعث خطای ردبایی و عدم برقراری غیرفعال بودن سیستم می شد باعث شد که آنها [۵] به جای انتقال سیگنال و سپس انتگرالگیری در سمت گیرنده، ابتدا انتگرال موج و انزوی را بدست آورده و سپس آن را همراه متغیرهای موج ارسال کنند و در گیرنده از فیلتر بازساز<sup>۱</sup> استفاده نمایند و در نتیجه غیرفعال بودن سیستم مستقل از تاخیر کانال می شد.

در سال ۲۰۰۰ آقابان تاکایی، فوجیموتو و سانو<sup>[۶]</sup> به منظور پایدار سازی سیستم های حرکت از راه دور، از کنترلگر<sup>۲</sup> استفاده کردند. شبیه سازی، پایداری سیستم را برای چند میلی ثانیه نشان می داد اما ردبایی سیستم چندان مناسب نبود. چو و پاک<sup>[۷]</sup> با بکار گیری کنترلگر مدل لغزشی در سمت ربات فرمانبر و کنترلگر امپدانس در سمت فرمانده باعث بهبود پایداری سیستم در مقابل تاخیرهای بزرگتر و ردبایی بهتر در سیستم شدند. هشتاد و دو سالکودن<sup>[۸]</sup> کنترل تطبیقی غیر مستقیم برای دستیابی به تطابق<sup>۳</sup> در محیط های با تاخیر متغیر یا نامعلوم را به کار گرفتند اما تحلیلی برای پایداری سیستم ارائه ندادند. سالکودن و زوو<sup>[۹]</sup> از کنترلگر تطبیقی برای سیستم حرکت از راه دور یک طرفه یا دو طرفه استفاده کردند. ردبایی بسیار مناسب بود اما پایداری سیستم مشروط به انتخاب محدود برای پارامترهای کنترلگر می شد که در نتیجه باعث کاهش عملکرد مطلوب سیستم می شد. حسینی، مومنی و شریفی<sup>[۱۰]</sup> کنترلگر تطبیقی مدل مرتع را مطرح کردند که باعث بهبود ردبایی سیستم برای تاخیرهای بزرگتر خط انتقال می شد. مجموعه کارهای انجام شده نشان می دهد که بهبود پایداری، عملکرد مطلوب سیستم را کاهش می دهد و داشتن سیستمی پایدار برای تاخیرهای مختلف خط، به نحوی که ردبایی سیستم مناسب باقی بماند همواره مورد توجه بوده است.

### ۲. سیستم حرکت از راه دور

یک سیستم حرکت از راه دور از چند بخش تشکیل می شود که مهمترین آنها عبارتند از: اپراتور انسانی، ربات فرمانبر<sup>۴</sup> که به عنوان رباتی که باید وظیفه خاصی را به انجام برساند، در محیط دور قرار می گیرد. سیستم انتقال که در حال حاضر با توجه به پیشرفتهای سریع اینترنت معمولاً از خط اینترنت

<sup>4</sup> Master Robot

<sup>5</sup> Unilateral

<sup>6</sup> Bilateral

<sup>7</sup> Scaling

<sup>1</sup> Reconstruction filter

<sup>2</sup> Transparency

<sup>3</sup> Slave Robot

طراحی کنترلگر تطبیقی مقاوم برای سیستم های حرکت از راه دور، سید کمال حسینی ثانی<sup>۱</sup>، حمید رضا مومنی<sup>۲</sup>

( بلوک دیاگرام سایت فرمانده )

در شکل فوق  $H_{rd}(s)$  مدل مرجع مورد نظر در طراحی کنترلگر تطبیقی سایت فرمانبر است که یکتابع تبدیل درجه ۲ به فرم زیر در نظر گرفته شده است.

$$H_{rd}(s) = \frac{\omega_s^2}{s^2 + 2\xi_s\omega_s s + \omega_s^2} \quad ( )$$

در صورت حصول ردیابی مناسب در سمت سایت فرمانبر داریم:  $v_{sd} = v_s$  و بنابراین تابع تبدیل قابل مشاهده از سمت سایت فرمانده به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$H_r(s) = \frac{F_s(s)}{v_{sd}(s)} = \frac{F_s}{v_s} \cdot \frac{v_{sd}}{v_s} = H_s^{-1}(s) \cdot H_{rd}(s) \quad ( )$$

$$\begin{aligned} H_t(s) &= \frac{F_{md}(s)}{F_h - F_{md}(s)} = H_m(s) \cdot e^{-T_1 s} \cdot H_r(s) \cdot e^{-T_2 s} \\ &= \frac{H_m(s) \cdot H_{rd}(s)}{H_s(s)} e^{-ds} \end{aligned} \quad ( )$$

که  $d = T_1 + T_2$  تاخیر کل و  $H_r(s)$  تابع تبدیل سایت فرمانبر و تابع تبدیل از دیدگاه سایت فرمانده است. با جایگزینی روابط (۵) و (۶) در رابطه (۱۳) داریم:

$$H_t(s) = \frac{\omega_s^2 (J_s s + b_s)}{(J_m s + b_m)(s^2 + 2\xi_s \omega_s s + \omega_s^2)} \cdot e^{-ds} \quad ( )$$

#### ۴. فرمول سازی طراحی کنترلگر ردیاب مولد فرمان

در این بخش ابتدا طراحی کنترلگر ردیاب مولد فرمان<sup>[۱۱]</sup> (CGT) را فرمول بندی کرده و سپس با بررسی شرایط لازم جهت این طراحی، بخش بعد را به چگونگی نحوه برقراری این شرایط تخصیص می دهیم.

فرض کنید معادلات حالت یک سیستم LTI به فرم زیر باشد.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad ( )$$

که در آن  $x_p(t)$  بردار حالت  $n \times 1$ ،  $u_p(t)$  بردار کنترل  $m \times 1$ ،  $y_p(t)$  بردار خروجی  $q \times 1$  و  $A_p$ ،  $B_p$  و  $C_p$  ماتریسهای  $n \times n$  و  $n \times 1$  می باشند. فرض کنید رنج تغییرات پارامترهای فرآیند بصورت زیر باشد.

$$\begin{aligned} \underline{a}_{ij} &\leq a_p(i, j) \leq \bar{a}_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \\ \underline{b}_{ij} &\leq b_p(i, j) \leq \bar{b}_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad ( )$$

$$J_s \dot{v}_s = -F_e + \tau_s \quad ( )$$

$$\tau_m = -b_m v_m - F_{md} \quad ( )$$

$$\tau_s = -b_s v_s + F_s \quad ( )$$

که در آن  $v_m$  و  $v_s$  به ترتیب سرعت رباتهای فرمانده و فرمانبر،  $F_h$  نیروی اعمالی از دست اپراتور به ربات اینرسی،  $b_m$  و  $b_s$  دمپنگ،  $F_e$  نیروی برگشتی از سایت فرمانبر،  $F_{md}$  گشاور موتورها،  $\tau_m$  و  $\tau_s$  گشاور هماهنگ ساز<sup>۱</sup> و  $F_s$  گشاور محیط است. گشاور  $F_s$  معمولاً جهت تطبیق سیگالهای سرعت فرمانده و فرمانبر و توسط کنترلگر اعمال می شود. با توجه به روابط فوق تابع تبدیل رباتهای فرمانده و فرمانبر قابل محاسبه هستند.

$$H_m(s) = \frac{V_m}{F_h - F_{md}} = \frac{1}{J_m s + b_m} \quad ( )$$

$$H_s(s) = \frac{V_s}{F_s - F_e} = \frac{1}{J_s s + b_s} \quad ( )$$

کاتال انقال نیز می توانند با یک تاخیر خالص مدل گردد. بنابراین داریم:

$$v_{sd}(t) = v_m(t - T_1) \quad ( )$$

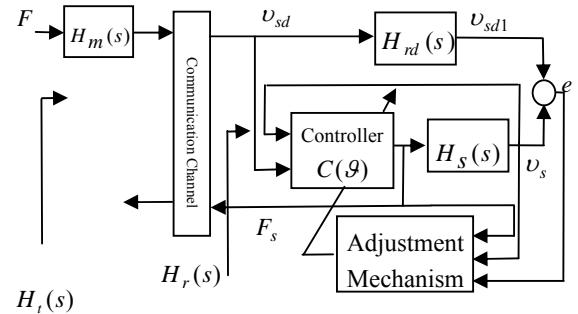
$$F_{md}(t) = F_s(t - T_2) \quad ( )$$

که  $T_1$  و  $T_2$  تاخیر کاتال رفت و برگشت است و  $v_{sd}$  سرعت اعمال شده به سایت فرمانبر و  $F_{md}$  نیروی برگشتی از سایت فرمانبر است. بنابراین داریم:

$$v_{sd}(s) = e^{-T_1 s} \cdot V_m(s) \quad ( )$$

$$F_{md}(s) = e^{-T_2 s} \cdot F_s(s) \quad ( )$$

با فرض  $F_e = 0$  و روابط فوق و با توجه با اینکه برای سایت فرمانبر نیز را کنترلگر تطبیقی مدل مرجع استفاده شده است [۱۰]، دیاگرام کلی سیستم را نشان می دهد.



<sup>2</sup> Command Generator Tracker

<sup>1</sup> Coordinating Torque

طراحی کنترلگر تطبیقی مقاوم برای سیستم های حرکت از راه دور، سید کمال حسینی ثانی<sup>۱</sup>، حمید رضا مومنی<sup>۲</sup>

$$\begin{aligned} S_{11}A_m &= S_{11}A_p + S_{21}B_p \\ S_{11}B_m &= S_{12}A_p + S_{22}B_p \\ C_m &= S_{11}C_p \\ 0 &= S_{12}C_p \end{aligned} \quad ( )$$

در حالت رديابي كامل  $x_p^*(t) = x_p(t)$  و کنترل ايده ال به فرم زير می باشد.

$$u_p^*(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m \quad ( )$$

در حالي که رديابي كامل اتفاق نیافتد ( $y_p(t) \neq y_m(t)$ )، رديابي مجاني قابل تحقق است و بنابراین قانون کنترلي به فرم زير می باشد.

$$u_p(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m + K_e(y_m(t) - y_p(t)) \quad ( )$$

با توجه به رابطه (۲۳) قانون کنترلي در روش CGT به فرم کلي زير قابل بيان است.

$$u_p(t) = K_e(y_m(t) - y_p(t)) + K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) \quad ( )$$

که در آن  $K_e(t), K_x(t), K_u(t)$ : برهه های تطبیقی هستند.  
با تعریف بردارهای  $(K(t), r(t))$  و  $(K_e(t), r_e(t))$  بفرم روابط (۲۵) و (۲۶)، رابطه (۲۴) را می توان بفرم برداری (۲۷) نوشت.

هدف از طراحی کنترلگر ( $u_p(t)$ ) آن است که بردار خروجی فرآيند  $y_p(t)$ ، خروجی مدل مرجع زير را دنبال نماید.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad ( )$$

در روش CGT فرض می شود که فرآيند ايده ال با حالت  $x_p^*(t)$  و کنترل  $u_p^*(t)$  وجود داشته باشد به نحوی که رديابي كامل حاصل گردد.  
به عبارت دیگر  $y_m(t) = y_p(t) \geq 0$  برای  $t \geq 0$ . فرآيند ايده ال همان دیناميك فرآيند واقعی را دارد. بنابراین:

$$\dot{x}_p^* = A_p x_p^* + B_p u_p^* \quad \forall t \geq 0 \quad ( )$$

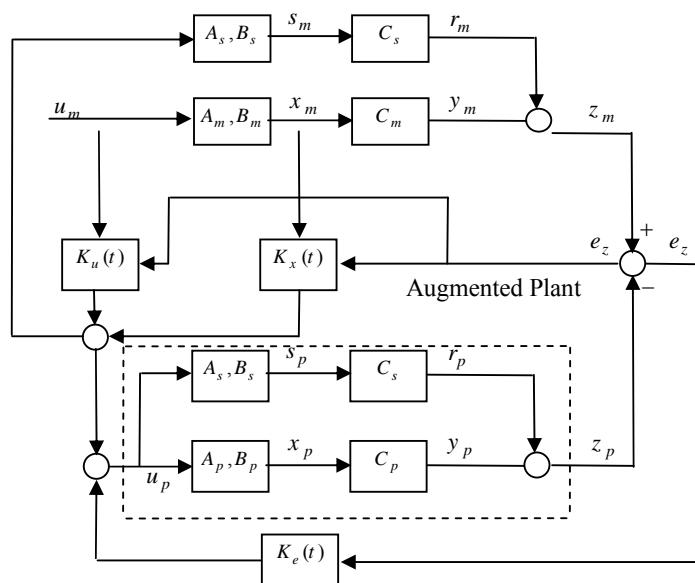
$$y_p^* = y_m = C_p x_p^* = C_m x_m \quad ( )$$

در حالت رديابي كامل، حالتهای واقعی فرآيند، حالتهای فرآيند ايده ال را دنبال خواهند کرد و خروجی فرآيند، خروجی واقعی را دنبال خواهد نمود.

فرض کنید قانون کنترل  $u_p^*(t)$  و حالت  $x_p^*(t)$  ترکيب خطی باشند. در این صورت داریم

$$\begin{bmatrix} x_p^* \\ u_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad ( )$$

که در آن  $S_{ij}$  ها شرایط زير را برقرار می سازند.



بلوک دیاگرام کنترلگر (CGT)

طراحی کنترلگر تطبیقی مقاوم برای سیستم های حرکت از راه دور، سید کمال حسینی ثانی<sup>۱</sup>، حمید رضا مومنی<sup>۲</sup>

نامه‌های فنی فارسی فرآیند است و بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \Delta_a(S) &= G(s) - G_0(s) & (12-4) \\ \Delta_m(S) &= e^{-Ts} - 1 & ( ) \\ G_p(s) &= (G_0(s) + \Delta_a(S))(I + \Delta_m(S)) & ( ) \\ \Delta(s) &= \Delta_m(S) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(S)(I + \Delta_m(S)) & ( ) \\ G_p(s) &= G_0(S)(I + \Delta(S)) & ( ) \end{aligned}$$

برای چک کردن شرط ۲ از قضیه ۱ می‌توان از قضیه زیر استفاده کرد.

**قضیه ۲:** تابع تبدیل  $G(s)$  با ضرایب حقیقی، حقیقی مثبت است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند.  
۱.  $G(s)$  قطبی در سمت راست محور  $\omega$  نداشته باشد.

۲. اگر  $G(s)$  قطبایی روی محور  $j\omega$  یا در بینهایت دارد، آنها ساده با مانده مثبت باشند. (اثبات: مرجع [۱].)

$$Re(G(j\omega)) \geq 0$$

شرطهای ۱ و ۲ برای قابل تست هستند. برای تست شرط ۳ کافی است

$$\text{که شرط زیر برای تابع } G(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \text{ چک شود.}$$

$$f(j\omega) = Re(B(j\omega)A(-j\omega)) \geq 0 \quad \text{for } \omega \geq 0 \quad ( )$$

بنابراین با توجه به قضیه ۱، سعی می‌شود که جبرانساز فیدفوروارد  $H(s)$  که موازی با فرآیند قرار می‌گیرد به منظور تسهیل طراحی، به نحوی انتخاب گردد که حداقل رتبه را داشته و شرط ۲ و ۳ قضیه ۱ را برآورده سازد، حال با اطمینان از ASPR بودن فرآیند، کنترلگر CGT طراحی شده یک سیستم حلقه بسته پایدار بدست خواهد داد. در بخش ۶ مراحل طراحی کنترلگر برای سیستم حرکت از راه دور مدل شده در بخش ۳ مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۶. نتایج شبیه سازی

مراحل طراحی کنترلگر تطبیقی مدل مرجع برای سایت فرمانبر در مرجع [۱۰] آورده شده است. در این بخش طراحی کنترلگر CGT برای سایت فرمانده مورد بررسی قرار می‌گیرد. براساس محاسبات فصل (۳) تابع تبدیل فرآیند به فرم زیر محاسبه شد.

$$H_t(s) = \frac{\omega_s^2(J_ss + b_s)}{(J_ms + b_m)(s^2 + 2\xi_s\omega_s^2s + \omega_s^2)} \cdot e^{-ds} \quad ( )$$

با توجه به روابط (۲۹) تا (۳۳) جبرانساز فیدفوروارد بغیر زیر قابل محاسبه است:

$$K(t) = [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)] \quad ( )$$

$$r(t) = \begin{bmatrix} y_m(t) - y_p(t) \\ x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad ( )$$

$$u_p(t) = K(t)r(t) \quad ( )$$

با انتخاب بهره های تطبیقی بصورت ترکیبی از بهره های تابعی و انگرالی [۱۲]، می‌توان بردار بهره  $K(t)$  را بفرم زیر نوشت.

$$K(t) = K_p(t) + K_i(t) \quad ( )$$

$$K_p(t) = [y_m(t) - y_p(t)]r^T(t)T_p, \quad T_p \geq 0 \quad ( )$$

$$K_i(t) = [y_m(t) - y_p(t)]r^T(t)T_i, \quad T_i > 0 \quad ( )$$

شکل (۳) بلوک دیاگرام کنترلگر CGT را نمایش می‌دهد.

شرایط کافی برای داشتن ردیابی مجانبی آن است که:

یک پاسخ برای مساله CGT (رابطه (۴-۴) و (۵-۵)) وجود داشته باشد.

فرآیند تحت کنترل همیشه اکیدا حقیقی مثبت<sup>۱</sup> (ASPR) باشد.

در بخش ۵ با توجه به قضایای تعریف شده، سعی شده که فرآیند تحت کنترل تبدیل به یک سیستم ASPR شود تا شرایط کافی برای کنترلگر CGT فراهم گردد.

## ۵. طراحی جبرانساز فیدفوروارد به منظور سازی فرآیند

**قضیه ۱:** اگر جبرانساز فیدفوروارد  $H(s)$  بر طبق شرایط زیر طراحی شود، آنگاه فرآیند اضافه شده<sup>۲</sup>  $G_a(s) = G_p(S) + H(S)$  با انحرافات<sup>۳</sup>

$$(G_p(s) = G(S)e^{-Ts})$$

پایدار باشد و درجه نسبی آن یک باشد.

فرآیند نامی اضافه شده  $(G_0(S) + H(S))$  ASPR باشد.

$$\|\tilde{\Delta}(S)\|_{\infty} < 1 \quad \text{و} \quad \tilde{\Delta}(S) \in RH_{\infty}$$

$$\tilde{\Delta}(S) = \frac{G_0(s)W(s)}{G_0(s) + H(s)}$$

(اثبات: مرجع [۱۳]).

در روابط فوق  $G_0(s)$  مقدار نامی تابع تبدیل  $G(s)$  و  $W(s)$  حد بالای  $\Delta(s)$  است.

<sup>1</sup> Almost Strictly Positive Real

<sup>2</sup> Augmented

<sup>3</sup> Perturbation

طراحی کنترلگر تطبیقی مقاوم برای سیستم های حرکت از راه دور، سید کمال حسینی ثانی<sup>۱</sup>، حمید رضا مومنی<sup>۱</sup>

تابع تبدیل  $H(S)$  را سریعتر از فرآیند انتخاب می کنیم و به منظور ساده سازی محاسبات  $H(S)$  از درجه یک به فرم زیر انتخاب شده است:

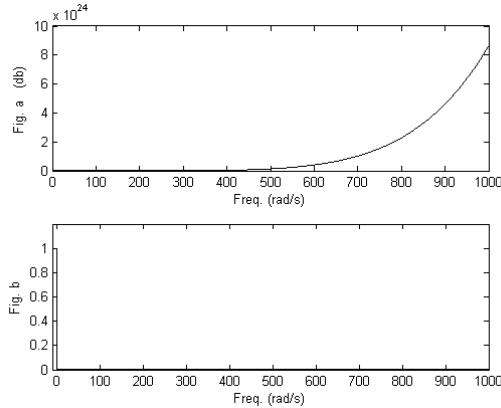
$$H(s) = \frac{b_0}{(s+10)} \quad ( )$$

با توجه به اینکه  $\|\tilde{\Delta}(S)\|_{\infty}$  مقدار بهره ماکریم ( $\tilde{\Delta}(S)$ ) را نمایش می دهد، می توان محاسبات را به صورت تحلیلی نیز انجام داد. نتایج محاسبات مقدار  $b_0 = 30$  را بدست خواهد داد.

به منظور برقراری شرط های (۲) و (۳) از قضیه ۱، برقراری شرط  $ASPR$  بودن  $G_0(S) + H(S)$  و  $\|\tilde{\Delta}(S)\|_{\infty} < 1$  در شکل (۳) قابل مشاهده است.

بنابراین جبرانساز  $H(S)$  انتخاب شده، سیستم حرکت از راه دور را برای تاخیر زمانی رفت و برگشت کانال تا ۶ ثانیه،  $ASPR$  می سازد.

در ادامه این بخش، نتایج شیوه سازی، برای ورودی پالس مربعی به ربات فرمانده و به ازای تاخیر بزرگ ۵ ثانیه برای کانال انتقال رسم شده است.



(۳۴)  $ASPR$  بودن  $G_0(S) + H(S)$  برقراری شرط (a)

$$\|\tilde{\Delta}(S)\|_{\infty} < 1$$

همانطور که از شکل (۳) مشاهده می شود با وجود تاخیر زمانی بزرگ کانال انتقال، سیستم پایدار مانده و دارای ردیابی مناسبی می باشد. با توجه به روش ارائه شده، به منظور طراحی کنترلگر مناسب برای سیستم حرکت از راه دور، طراح می تواند ابتدا تاخیر خط انتقال را بررسی کرده و اگر شناختی از مقدار ماکریم این تاخیر داشته باشد جبرانساز  $H(S)$  را کمتر محافظه کارانه انتخاب کند و سپس کنترلگر CGT مطلوب را طراحی نماید. بنابراین در مجموع کنترلگر CGT طراحی شده یک سیستم پایدار را بدست خواهد داد.

$$\Delta_m(S) = e^{-ds} - 1 \quad ( )$$

$$\Delta_a(S) = 0 \quad ( )$$

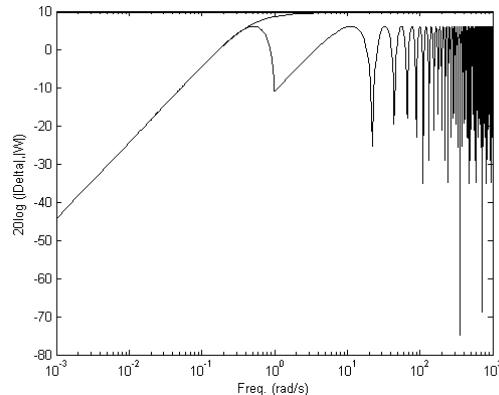
$$\Delta(s) = \Delta_m(S) = e^{-ds} - 1 \quad ( )$$

$$G_0(s) = G(s) \quad ( )$$

با رسم اندازه  $\Delta(S)$  می توان تابع تبدیل  $W(S)$  را به فرم زیر، به عنوان حد بالای اندازه  $\Delta(S)$  بدست آورد.

$$W(s) = \frac{3s}{s+0.5} \quad ( )$$

در شکل (۶) اندازه  $\Delta(S)$  و  $W(S)$  رسم شده است. در محاسبه  $W(S)$  مقدار تاخیر کل  $d = T_1 + T_2 = 6$  ثانیه انتخاب کرده ایم که مقدار بزرگی برای تاخیر یک سیستم حرکت از راه دور است.



$$/W(s)/ = \frac{3s}{s+0.5} / \text{b}, \text{a} / \Delta(S) / ($$

$$/W(s)/ = 20\log(3) : c$$

برای  $W(S)$  مقدار دیگری از جمله  $3 = W(S)$  نیز قابل انتخاب است که کمی نسبت به مقدار قبلی محافظه کارانه<sup>۱</sup> می باشد.

اکنون برای محاسبه  $(H(S))$  از می نیمايز کردن  $\|\tilde{\Delta}(S)\|_{\infty} < 1$  استفاده می کنیم.

$$\tilde{\Delta}(S) = \frac{\frac{s+3}{(170s+2)(s^2+1.4s+1)} * 3}{\frac{s+3}{(170s+2)(s^2+1.4s+1)} + H(s)} \quad ( )$$

<sup>۱</sup> Conservative

طراحی کنترلگر تطبیقی مقاوم برای سیستم های حرکت از راه دور، سید کمال حسینی ثانی<sup>۱</sup>، حمید رضا مومنی<sup>۲\*</sup>

*Int. Conf. on Robot. Automat.*, Leuven, Belgium, pp.1909-1915, 1998.

[6] Sano, A., Fujimoto, H., Takai, T., "Network -Based Force-Reflecting Teleoperation", *proc. IEEE, Int. Conf. on Robotics & Automation*, April 2000

[7] Chul Cho, H., Hyeon Park, J., "Impedance Control Design of Internet-Based Teleoperation Using Absolute Stability Concept", *proc. IEEE intl. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Oct. 2002

[8] Hastrudi-zaad, K. and Salcudean, S. E., "Adaptive transparent impedance reflecting teleoperation," *Proc. IEEE, Int. Conf. on Robot. Automat.*, Minneapolis, Minnesota, pp. 1369-1374, April 1996.

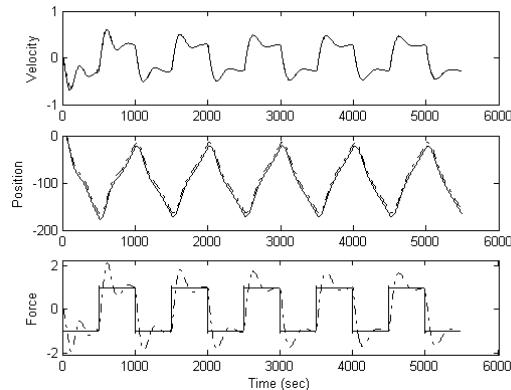
[9] Zhu, W. H. and Salcudean, S. E., "Stability guaranteed teleoperation: An adaptive motion/force control approach," *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. 45, no. 11, pp. 1951-1969, November 2000.

[10] Sunny, K. H., Momeni, H. and Janabi-Sharifi, F., "Adaptive teleoperation systems design," *Proc. IEEE Int. Conf. Control Applications*, :CCA2005, Toronto, Canada, August 2005.

[11] Broussard, J. and O'Brien, O., "Feedforward control to track the output of a forced model," *IEEE 17<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, vol. 42, pp. 1149-1155, 1979.

[12] Kaufman, H., Bar-Kana, I., and Sobel, K., *Direct Adaptive Control Algorithms*, Springer-Verlag, 1998.

[13] Kaufman, H. and Neat, G., "Asymptotically stable MIMO direct MRAC for processes not necessarily satisfying a positive real constant," *Int. J. Control*, vol. 58, pp. 1011-1031, 1993.



( مقایسه سیگنالهای سرعت، موقعیت و نیرو برای تاخیر زمانی ۵ ثانیه )

## ۷. نتیجه گیری

در این مقاله از دو کنترلگر مستقل برای کنترل سیستم های حرکت از راه دور استفاده شده است. ابتدا با طراحی کنترلگر تطبیقی مدل مرجع برای سایت فرمانبر رديابي سیگنالهای سرعت و موقعیت بدست می آيد و سپس با طراحی کنترلگر CGT رديابي نيزو در سمت سایت فرمانده حاصل می گردد. به منظور طراحی کنترلگر پایدار برای سایت فرمانده که شامل تاخیر زمانی کانال انتقال است سعی شده تا با طراحی جبرانساز فیدفوروارد فرآيند تحت کنترل برای رنج های دلخواه از تاخیر زمانی کانال و احیاناً نامعینی پارامترهای تابع تبدیل فرآيند تبدیل به سیستم ASPR شود و با طراحی کنترلگر CGT پایداری و رديابي مناسب برای سیستم بدست دهد.

## مراجع

- [1] Anderson, R. J., Spong, M. W., "Bilateral control of teleoperators with time delay," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no.5, May 1989, pp. 494-501.
- [2] Leeraphan, S., Marieewarn, T. and Laowattana, D., "Stable adaptive bilateral control of transparent teleoperation through time-varying delay," *Proc.IEEE/RSJ, Int. Conf. on Robots and systems*. Lausanne, Switzerland, pp. 2979-2984, October 2002.
- [3] Ryu, J., Kwon, D., Hannaford, B., "Stable Teleoperation with Time Domain Passivity Control", *proc. IEEE int conf. on Robotics & Automation*, May 2002
- [4] Niemeyer, G. and Slotine, J.-J. E., "Stable adaptive teleoperation," *IEEE J. of Oceanic Engineering*, vol. 16, no.1, Jan. 1991.
- [5] Niemeyer, G. and Slotine, J.-J. E., "Towards force-reflecting teleoperation over the Internet," *Proc. IEEE*

# الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering)

علی غفاری<sup>۱</sup> سیدعلی اکبر موسویان<sup>۲</sup> محمدرضا همایی نژاد

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، تهران - صندوق پستی ۱۶۷۶۵-۳۳۸۱

<sup>1</sup>ghaffari@kntu.ac.ir, <sup>2</sup>moosavian@kntu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله روش جدیدی در کنترل مود لغزشی به منظور کاهش پدیده نوسانات شدید سیستم کنترل ارائه می‌شود. در این روش، یکتابع ریاضی برای تنظیم پارامتر  $\eta$  در ورودی کنترلی مود لغزشی معرفی می‌گردد. این تابع به گونه‌ای تعریف می‌شود که بر اساس انتخاب ترم‌های آن توسط طراح، سیستم کنترلی بتواند با سرعت دلخواه به نزدیکی سطح لغزش برسد، سپس به آهستگی وارد لایه مرزی اطراف سطح لغزش بشود و در داخل لایه مرزی رفتار ملایمی داشته باشد. بمنظور بررسی تاثیر اعمال تابع فوق در الگوریتم کنترل لغزشی بر عملکرد سیستم، اتوپایلوت زاویه فراز یک نمونه موشک هوا به هوا به دو روش متداول و روش معرفی شده جدید طراحی و نتایج عملکرد آنها با هم مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیاتی: کنترل لغزشی- عدم قطعیتهای پارامتری-Chattering- بهره کلیدزنی

**Abstract:** In this paper a new chattering alleviation algorithm for Sliding Mode Control (SMC) of non-linear systems is presented. In the new method a mathematical function for regulating  $\eta$  parameter is introduced. Due to the initial choice of this function's parameters by designer, the state vector of the system approaches toward sliding surface with any arbitrary speed, enters smoothly the boundary layer surrounding the sliding surface, while the state vector doesn't include fast behaviors through the boundary layer. To show merits and capabilities of the proposed algorithm on SMC performance characteristics, the Pitch autopilot of an Air to Air missile is synthesized based on the new method and results are taken to comparison with conventional design.

**Keywords:** Sliding Mode Control- Parametric Uncertainties- Chattering- Switching Gain

<b>C</b>	فاصله مرکز جرم از بالکهای اصلی :	<b>فهرست علامت</b>
<b>V</b>	سرعت خطی مرکز جرم موشک :	فاصله جری از صفحه لغزان :
<b>X<sub>con</sub></b>	افت نیروی پیشران بر اثر فعالیت کنترلی :	خطای تعقیب حالت :
<b>Y<sub>act</sub></b>	نیروی کنترلی اعمالی از بالکهای اصلی به موشک :	مقدار مطلوب حالت :
<b>M<sub>act</sub></b>	گشتاور کنترلی اعمالی از عملکردهای کمکی به موشک :	دینامیک سیستم :
<b>(.)<sub>com</sub></b>	ورودی ایجاد شده توسط قانون کنترل :	ضخامت لایه مرزی :
<b>M<sub>aero</sub></b>	گشتاور آبرودینامیکی واردہ بر موشک :	بهره کلیدزنی :
<b>K<sub>PN</sub></b>	ثابت ناوبری :	پارامتر سیستم کنترل :
<b>X</b>	نیروی پسا :	پارامتر سیستم کنترل (پارامتر شرط لغزان) :
<b>Y</b>	نیروی بالا برندہ :	جرم لحظه‌ای موشک :
<b>Y<sub>I</sub></b>	مولفه نیروی بالا برندہ در دستگاه مختصات بدنی :	ممان اینرسی موشک حول محور جانبی :

## الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده Chattering (ع. غفاری، ع. موسویان، م. همایی نژاد)

[۸،۷،۶،۵] اعمال اصلی بوجود آورنده پدیده Chattering ، فرآیند کلید زنی با بهره ای ثابت در نزدیکی صفحه لغزش است در زمان رسیدن بردار حالت سیستم به سطح لغزش ، به خاطر مومنت بیش از اندازه بوجود آمده و به علت وجود عدم قطعیتهای سیستم ، مسیر حرکت بر روی سطح لغزش ثابت نمی ماند . برای باز گرداندن مسیر حرکت به سطح لغزش ، ترم کلیدزنی به ورودی پیوسته اضافه می شود . بهره کلیدزنی باید به گونه ای باشد که ضمن حفظ پایداری ، کیفیت عملکرد سیستم کنترلی مطلوب باشد . برای تأمین پایداری سیستم ، یکتابع لیپانوف به صورتی معروفی می شود که معادله سطح لغزش ، نشانه هنده منفی معین بودن تغییرات تابع لیپانوف نسبت به زمان باشد . در روش های متداول مود لغزشی ، معادله سطح لغزش بصورت زیر تعریف می شود .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (s^2) \leq -\eta |s| \quad (1)$$

که در معادله (۱) ،  $\delta$  فاصله جبری از سطح لغزش و پارامتر  $\eta$  یک مقدار ثابت و همواره مثبت است . در سطح لغزش ( $s = 0$ ) ، با اضافه شدن ترم کلیدزنی به ورودی پیوسته پدیده Chattering پیش می آید . بهره کلیدزنی در روش های معمول ، مقداری مثبت و بزرگتر از  $\eta$  می باشد . هر چه عدم قطعیتهای سیستم بیشتر باشد ، به طور اصولی بهره کلیدزنی نیز از  $\eta$  بزرگتر است . بزرگ بودن بهره کلیدزنی ، پدیده Chattering را تشید می کند . از طرفی نمی توان  $\eta$  را کوچک انتخاب کرد زیرا زمان رسیدن مسیر حرکت بردار حالت از وضعیت اولیه به سطح لغزش با مقدار  $\eta$  رابطه ممکوس دارد . کوچک شدن  $\eta$  این زمان را افزایش می دهد . در مقاله حاضر ، یکتابع ریاضی برای تنظیم پارامتر  $\eta$  به گونه ای تعریف و ارائه می گردد که ضمن حفظ پایداری و سرعت عکس العمل سیستم ، پدیده Chattering کاهش یابد . ویژگی مهم تابع تنظیم کننده معروفی شده در این مقاله اینست که بکار گیری آن در الگوریتم کنترل مود لغزشی متداول ، بار محاسباتی چندانی را به الگوریتم متداول اضافه نمی کند . این در حالی است که روش های معروفی شده تاکنون که دارای عملکرد مطلوبی هستند بطور عمدی از دیدگاه محاسباتی بار زیادی را به الگوریتم اضافه می کنند . از سوی دیگر مزیت مهم دیگر روش جدید معروفی شده ، سادگی انتخاب پارامترهای مرتبط با الگوریتم بمنظور دستیابی به کیفیت عملکردی مطلوب است . ذکر این نکته حائز اهمیت است که اگرچه ثابت می شود الگوریتم کنترل مود لغزشی همواره شرط پایداری لیپانوفی را ارضاء نماید ، اما عملکرد آن به ازای هر انتخابی از پارامتر شرط لغزش الزاماً به پاسخ مطلوبی از سیستم کنترل منجر نمی شود . به این معنی که برای هر سیستم با توجه به شرایط عملکردی و ویژگی های دینامیکی آن ، بایستی مقادیر پارامترهای کنترلی را به گونه ای تعریف نمود که با توجه به شرایط ذکر شده پاسخ مناسبی را رهنمون گردند [۱۵-۱۲] . اما در روش کنترلی جدید ، بطور کلی از آنجا که پارامتر شرط لغزش در هر

$x_{pc}$	فاصله میان مرکز جرم و مرکز فشار موشک :
$\phi$	زاویه محور اصلی موشک با افق مرجع :
$\theta$	زاویه بردار سرعت خطی با افق مرجع :
$\alpha$	زاویه حمله :
$\vartheta$	زاویه محور طولی موشک با افق محلی :
$x$	موقعیت افقی موشک در دستگاه مرجع :
$y$	موقعیت قائم موشک در دستگاه مرجع :
$\chi$	برد کمانی :
$r$	فاصله موشک از مرکز زمین :
$P$	نیروی پیشران موتور :
$g$	شتاب گرانشی زمین :

## ۱. مقدمه

کنترل سیستمهای با ساختار متغیر ۱ بوسیله روش مود لغزشی برای نخستین بار در دهه ۱۹۵۰ در شوروی بوسیله (Emelyanov) و محققان همکار وی معروفی شد . پس از آن ، روش کنترل سیستمهای با ساختار متغیر به سیستمهای از قبیل چند ورودی - چند خروجی ، غیر خطی ، سیستمهای گسته زمانی ۲ و سیستمهای با ورودیهای اتفاقی ۳ گسترش یافت . مهمترین ویژگی های سیستمهای کنترل VSC خاصیت مقاوم بودنشان نسبت به هر گونه عدم قطعیت های پارامتری و اغتشاشات خارجی می باشد [۱، ۲، ۳] . نوسانات شدید ۴ ایجاد شده در سیستمهای کنترل مود لغزشی که بعلت فرآیند کلیدزنی ۵ است ، می تواند باعث تحریک فرآندهای بالایی از سیستم بشود که در محاسبات اولیه کنار گذاشته شده اند . بدین ترتیب بحث کاهش کیفیت عملکرد سیستم و یا حتی ناپایداری پیش می آید [۴] . بمنظور از بین برد پدیده مذکور روش های مختلفی ارائه شده است . نکته مهم در از بین برد پدیده (Chattering) آنست که علاوه بر حفظ پایداری سیستم ، کیفیت پاسخ گذرا ، عملکرد در حالت ماندگار و توانایی سیستم در حذف نویزها و عدم قطعیتهای مدلسازی به ازای دخیل نمودن الگوریتم پیشنهادی آسیب نییند . اما در بسیاری از روش های پیشنهادی تاکنون ، معمولاً عملکرد روش برای شرایط خاصی قابل قبول است . الگوریتم هایی که به ازای تمام حالتها دارای عملکرد مطلوبی هستند ، معمولاً ساختار پیچیده و مشکلی از دیدگاه عملی سازی دارند

## Variable Structure Control Systems

### Discrete Time Systems

### Stochastic Inputs

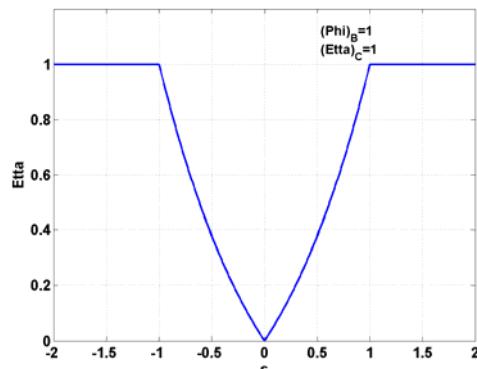
### Chattering

### Switching

### الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering) ع. غفاری، ع. موسویان، م. همایی نژاد

$$\eta = \eta_C \frac{|1 - e^{\phi_B s}|}{|1 - e^{\phi_B}|} \quad (1)$$

مقدار  $\eta$  در این حالت، با توجه به فاصله از صفحه لغزان تنظیم می‌گردد. این مقدار تنظیم شده به ازای مقادیر مختلف  $s$  در شکل ۱ ترسیم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود  $\eta$  همواره از  $\eta_C$  کوچکتر است و وقتی  $s$  روی سطح لغزش قرار می‌گیرد یعنی برای  $s = 0$  مقدار  $\eta = 0$  می‌شود. با انتخاب  $\eta$  به صورت رابطه (۲)، در خارج از لایه مرزی سرعت عکس العمل همانند حالتی است که از این تابع ریاضی استفاده نکنیم و  $\eta_C$  را بکار بریم. از طرفی در داخل لایه مرزی، نوسانات شدید کاهش می‌یابد.



(۱) نحوه تنظیم پارامتر  $\eta$  بر اساس فاصله از صفحه لغزش.

### ۳. مدل دینامیکی زاویه فراز موشک

به منظور بررسی کیفیت عملکرد الگوریتم کنترلی جدید، دینامیک زاویه فراز نوعی موشک هوا به هوا جهت پیاده‌سازی قانون مذکور مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شکل‌های ۲ و ۳ پارامترهای هندسی مسیر و دیاگرام آزاد نیرویی موشک نشان داده می‌شود

$$M\dot{V} = (P - X_{con})\cos\alpha - (X + Y_{act}\sin\alpha) - Mg\sin\theta \quad (2)$$

$$MV\dot{\theta} = (P - X_{con})\sin\alpha + Y + Y_{act}\cos\alpha - Mg\cos\theta \quad (3)$$

$$I\ddot{\phi} = -M_{act} - M_{aero} - Y_{act} \cdot C \quad (4)$$

$$\dot{x} = V\cos\theta, \dot{y} = V\sin\theta \quad (5)$$

لحظه با توجه به فاصله از صفحه لغزش تنظیم می‌گردد، عملکرد سیستم کنترلی وابستگی زیادی به انتخابهای اولیه پارامترهای کنترلی ندارد. بمنظور بررسی صحت عملکرد الگوریتم جدید کنترل مود لغزشی، سیستم کنترل زاویه فراز موشک هوا به هوا در یک مأموریت رهگیری هدف متحرک هوانی به روش پیشنهادی طراحی شده و نتایج با آنچه که از طراحی به روش متداول بدست می‌آید، مورد مقایسه قرار می‌گیرد

### ۲. الگوریتم کاهش شدت نوسانات شدید سیستم کنترل (Etta Regulating Procedure- ERP)

فرض می‌کنیم پارامتر  $\eta$  را در معادله سطح لغزش با روش‌های معمول مود لغزشی،  $\eta_C$  بنامیم. حالا بر اساس تعریف جدیدی که از  $\eta$  خواهیم داشت، پارامتر  $\eta$  را به صورت یک تابع ریاضی معرفی می‌کنیم:

$$\eta = \frac{1}{2} \eta_C \times [(1 - \sigma) \frac{|1 - e^{\phi_B s}|}{|1 - e^{\phi_B}|} + (1 + \sigma)] \quad (6)$$

$$\sigma = \text{sgn}(\frac{|s|}{\phi_B} - 1);$$

در معادله (۲)،  $\phi_B$  ضخامت لایه مرزی و مقداری همواره مثبت است. کمیت  $\delta$  نیز فاصله از سطح لغزش است. چون سیستم کنترلی پایدار بوده و فاصله از سطح لغزش مرتباً کم می‌شود، لذا می‌توان گفت که  $\eta$  و  $\delta$  خود توابعی از زمان هستند. اگر در شروع حرکت،  $|s(t=0)| < \phi_B$  باشد، یعنی شروع حرکت خارج از لایه مرزی آغاز شود، در اینصورت در معادله (۲) خواهیم داشت:

$$\sigma = \text{sgn}(\frac{|s|}{\phi_B} - 1) = 1 \quad (7)$$

لذا ترم اول داخل آکولاد مساوی صفر و ترم دوم داخل آکولاد مساوی ۲ می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\eta = \eta_C \quad (8)$$

بنابراین در خارج از لایه مرزی مقدار  $\eta$  مساوی همان مقداری است که از روش معمول مود لغزشی استفاده کنیم. اگر در شروع حرکت  $|s(t=0)| < \phi_B$  یا وقتی مسیر حرکت بردار حالت سیستم به داخل لایه مرزی می‌رسد، ترم دوم داخل آکولاد در معادله (۲) مساوی صفر شده و خواهیم داشت:

الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering)، ع. غفاری، ع. موسویان، م. همایی‌نژاد

$$\theta_d = \text{Arc tan} \frac{Y_t - Y_m}{X_t - X_m} \quad (12)$$

که در معادله (۱۲)،  $(X_t, Y_t)$  و  $(X_m, Y_m)$  بترتیب مختصات مرکز جرم موشک و هدف در حال رهگیری می‌باشد. بمنظور دستیابی به قانون هدایت تناسبی بایستی مانور زاویه حمله مناسب با نرخ تغییرات زاویه‌ای خط دید تدوین شود. یعنی بایستی قانون مانور زاویه حمله را بصورت زیر نوشت:

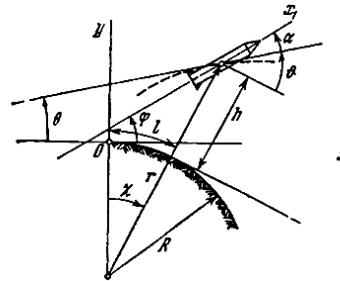
$$\dot{\alpha}_d = K_{PN} \dot{\theta}_d \quad (13)$$

در معادله (۱۳)  $\alpha_d$  زاویه حمله مطلوب است که بایستی توسط ارگانهای کنترلی ایجاد گردد.  $\theta_d$  زاویه خط دید و  $K_{PN}$  ثابت ناویری<sup>۳</sup> می‌باشد.

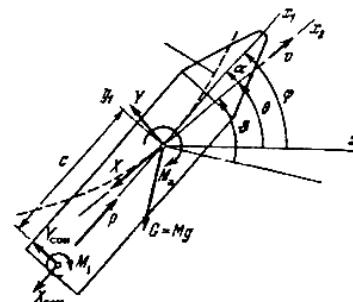
$$\dot{\chi} = \frac{V}{r} \cos \vartheta, \dot{r} = V \sin \vartheta \quad (14)$$

$$\phi = \theta + \alpha, v = \theta + \chi \quad (15)$$

معادله (۶)، بیان کننده حرکت طولی موشک است و معادلات (۷) و (۸) نمایش دهنده معادلات دینامیکی زاویه فراز موشک بوده و سایر معادلات شرایط هندسی مسیر را مشخص می‌کنند.



(۱۵). پارامترهای هندسی معادلات دینامیکی موشک



(۱۶). دیاگرام آزاد نیرویی موشک.

#### ۴. تدوین قانون هدایت موشک به سمت هدف

بمنظور هدایت یک موشک به سمت هدف اعم از ثابت یا متوجه روش‌های مداری متداولی نظر ناویری تناسبی<sup>۱</sup> و یا روش خط دید<sup>۲</sup> که هریک از موارد مذکور دارای انواع مختلفی هستند، وجود دارد. نوع منطق هدایت با توجه به مأموریت موشک تعیین می‌شود[۱۱]. در این مقاله، منطق هدایت بر اساس روش هدایت ناویری تناسبی می‌باشد که بر اساس این الگوریتم در اولین گام لازم است زاویه خط دید را که با معادله (۱۲) توصیف می‌شود، بیان داشت.

<sup>۱</sup> Navigation Constant

Set Points

Proportional Navigation (PN)

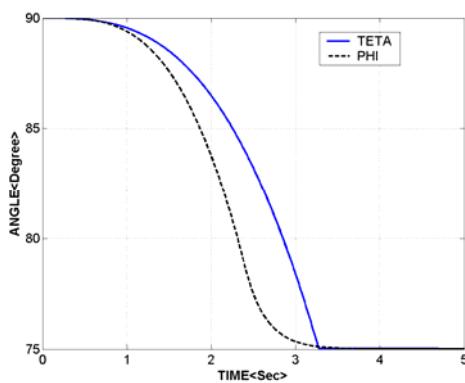
Line Of Sight (LOS)

### الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering) (ع. غفاری، ع. موسویان، م. همایی نژاد)

به سمت راست به موشک اعمال می‌گردد. در شکل ۶، نحوه تغییرات زاویه محور طولی موشک ( $\phi$ ) و زاویه سرعت خطی مرکز جرم ( $\theta$ ) با افق مرجع نشان داده می‌شود.

$$\begin{aligned} Y_{com} &= b_{11}^{-1}[-f_1 + \dot{\theta}_d - K_1 \operatorname{sgn}(\tilde{\theta})] \\ M_{com} &= b_{22}^{-1}[-b_{21}Y_{act} - f_2 + \ddot{\phi}_d - \lambda_2 \dot{\phi} - K_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi} + \lambda_2 \tilde{\phi})] \end{aligned}$$

که در معادلات (۱۴)



( ) . نحوه تغییرات زوایای  $\theta$  و  $\phi$  در شبیه‌سازی مرحله اول.

جدول ۱. مشخصات فنی موشک مورد بررسی

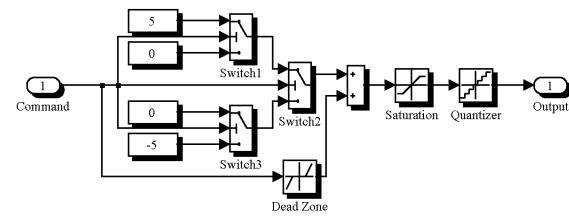
عنوان	مقدار < واحد >
جرم اولیه موشک در زمان پرتاب	102.130 < kg >
ممان اینرسی حول محور جانبی	70 < kg.m <sup>2</sup> >
فاصله مرکز جرم از نوک موشک	1.30 < m >
فاصله سطح کمکی از نوک موشک	1.0 < m >
قطر نازل	0.1219 < m >
مساحت بدنه موشک	0.0127 < m <sup>2</sup> >
طول کل	2.65 < m >
نیروی پیشان موتور	22.240 < KN >
نیروی نامی تراست عکس العملی	800 < N >

در شکل ۷، منحنی‌های مربوط به چرخش سطح آبرو دینامیکی کمکی بر حسب زمان به ازای هر دو نوع الگوریتم کنترل مود لغزشی نشان داده شده است. همچنین در شکل ۸، منحنی‌های مربوط به سطح آبرو دینامیکی اصلی نشان داده می‌شود. همانطور که از شکلهای مذکور مشخص است، بدون از

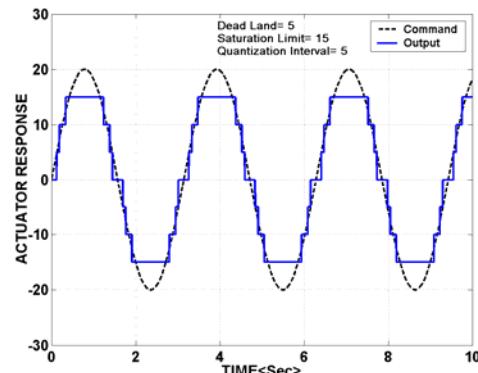
$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{MV} [(P - X_{con}) \sin \alpha + Y - Mg \cos \theta] \\ f_2 &= \frac{-Y_1(x_{pc})}{I} \\ b_{11} &= \frac{\cos \alpha}{MV}, b_{12} = 0; \quad b_{21} = \frac{-C}{I}, b_{22} = \frac{-1}{I} \end{aligned}$$

( )

بمنظور بررسی عملکرد تابع پیشنهادی در مورد تنظیم پارامترهای کنترل باستی حتی امکان مدل‌سازی مناسبی از سیستم و همچنین عملکرها انجام داد. برای مدل‌سازی عملکرها، محدودیتهای حداقل خروجی قابل تأمین، کوچکترین مقداری که عملکر قدرت ایجاد آنرا داشته و نیز قدرت تفکیک، در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۴ مدل کامپیوتری و در شکل ۵ پاسخ عملکرها به ورودی سینوسی نشان داده می‌شود.



( ) . مدل کامپیوتری عملکرها موشک



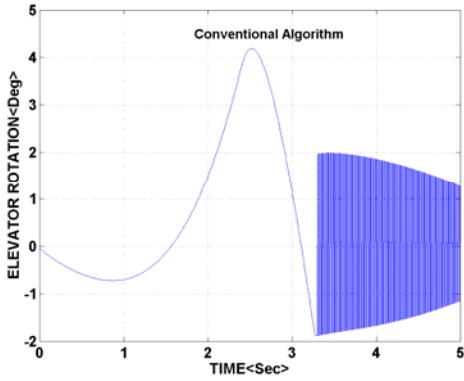
( ) نمونه پاسخ فرکانسی عملکرها

(۱) مرحله اول: آزمایش عملکرد سیستمهای کنترل در این مرحله فرض می‌شود که موشک با سرعت ثابت بصورت قائم در حرکت است. سپس بطور ناگهانی یک فرمان تغییر جهت به اندازه ۱۵ درجه

### الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering) (ع. غفاری، ع. موسویان، م. همایی‌نژاد)

( ) . انحراف بالکهای اصلی در طول شبیه سازی الف: طراحی جدید

بین رفتن کیفیت عملکرد سیستم کنترل در شرایط گذرا، پدیده Chattering بطور محسوسی کاهش می‌یابد.



( ) . انحراف بالکهای اصلی در طول شبیه سازی ب: طراحی متداول

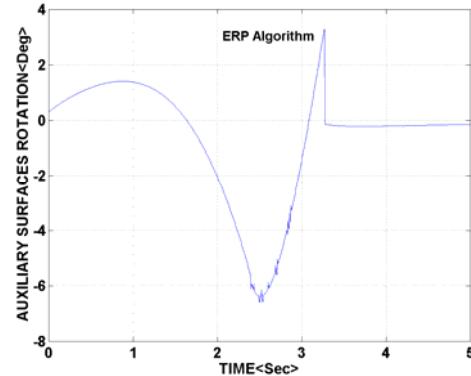
۲) مرحله دوم: آزمایش عملکرد در مانور تعییب هدف متحرک با مسیر افقی

در این مرحله، پس از بررسی نتایج قسمت اول، عملکرد سیستمهای کنترل با طراحی متداول و جدید را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این قسمت هدف تعیین پارامترهای سیستمهای کنترل مود لغزشی با طراحی متداول و بررسی اثر منطق جدید بر عملکرد کنترلر می‌یابند. در اینجا فرض می‌شود که هدف متحرک هواپی با سرعت ثابت در امتداد افق در حرکت است. بمنظور بررسی تحلیلی شدت نوسانات سیستم کنترل، رابطه‌ای تحت عنوان انرژی ویژه مصرف شده توسط سیستم کنترل مطابق زیر تعریف می‌گردد:

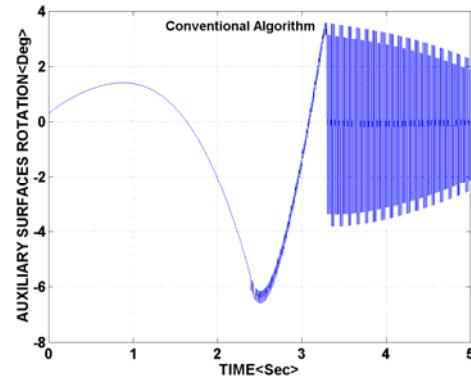
$$E_{specific} = \int_0^t (|M_{act}| + |Y_{act}.C|).|\dot{\phi}| dt \quad ( )$$

معادله (۱۶) مقدار انرژی کل مصرف شده توسط سیستمهای عملگری را طی زمان عملکرد سیستم کنترل نشان می‌دهد. در صورتیکه دو سیستم کنترل با شرایط اولیه و مرزی کاملاً مشابه به ازای تامین یک هدف کنترلی مشترک، دارای مقادیر انرژی ویژه مصرفی متفاوتی باشد، سیستمی که انرژی کمتری مصرف کرده باشد دارای عملکرد بهتری خواهد بود. در شکل ۹ شماتیکی اتوپایلوت زاویه Pitch موشک مورد بررسی نمایش داده می‌شود. در شبیه‌سازی این مرحله، شرایط اولیه بصورت مذکور در ذیل در نظر گرفته می‌شود.

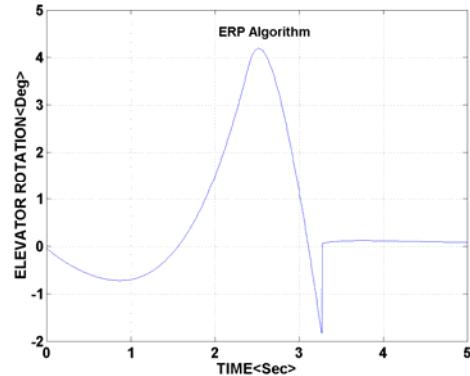
$$\phi(t=0) = \theta(t=0) = 30^\circ; V(0) = 295 \text{ m/sec}$$



( ) . انحراف بالکهای کمکی در طول شبیه سازی اول الف: طراحی جدید

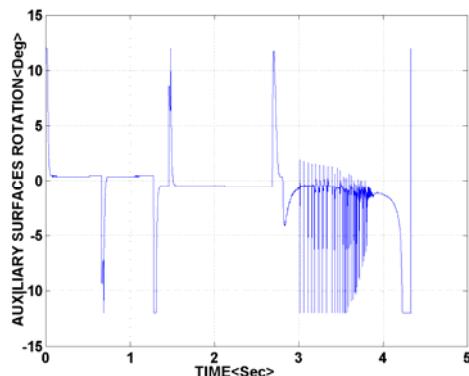


( ) . انحراف بالکهای کمکی در طول شبیه سازی اول ب: طراحی متداول

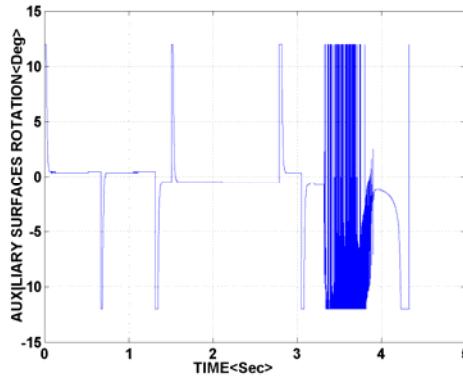


## الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده Chattering

مطلوب بوجود می آید، (این مسئله ناشی از کلیدزنی با پارامتر  $\eta$  ثابت می باشد) ازین رفته است. در عین حال بعلت مدلسازی عدم قطعیتها پارامتری در شبیه سازی بهره کلیدزنی تنها تابعی از  $\eta$  بوده و از آنجا که سهم عدم قطعیتها مدلسازی نباید تصحیح شوند (زیرا در اینصورت از اثر عدم قطعیتها صرفنظر کرده ایم) بنابراین پدیده Chattering بطور قاطع ازین نمی رود.

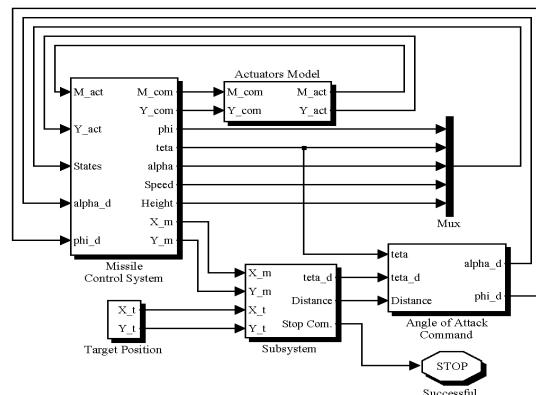


) انحراف بالکهای کمکی در طول شبیه سازی دوم (الف: طراحی جدید-روش ERP



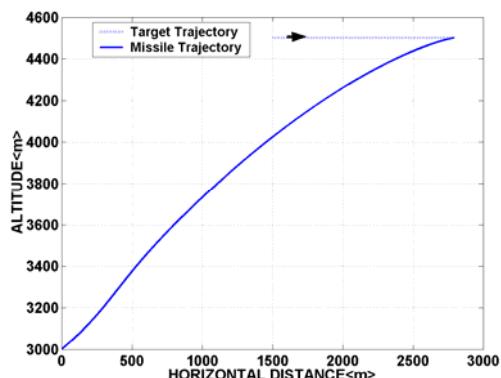
) انحراف بالکهای کمکی در طول شبیه سازی دوم (ب: طراحی متداول).

بمنظور نشان دادن میزان کاهش پدیده Chattering بصورت کیفی، در شکل ۱۳ انرژی ویژه مصرف شده توسط سیستمهای کنترل نمایش داده می شود. از این شکل اثر محسوس Chattering در فعال نگاه داشتن سیستم کنترل مشهود است. در شکل ۱۴، نمونه ای از عملکرد مکانیزم ERP بر یکی از پارامترهای کنترل به عنوان نمونه نشان داده می شود. این شکل مربوط به تنظیم  $\eta$  که بهره کلیدزنی زیرسیستم مربوط به جهت گیری سرعت است، می باشد. منظور از زیرسیستم مربوط به جهت گیری سرعت، سیستم معادلات دینامیکی نشان داده شده با معادلات (۷) می باشد. در شکل ۱۵



) مدار شبیه ساز اتوبایلوت زاویه فراز موشک

در مدار شبیه ساز شکل ۹ مشخصات فنی موشک مطابق اطلاعات جدول ۱ جایگذاری شده است. کلیه اطلاعات آبرو دینامیکی با میان یابی از جداول و گرافهای مراجع معتبر بدست می آید [۹، ۱۰]. در شکل ۱۰، مسیر هدف و موشک با مبنای زمانی یکسان به ازای یک در گیری موفق، نشان داده می شود. موفقیت در در گیری به معنای رسیدن موشک به فاصله کمتر از یک متری هدف است. این شکل به ازای هر دو روش طراحی سیستم کنترل (طراحی متداول و طراحی جدید) بدست آمده است. بدین معنی که هر دو سیستم توانسته اند هدف نهایی را تأمین نمایند. در اینصورت، با محاسبه انرژی ویژه مصرف شده توسط سیستمهای کنترل، میتوان به بررسی کفایت عملکرد الگوریتمهای کنترلی پرداخت

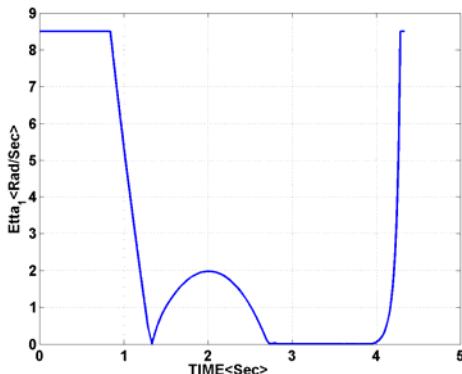


) فرآیند تعقیب و در گیری با هدف متحرک هوایی در شبیه سازی مرحله دوم.

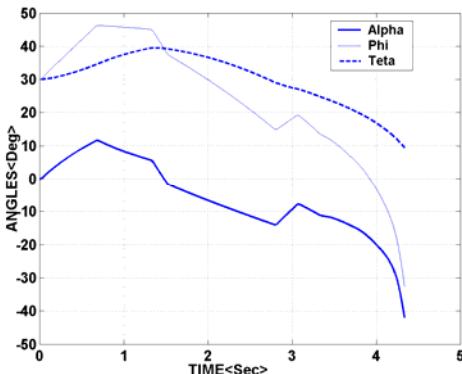
در شکل های ۱۱ و ۱۲، نحوه اعمال ورودیها به موشک از طریق بالهای آبرو دینامیکی کمکی و اصلی به ازای عملکرد هر دو نوع سیستم کنترل نشان داده شده است. همانگونه که در این شکلها دیده می شود، نوسانات شدید سیستم کنترل که بواسطه عدم تطبیق مومنتوم زاویه ای واقعی سیستم و مقدار

الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering) (ع. غفاری، ع. موسویان، م. همایی‌نژاد)

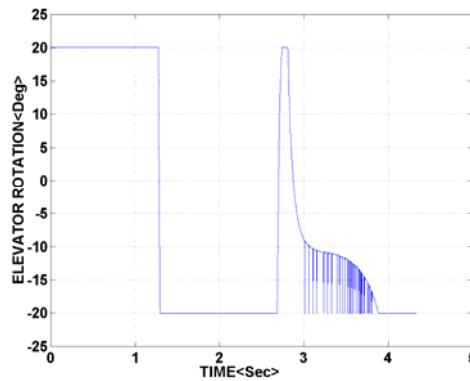
نحوه تغییرات زوایای مختلف موشک از شروع عملیات تا پایان نشان داده می‌شود.  
 (ا). انرژی و وزنه مصرف شده توسط سیستمهای کنترلی در طول شبیه‌سازی دوم (حرکت در مسیر دارای انحنای)



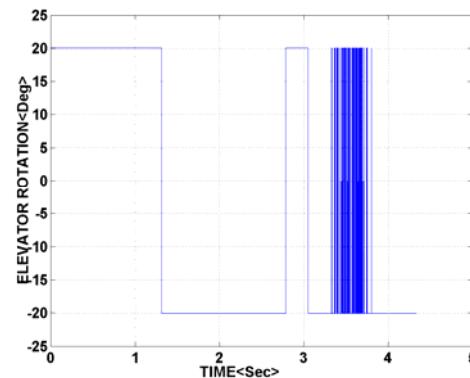
(ب). نمایش عملکرد تنظیمی مکانیزم ERP بر پارامتر  $\eta_1$  در شبیه‌سازی مرحله دوم (حرکت در مسیر دارای انحنای)



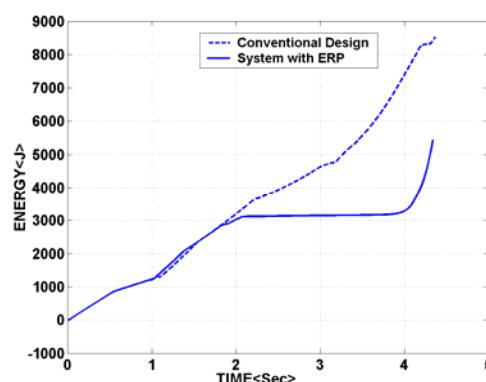
(ج). تغییرات زوایای موشک در طی شبیه‌سازی دوم (حرکت در مسیر دارای انحنای).



(د). انحراف بالکهای اصلی در طول شبیه‌سازی دوم (الف: طراحی جدید)



(ب). انحراف بالکهای اصلی در طول شبیه‌سازی دوم (ب: طراحی متداول).

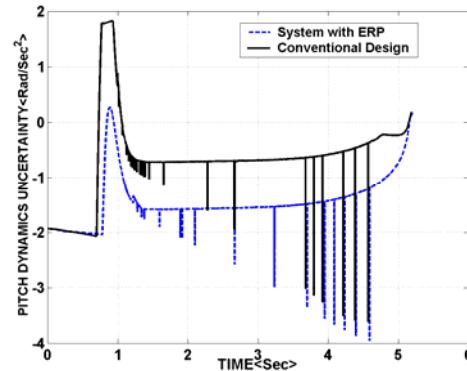


## الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering)

گرفته شد. بررسی نتایج نشان می دهد که الگوریتم پیشنهادی جدید، عملکردی مطلوب در کاهش پدیده Chattering داشته در حالیکه کیفیت پاسخ گذرا و همچنین پایداری سیستم آسیب نمی بیند.

### مراجع

- [1] John Y. Hung, Weibing Gao, James C. Hung "Variable Structure Control: A Survey," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 40, No. 1, 1993.
- [2] Y. Itkis , "Control Systems of Variable Structure", New York:Wiley,1976
- [3] J. J. E. Slotine, " Sliding Controller Design for Nonlinear Systems," International Journal of Control, Vol. 40 , 421-34; 1984.
- [4] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, "Applied Nonlinear Control ,," Prentice Hall, 1991.
- [5] S. Ali A. Moosavian and M. Reza. Homaeinejad, "Regulated Sliding Mode Control of a Satellite Rotation," Proc. of the IFAC Workshop on Generalized Solutions in Control Problems, (GSCP-2004) Pereslavl-Zaleski, Russia , July 2004.
- [6] L. K. Wong, F. H. F. Leung and P. K. S. Tam, "A Chattering Elimination Algorithm for Sliding Mode Control of Uncertain Non-linear Systems," Elsevier-Mechatronics Vol.8, 765-75; 1998.
- [7] F. J. Chang, S. H. Twu and S. Chang, " Adaptive Chattering Alleviation of Variable Structure Systems Control," IEE Proc. 137, 31-9, 1990.
- [8] L. K. Wong, F. H. F. Leung and P. K. S. Tam, "Algorithm for Eliminating Chattering in Sliding Mode Control," Electronics letters, Vol.32, pp.599-601;1996.
- [9] M. Innocenti and A. Thukral, "Simultaneous Reaction Jet and Aerodynamic Control of Missile Systems," AIAA-93-3739 Guidance, Navigation, and Control Conf., Monterey,CA, Aug.1993.
- [10] Ajay Thukral, Mario Innocenti, "A Sliding Mode Missile Pitch Autopilot Synthesis for High Angle of Attack Maneuvering", IEEE Transaction on Control Systems Technology, MAY 1998
- [11] Hamid Reza Karbasi, " Dsign and Optimization of Proportional Navigation Strategy for Air to Air Missiles" , M.S. thesis, Department of Mechanical Engineering of University of Tehran, Iran- 1994.
- [12] S. Ali A. Moosavian and M. Reza. Homaeinejad, "Satellite Attitude Maneuver Using a Chattering Eliminated Sliding Mode Control," Proc. of the ISME Conference, Isfahan, Iran, 2005.



( انحراف دینامیک زاویه فراز موشک از مقدار محاسبه شده به واسطه عدم قطعیتهاي مدلسازی در آزمایشهاي سیستم کنترل

در شکل ۱۶ منحنی مربوط به عدم قطعیت پارامتری بوجود آمده در دینامیک کاتال فراز (Pitch) موشک نشان داده می شود. عدم قطعیتها به ازای حداکثر میزان خطای سیستمهای اندازه گیری وجود برخی نویزهای احتمالی در سیستم بدست آمده اند.

### ۶. نتیجه گیری

در مقاله حاضر، روشی جدید (**ERP**) برای کاهش پدیده Chattering که مشکل اصلی سیستمهای کنترل کلیدزنی است، در قالب یکتابع ریاضی ارائه شد. عملکرد این تابع به گونه ای تدبیر شده بود که با انتخاب پارامترهای آن توسط طراح، شرط لغزش به گونه ای ارضاء گردد که بردار حالت سیستم با سرعت دلخواه به سمت صفحه لغزش حرکت کند (حفظ کیفیت پاسخ سیستم در شرایط گذرا). همچنین در محدوده ای دلخواه در اطراف صفحه لغزش تحت عنوان لایه مرزی، بردار حالت سیستم تغییرات ملایمی داشته باشد (حفظ کیفیت پاسخ سیستم در شرایط ماندگار)، در حالی که در تمام زمان عملکرد پایداری سیستم ضمانت شده است. سپس بمنظور بررسی اثر عملکرد تابع فوق بر الگوریتم کنترل لغزشی، پس از فرمولیندی معادلات توصیف کننده دینامیک زاویه فراز موشک هوا به هوا، دو مرحله شبیه سازی انجام گردید. در مرحله اول، عملکرد هر دو سیستم کنترل موشک(طراحی متداول و طراحی جدید) به ازای ورودیهای مبنای ثابت مورد بررسی قرار گرفتند. در مرحله دوم بمنظور بررسی تحلیلی شدت پدیده Chattering، تابعی تحت عنوان انژوی ویژه مصرف شده توسط سیستم کنترل معرفی شد. در نهایت در این مرحله مأموریت موشک، تعییب هدف متوجه هوا بی که در مسیر افقی در حال حرکت بود، بمنظور بررسی عملکرد سیستمهای کنترل به ازای ورودیهای مبنای متغیر با زمان در نظر

الگوریتمی جدید در کنترل مود لغزشی بمنظور کاهش پدیده (Chattering)، ع. غفاری، ع. موسویان، م. همایی نژاد

- [13] S. Ali A. Moosavian, S. Hossien Sadati and M. Reza. Homaeinejad, "Regulated Sliding Mode Control of a Satellite Rotation: A Trade- off Between Tracking Precision and Energy Consumption ,," Iranian Journal of Mechanics and Aerospace, Vol. 1, No. 1, pp. 89-115, August 2005.
- [14] S. Ali A. Moosavian and M. Reza Homaeinejad, "Regulated Sliding Mode Control of Robotic Manipulators", Proc. Of the Tehran International Congress on Manufacturing Engineering (TICME-2006), Tehran, Iran Dec., 2006.
- [15] S. Ali A. Moosavian and M. Reza Homaeinejad, "Variable Structure Control (VSC) of Robotic Manipulators", Proc. Of the IEEE Workshop on Advanced Motion Control (AMC) , Istanbul, Turkey, July 2006.
- [۱۶] جعفر روشنیان و محمدرضا همایی نژاد، " طراحی اتوپایلوت موشک بالستیک از روش ضرایب استاندارد" یازدهمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک ایران-مشهد مقدس، ۱۳۸۲.
- [۱۷] جعفر روشنیان، فرید نجفی و محمدرضا همایی نژاد، " شبیه سازی و مقایسه سیستمهای کنترل زاویه‌ای موشک بالستیک بر اساس روش‌های طراحی کلاسیک و مدرن " سیزدهمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک ایران-اصفهان، ۱۳۸۴.
- [۱۸] فرید نجفی و محمدرضا همایی نژاد، " مدلسازی ریاضی جدید سیستم سرو-نیوماتیک بوسیله منطق مود لغزشی بمنظور کنترل موقعیت نیرو- قسمت اول- مدلسازی " سیزدهمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک ایران-اصفهان، ۱۳۸۴.
- [۱۹] فرید نجفی و محمدرضا همایی نژاد، " مدلسازی ریاضی جدید سیستم سرو-نیوماتیک بوسیله منطق مود لغزشی بمنظور کنترل موقعیت نیرو- قسمت دوم- کنترل غیر خطی " مجله علمی- پژوهشی مکانیک و هوافضای دانشگاه امام حسین (ع)، جلد اول، شماره دوم، صفحات ۱۱-۱، آبان ۱۳۸۴.

## کنترل پیش‌بین به عنوان ابزاری در کنترل موتور سویچ رلوکتانس

آرش صادق‌زاده<sup>۱</sup>، بابک نجار اعرابی<sup>۲</sup>، کارو لوکس<sup>۳</sup>

قطب علمی کنترل و پردازش هوشمند، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران  
<sup>۱</sup>Sadeghzadeh@modares.ac.ir, <sup>۲</sup>Araabi@ut.ac.ir, <sup>۳</sup>Lucas@ipm.ir

**چکیده:** در این مقاله از روش کنترل پیش‌بین به منظور کنترل موتور سویچ رلوکتانس، که سیستمی کاملاً غیرخطی است، استفاده شده است. این شیوه کنترلی مبتنی بر مدل سیستم است. مدلی را که در این مقاله مورد استفاده قرار داده‌ایم مدل فازی عصبی خطی محلی است. این مدل از یک مجموعه مدل‌های خطی به همراه توابع اعتباری که گستره عملکرد هر یک از مدل‌های خطی را نشان می‌دهد تشکیل شده است. اما استفاده مستقیم از این مدل غیرخطی منجر به یک مساله بهینه‌سازی تابعی غیرخطی خواهد شد، که در حالت کلی حل آن بسیار زمان بر است. لذا در این مقاله با یافتن مدلی خطی محلی در هر لحظه، مساله بهینه‌سازی خطی کاهش یافته است، که در غیاب قیدها جوابی صریح و تحلیلی بدست خواهد داد و بدین شکل مشکل پیاده‌سازی برخاطر این کنترل کننده برطرف شده است. از مهمترین مسائلی که در کنترل موتور سویچ رلوکتانس می‌باشد مدنظر قرار گیرد، مساله کموتاسیون و کاهش ریل گشتاور است. در این مقاله با اعمال تغییراتی در تابع هدف کنترل کننده پیش‌بین مشکل کموتاسیون رفع شده، بدین شکل که با اضافه نمودن جمله‌ای به تابع هدف، که نمایانگر انرژی مصرفی است، انجام کموتاسیون به طور ذاتی بر عهده کنترل کننده نهاده شده است. این جمله انرژی از یک طرف منجر به کموتاسیون ذاتی توسط کنترل کننده خواهد شد و از طرف دیگر گامی در جهت افزایش راندمان سیستم است. مساله کاهش ریل گشتاور نیز به طور مجزا مورد بررسی قرار گرفته و نتیجه حاصله بدین شرح است که کنترل کننده پیش‌بین بر پایه مدل فازی عصبی خطی محلی از نقطه نظر ساختاری، در راستای کاهش ریل گشتاور عمل می‌نماید.

واژه‌های کلیه‌ی: موتور سویچ رلوکتانس، کنترل پیش‌بین، کموتاسیون، مدل نروفازی خطی- محلی

**Abstract:** In this paper, a Model Predictive Control (MPC) strategy for Switched Reluctance (SR) motor, which is a highly nonlinear process, is presented. A Locally Linear Neuro-Fuzzy (LLNF) model is extracted for the nonlinear process. A possible MPC on LLNF model demands for complicated nonlinear functional optimization procedures. To circumvent these time-consuming procedures, a linear model based on the LLNF model is defined. Linear model is valid only temporally. An MPC strategy for this linear model, asks for a simple optimization procedure with a closed form solution. By adding an appropriate term to the MPC's utility function, a natural commutation is observed as an important by product of the MPC strategy. Besides, or analysis shows that the amount of torque ripple is reduced. This behavior is again a natural by product of applying MPC strategy to SR motor.

**Keywords:** switched reluctance motor, model predictive control, commutation, locally linear neuro-fuzzy model.

## ۲. کنترل پیش‌بین

مفهوم کنترل پیش‌بین به طور همزمان توسط ریچالت [۵] و کاتلر و راماکر [۶] در اواخر دهه ۷۰ بیان شد. طراحی کنترل پیش‌بین مبتنی است بر مدل سیستم<sup>۱</sup>، که در آن مدلی از سیستم به صورت صریح به منظور طراحی کنترل کننده، مورد استفاده قرار می‌گیرد از مدل سیستم جهت پیش‌بینی رفتار سیستم در آینده استفاده می‌شود. تمامی کنترل کننده‌های مربوط به خانواده کنترل پیش‌بین به شیوه زیر که در شکل ۱ نشان داده شده، عمل می‌نمایند.

۱- خروجی‌های آینده تا  $N$  لحظه بعد که افق پیش‌بینی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود، معین می‌گردند. خروجی‌های آینده،  $k = 1, \dots, N$ ،  $y(t+k | t)$ ، به ورودی‌ها و خروجی‌های گذشته و ورودی‌های آینده سیستم که به آن اعمال خواهند شد، وابسته هستند.

۲- سیگنال‌های کنترلی آینده توسط ملاکی که بیانگر فاصله میان خروجی‌های آینده و خروجی‌های مطلوب آینده می‌باشد، تعیین می‌گردند. این ملاک عموماً به شکل یک تابع مربعی<sup>۳</sup> از خطای میان خروجی‌های پیش‌بینی شده آینده و خروجی‌های مطلوب آینده است. در ضمن سیگنال کنترلی را نیز در این ملاک می‌توان مدنظر قرار داد. اگر این ملاک به صورت مربعی<sup>۴</sup> باشد و از طرفی مدل سیستم یک مدل خطی باشد و قیدی وجود نداشته باشد، یک جواب صریح برای این بهینه‌سازی می‌توان یافته در غیر این صورت یک روش بهینه سازی تکراری<sup>۵</sup> را می‌بایست مورد استفاده قرار دهیم.

۳- پس از تعیین  $u(t+k | t)$   $k = 1, \dots, N$ ،  $u(t+k | t)$  به سیستم به عنوان سیگنال کنترلی اعمال خواهد شد و در لحظه بعد دوباره مراحل ۱ و ۲ تکرار خواهد شد و سیگنال کنترلی<sup>۶</sup> را محاسبه خواهد شد.

الگوریتم‌های کنترل پیش‌بین تابع هدف متفاوتی را جهت بدست آوردن قانون کنترلی مورد استفاده قرار می‌دهند. حالت کلی آن است که خروجی‌های آینده سیستم<sup>(۷)</sup> با توجه به افق درنظر گرفته شده از یک سیگنال مرجع مشخص<sup>(۸)</sup> پیروی نمایند و در عین حال هزینه کنترلی<sup>(۹)</sup> ( $\Delta u$ ) برای انجام چنین کاری محدود باشد. حالت عمومی چنین تابع هدفی به صورت رابطه (۱) می‌باشد.

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [y(t+j | t) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (1)$$

<sup>1</sup> Model based

<sup>2</sup> Prediction horizon

<sup>3</sup> Quadratic function

<sup>4</sup> Quadratic

<sup>5</sup> Iterative

<sup>6</sup> Control effort

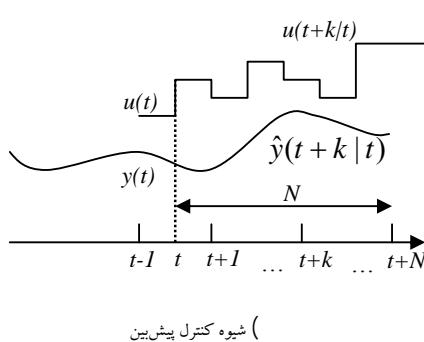
## ۱. مقدمه

در دهه‌های اخیر پژوهش‌های دانشگاهی و صنعتی فراوانی در خصوص موتور سوییج رلوکتانس انجام گرفته است، این تحقیقات بیشتر در آمریکا، انگلیس و تعداد دیگری از کشورهای صنعتی بوده است. دلیل اصلی این علاقه ناشی از تقاضای بازار برای موتورهای با سرعت متغیر در کاربردهای خانگی و صنعتی است. این کاربردها شامل وسایل خانگی، تهویه طبعی، ابزارهای دستی، هواکش‌ها، موتورهای پمپ و خودرو و قطار و ... است. این موتور اخیراً در صنایع هوایی بعنوان یک موتور لانزاتور ۳۰ کیلو وات در هواپیما مورد استفاده قرار گرفته است [۱]. اگرچه این ماشین از خانواده ماشین‌های سنتکرون است ولی دارای بعضی خصوصیات متمایز کننده است. روش‌های کنترلی متفاوتی جهت کنترل موقعیت، گشتاور و سرعت موتورهای سوییج رلوکتانس ارائه شده‌اند [۲] و [۳] و [۴].

در این مقاله با استفاده از یک شبکه فازی عصبی خطی محلی که بر پایه الگوریتم کارامدی با نام LoLiMoT شکل گرفته به شناسایی موتور SR می‌پردازیم.

یکی از مسائلی که در کنترل موتور سوییج رلوکتانس با آن سروکار خواهیم داشت کمotaسیون در موتور است. در این مقاله انجام الگوریتم کمotaسیون را نیز بر عهده کنترل کننده پیش‌بین نهاده‌ایم، بدین شکل که با افزودن یک جمله اضافی به تابع هدف در کنترل کننده پیش‌بین که نمایانگر انرژی مصرفی است و به صورت مجدد جریان فازها می‌باشد به کمotaسیون دست یافته‌یم. این جمله انرژی در تابع هدفی که در هر لحظه توسط کنترل کننده پیش‌بین کمینه می‌گردد باعث خواهد شد که انجام عمل کنترلی با حداقل انرژی مصرفی همراه باشد که از یک طرف باعث افزایش راندمان سیستم خواهد بود و از طرف دیگر کمotaسیون بهینه را در موتور باعث خواهد شد و فازهای موتور در زمان‌های مناسب و به میزان مناسب تحریک خواهند شد.

در بخش ۲ این مقاله به کنترل پیش‌بین و فرمول‌بندی آن پرداخته‌ایم و در بخش ۳ کنترل پیش‌بین غیرخطی بر پایه مدل‌های فازی عصبی خطی محلی آورده شده‌است. در ادامه در بخش ۴ مروری بر ساختار موتور سوییج رلوکتانس ارائه می‌شود. روش مدل‌سازی بر پایه مدل‌های فازی عصبی خطی محلی در بخش ۵ شرح داده شده و به دنبال آن فرمول‌بندی روش کنترل پیش‌بین در بخش ۶ آمده است. بخش ۷ به کنترل پیش‌بین موقعیت موتور سه فاز با بهره‌گیری از کمotaسیون می‌پردازد و در بخش ۸ کنترل موقعیت و در بخش ۹ کنترل سرعت موتور با ارائه یک مدل سه فاز آورده شده‌اند. در بخش ۱۰ روش کنترل پیش‌بین و کمotaسیون ذاتی به عنوان ویژگی بارز اعمال این روش کنترل بر موتور سوییج رلوکتانس آورده شده است. بخش ۱۱ به بررسی ریل گشتاور موتور کنترل شده با این روش اختصاص یافته و در نهایت در بخش ۱۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آمده است.



بیان می‌کنند [۱۳]. اما از سال‌های ۱۹۶۹ مجدداً موتور رلوکتانس متغیر به عنوان موتور سرعت متغیر مطرح شد [۱۴]. در دهه‌های اخیر در کشورهای مختلف پژوهش‌های دانشگاهی و صنعتی فراوان روی موتور سویچ رلوکتانس انجام گرفته است. دلیل اصلی این کار تقاضای بازار برای موتورهای با سرعت متغیر در کاربردهای خانگی و صنعتی است. این کاربردها شامل وسایل خانگی، تهویه مطبوع، ابزارهای دستی، هواکش‌ها، موتورهای پمپ، خودرو، قطار و جز آن می‌شوند. کاربردهای جدید در این روش کنترل پیشین غیر خطی مدلی از سیستم که مورد استفاده قرار می‌گیرد یک شبکه از مدل‌های خطی محلی است، که این شبکه تشکیل شده از یک مجموعه از مدل‌های خطی به همراه مجموعه‌ای از توابع اعتبار متناظر با این مدل‌های خطی که این توابع اعتبار همچون پنجه‌های هستند که ارزش زیر مدل‌ها را در آن نقطه کار خاص مشخص می‌نمایند و این توابع اعتبار تابعی از نقطه کار سیستم می‌باشند [۸] و [۹] و [۱۰] و [۱۱]، با بهره‌گیری از این مدل سیستم در هر لحظه یک مدل خطی محلی از سیستم بدست می‌آید بدین شکل که با توجه به نقطه کار سیستم حاصل جمع وزنی تمامی مدل‌های محلی بدست می‌آید که در آن وزن‌ها توابع اعتبار مدل‌های محلی هستند و بدین شکل کنترل پیشین غیرخطی به طراحی کنترل کننده خطی مدل خواهد شد [۱۱].

هر گاه دو قطب روبروی هم استاتور تحریک شوند روتور به موقعیت هم راستا با آن قطب‌ها می‌رود. بر اساس مدار مغناطیسی، عضو گردان (روتور) طوری حرکت می‌کند که در لحظه تحریک به موقعیت حداقل رلوکتانس مغناطیسی برسد. وقتی که دو قطب روتور با دو قطب استاتور هم راستا می‌شوند دسته دیگری از قطب‌ها از حالت هم راستایی خارج می‌شوند که دلیل آن تعداد متفاوت قطب‌های استاتور و روتور است. در این موقعیت این دسته از قطب‌ها تحریک شده و روتور به موقعیت هم راستایی جدید می‌رود. به همین ترتیب با کلیدزنی مرتب جریان‌ها در سیم‌پیچ‌های استاتور، روتور می‌چرخد. حرکت روتور تولید گشتاور و توان می‌کند که به دلیل کلیدزنی در سیم‌پیچ‌های قطب استاتور و تغیر رلوکتانس است. بنابراین، این ماشین سرعت متغیر، به ماشین سویچ رلوکتانس شهرت یافته است.

در رابطه (۱) مقادیر پارامترهای  $N_1$  و  $N_2$  به ترتیب کمینه و بیشینه افق پیش‌بینی می‌باشند و  $N_{\infty}$  افق کنترل است. مقادیر  $N_1$  و  $N_2$  مقادیری ذهنی هستند که نشان دهنده آن است که در چه لحظاتی انتظار داریم که خروجی سیستم، خروجی مطلوب را تعقیب نماید. ( $j$ ) $\delta$ . و ( $j$ ) $\lambda$  ضرایب وزنی مناسب می‌باشند. فرمول‌بندی کنترل پیشین به طور کامل و مبسوط در مرجع [۷] شرح داده شده است.

از ویژگیهای کنترل کننده پیشین می‌توان به موارد زیر اشاره نمود: سهولت تنظیم پارامترهای کنترل کننده، توسعه آسان از سیستم‌های تک ورودی- تک خروجی به سیستم‌های چند ورودی- چند خروجی، اعمال بر سیستم‌های غیرخطی، اعمال قیدهای پرسه به صورت سیستماتیک در مرحله طراحی کنترل کننده، جهت کنترل پرسه‌های با تأخیر زمانی بزرگ و پرسه‌های غیر مینیمم فاز و پرسه‌هایی که در حالت حلقه باز ناپایدار هستند.

### ۳. کنترل پیشین غیر خطی بر پایه شبکه‌ای از مدل‌های خطی محلی

در این روش کنترل پیشین غیر خطی مدلی از سیستم که مورد استفاده قرار می‌گیرد یک شبکه از مدل‌های خطی محلی است، که این شبکه تشکیل شده از یک مجموعه از مدل‌های خطی به همراه مجموعه‌ای از توابع اعتبار متناظر با این مدل‌های خطی که این توابع اعتبار همچون پنجه‌های هستند که ارزش زیر مدل‌ها را در آن نقطه کار خاص مشخص می‌نمایند و این توابع اعتبار تابعی از نقطه کار سیستم می‌باشند [۸] و [۹] و [۱۰] و [۱۱]، با بهره‌گیری از این مدل سیستم در هر لحظه یک مدل خطی محلی از سیستم بدست می‌آید بدین شکل که با توجه به نقطه کار سیستم حاصل جمع وزنی تمامی مدل‌های محلی بدست می‌آید که در آن وزن‌ها توابع اعتبار مدل‌های محلی هستند و بدین شکل کنترل پیشین غیرخطی به طراحی کنترل کننده خطی مدل خواهد شد [۱۱].

### ۴. موتور سویچ رلوکتانس

ایده محركه‌های سویچ رلوکتانس برای اولین بار در سال ۱۸۳۹ و بسیار قبل از اینکه ماشین‌های AC اختراع شوند، توسط تیلور<sup>۱</sup> به ثبت رسید [۱۲]. موتور پله‌ای که در اوایل قرن بیست و سهال در آبردین<sup>۲</sup> معرفی شد بسیاری از خواص موتورهای پله‌ای رلوکتانس متغیر امروزی و سویچ رلوکتانس را دارد. دو اختراع ثبت شده بوسیله بدفورد<sup>۳</sup> و هافت<sup>۴</sup> در سال‌های ۱۹۷۱ و ۱۹۷۲ اکثر خواص مورد نیاز موتورهای سویچ رلوکتانس پیشرفتی را

<sup>1</sup> Taylor

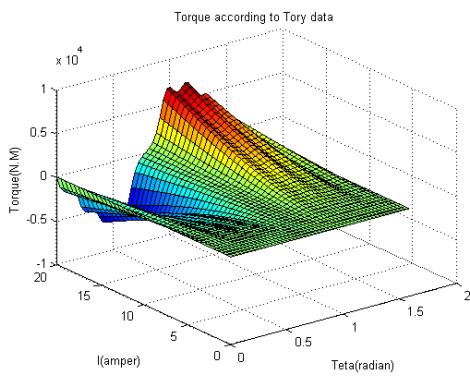
<sup>2</sup> C. L. Walker

<sup>3</sup> Aberdeen

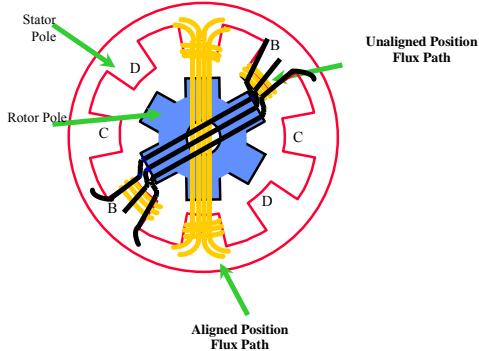
<sup>4</sup> Bedford

<sup>5</sup> Hoft

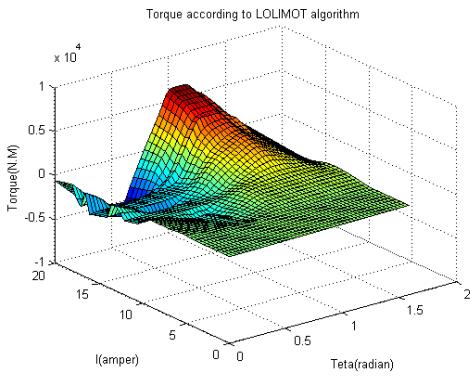
<sup>6</sup> Switched reluctance motor



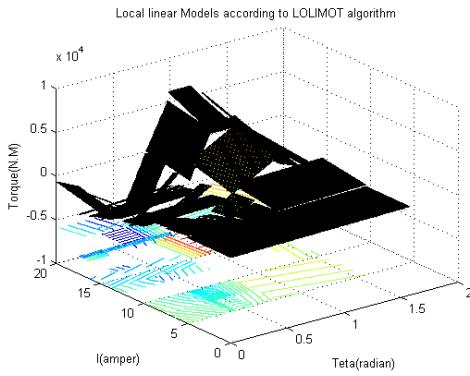
( خروجی بر حسب ورودی )



( نمونه‌ای از ماشین سوییچ رلوکتانس که در آن روتور دارای شش قطب و استاتور دارای هشت قطب می‌باشد. )



( مدل بدست آمده با استفاده از الگوریتم LoLiMoT )



( مدل‌های خطی محلی محاسبه شده توسط الگوریتم LoLiMoT )

## ۵. مدل‌سازی خطی محلی موتور سوییچ رلوکتانس

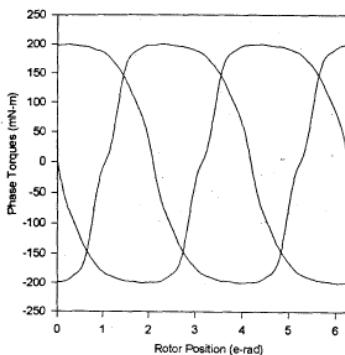
به منظور کنترل موتور سوییچ رلوکتانس مدلی را در نظر گرفته‌ایم که بر پایه الگوریتمی با نام LoLiMoT<sup>۱</sup> و بر پایه داده‌های بدست آمده از موتور بنا شده است. این مدل یک مدل فازی اعصی خطی محلی است که در واقع شبکه‌ای است از مدل‌های خطی محلی به همراه توابع اعتبار گوسی شکل که فرمول‌بندی آن به طور کامل در [۱۶] آورده شده است.

موتور SR در هر فاز را می‌توان یک سیستم با دو ورودی و یک خروجی در نظر گرفت که ورودی‌های آنرا  $\theta$  و  $I$  و خروجی آنرا می‌توان گشتناور فرض نمود. با این تصور مدل موتور SR را با الگوریتم LoLiMoT که در آن تعداد مدل‌های محلی  $M = 50$  انتخاب شده است، بدست می‌آوریم [۱۷].

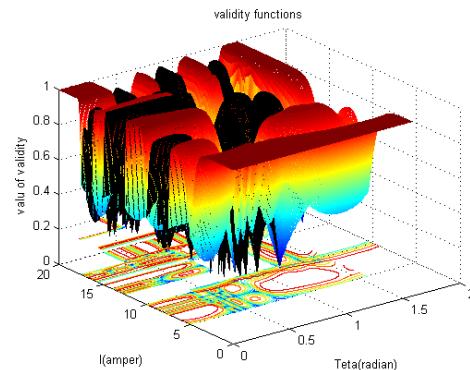
اطلاعات مربوط به ورودی و خروجی موتور SR را با توجه به مدل معرفی شده در [۱۸] بدست می‌آوریم. بعارت دیگر از مدل معرفی شده به عنوان سیستم بهره گرفته‌ایم. البته با توجه به اینکه الگوریتم LoLiMoT پایه داده‌های سیستم می‌باشد می‌توان جهت پیاده‌سازی الگوریتم LoLiMoT بر روی موتور از داده‌های واقعی خود موتور نیز بهره جست و استفاده از مدل فقط به منظور تولید داده‌های ورودی-خروجی سیستم جهت الگوریتم LoLiMoT است.

شکل ۳ خروجی موتور (گشناور) را بر حسب داده‌های موجود و شکل ۴ مدل بدست آمده با الگوریتم LoLiMoT را نشان می‌دهد. شکل ۵ مدل‌های خطی محلی را نشان می‌دهد. در شکل ۶ توابع اعتبار مربوط به مدل‌های خطی محلی نشان داده شده است.

<sup>۱</sup> Local Linear Model Tree



( گشتاور سه فاز موتور با تحریک ثابت (جریان ثابت )



( توابع اعتبار در الگوریتم LoLiMoT که هر کدام از آنها مربوط به یک مدل خطی محلی می‌باشد

که گشتاوری با جهت دلخواه ایجاد نماید و در بعضی نواحی دو فاز همزمان گشتاوری در آن جهت ایجاد می‌نمایند.

جهت بکارگیری هر سه فاز با هم در کنترل موتور می‌باشد. الگوریتم در نظر بگیریم که نخست اندازه و جهت گشتاور لازم را تعیین کند و در مرحله بعد الگوریتم که با توجه به موقعیت روتور و بالطبع موقعیت فازهای موتور با اعمال جریان مناسب به فاز مناسب، این گشتاور را ایجاد نماید. الگوریتم نخست را الگوریتم کنترلی و الگوریتم اخیر را الگوریتم کمotaسیون می‌نمایند. در این شیوه کنترل در هر لحظه تنها از یک فاز موتور استفاده می‌گردد.

طراحی الگوریتم کنترلی بدین قرار است که با توجه به معادلات مکانیکی حاکم بر موتور که در (۲) آورده شده است، با در نظر گرفتن گشتاور به عنوان ورودی سیستم با یک سیستم درجه دو خطی سروکار خواهیم داشت و به طراحی کنترل کننده می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{j} [T_e - T_L - D\omega] \\ T_e &= f(i, \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، نجایان یکی از فازهای موتور است که در آن لحظه تحریک می‌گردد و  $\theta$  موقعیت شفت روتور است. در این حالت طراحی کنترل کننده پیش‌بین جهت این سیستم امری سیار آسان خواهد بود زیرا در واقع کنترل کننده پیش‌بین را از جهت یک سیستم خطی طراحی می‌نماییم. نکهای که باید مد نظر قرار گیرد این است که برغم آسانی طراحی کنترل کننده، ورودی سیستم از دیدگاه کنترل کننده گشتاور محاسبه می‌شود و بنابراین مزایای کنترل پیش‌بین را از دست خواهیم داد زیرا دیگر نمی‌توانیم قیدی به صورت فرمول‌بندی شده بر جریان فازها اعمال نماییم و در ضمن در تابع هدف جریان فازها که ورودی‌های اصلی سیستم می‌باشند در نظر گرفته

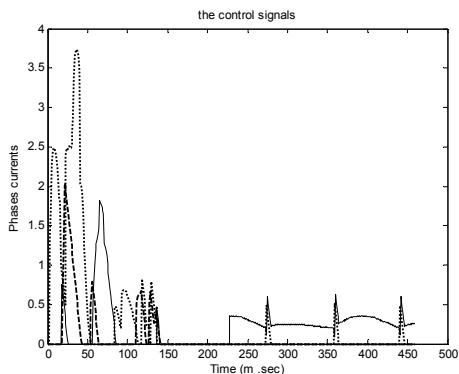
## ۶. کنترل پیش‌بین موتور سوییچ رلوکتانس

در این بخش به بررسی کنترل پیش‌بین موتور سوییچ رلوکتانس سه فاز می‌پردازیم این موتور دارای چهار قطب روتور و شش قطب استاتور است. در ادامه روش کنترل پیش‌بین بر موتور SR اعمال شده و مزایای آن مورد پژوهش قرار گرفته است. همانطور که ذکر شد موتور سوییچ رلوکتانس سیستمی کاملاً غیرخطی است و این خاصیت غیرخطی باعث خواهد شد که در طراحی کنترل کننده در مرحله کمینه نمودن تابع هدف دچار مشکل شویم زیرا کمینه نمودن تابعی غیرخطی، نیازمند روش بهینه‌سازی غیرخطی است. از آنجا که روش یاد شده روشی زمانی بر است، جهت پیاده سازی به صورت برخط قابل استفاده نخواهد بود. بنابراین در این مقاله با استفاده از یک مدل فازی عصبی خطی محلی در هر لحظه مدلی خطی محلی از سیستم بدست آورده‌ایم و طراحی کنترل کننده را به طراحی کنترل کننده‌ای خطی تبدیل ساخته‌ایم و قابلیت پیاده سازی به صورت برخط حاصل شده است، به عبارت دیگر روشی که در پیش گرفته‌ایم کنترل پیش‌بین برای مدل فازی عصبی خطی محلی است.

جهت تعیین توابع اعتبار در مدل فازی عصبی خطی محلی نیازمند یک نقطه کار می‌باشیم. این نقطه کار شامل جریان و زاویه روتور می‌باشد که جریان نقطه کار را دومین عنصر از رشته‌ای که در پریود قبل محاسبه شده در نظر می‌گیریم و زاویه روتور را نیز با استفاده از یک سنسور که بر روی شفت موتور قرار گرفته، تعیین می‌نماییم.

## ۷. کنترل پیش‌بین موقعیت موتور سه فاز با بهره‌گیری از کموتاتور

موتور در نظر گرفته شده موتوری سه فاز می‌باشد. همانطور که در شکل ۷ نشان داده شده است در موتور سه فاز در بعضی نواحی تنها یک فاز قادر است



(ج) جریان‌های سه فاز موتور در حالت کنترل با بهره‌گیری از سه فاز

## ۸. کنترل پیش‌بین موقعیت موتور با بهره‌گیری از مدل سه فاز

همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد به منظور بهره‌گیری از مزایای کنترل کننده پیش‌بین در اینجا هر سه فاز را با هم می‌بایست جهت طراحی کنترل کننده به عنوان سیستم در نظر گرفت. از طرفی گشتاور موتور SR حاصل جمع جبری گشتاور فازهای مختلف موتور می‌باشد. در صورتیکه هر سه فاز را با هم به عنوان سیستم در نظر بگیریم مشکل کمو تاسیون نیز بر طرف خواهد شد و کنترل کننده این نقش را ایفا می‌کند.

فازهای موتور SR از نظر مدل مشابه یکدیگر می‌باشند. باید به این نکته توجه نمود که گشتاور تولید شده توسط فازهای موتور دارای اختلاف فاز است، به طور مثال در موتور SR در نظر گرفته شده که موتوری  $\frac{6}{4}$  یا بعارت دیگر دارای چهار قطب روتور و شش قطب استاتور است اختلاف فاز میان گشتاور تولید شده توسط سه فاز برابر با  $\frac{\pi}{6}$  و  $\frac{\pi}{16}$  خواهد بود که با در نظر گرفتن این اختلاف فاز و در نظر گرفتن مدل هر سه فاز مشابه یکدیگر، می‌توانیم موتور SR را به عنوان یک سیستم در نظر گیریم و در طراحی کنترل کننده از آن بهره جوییم. در این حالت گشتاور موتور مجموع گشتاور فازهای مختلف خواهد بود و تابع هدف به صورت رابطه (۸) خواهد بود. در اینجا نیز مانند بخش‌های پیشین مدل هر فاز با مدل فازی عصی خطی محلی جایگزین خواهد شد و با در نظر گرفتن اختلاف فاز میان گشتاورهای ایجاد شده توسط فازهای موتور این سه مدل خطی محلی با یکدیگر جمع شده و یک مدل خطی محلی بدست می‌آید که دارای چهار ورودی و یک خروجی است. ورودی‌ها جریان‌های سه فاز و زاویه شفت موتور می‌باشند و خروجی گشتاور الکتروکمکانیکی موتور است. پس از جایگزینی این مدل در معادلات مکانیکی موتور، به طراحی کنترل کننده موتور SR که طراحی کنترل کننده پیش‌بین جهت یک سیستم خطی است، می‌پردازیم.

جهت بدست آوردن مدل سه فاز سیستم، داریم

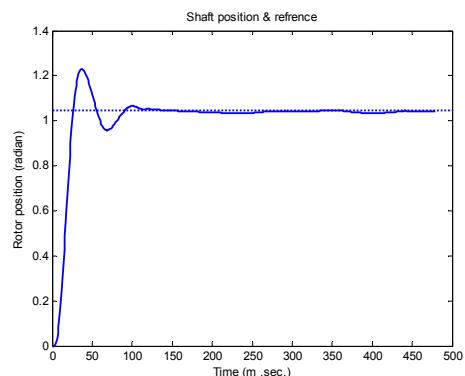
نمی‌شوند و این تغییرات گشتاور است که در تابع هدف لحظه می‌گردد. به عبارت دیگر تابع هدف به صورت رابطه (۳) تبدیل می‌گردد.

$$\begin{aligned} J(N_1, N_2, N_u) = & \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{y}(t+j | t) - \omega(t+j)]^2 \\ & + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta \tau(t+j-1)]^2 \end{aligned} \quad (3)$$

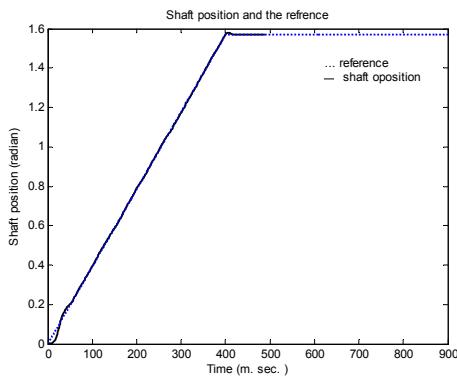
که در رابطه فوق  $\Delta \tau$  تغییرات گشتاور اعمالی به سیستم است. مشاهده می‌شود که در این تابع جریان فازهای موتور نقشی ندارند و عبارت دیگر بدین شکل بسیاری از مزایای کنترل پیش‌بین را از دست خواهیم داد لذا به منظور دستیابی به اهداف کنترلی مطلوب، می‌بایست روشی در نظر بگیریم که در آن جریان‌های فازها در تابع هدف لحظه گردند. در بخش‌های آینده به این موضوع پرداخته خواهد شد.

الگوریتمی که به منظور کمو تاسیون در نظر گرفته می‌شود بدین قرار است که نخست تشخیص می‌دهد از سه فاز موتور چند فاز می‌توانند در آن لحظه گشتاوری هم جهت با گشتاور محاسبه شده از کنترل کننده تولید نمایند. در صورتیکه یک فاز تنها بتواند این گشتاور را تولید کند با مشخص بودن موقعیت روتور و اندازه گشتاور مورد نیاز جریان لازم با استفاده از مدل فازی عصی خطی محلی محاسبه می‌گردد. در صورتیکه دو فاز بتوانند گشتاور هم جهت با گشتاور مورد نیاز تولید کنند نخست تشخیص داده خواهد شد کدامیک با جریان کمتر گشتاوری بزرگ‌تر تولید می‌نماید و سپس جریان برای آن فاز با مشخص بودن گشتاور مورد نیاز و موقعیت روتور محاسبه می‌گردد، در حالیکه جریان فاز دیگر صفر باقی می‌ماند. در حین عمل کمو تاسیون در صورتیکه فاز پیش‌ران موتور تغییر کند جریان فازی را که در لحظه قبل تحریک شده است با شبیه ثابتی به سمت صفر میل می‌دهیم. تابع شبیه سازی در زیر آورده شده است.

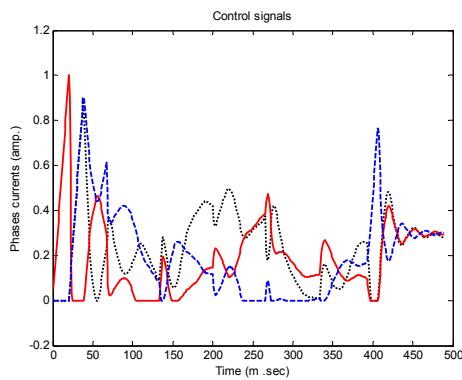
شکل ۸ خروجی سیستم را به همراه خروجی مطلوب نمایش می‌دهد و شکل ۹ جریان‌های مربوط به سه فاز موتور را نشان می‌دهد.



(ج) خروجی سیستم به همراه خروجی مطلوب با بکار گیری سه فاز موتور



( ) موقعیت روتور به همراه موقعیت مطلوب روتور با بهره‌گیری از مدل سه فاز در حالتیکه موقعیت مطلوب به صورت مقدار ثابت می‌باشد



( ) جریان‌های سه فاز موتور در کنترل پیش‌بین موتور با بهره‌گیری از مدل سه فاز در حالتیکه موقعیت مطلوب به صورت مقدار ثابت است

## ۹. کنترل پیش‌بین سرعت موتور با بهره‌گیری از مدل سه فاز

در این بخش به کنترل سرعت موتور با بهره‌گیری از مدل سه فاز می‌پردازیم، مراحل طراحی کنترل کننده مانند قبل است با این تفاوت که تابع هدف در طراحی کنترل کننده بصورت رابطه (۹) می‌باشد. در بخش قبل به منظور تعیین سیگنال کنترلی می‌بایست موقعیت روتور را با استفاده از مدل سیستم تخمین بزنیم ولی در کنترل سرعت، سرعت موتور است که تخمین زده خواهد شد و در تابع هدف کنترل کننده منظور می‌گردد.

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{y}(t+j | t) - \omega_v(t+j)]^2 + \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j, p)[\Delta T_p(t+j-1)]^2 \quad (9)$$

در رابطه (۹) که در بالا آورده شده است  $\tilde{y}$  نشان دهنده سرعت تخمین زده شده روتور است که با استفاده از مدل سیستم بدست آورده شده است.

$$\begin{aligned} T_{e1} &= f_1(i_1, \theta) \\ T_{e2} &= f_2(i_2, \theta) \\ T_{e3} &= f_3(i_3, \theta) \\ T_e &= T_{e1} + T_{e2} + T_{e3} \end{aligned} \quad ( )$$

مدل خطی محلی بدست آمده از مدل فازی عصبی خطی محلی به قرار زیر است، در این مدل  $i_0$  و  $\theta_0$  نشان دهنده نقطه کار سیستم هستند.  $\dot{i}_0$  همان عنصر دوم از رشته‌ای است که در هر پریود زمانی توسط کنترل کننده پیش‌بین محاسبه می‌گردد که در این رشته عنصر اول سیگنال کنترلی است و  $\theta_0$  موقعیت روتور می‌باشد، که توسط حسگر بر روی شفت موتور، تعیین می‌گردد.

$$f_p = a_p(i_0, \theta_0) + b_p(i_0, \theta_0)i + c_p(i_0, \theta_0)\theta \quad ( )$$

با در نظر گرفتن اختلاف فاز میان گشتاور الکتریکی حاصل از سه فاز و روابط فوق، داریم

$$\begin{aligned} T_e &= a + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + c\theta \\ c &= c_1 + c_2 + c_3 \\ a &= a_1 + a_2 + a_3 - c_2 \times \pi/6 + c_3 \times \pi/6 \end{aligned} \quad ( )$$

در روابط فوق به منظور جلوگیری از پیچیدگی معادلات، وابستگی پارامترهای مدل فازی عصبی به  $i_0$  و  $\theta_0$  را نشان نداده‌ایم.

داریم

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{j} \frac{d\theta}{dt} - \frac{c}{j}\theta \\ = \frac{b_1}{j} i_1 + \frac{b_2}{j} i_2 + \frac{b_3}{j} i_3 + \frac{a}{j} - \frac{T_L}{j} \end{aligned} \quad ( )$$

مشاهده می‌شود که رابطه فوق را می‌توان به عنوان معادله حاکم بر یک سیستم خطی با سه ورودی در نظر گرفت.تابع هدف کنترل کننده پیش‌بین در زیر آورده شده است، در این تابع جهت پیش‌بینی رفتار سیستم از معادله (۷) در هر پریود زمانی استفاده می‌گردد. لازم به یادآوری است که معادله (۷) معادله لحظه‌ای سیستم می‌باشد و در هر پریود زمانی می‌بایست محاسبه گردد.

$$\begin{aligned} J(N_1, N_2, N_u) = & \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{y}(t+j | t) - \omega(t+j)]^2 \\ & + \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j, p)[\Delta T_p(t+j-1)]^2 \end{aligned} \quad ( )$$

در رابطه فوق  $\Delta T_p$  تغییرات سیگنال کنترلی مربوط به فاز  $p$  می‌باشد و سایر پارامترها مشابه قبل است. شبیه‌سازی‌های انجام شده در زیر آورده شده است.

شکل ۱۰ خروجی سیستم را نشان می‌دهد و شکل ۱۱ سیگنالهای کنترلی را نمایش می‌دهد.

از طرفی می‌دانیم که در هر لحظه سه فاز موتور نمی‌توانند با هم در یک جهت تولید گشتاور نمایند لذا در این زمان‌ها بالاچجار دو فاز دارای گشتواری جدول ۱- پارامترهای تابع هدف که جهت مقایسه تأثیر آنها در رفتار سیستم مورد شبیه‌سازی قرار گرفته است.

	پارامترهای سطر اول شکل ۱۴	پارامترهای سطر دوم شکل ۱۴	پارامترهای سطر سوم شکل ۱۴
$\lambda(j)$	۱۰	۱۰	۱۰۰
$N_2 = N_u$	۱۰	۵	۱۰

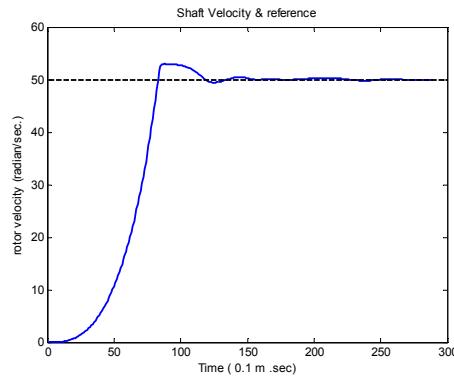
با جهت مخالف هم می‌باشد که در واقع آنها اثر یکدیگر را خنثی می‌نمایند و این باعث کاهش راندمان سیستم خواهد شد بنابراین جهت بر طرف نمودن این مشکل می‌بایست تابع هدف کنترل کننده را تغییر دهیم به گونه‌ای که سه فاز با یکدیگر تحریک نگردند.

## ۱۰. کنترل پیش‌بین سرعت موتور سه فاز و کمotaسیون ذاتی

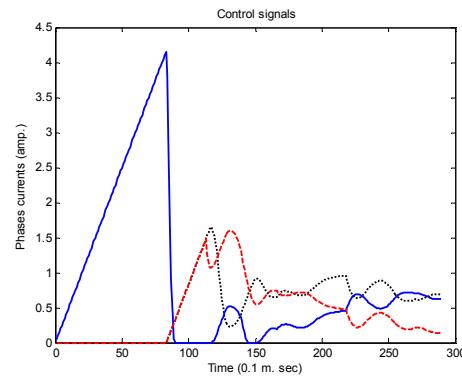
جهت برطرف نمودن مشکل یاد شده در بخش قبل، به منظور افزایش راندمان در سیستم یا به عبارت دیگر جلوگیری از تحریک شدن هر سه فاز با یکدیگر که منجر به اتلاف انرژی می‌گردد یک جمله به تابع هدف افزوده می‌گردد که این جمله به صورت مجدول جریان‌های فازها می‌باشد. اضافه نمودن این جمله به تابع هدف باعث خواهد شد که در تعیین سیگنال‌های کنترلی علاوه بر اینکه رفتار سیستم و نیز تغییرات سیگنال‌های کنترلی مدنظر قرار گیرد، انرژی مصرفی نیز تا حد ممکن کاهش یابد. لذا در نگاه اول اضافه نمودن این جمله باعث خواهد شد فازی که دارای توانایی کمتری در تولید گشتاور در آن لحظه خاص است کمتر تحریک گردد و اگر فازی در آن لحظه گشتاوری مخالف با جهت مورد نیاز ایجاد می‌نماید تحریک نگردد. به بیان دیگر این جمله می‌تواند نقش الگوریتم کمotaسیون را بر عهده گیرد [۱۹]، حال با این مقدمه جمله انرژی را به تابع هدف می‌افزاییم در این صورت تابع هدف به صورت رابطه (۱۰) تبدیل خواهد شد.

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{y}(t+j|t) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j, p)[\Delta T_p(t+j-1)]^2 + \alpha \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_u} T_{pj}^2 \quad (10)$$

در همین رابطه  $\omega$  سرعت مطلوب روتور است و سایر پارامترها مشابه با توابع هدف قبل می‌باشند. نتایج شبیه‌سازی‌ها در زیر آورده شده است.



( ) سرعت روتور به همراه سرعت مطلوب با بهره گیری از مدل سه فاز



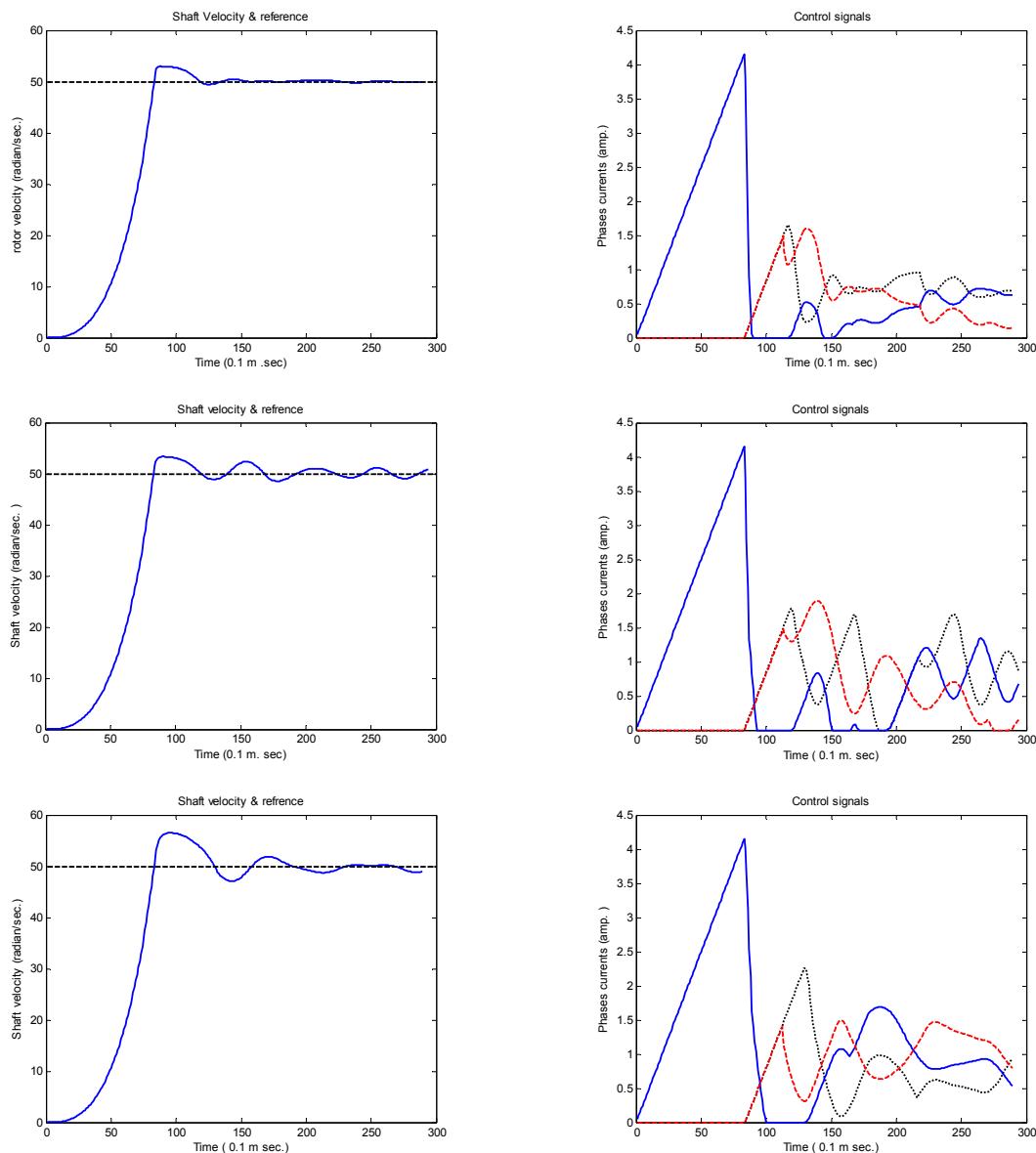
( ) جریان‌های فازها در کنترل سرعت موتور با بهره گیری از مدل سه فاز

در شکل ۱۲ سرعت مطلوب به همراه سرعت واقعی روتور آورده شده و در شکل ۱۳ جریان‌های سه فاز نشان داده شده‌اند.

به منظور مشاهده تأثیر مقادیر پارامترهای تابع هدف در عملکرد سیستم در این قسمت عملکرد سیستم کنترلی به ازای مقادیر مختلف پارامترها را با یکدیگر مقایسه خواهیم نمود، نتایج این مقایسه در شکل ۱۴ نشان داده شده است. مقادیر پارامترهای تابع هدف که جهت مقایسه رفتار کنترل کننده در شکل ۱۴ مورد استفاده قرار گرفته در جدول ۱ آورده شده است. در این شبیه سازی‌ها  $N_1 = 1$  و  $N_2 = N_u = 1$  در نظر گرفته شده است.

با توجه به مقادیر پارامترهای آورده شده در جدول ۱ و نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود که با کاهش افق پیش‌بینی کیفیت رفتار کنترل کننده کاهش یافته و با افزایش تأثیر سیگنال‌های کنترلی در تابع هدف سیگنال‌های کنترلی دارای تغییراتی کمتر شده ولی از طرفی کیفیت رفتار سیستم کاهش می‌یابد.

همان‌طور که از سیگنال‌های کنترلی این بخش و بخش قبل مشاهده می‌شود در بعضی زمان‌ها هر سه فاز موتور با هم در حال تحریک شدن است



( در این شکل به منظور مقایسه رفتار کنترل کننده پیش‌بین به ازای پارامترهای مختلف تابع هدف، شبیه سازی به ازای سه دسته پارامتر مختلف انجام گرفته است. این مقدار در جدول ۱ آورده شده است، در سطر دوم نسبت به سطر اول افق پیش‌بینی کاهش یافته و عملکرد سیستم نیز بالطبع کاهش یافته و در سطر سوم ضریب تاثیر سیگنال کنترلی در تابع هدف افزایش یافته که باعث کاهش کیفیت عملکرد سیستم گشته و لی سیگنال‌های کنترلی دارای تغیرات کمتری نسبت به سطر اول می‌باشد.

خواهیم داد. در شکل ۱۵ سرعت روتور به همراه سرعت مطلوب نشان داده شده و در شکل ۱۶ جریان فازها نشان داده است، مشاهده می‌شود که در این حالت در هیچ لحظه‌ای سه فاز با یکدیگر تحریک نمی‌گردند و بعارت دیگر مشکل ذکر شده بر طرف شده است.

در رابطه ذکر شده  $\alpha$  ضریب تاثیر جمله انرژی در تابع هدف است. در این رابطه  $T_{pj}$  جریان فاز  $p$  در زلحفه آینده می‌باشد. در زیر شبیه‌سازی‌های انجام شده با تابع هدف جدید آورده شده است، در اینجا نیز مانند بخش‌های قبل با استفاده از مدل فازی عصبی، مدل خطی محلی از سیستم بدست می‌آوریم و جهت طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار

قیمت موتور را بالا خواهد برد بدنبال روش‌هایی جهت حذف انکودر می‌باشدند [۲۱] و [۲۲] و بصورتی سرعت و موقعیت روتور را تخمین می‌زنند. در شیوه کنترل پیش‌بین با بکارگیری مدل سه فاز، کموتاسیون را نیز توانستیم توسط کنترل کننده انجام دهیم و در اینجا به بررسی ریپل گشتاور می‌پردازیم. همانطور که در بخش قبل دیدیم با اضافه نمودن جمله انرژی به تابع هدف، کموتاسیون در موتور انجام گردید. شاید اولین شیوه‌ای که جهت کاهش ریپل گشتاور به ذهن برسد این باشد که جمله‌ای که بیانگر ریپل گشتاور است، به تابع هدف اضافه نماییم تا در تعیین سیگنال‌های کنترلی ریپل گشتاور نیز مدنظر قرار گیرد. بنابراین می‌توان تابع هدفی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} J(N_1, N_2, N_u) = & \\ \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{v}(t+j|t) - \omega_v(t+j)]^2 & \\ + \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j, p)[\Delta I_p(t+j-1)]^2 & \\ + \gamma \sum_{j=1}^{N_u} \Delta \tau_j^2 & \end{aligned} \quad ( )$$

در این تابع هدف  $\Delta \tau$  اختلاف گشتاور میان لحظه  $j$  و  $j-1$  می‌باشد و  $\tilde{v}$  سرعت روتور و  $\omega_v$  سرعت مطلوب روتور است. حال به بررسی این تابع هدف می‌پردازیم. می‌دانیم که گشتاور را در هر لحظه بر حسب جریان و موقعیت روتور با بهره‌گیری از مدل فازی عصبی به صورت رابطه (۱۲) می‌توان بدست آورد

$$\tau = \sum_{p=1}^3 a_p I_p + b \theta + c \quad ( )$$

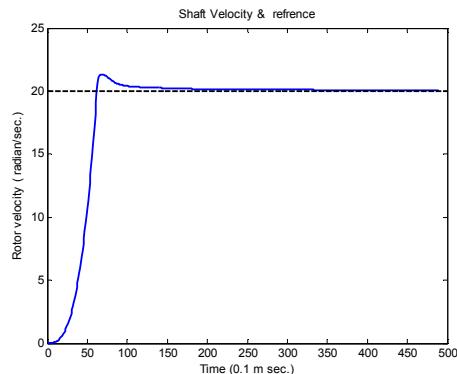
بنابراین  $\Delta \tau$  به صورت زیراست

$$\Delta \tau = \sum_{p=1}^3 a_p \times \Delta I_p + b \times \Delta \theta \quad ( )$$

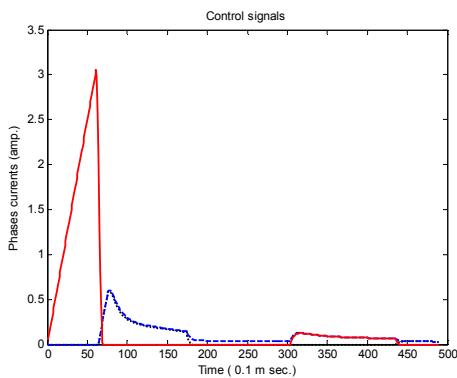
حال، داریم

$$\begin{aligned} (\Delta \tau)^2 = & \sum_{p=1}^3 a_p^2 \times (\Delta I_p)^2 + b^2 \times (\Delta \theta)^2 \\ & + 2 \sum_{p=1}^3 a_p b \times \Delta I_p \times \Delta \theta \\ & + \sum_{p=1}^3 \sum_{j=p+1}^3 2 a_p a_j \times \Delta I_p \times \Delta I_j \end{aligned} \quad ( )$$

با جایگزین نمودن رابطه (۱۴) در رابطه (۱۲)، داریم



() سرعت شفت موتور به همراه سرعت مطلوب شفت با اضافه نمودن جمله انرژی به تابع هدف کنترل کننده پیش‌بین



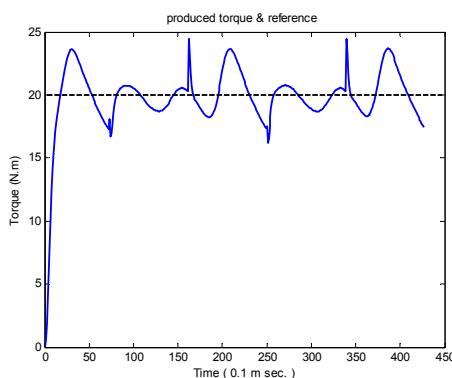
() جریان فازهای موتور، تعیین شده توسط کنترل کننده پیش‌بین با اضافه نمودن جمله انرژی به تابع هدف

## ۱۱. بررسی ریپل گشتاور در موتور سوییچ رلوکتانس کنترل شده با کنترل پیش‌بین

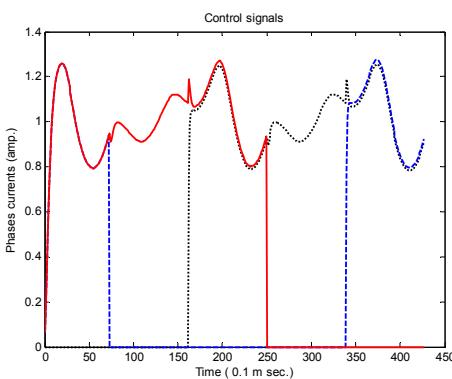
موتور سوییچ رلوکتانس به دلیل مزایای زیادی که دارد مورد توجه قرار گرفته است ولی از مشکلاتی که در استفاده از این موتور وجود دارد می‌توان به ریپل گشتاور اشاره نمود جهت بر طرف نمودن ریپل گشتاور دو شیوه را می‌توان در نظر گرفت، نخست اینکه در طراحی موتور می‌توان با تغییراتی در ساختار روتور و استاتور موتور تا حد ممکن ریپل گشتاور را کاهش داد یا اینکه با استفاده از شیوه کنترلی این مشکل را بر طرف نمود [۲۰]. روش‌های مختلفی را جهت کاهش ریپل گشتاور مورد استفاده قرار داده‌اند در بعضی از این روش‌ها اطلاعات مربوط به موتور را ذخیره می‌نمایند و سپس با الگوریتم‌ها و روش‌های خاصی جریان فازهای موتور را برای دستیابی به گشتاوری با ریپل کمتر تعیین می‌نمایند. در بعضی از این روش‌ها جهت کاهش ریپل گشتاور، نیاز به دانستن موقعیت روتور است که توسط انکودر بر روی شفت تعیین می‌گردد. در بعضی دیگر به دلیل اینکه استفاده از انکودر

پس می‌توان ادعا نمود که جهت کنترل موتور سوییج رلوکاتنس با در نظر گرفتن ملاحظاتی از قبیل کاهش ریل گشتاور، کموتاویون بهینه، افزایش راندمان، اعمال قیدهای سخت افزاری در مرحله طراحی کنترل کننده و... می‌توان از شیوه کنترل پیش‌بین بهره جست.

در زیر شبیه‌سازی مربوط به موتور که در آن گشتاور مطلوب برابر با ۲۰ N.M می‌باشد، آورده شده است. در این حالت سرعت مطلوب شفت موتور ۳۰ رادیان در ثانیه می‌باشد. در شکل ۱۷ گشتاور موتور به همراه گشتاور مطلوب نمایش داده شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود ریل گشتاور در حدود ۲۰ درصد مقدار مطلوب می‌باشد. در شکل ۱۸ جریان فازها نشان داده شده است. در این شکل کموتاویون به صورت واضح قابل تشخیص می‌باشد که نتیجه اضافه شدن جمله انرژی به تابع هدف است.



( گشتاور تولید شده به همراه گشتاور مطلوب موتور با بهره‌گیری از مدل سه فاز و اضافه نمودن جمله انرژی، نقاط با گوشه‌های تیز تقاطعی هستند که در آن‌ها جریان یک فاز در حال قطع شدن است و یا یک فاز در آستانه تحریک شدن می‌باشد. نکته‌ای که به نظر مرسد آن است که ریل گشتاور در اینجا ناشی از خطای مدل‌سازی است



( جریان فازهای موتور که با استفاده از کنترل کننده پیش‌بین محاسبه گردیده است. مشاهده می‌شود که با اضافه شدن جمله انرژی به تابع هدف کنترل کننده پیش‌بین، کموتاویون به طور خود کار انجام پذیرفته و در لحظات مختلف یک و حداقل دو فاز موتور در حال تحریک می‌باشد

$$\begin{aligned}
 J(N_1, N_2, N_u) = & \\
 & \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{v}(t+j|t) - \omega_v(t+j)]^2 \\
 & + \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_p} \lambda(p,j)[\Delta I_p(t+j-1)]^2 \\
 & + \gamma \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_p} a_p^2 \times [\Delta I_p(t+j-1)]^2 \\
 & + \gamma \sum_{j=1}^{N_p} b^2 \times [\Delta \theta(t+j|t)]^2 \\
 & + \gamma \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_p} 2a_p b \times \Delta I_p(t+j-1) \times \Delta \theta(t+j|t) \\
 & + \gamma \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=p+1}^3 2a_p a_k \times \Delta I_p(t+j-1) \\
 & \quad \times \Delta I_k(t+j-1)
 \end{aligned} \quad ( )$$

حال با ساده نمودن رابطه (۱۵)، داریم

$$\begin{aligned}
 J(N_1, N_2, N_u) = & \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{v}(t+j|t) - \omega_v(t+j)]^2 \\
 & + \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_p} \lambda'(p,j)[\Delta I_p(t+j-1)]^2 \\
 & + \gamma \sum_{j=1}^{N_p} b^2 \times [\Delta \theta(t+j|t)]^2 \\
 & + \gamma \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^{N_p} 2a_p b \times \Delta I_p(t+j-1) \times \Delta \theta(t+j|t) \\
 & + \gamma \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=p+1}^3 2a_p a_k \times \Delta I_p(t+j-1) \times \Delta I_k(t+j-1)
 \end{aligned} \quad ( )$$

می‌دانیم که در کنترل پیش‌بین هدف اول رسیدن سرعت روتور به مقدار مطلوب می‌باشد، پس از رسیدن سرعت به این مقدار هدف ثانی کم نمودن ریل گشتاور است.

با دقت در رابطه (۱۶) متوجه می‌شویم که ترم  $\gamma \sum_{j=1}^{N_p} b^2 \times [\Delta \theta(t+j|t)]^2$  می‌توان مشابه با ترم  $\sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\tilde{v}(t+j|t) - \omega_v(t+j)]^2$  در نظر گرفت در صورتیکه  $\omega_v$  را برابر با صفر در نظر بگیریم. به بیان دیگر اگر در تابع هدف آورده شده در (۱۱) ضریب  $\gamma$  را بزرگ در نظر بگیریم آن موقع سیستم کنترلی به جای آنکه سرعت شفت موتور را به سمت مقدار مطلوب  $\omega_v$  می‌دهد به سمت صفر می‌خواهد داد. بنابراین متوجه می‌شویم که اضافه نمودن جمله‌های اضافی به تابع هدف تاحدی محدود می‌باشد.

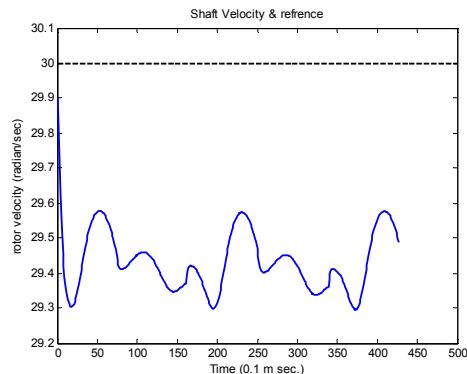
با توجه به آنچه در بالا آورده شد نمی‌توان جمله تغییرات گشتاور را با ضریب بزرگ در تابع هدف وارد نمود، با دقت در رابطه (۱۳) و فرض اینکه  $\Delta \theta$  مقدار ثابت و معین باشد جهت کاهش ریل گشتاور می‌باشد تا حد ممکن تغییرات جریان را محدود نمود از آن جهت که مدل خطی محلی که برای سیستم در نظر گرفته‌ایم اعتبار لازم را داشته باشد زیرا در سرعت ثابت کنترل کننده موتور می‌باشد گشتاور ثابت الکتریکی را در موتور ایجاد نماید و این عمل را نیز انجام می‌دهد. و عاملی که باعث ریل گشتاور خواهد شد خطای مدل سازی سیستم می‌باشد. بنابراین کاهش ریل گشتاور از خصوصیات ذاتی کنترل کننده پیش‌بین است و نیازمند به جمله‌ای اضافی در تابع هدف نخواهیم بود.

کنترل پیش‌بین دارای مزایای منحصر بفردی است که در کنترل موتور سوییج رلوکتانس و یا هر سیستم دیگر جذابیت خاصی دارد، از آن‌جمله می‌توان به اعمال قیدها به طور فرمول‌بندی شده در مرحله طراحی کنترل کننده اشاره نمود. در موتور سوییج رلوکتانس قیدهایی که می‌توان در نظر گرفت ماکریم جریان فازها، ماکریم شبی افزایش جریان هر فاز و ماکریم شبی کاهش جریان هر فاز می‌باشد که هر کدام از این قیدها را می‌توان در مرحله طراحی کنترل کننده مدنظر قرار داد. از طرفی یکی دیگر از مزایای منحصر بفرد کنترل کننده پیش‌بین که در این کاربرد خاص خودنمایی نمود شکل تابع هدف می‌باشد که قابل تغییر توسط کاربر است، با اضافه نمودن جمله‌های لازم به تابع هدف در طراحی کنترل کننده پیش‌بین می‌توان به اهداف خاصی دست یافته، در اینجا با اضافه نمودن جمله انرژی به تابع هدف به کموتاسیون ایده‌آل در موتور دست یافته، این کموتاسیون از این جهت ایده‌آل است که با مینیمم نمودن انرژی مصرفی حاصل شده است و به عبارت دیگر با ماکریم نمودن راندمان موتور به این کموتاسیون در موتور دست یافته و همان‌طور که از پیش نیز مورد انتظار بود در هر لحظه حداکثر دو فاز و در بعضی لحظات تنها یک فاز موتور سه فاز تحریک می‌گردد. این کموتاسیون را کنترل کننده به سیستم اعمال نموده و از الگوریتمی مجزا جهت کموتاسیون استفاده نشده است.

یکی از مسائلی که در کنترل موتور سوییج رلوکتانس با آن مواجه می‌باشیم ریل گشتاور در موتور است، همان‌طور که در یخش انتهایی دیدیم مناسب نیست مستقیماً جمله‌ای را بصورت ریل گشتاور به تابع هدف اضافه نماییم، زیرا باعث کاهش کیفیت عملکرد موتور در کنترل سرعت خواهد شد، ولی نشان دادیم که اضافه شدن جمله انرژی و وجود هزینه کنترلی در تابع هدف باعث کاهش ریل گشتاور خواهد بود. از طرفی با توجه به نوع مدل‌سازی موتور که در اینجا در نظر گرفته شده، مدل کلی حاصل جمع وزنی مدل‌های خطی محلی است که این وزن‌ها توابعی گوسی شکل می‌باشند، تغییر مدل از یک مدل خطی محلی به مدل خطی دیگر به صورت نرم انجام می‌پذیرد و از آنچه که در هر لحظه در این مدل گشتاور تابعی خطی از موقعیت و جریان فاز است، در حالت ایده‌آل عدمه ترین عاملی که باعث ریل گشتاور خواهد بود خطای مدل‌سازی است، که با افزایش تعداد نورون‌ها در مدل فازی عصبی خطی محلی می‌توان تا حد مطلوب ریل گشتاور را در موتور کاهش داد، که کاهش ریل گشتاور در این حالت از مزایای بکارگیری مدل فازی عصبی خطی محلی جهت کنترل موتور سوییج رلوکتانس است.

#### مراجع

- [1] C.A. Ferreira; S.R. Jones; W.S; Heglund, W.D. Jones "Detailed design of a 30-kW switched reluctance starter/generator system for a gas turbine engine application" *IEEE Trans. Industry Applications* ; No. 3, VOL. 31; Institute of Electrical and Electronic Engineers-Industry Applications Society (IEEE-IAS)



( ) سرعت مطلوب به همراه سرعت واقعی روتور، همان‌طور که مشاهده می‌شود سرعت روتور دارای خطای پایدار است که البته این خطای ناتایی از ذات کنترل کننده پیش‌بین می‌باشد ولی با این وجود می‌توان آن را تا حدی با روش‌های خاص اصلاح نمود.

در شکل ۱۹ سرعت مطلوب به همراه سرعت روتور نشان داده شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود سرعت روتور دارای خطای ثابت نسبت به مقدار مطلوب می‌باشد که این ناشی از ذات کنترل پیش‌بین است، زیرا که در تابع هدف علاوه بر خطای سیستم تغییرات سیگنال کنترلی و نیز جمله انرژی سهیم می‌باشند، پس نباید انتظار داشت که خطای کاملاً صفر گردد. البته می‌توان روش‌هایی در نظر گرفت تا این خطای را به سمت صفر میل داد که از آن جمله می‌توان با استفاده از یک کنترل کننده کمکی مقدار مطلوب را طوری به صورت مجازی تغییر داد که پس از اینکه سیستم به حالت پایدار خود رسید بر روی همان مقدار مطلوب مورد نظر اولیه قرار گرفته باشد.

#### ۱۲. نتیجه‌گیری

کنترل پیش‌بین شیوه کنترلی بر پایه مدل سیستم می‌باشد که در آن مدل به منظور پیش‌بینی رفتار آینده سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله مدلی که جهت موتور SR در نظر گرفته شد مدل فازی عصبی خطی محلی است، دیدیم که این روش مدل‌سازی توانست به طور مناسبی رفتار سیستم را در خود جای دهد و داده‌های واقعی سیستم با داده‌های بدست آمده از مدل با یکدیگر مقایسه شد که نشان دهنده رفتار نسبتاً خوب مدل بود.

با بکارگیری روش کنترل پیش‌بین غیرخطی بر پایه مدل‌های خطی محلی توانستیم این سیستم را که خاصیت غیر خطی دارد به طور مناسب کنترل نماییم و از طرفی در گیر بهینه‌سازی غیرخطی نگردیم. زیرا که این روش بهینه‌سازی دارای حجم بالای محاسبات است که امکان پیاده‌سازی برخط را کاهش داده و از طرف دیگر پاسخ‌های بدست آمده توسط بهینه‌سازی غیرخطی، الزاماً پاسخ‌های بهینه سراسری نخواهند بود و ممکن است پاسخ‌های بهینه محلی باشند، که بی‌شک در این صورت رفتار کنترل کننده بی‌عیب نخواهد بود.

- [15] R. Krishnan, *Switched reluctance motor derives: modeling, simulation analysis, design and applications*, CRC Press LLC, Florida, 2001.
- [16] O. Nelles, "Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models", Berlin: Springer-Verlag, 2001
- [17] A. Sadeghzadeh, B. N. Araabi, "A Locally Linear Neuro Fuzzy model for Predictive Control of Switched Reluctance Motors", Proc. Conf. 2nd IEEE-GCC Industrial Electrical and Electronics, Manama, Bahrain, Nov. 23-25, 2004.
- [18] D. A. Torrey, J. H. lang, " Modeling a nonlinear Variable reluctance motor derive" *IEE Proc.*, No. 5, Vol. 37, pp. 314-326, September 1990.
- [19] A. Sadeghzadeh, B. N. Araabi, "A New Approach to Commutation in Predictive Control of Switch Reluctance Motor", Proc. Conf. IEEE ICIT 2004 International Conference on Industrial Technology, Tunisia, Nov. 8-10, 2004.
- [20] Zhen Z. Ye, T. W. Martin, J. C. Balda, "Modeling and nonlinear control of a switched reluctance motor to minimize torque ripple", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, 2000.
- [21] M. S. Islam, I. Husain, "Torque ripple minimization with indirect position and speed sensing for switched reluctance motors", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, No. 5, Vol.47, October. 2000.
- [22] B. Fahimi, A. Emadi, R.B. Jr. Sepe, "Four-quadrant position sensorless control in SRM drives over the entire speed range" *IEEE Trans. Power Electronics*, Vol. 20, pp.154-163, January 2005.
- annual meeting, Ontario (Canada), 2-8 October 1993 ; PBD: May-June 1995.
- [2] H. Rouhani, C. Lucas, R.M. Milasi, M.N. Bahrami, "Fuzzy sliding mode control applied to low noise switched reluctance motor control" Proc. Conf. ICCA'05 International conference on Control and Automation ,Vol. 1, pp. 325-329, 2005.
- [3] B. Enayati, S.M. Saghaiannejad, "Sensorless position control of switched reluctance motors based on artificial neural networks" Proc. Conf. IEEE International Symposium on Industrial Electronics ,Vol. 3, pp. 2266-2271 Montreal, July 2006.
- [4] S.K. Sahoo, S.K. Panda, Jian-Xin Xu, "Indirect torque control of switched reluctance motors using iterative learning control" *IEEE Trans. Power Electronics*, Vol. 20, pp. 200-208, January, 2005.
- [5] J. Richalet, A. Rault, J.L. Testud, J. Papon, "Model predictive heuristic control: application to industrial processes", *Automatica*, No. 5, pp. 413-428, 1978.
- [6] C. R. Cutler, B. L. Ramaker, "Dynamic matrix control- A computer control algorithm", *Proc. Conf. JACC*, San Francisco, U.S.A., 1980.
- [7] E. F. Camacho, C. Bordons, *Model Predictive Control*, Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [8] T. A. Johansen, B. A. Foss, "Identification of nonlinear system structure and parameters using regime decomposition" *Automatica*, No. 2, Vol. 31, pp. 321-6,1995.
- [9] O. Nelles, "orthonormal basis functions for nonlinear system identification with linear local model trees (LOLIMOT)", *Proc. 11<sup>th</sup> IFAC Sym. System Identification*, Japan, Vol. 2, pp. 667-72, 1997.
- [10] S. McGinnity, G. W. Irwin, "Composition of two approaches for multiple-model identification of a PH neutralization process" *Proc. European Control Conference*, Paper Id-F276 (CD Rom), 1999.
- [11] B. Kouvaritakis, M. Cannon, *Nonlinear Predictive Control- theory and practice*, published by: The Institute of Electrical Engineering, London, United Kingdom, 2001.
- [12] W. H. Taylor, *Obtaining motive power*, U.K. Patent 8255, 1839.
- [13] T. J. E. Miller, *Switched reluctance motors and their control*, Magna Physics Publishing and Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [14] S. A. Nasar, "D.C. -Switched reluctance motor", *Proc. Institution of Electrical Engineers*, London, Vol. 116, No. 6, pp. 1048, June 1969.

## آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش

علی کارساز<sup>۱</sup>، حمید خالووزاده<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری برق- کنترل دانشگاه فردوسی مشهد، <sup>۲</sup>استادیار گروه کنترل دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

<sup>۱</sup>a\_karsaz1@yahoo.com, <sup>۲</sup>h\_khaloozadeh@kntu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، پس از معرفی مقدماتی سیستم کنترل آتش<sup>۱</sup> به شناسائی منابع ایجاد خطأ در یک سیستم کنترل آتش هواپایه<sup>۲</sup> خاص پرداخته می شود. روش‌های مختلف آنالیز خطای یک سیستم چند ورودی چند خروجی<sup>۳</sup> معرفی و با توجه به پیچیدگی معادلات حاکم بر سیستم از روش مونت کارلو که مبتنی بر داده‌های آماری ورودی و خروجی می باشد، برای استخراج داده‌های اولیه استفاده می شود. این داده‌ها نشان دهنده چگونگی تاثیر عوامل ایجاد خطأ در احتمال اصابت نهائی و در سناریوهای مختلف شلیک موشک می باشند و به عنوان مجموعه داده‌های خام اولیه جهت استخراج ضرائب اهمیت هر یک از منابع خطأ به صورت کلی استفاده می گردد. تاثیر منابع ایجاد خطأ در یک سیستم کنترل آتش بر محاسبه زمان روشن شدن جستجوگر تلویزیونی<sup>۴</sup> موشک و زاویه سمت<sup>۵</sup> تصحیح موشک برسی می گردد (ابندو پارامتر قابل از شلیک موشک می بایست در موشک وارد شوند تا در محاسبات آن بکار روند لذا دقت و صحت تخمین این دو پارامتر بسیار حائز اهمیت است). در نهایت با حل معادلات مربوط به حرکت موشک، احتمال اصابت بدست آمده و میزان حساسیت تابع احتمال اصابت نسبت به منابع مختلف خطای سیستم رتبه بندی می شود. دسته بندی خطاهای شناسایی شده در هر یک از زیر سیستمهای تشکیل دهنده یک سیستم کنترل آتش به ترتیب اهمیت و میزان تاثیر آنها در تابع احتمال اصابت نهائی موشک، کمک شایانی به طراحان نظامی جهت بهبود سیستم و خرید قطعات آن با علم به میزان دقت مورد نیاز می نماید. عدم شناخت کافی از میزان تاثیر عوامل ایجاد خطأ و یا بزرگی هر کدام از آنها می تواند باعث کاهش احتمال اصابت و در نهایت عدم موفقیت موشک در برخورد به هدف را در پی داشته باشد.

واژه های کلیی: آنالیز خطای موشک، سیستم کنترل آتش (FCS)، احتمال اصابت، خطاهای زیر سیستم رادار، خطاهای پادسنج، روش مونت کارلو، آنالیز حساسیت سیستم سلاح.

**Abstract:** In this paper an airborne fire control system (FCS) is described. All sources of error in three important FCS subsystems are determined. Two main approaches that exist for error analysis are analytical methods and stochastic simulation methods. Since the first approach needs a mathematical model for error analysis purposes, in this paper a stochastic simulation based on random input variables (Monte-Carlo method) is used for analysis of a fire control system. The main objective of this paper is to obtain the Hit Probability function which is dependent on FCS input variables accuracy. At first, input variables error in a FCS are determined, simulated and analyzed based on Monte Carlo simulation method. The input variables errors in missile fire control director (MFCD) affect the two important output variables of MFCD which must be set directly in the missile before launching process. Therefore the two perturbed output variables can be degrade the Hit Probability (HP) significantly. The proposed FCS error analysis consist two important steps. In the first step the effects of three subsystem errors are analyzed on MFCD outputs, and in the second step the

<sup>1</sup> - Fire Control System (FCS)

<sup>2</sup> - Airborne Fire Control System (AFCS)

<sup>3</sup> - Multi-Input Multi-Output (MIMO)

<sup>4</sup> - TV Seeker

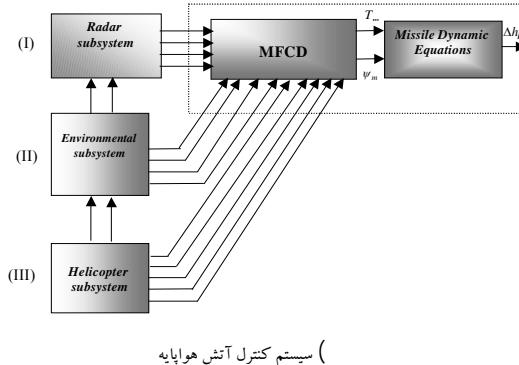
<sup>5</sup> - Azimuth

## آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالوزاده

effects of the MFCD outputs are analyzed on the HP function. In the end these two steps are combined together to obtain the important factor of each input variables on the HP function. Determination and ranking the percentage of important factors for each FCS inputs as a result of FCS error analysis are expected to be a powerful tool for assisting the military sensor designers. The best combination of the sensors and the minimum requirement accuracy of the sensors are also accessible to have a pre-specified hit probability function.

**Keywords:** Missile Error Analysis, Fire Control System, Hit Probability, Radar Errors, Monte-Carlo Method.

تقسیم نموده و کلیه منابع خطای در این سه زیر سیستم شناسایی می شوند، اغلب این منابع خطای به شکل متغیرهای تصادفی مدل شده و پارامترهای واریانس، میانگین و تابع چگالی آنها بر اساس اطلاعات ترانس و میزان دقت معروف شده در کاتالوگهای هر دستگاه قابل حصول است. پس از معروفی لیست منابع خطای در یک سیستم کنترل آتش، به معروفی روش به کار رفته در آنالیز خطای که بر اساس شبیه سازی اتفاقی<sup>۹</sup> و یا مونت کارلو<sup>۱۰</sup> است، پرداخته می شود، در نهایت نتایج شبیه سازیها میزان و چگونگی تاثیر خطاهای اندازه گیری پارامترهای ورودی به MFCD را بر احتمال اصابت نهایی موشک و بر دو پارامتر وارد شونده در موشک تعیین می کند.



نتایج حاصله از آنالیز خطای در بخش نتایج شبیه سازی به نقطه کار و یا سناریوی پرواز موشک (اعم از پارامترهای هدف، وضعیت عوامل محیطی و زوایا و مشخصات پرواز بالگرد) وابسته بوده و با اجراء برنامه آنالیز خطای در سناریوهای مختلف که در ادامه بخش نتایج شبیه سازی عنوان می گردد، می توان به نتایج قابل قبولی بدون وابستگی به نقطه کار دست یافت.

## ۲. شناسائی منابع خطای مجموعه FCS

خطاهای از حیث ماهیت به دسته بندی های سیستماتیک<sup>۱۱</sup> و تصادفی<sup>۱</sup> و از حیث عوامل ایجاد کننده به خطاهای تجهیزات، اغتشاشات کنترل نشده و

<sup>۹</sup> - Stochastic Simulation

<sup>۱۰</sup> - Monte Carlo Simulation

<sup>۱۱</sup> - Systematic Error

### ۱. مقدمه

موسک مورد مطالعه در این تحقیق، به دسته خاصی از موشکها به نام شلیک کن - فراموش کن<sup>۱</sup> تعلق دارد. بنابر این پس از شلیک موشک از استنگاه مربوطه هیچ گونه دسترسی و کنترلی از خارج بر موشک وجود نداشته و تنها قبل از پرواز با توجه به وضعیت هدف مانند برد<sup>۲</sup>، سمت<sup>۳</sup> و سرعت آن، وضعیت و شرایط عوامل محیطی مانند باد، فشار، رطوبت وغیره، موقعیت پرواز حامل (که موشک بر روی آن قرار دارد) مانند رول<sup>۴</sup>، پیچ<sup>۵</sup>، یاو<sup>۶</sup>، و پس از حل یکسری از معادلات موسوم به معادلات اصابت<sup>۷</sup> پارامترهایی در موشک تنظیم می شود، این پارامترها عبارتند از دو پارامتر  $T_m$  و  $\psi_m$  (شکل ۱). پارامتر  $T_m$  به مدت زمانی پس از شلیک موشک اشاره دارد که جستجوگر تلویزیونی موشک روشن شده و به جستجوی هدف می پردازد، به این ترتیب جستجوگر تلویزیونی پس از پیدا کردن هدف، در صورت وجود اختلاف زاویه بین سمت موشک نسبت به هدف، فرمان تغییر جهت موشک را به سمت هدف صادر می کند، تا هدف را در مقابل خود بینند.  $\psi_m$  مقدار زاویه سمت تصحیحی موشک می باشد

.[۱]

همانگونه که اشاره شد و در شکل (۱) دیده می شود، پارامترهای اندازه گیری در سه زیر سیستم عمدۀ به همراه خطاهای هر کدام از این عوامل در محاسبات بلوك مدیر کنترل آتش موشک (MFCD)<sup>۸</sup> وارد می شوند. در این تحقیق ابتدا کلیه عوامل ایجاد خطای در یک سیستم کنترل آتش شناسایی می شوند، بدین منظور سیستم کنترل آتش را به سه زیر سیستم عمدۀ رادار، عوامل محیطی و جغرافیایی و زیر سیستم حامل که در اینجا یک بالگرد است

<sup>1</sup> - Fire & Forget

<sup>2</sup> - Range

<sup>3</sup> - Course

<sup>4</sup> - Roll

<sup>5</sup> - Pitch

<sup>6</sup> - Yaw

<sup>7</sup> - Combat Equations

<sup>8</sup> - Missile Fire Control Director

## آنالیز خطاهای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالوزاده

کلیه خطاهایی که در یک *FCS* هواپایه نوعی وجود دارد، را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

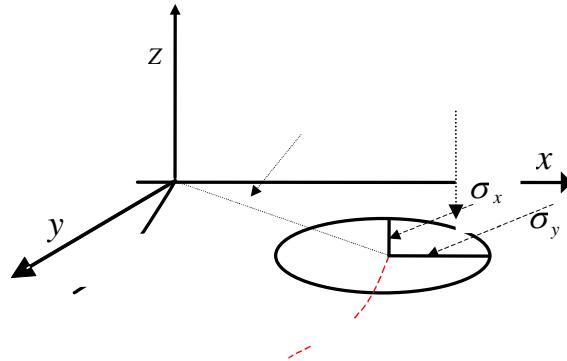
### ۱-۲. خطاهای موجود در زیر سیستم رادار

کارهای متعددی برای شناسایی دقیق پارامترهای خطأ در رادار بر اساس شبیه سازیهای متفاوتی از هدف انجام شده است که در نهایت به رتبه بندی عوامل ایجاد خطأ در رادار به صورت زیر منجر شده است [۵].

- ۱- خطای سنجش سمت هدف
- ۲- خطای سنجش برد هدف
- ۳- خطای سنجش سرعت هدف
- ۴- خطای سنجش کورس هدف
- ۵- خطای تنظیم صفر آتن رادار
- ۶- خطای ناشی از اینکدِر<sup>۳</sup> رادار
- ۷- خطای ناشی از احتمال آشکارسازی
- ۸- خطای دینامیکی ناشی از موتور *DC*
- ۹- قابلیت تفکیک<sup>۴</sup>
- ۱۰- خطای ساخت آتن رادار
- ۱۱- خطاهای مربوط به مدارات داخلی رادار
- ۱۲- خطاهای الگوریتمهای محاسباتی رادار
- ۱۳- خطای نصب پایه آتن رادار
- ۱۴- خطای تراز سطح نصب رادار
- ۱۵- خطای ناشی از وزش باد و تاثیر آن بر آتن رادار (در صورت عدم وجود پوشش آتن رادار)
- ۱۶- خطای مربوط به ارتعاشات<sup>۵</sup> حامل رادار
- ۱۷- خطای مربوط به شوکهای<sup>۶</sup> اعمالی به رادار
- ۱۸- خطای تاخیر در ارسال و دریافت اطلاعات
- ۱۹- خطای مربوط به بازه‌های زمانی ارسال و دریافت اطلاعات از رادار به کامپیوتر مرکزی

رادار به عنوان یک سنسور وظیفه اندازه‌گیری موقعیت هدف را بر عهده داشته و دو پارامتر اصلی برد و سمت هدف را در اختیار می‌گذارد. سایر پارامترهای کورس و سرعت هدف (موارد ۳,۴) توسط الگوریتم‌های ردیابی هدف بدست می‌آید. در کاتالوگ‌های رادار اعم از نظامی و یا تجاری برخی

خطاهای دینامیکی تقسیم بندی می‌شوند [۲,۳,۴]. هر یک از عوامل ایجاد کننده خطأ می‌تواند دارای هر دو نوع خطاهای سیستماتیک و تصادفی باشد. به عنوان مثال خطأ در هر یک از تجهیزات سیستم کنترل آتش به دو دسته سیستماتیک و تصادفی تقسیم می‌شوند. خطاهای تصادفی بوسیله جملاتی از پارامترهای استاتیکی نظری واریانس<sup>۲</sup>  $\sigma^2$  و انحراف استاندارد  $\sigma$  شناخته می‌شود. چگونگی تاثیر این خطاهای بر روی مسیر پرواز موشک متفاوت است (شکل ۲).



( ) تاثیر خطاهای سیستماتیک و تصادفی بر جابجایی موشک از مسیر ایده آل

در شکل (۲) دو مسیر ایده آل و متوسط آورده شده است در صورتی که مجموعه سیستم کنترل آتش دارای هیچ گونه خطای نبوده و موشک نیز ایده آل فرض شود موشک مسیر ایده آل را کرده و به مرکز مختصات اصابت صورت می‌پذیرد. خطاهای سیستماتیک که غالب به عنوان خطای انحراف تلقی می‌شود موجب انحراف موشک از مسیر اصلی خود به شکل یک جابجایی می‌گردد و نیز خطاهای تصادفی باعث پراکندگی که در برخورد به ازای شلیک‌های زیاد در مختصات دو بعدی X و Y می‌شود. در تحلیل چگونگی تاثیر خطاهای بر انحراف موشک و آنالیز حساسیت، هر دو تاثیر انحراف از میانگین و پراکندگی حول نقطه برخورد در نظر گرفته شده است. بهمین خاطر از معیار میانگین مربعات خطأ<sup>۱</sup> (*mse*) در تحلیلهای بخش آنالیز خطأ استفاده شده است که در بخش خود توضیح داده خواهد شد. یک *FCS* هواپایه در این تحلیل به سه زیر سیستم اصلی تقسیم می‌گردد. این سه زیر سیستم اصلی عبارتند از:

۱- زیر سیستم رادار

۲- زیر سیستم عوامل محیطی

۳- زیر سیستم حامل (بالگرد) و سنسورهای اندازه‌گیری زوایا و موقعیت آن

<sup>3</sup> - Encoder Error

<sup>4</sup> - Resolution Error

<sup>5</sup> - Vibrations Error

<sup>6</sup> - Shock Error

<sup>1</sup> - Stochastic Error

<sup>2</sup> - Mean Square Error

### ۳. آنالیز خطای و احتمال اصابت

طرح‌ان سیستم دفاع موشکی تاگانهای دریائی، برای تقویت مکانیزم دفاع موشکی خود، در صدد تعیین خطاهای موشک و احتمال آشکار سازی جستجوگر موشک<sup>۵</sup>، به عنوان دو عامل موثر بر احتمال اصابت نهانی سیستم سلاح هستند. برای دست یابی به این منظور خطاهای موشک، جستجوگر موشک و رادار FCS را با واریانسها و میانگین های مستقل و به شکل گوسی فرض می نمایند و با بهره گیری از مدل‌های آماری میزان خطاهای مجاز رادار FCS با توجه به سناریوهای مختلف حرکات موشکهای ضد کشتی تعیین می شود[۷]. بهینه سازی سیستم کنترل آتش بویژه در ایستگاههای هوایی که در آن سرعت پرتاب موشک و مانور هدف بسیار زیاد است، اهمیت فوق العاده ای دارد. به عنوان مثال در دفاع ضد هوایی تنظیم تاخیر زمانی انفجار موشک با توجه به فواصل مختلف قرار گیری موشک و هدف و زاویه حمله آن در لحظه برخورد بسیار اهمیت دارد. با استفاده از سناریوهای مختلف حمله، فواصل مختلف قرار گیری هدف و موشک و سایر پارامترهای موثر و نیز با توجه به احتمال های تخریب در هر وضعیت که از شیوه سازی فرایند بدست می آید، می توان تاخیر زمانی انفجار موشک را بهینه سازی نمود این مسئله با استفاده از روش‌های مختلف بهینه سازی، از جمله الگوریتمهای ژنتیک برای ماکریم نمودن احتمال تخریب حاصل می گردد [۸]. یکی از مقالات موفق در زمینه رهگیری موشکهای ضد سطحی با استفاده از آنالیز اتفاقی توسط Lipman و همکارانش صورت پذیرفته است [۹]. یکی دیگر از دستاوردهای مهم از مباحث آنالیز خطای بهینه سازی سیستم کنترل و هدایت موشک و اتخاذ یک استراتژی موثر جهت بالا بردن احتمال تخریب سیستم سلاح است [۱۰,۱۱]. بکار گیری نتایج آنالیز سیستمهای کنترل آتش نه تنها باعث شناخت ترکیب موثر قطعات و سنسورها برای دستیابی به یک احتمال اصابت مشخص شده بلکه جهت ساخت یک سیستم موثر پشتیبان خلبان<sup>۶</sup> در کاین هدایت می تواند کمک شایانی را بنماید [۱۲]. در تعیین احتمال اصابت نهانی موشک به دو روش تحلیلی<sup>۷</sup> و روش شیوه سازی اتفاقی میسر می‌باشد.

#### ۱-۱. روش تحلیلی آنالیز خطای

برای شکل دادن به فرایند آنالیز خطای، در ابتدا ضروری است که انواع خطاهای تصادفی و استاتیکی شناخته و طبقه بندی شوند، برای هر منبع خطای هر زیر سیستم باید اینکار صورت پذیرد.

از خطاهای مانند خطاهای سنجش برد و سمت ذکر شده و برخی دیگر از خطاهای مانند موارد (۵) الی (۱۴) تاثیر خود را در سنجش دو پارامتر اصلی برد و سمت حرکت هدف نشان می دهند. سایر خطاهای (موارد ۱۵-۱۹) در خطاهای برد و سمت با توجه به شرایط استاندارد تست رادار دیده نشده است. و باید به شکل جداگانه در نظر گرفته شوند.

#### ۲-۲. خطاهای موجود در زیر سیستم عوامل محیطی

تحلیل و شیوه سازی عوامل محیطی نظری باد و نیز خطاهای تجهیزات مربوط به سنجش باد، فشار و رطوبت در یک سیستم کنترل آتش به عنوان عواملی مهم و تاثیر گذار بر احتمال اصابت، صورت گرفته است [۶]. کلیه عوامل ایجاد خطای به شکل زیر قابل دسته بندی هستند:

۲۰- خطای سنجش دما توسط دماسنچ

۲۱- خطای سنجش فشار توسط فشارسنج

۲۲- خطای سنجش مقدار باد یا همان سرعت وزش باد

۲۳- خطای سنجش جهت باد

۲۴- خطاهای مربوط به تاخیر کلیه سنسورهای این زیر سیستم

#### ۳-۲. خطاهای موجود در زیر سیستم بالگرد و یا حامل

۲۵- خطاهای اندازه گیری یا پرواز توسط سیستم هدایت مرجع

AHRS<sup>۱</sup>

۲۶- خطاهای اندازه گیری رول پرواز توسط AHRS

۲۷- خطاهای اندازه گیری پیچ پرواز توسط AHRS

۲۸- خطای اندازه گیری سرعت توسط رادار داپلر<sup>۲</sup>

۲۹- خطای اندازه گیری ارتفاع حامل توسط ارتفاع سنج<sup>۳</sup>

۳۰- کلیه خطاهای نصب لانچر<sup>۴</sup> بر روی حامل

۳۱- خطای عدم هم راستای ریل پرتاب و موشک

۳۲- خطاهای مربوط به تاخیر سنسورهای حامل

همه این عوامل خطای در برنامه کامل آنالیز خطای لحاظ شده اند و مقادیر خطاهای موردنظر از کاتالوگهای مربوطه استخراج گردیده است. از ۳۲ مورد خطای ذکر شده در بالا تنها یازده مورد به عنوان ورودی به MFCD<sup>۵</sup> جهت حل معادلات اصابت بوده و سایر موارد اثر خود را در این یازده پارامتر خطای نشان می دهند.

<sup>1</sup> Attitude Heading Reference System

<sup>2</sup> Doppler

<sup>3</sup> Altimeter

<sup>4</sup> Launcher

<sup>5</sup> Seeker Detection Probability

<sup>6</sup> Decision Support System

<sup>7</sup> Analytical Technique

### آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالوزاده

$e_i$ : خطای جمع شونده با المان  $\mathbf{A}$

$y_i^*$ : خروجی آمین المان سیستم

ضرایب تناصی در معادلات بالا از روابط مشتق جزئی بین ورودیها و خروجیها بدست می‌آید. رابطه ورودیها و خروجیها برای المان  $\mathbf{A}$  از یک سیستم *MIMO* به دو شکل ایده‌آل و غیر ایده‌آل به ترتیب با توابع  $f_i(\dots)$  و  $h_i(\dots)$  نمایش داده می‌شود. در واقع وجود خطاهای مختلف در سیستم ایده‌آل  $f_i(\dots)$  را به سیستم غیر ایده‌آل  $h_i(\dots)$  تبدیل می‌نماید. رابطه ورودیها و خروجیها در المان غیر ایده‌آل از فرمول زیر قابل استخراج است.

$$h_i(\dots) = h_i(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_i^*, \dots, y_q, e_i) = 0. \quad (1)$$

$$y_i^* = y_i + \varepsilon_{y_i} \quad (2)$$

$y_i$ : خروجی سیستم ایده‌آل بدون وجود خطا در ورودیها

$\varepsilon_{y_i}$ : انحراف در خروجی  $y_i$  ناشی از خطا در سیستم رابطه بین  $e_i$  و  $\varepsilon_{y_i}$  را با نوشتن بسط تیلور برای توابع چند بعدی می‌توان بدست آورد.

(بسط حول نقطه  $(p_0)$ )

$$\begin{aligned} h_i(\dots) = & h_i(p_0) + (x_1 - x_{l(0)}) \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial x_l} + \frac{1}{2}(x_1 - x_{l(0)})^2 \frac{\partial^2 h_i(p_0)}{\partial x_l^2} + \dots \\ & + (y_i - y_{i(0)}) \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial y_i} + \frac{1}{2}(y_i - y_{i(0)})^2 \frac{\partial^2 h_i(p_0)}{\partial y_i^2} + \dots \\ & + (\varepsilon_{y_i} - \varepsilon_{y_{i(0)}}) \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial \varepsilon_{y_i}} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{y_i} - \varepsilon_{y_{i(0)}})^2 \frac{\partial^2 h_i(p_0)}{\partial \varepsilon_{y_i}^2} + \dots \\ & + (e_i - e_{i(0)}) \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial e_i} + \frac{1}{2}(e_i - e_{i(0)})^2 \frac{\partial^2 h_i(p_0)}{\partial e_i^2} + \dots \end{aligned}$$

از آنجا که  $h_i(\dots)$  در حول وحش نظره کاری  $p_0$  ایده‌آل و بدون خطای است، لذا مقادیر  $\varepsilon_{y_{i(0)}}$  صفر هستند و جمله  $h_i(p_0)$  با فرض کوچک بودن خطاهای صفر می‌شود و نیز با فرض صفر بودن جملات از درجه ۲ و بالاتر در معادله فوق می‌توان نوشت:

$$h_i(\dots) = f_i(p_0) + \varepsilon_{y_i} \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial \varepsilon_{y_i}} + e_i \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial e_i} \quad (3)$$

که در آن  $f_i(p_0)$  فرم نرمال برای آمین المان ایده‌آل به شکل زیر است:

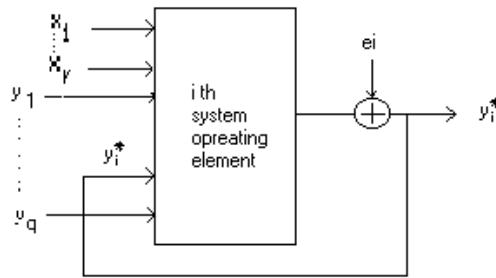
اساس آنالیز خطاهای تصادفی، تئوری ایستائی است که بر این اساس واریانس مجموع یک تعداد متغیرهای تصادفی مستقل ایستا برابر با مجموع واریانس‌های متغیرهای مستقل می‌باشد [13].

$$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \quad (4)$$

$\sigma_i^2$ : واریانس آمین متغیر تصادفی مستقل

$N$ : تعداد متغیرهای تصادفی مستقل ایستا

در روش تحلیلی جهت آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، کلیه سنسورهای FCS به شکل یک سیستم چند ورودی و چند خروجی در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب اگر کل سیستم  $FCS$  دارای  $r$  ورودی و  $q$  خروجی باشد، مسئله آنالیز خطای با فرض مشخص بودن معادلات حاکم بر ورودیها و خروجیها به حل یک مسئله چند ورودی و چند خروجی باز می‌گردد. شکل (۳) آمین المان از این سیستم چند ورودی و چند خروجی را نشان می‌دهد. این المان نشان دهنده سیستمی با  $r$  ورودی خارجی (که از خارج به سیستم اعمال می‌شود) و  $q$  ورودی داخلی (که از خروجی سایر المانهای سیستم فیدبک گرفته شده است)، است.  $e_i$ : خطای جمع شونده با خروجی المان  $\mathbf{A}$  می‌باشد. با توجه به تئوری ایستائی، معادله (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت.



(المان  $\mathbf{A}$  از یک سیستم چند ورودی چند خروجی)

$$\sigma_{y_i}^2 = \sum_{l=1}^r (C_{x_{il}})^2 \sigma_{x_l}^2 + \sum_{m=1}^q (C_{e_{im}})^2 \sigma_{e_m}^2. \quad (5)$$

$\sigma_{y_i}^2$ : واریانس خطای خروجی در المان  $\mathbf{A}$

$\sigma_{x_l}^2$ : واریانس خطای در  $\mathbf{A}$  مین ورودی خارجی

$\sigma_{e_m}^2$ : واریانس خطای در  $\mathbf{A}$  مین ورودی داخلی

$C_{x_{il}}$ : ضریب تناصی بین  $\mathbf{A}$  مین ورودی خارجی و  $\mathbf{A}$  مین خروجی

$C_{e_{im}}$ : ضریب تناصی بین  $\mathbf{A}$  مین ورودی داخلی و  $\mathbf{A}$  مین خروجی

## آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالو زاده

همراه است. با توجه به اینکه معادلات اصابت معادلات پیچیده و غیر خطی هستند و معادلات دینامیکی موشک و قوانین هدایت و کنترل نیز پیچیدگی خاص خود را دارند، لذا برای تحلیل تاثیرات این عوامل بر پارامترهای محاسبه شونده و تنظیم شونده در موشک از روش تحلیلی صریح باسانی نمی توان بهره برد. روش شبیه سازی اتفاقی یا روش شبیه سازی مونت کارلو که مبتنی بر ورودیهای اتفاقی و تصادفی می باشد، بهترین روش بررسی و تحلیل در این موارد می باشد. در هر صورت هر دو روش جهت آنالیز خطای در سیستمهای کنترل آتش قابل استفاده است. روش تحلیلی در سیستمهای با معادلات مشخص و دارای پیچیدگی کم که بتوان به راحتی مشتقات جزئی را محاسبه نمود، قابل بکارگیری است. روش مونت کارلو در سیستمهای پیچیده تر و البته با صرف زمان بیشتر صورت می پذیرد. روشهای تحلیلی برخلاف روشهای مونت کارلو یک جواب بسته و کاملاً مشخص را در اختیار می گذارند حال آنکه روشهای مونت کارلو جواب ریاضی مشخص و بسته ای را در اختیار نگذاشته و جوابها به شکل تقریبی بوده و با افزایش تعداد تکرار برنامه به سمت مانهای صحیح همگرا می گردد. این روش که مبتنی بر تکرار زیاد است برای آنالیز خطای سیستم کنترل آتش مورد نظر به علت پیچیدگی معادلات و عدم وجود مشتقهای جزئی، در تحقیق حاضر استفاده شده است [13,14,15]. به این ترتیب داده های اندازه گیری شده از سنسورهای مختلف که در سیستم کنترل آتش دخیلن، به کامپیوتر مرکزی ارسال شده و پارامترهای تنظیم شونده در موشک محاسبه می گرددند. داده ها دریافته از سنسورها و دو پارامتر محاسباتی توسط کامپیوتر مرکزی در موشک قرار می گیرند، سپس موشک شلیک و به میزان محاسبه شده تغییر سمت می دهد و در زمان محاسبه شده جستجوگر تلویزیونی موشک روشن می شود و این فرآیند برای نقاط مختلف با توجه به مدلسازی صورت گرفته در مورد هر خطای تکرار می گردد. برنامه آنالیز بر اساس این روش شامل دو مرحله عمده می باشد: اولین مرحله آنالیز تاثیرات خطاهای *FCS* بر خروجیهای *MFC*D و در دومین مرحله تحلیل دو پارامتر خروجی *MFC*D بر احتمال اصابت انجام می گیرد. تمامی خطاهای ذکر شده در بخش دوم در یازده پارامتر ورودی به *MFC*D خود را نشان می دهند. برای تولید ورودیهای متغیر و تصادفی از معیار میانگین حداقل مربعات (mse) به شکل زیر استفاده می شود [4].

$$mse = E\{(X_i - \bar{X})^2\} \quad .$$

که در آن  $i$  پارامتر مورد نظر در تکرار ۱ است و  $\bar{X}$  مقدار این پارامتر با فرض صفر بودن خطای است. اگر فرمول بالا را به شکل زیر بنویسیم خواهیم داشت:

$$f_i(x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_q) = y_i - g_i(x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_q) = 0$$

چنانچه مشاهده گردید در اثر وجود خطای در سیستم روابط ورودی و خروجی از فرم غیر ایده آل (۳) تبعیت می کنند. با توجه به رابطه بدست آمده بین فرم ایده آل و غیر ایده آل در فرمول (۵) داریم:

$$\varepsilon_{y_i} \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial \varepsilon_{y_i}} + e_i \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial e_i} = 0 \quad .$$

و با استفاده از قانون زنجیره ای می توان نوشت:

$$\varepsilon_{y_i} \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial y_i^*} \frac{\partial y_i^*}{\partial \varepsilon_{y_i}} + e_i \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial e_i} = 0 \quad .$$

$$y_i^* = y_i + \varepsilon_{y_i} \Rightarrow \frac{\partial y_i^*}{\partial \varepsilon_{y_i}} = 1 \quad .$$

$$\frac{\partial h_i(p_0)}{\partial y_i^*} = \frac{\partial f_i(p_0)}{\partial y_i} \quad .$$

$$\varepsilon_{y_i} \frac{\partial f_i(p_0)}{\partial y_i} + e_i \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial e_i} = 0 \quad .$$

تا اینجا مسئله انحراف در خروجی المان ۱ ام به ازای خطای جمع شونده با آن خروجی مورد بررسی قرار گرفت. اگر ورودیها به المانهای غیر ایده آل نیز دارای ترکیبات خطای باشند،تابع عمومی در رابطه (۳) به شکل زیر خواهد بود.

$$h_i(x_1, \dots, x_l, \dots, x_r, \varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_l}, \dots, \varepsilon_{x_r}, \varepsilon_{y_1}, \dots, y_m, \dots, y_q, \varepsilon_{y_1}, \dots, \varepsilon_{y_m}, \dots, \varepsilon_{y_q}, e_i) = 0 \quad .$$

$\varepsilon_{x_i}$ : خطای در ۱امین ورودی خارجی

$\varepsilon_{y_m}$ : خطای در  $m$  امین ورودی داخلی

و معادلات گسترش خطای در فرمول (۷) به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{k=1}^q \varepsilon_{y_k} \frac{\partial f_i(p_0)}{\partial y_k} = - \sum_{r=1}^l \varepsilon_{x_r} \frac{\partial f_i(p_0)}{\partial x_r} - e_i \frac{\partial h_i(p_0)}{\partial e_i} \quad .$$

برای یک سیستم مشکل از تعداد زیادی المان روابط فوق بسط یافته و تاثیر هر نوع خطای المانهای ورودی بر هر خروجی دلخواه بدست می آید.

### ۲-۳. روش شبیه سازی اتفاقی

بسیاری از سیستمهای بخار پیچیدگی و یا عدم قطعیت زیاد و عدم شناخت کامل، با روابط معادلات دیفرانسیل بین ورودیها و خروجیها بیان نمی شوند. در برخی دیگر از موارد سیستم به عنوان یک جعبه سیاه مطرح است که تنها قابلیت دادن ورودی و دریافت خروجی را دارد. برای آنالیز یک چنین سیستمهای روشهای تحلیلی کارآمد نبوده و یا با پیچیدگی های خاص خود

## آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالوزاده

بخش شناسائی منابع خطای ذکر شد، تعداد ورودیها به جعبه MFCD یازده عامل ایجاد خطای می باشد و تعداد خروجیها از این جعبه دو پارامتر اصلی تنظیم شونده در موشک می باشد. بر اساس تعریف (۱۴) میزان تاثیر پارامترهای خطدار ورودی بر خروجی MFCD زمانی که فقط خطای پارامتر مورد نظر اعمال می گردد وسایر پارامترها بدون خطای هستند را مشخص می کند. در این بخش خروجیهای برنامه بازی اجرای و تکرارهای زیاد و نیز بازی مقادیر مختلف و متنوع  $mse_{T_m}$ ,  $mse_{\psi_m}$  بدست می آید. در این مرحله می توان میزان اثر هر خطای در دو پارامتر مورد نظر را بدست آورد. واضح است که رابطه:

$$IF_{jx} > IF_{jy}$$

نشانگر تاثیر بیشتر پارامتر  $x$  نسبت به پارامتر  $y$  می باشد. اگر نگاشت ناشناخته  $\theta: R^{11} \rightarrow R^2$ : معرف نگاشتی از فضای عوامل خطای یازده گانه ورودی سیستم MFCD به فضای ایجاد کننده پارامترهای  $T_m$  و  $\Psi_m$  ( $mse_{T_m}$ ,  $mse_{\psi_m}$ ) که خروجی سیستم MFCD است باشد می توان نوشت:

$$IF_{ij} = \frac{mse_j}{\delta_i} \quad \text{for } j=1,2 \quad i=1,..,11$$

$\delta_i$ : انحراف معیار  $i$  امین ورودی به MFCD

MFCD: میانگین مربعات خطای در  $j$  امین خروجی ( $mse_j$ ,  $(mse_{T_m}, mse_{\psi_m})$

$$\theta: R^{11} \rightarrow R^2$$

$$\begin{bmatrix} mse_{T_m} \\ mse_{\psi_m} \end{bmatrix} = \theta_{2 \times 11} [\delta_1 \dots \delta_{11}]^T \quad .(1)$$

$$\theta_{2 \times 11} = \begin{bmatrix} IF_{T_m,1} & IF_{T_m,2} & \dots & IF_{T_m,11} \\ IF_{\psi_m,1} & IF_{\psi_m,2} & \dots & IF_{\psi_m,11} \end{bmatrix}$$

همچنین با توجه به اینکه احتمال اصابت نهایی تابعی از پارامترهای دو گانه تنظیم شونده در موشک  $(\Psi_m, T_m)$  است مجدداً می توان نگاشت  $R^2 \rightarrow R^1$  را به آن اختصاص داد و نوشت:

$$\Phi: R^2 \rightarrow R^1$$

$$\Delta hp = \Phi_{1 \times 2} \begin{bmatrix} mse_{T_m} \\ mse_{\psi_m} \end{bmatrix} \quad .(2)$$

$$\Phi_{1 \times 2} : \begin{bmatrix} IF_{hT_m} & IF_{h\psi_q} \end{bmatrix}$$

$$E\left\{(X_i - \hat{\mu} + \hat{\mu} - X)^2\right\} = E\left\{(X_i - \hat{\mu})^2\right\} + E\left\{(X - \hat{\mu})^2\right\} + 2E\left\{(X_i - \hat{\mu})(\hat{\mu} - X)\right\}$$

واضح است که:

$$E(X_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$mse = E\left\{(X_i - X)^2\right\} = E\left\{(X_i - \hat{\mu})^2\right\} + E\left\{(X - \hat{\mu})^2\right\} = Var(X_i) + bias^2(X_i) \quad .(3)$$

دیده می شود که در این معیار هر دو پارامتر انحراف از میانگین (خطای سیستماتیک) و واریانس (خطای تصادفی) دخالت دارند. به این ترتیب به ازاء خطای در محاسبه یک پارامتر از دو پارامتر خروجی MFCD مثلاً  $T_m$  کاهش احتمال اصابتی معادل  $\Delta hp_{T_m}$  را خواهیم داشت و این کار را برابر پارامتر دیگر نیز انجام داده و کاهش احتمال اصابت در هر مورد محاسبه می شود.

برای اینکه میزان تاثیر تغییر پارامترهای  $T_m$ ,  $\Psi_m$  در احتمال اصابت با همیگر مقایسه شوند با سعی و خطای در اجرای برنامه تلاش می شود که  $\Delta hp$  (در اینجا  $\Delta hp$  ها،  $5\%$  انتخاب شده اند) به ازاء کلیه خطایها (که بصورت جدا گانه اعمال شده اند) یکسان گردند و لذا شرایطی را ایجاد می کنیم که:

$$\Delta hp_{T_m} = \Delta hp_{\psi_m} = 5\% \quad .(4)$$

پس از اجرای برنامه  $mse$  ها به ازای پارامترهای دو گانه فوق به شکل زیر رتبه بندی می شود:

$$mse_{\psi_m}(\Delta hp = 5\%) < mse_{T_m}(\Delta hp = 5\%) \quad .(5)$$

بدین ترتیب تابع احتمال اصابت نسبت به پارامتری که  $mse$  بیشتری دارد (بازای یک  $\Delta hp$  ثابت مثلاً پنج درصد) حساسیت کمتری دارد. با تعريف ضریب اهمیت<sup>۱</sup> (IF) به شکل:

$$IF_x = \frac{\Delta hp_x}{mse_x} \quad .(6)$$

و با توجه به اینکه در اینجا  $\Delta hp$  ها برابر  $5\%$  انتخاب شده اند، وزن و اهمیت هر یک از این پارامترها برابر عکس  $mse$  های نظیر می باشد بنابراین:

$$IF_{\psi_m} > IF_{T_m} \quad .(7)$$

در جدول (۲) بخش نتایج میزان حساسیت تابع احتمال اصابت نسبت به هر یک از عوامل یازده گانه خطای محاسبه و رتبه بندی شده است. چنانچه در

<sup>1</sup> -Important Factor

### آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالو زاده

$$\begin{aligned} \Delta hp &= \Phi_{I \times 2} \begin{bmatrix} mse_{T_m} \\ mse_{\psi_m} \end{bmatrix} = \Phi_{I \times 2} \times \theta_{2 \times II} I \delta_I \dots \delta_{II} J^T \quad (1) \\ &= \begin{bmatrix} IF_{hT_m} & IF_{h\psi_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} IF_{T_m,1} & IF_{T_m,2} & \dots & IF_{T_m,II} \\ IF_{\psi_m,1} & IF_{\psi_m,2} & \dots & IF_{\psi_m,II} \end{bmatrix} [ \delta_I \dots \delta_{II} ]^T \\ hp &= 100 - \Delta hp. \quad (2) \end{aligned}$$

فرمول (۲۰) بیان می کند که میزان کاهش احتمال اصابت برای خطای پارامتر آم از مجموع دو بخش تشکیل یافته است. بخش اول چگونگی تاثیر آن عامل خطا بر دو پارامتر  $T_m$  و  $\psi_m$  و بخش دوم میزان تاثیر این دو پارامتر بر کاهش احتمال اصابت است. فرمول (۱۶) فاکتورهای اهمیت خطاهای یازده گانه نسبت به دو پارامتر  $\psi_m$  و  $T_m$  را نشان می دهد. فرمول (۱۷) فاکتورهای اهمیت  $T_m$  و  $\psi_m$  را نسبت به کاهش احتمال اصابت نشان می دهد. فاکتورهای اهمیت هر یک از خطاهای یازده گانه نسبت به کاهش احتمال اصابت به شکل مستقیم از فرمول (۲۰) قابل استخراج است:

$$IF_i = IF_{hI} \times IF_{lI} + IF_{h2} \times IF_{2I} \quad i = 1, 2, \dots, 11. \quad (3)$$

تعريف:

$$PIF_i = \frac{IF_i}{\sum_{i=1}^{II} IF_i} \times 100. \quad (4)$$

درصد اهمیت هر یک از پارامترهای ورودی به MFCD بر احتمال اصابت توسط فرمول (۲۳) بدست می آید.

### ۴. نتایج شبیه سازی

اولین مرحله انجام فرایند آنالیز خطا تعیین سناریوی شلیک می باشد. تعیین این سناریو از آن جهت حائز اهمیت است که چگونگی تاثیر خطاهای بر احتمال اصابت تابعی از نقطه کار پارامترها و یا همان سناریوی شلیک می باشد. جدول (۱) سناریوی مربوط به شلیک موشک (پارامترهای هدف و سایر پارامترهای لحظه شلیک موشک) را نشان می دهد. در مرحله بعد یکی از عوامل ایجاد خطا (یازده متغیر ایجاد خطا) را جهت تحلیل انتخاب نموده و با تولید یک خطای تصادفی بر روی این متغیر، برنامه شبیه سازی معادلات اصابت حل شده پارامترهای تنظیم شونده در موشک محاسبه می شوند. جهت آنالیز میزان تاثیر این پارامتر برنامه معادلات اصابت به تعداد ۲۰۰ مرتبه برای هر یک از خطاهای یازده گانه ورودی به MFCD حل می شود. لذا ۲۰۰ مقدار مختلف برای دو پارامتر تنظیمی در موشک بدست می آید. شکل (۵) مقدادر بدست آمده برای  $\psi_m$  و شکل (۶) مقدادر بدست آمده برای  $T_m$  را برای یک سناریو نوعی نشان می دهد.

روش مونت کارلو با اعمال ورودیهای اتفاقی برای این دو پارامتر و بدست آوردن تاثیر آن بر احتمال اصابت نیز اجرا می شود. بنابراین طبق تعریف فاکتور اهمیت در فرمول (۱۴) برای این نگاشت خواهیم داشت:

$$IF_{hj} = \frac{\Delta hp}{mse_j} \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

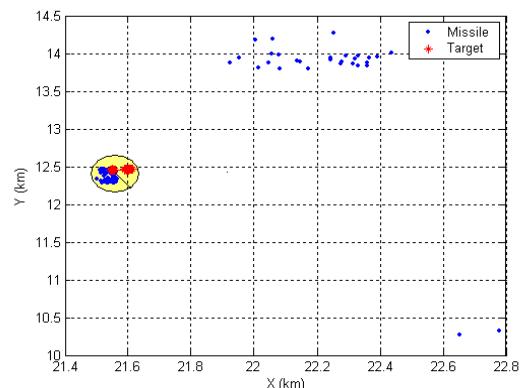
برای محاسبه کاهش احتمال اصابت  $\Delta hp$  از معیار احتمال خطای دایره ای با شعاعی متناسب با ابعاد هدف که در بسیاری از مراجع استفاده می شود، می توان بهره برد [۱۶]. شکل (۴) چگونگی محاسبه احتمال اصابت با توجه به نقاط انتهائی برخورد موشک نسبت به هدف را نشان میدهد. شعاع موثر تخریب هدف ۲۰۰ متر در نظر گرفته شده است. به این ترتیب کلیه موشکهای شلیک شده که در دایره ای به شعاع ۲۰۰ متر نسبت به نقطه قرار گیری نهایی هدف قرار دارند دارای احتمال اصابت ۱۰۰٪ و اصابتهاي خارج این دایره دارای احتمال اصابت صفر خواهند بود. هر چه تعداد نقاط داخل دایره بیشتر باشد احتمال اصابت بالاتر خواهد بود.

کاهش احتمال اصابت، نسبت تعداد عدم برخوردهای صورت گرفته به تعداد کل شلیکها (تکرارهای برنامه) می باشد:

$$\Delta hp = \frac{N_i}{N}. \quad (6)$$

$N_i$ : تعداد عدم برخورد

$N$ : تعداد کل تکرار و اجراء برنامه



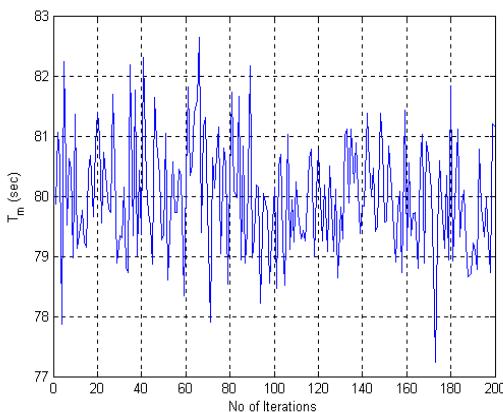
(۶) نقاط نهایی اصابت موشک و قرار گیری هدف و شعاع مفید تخریب

با تلفیق دو مرحله ذکر شده می توان به فرمول بندی کلی سیستم دست یافت.

### آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالوزاده

برای اجرای یک ردیف جدول تعیین سهم خطاهای (و یا جدول فرمول احتمال اصابت) زمان زیر را خواهیم داشت.

$$\text{Computation Time (one row)} = 8000 \times 1/60 \times 1/60 = 2.22 \text{ (hour)}$$



() مقادیر  $T_m$  برای یک عامل ایجادخطای به ازای ۲۰۰ تکرار برنامه

مطابق جدول (۳) تعداد سناریوهای در بردها، زوایای دید، سرعت و جهت های مختلف وزش باد به تعداد زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Senarios Number} &= (\text{سناریوهای برد هدف}) \times (\text{سناریوهای برد}) \\ &= (\text{سناریوهای جهت باد}) \times (\text{سناریوهای سرعت باد}) \times (\text{زاویه دید}) \\ &= 7 \times 3 \times 3 \times 3 = 189 \end{aligned}$$

لذا زمان بری کلی تهیه جداول تعیین سهم خطاهای به مقدار زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \text{Total Computation Time} &= (\text{Computation Time (one row)}) \times (\text{Scenarios Number}) = 2.22 \times 189 = 420 \\ (\text{hour}) &= 17.5 \text{ (day)} \end{aligned}$$

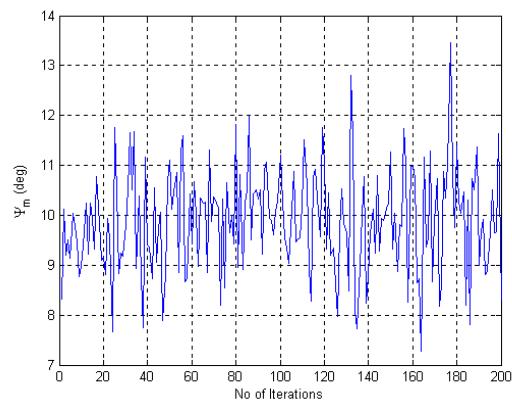
چنانچه مشاهده گردید، دقیقت در تهیه جداول خطای با توجه به حجم بالای اجراء آن در حد بسیار مطلوبی می باشد، لذا جداول فرمول بندي احتمال اصابت که در ادامه می آید، با دقیقت بسیار خوبی تهیه شده اند.

تا این مرحله از آنالیز خطای، با استفاده از فرمول (۱۶) می توان فاکتورهای اهمیت هر یک از پارامترهای یازده گانه را بر اساس میزان تاثیر آن بر دو پارامتر تنظیم شونده در موشک، بدست آورد. شکل (۷) و (۸) تابع جگالی توزیع پراکندگی این دو پارامتر را نشان می دهد.

با توجه به سناریوهای مختلف برد، زاویه دید هدف و نیز سرعت و جهت های مختلف وزش باد برنامه آنالیز خطای طراحی و اجرا شده است، لازم به ذکر است تعداد خطاهای لحاظ شده یازده نوع بوده و برای هر نوع سه مقدار مختلف خطای در هر پارامتر اعمال شده است ضمناً جهت مقایسه، حالت بدون خطای نیز در هر سناریو اجرا می گردد، همچنین برای بدست آوردن ارتباط میان  $\Delta hp$  و  $\psi_m$  با اعمال خطای در  $T_m$  و  $\psi_m$  نیز به شکل مستقل (۱۴) صورت پذیرفته است. در نهایت ۱۳ خطای بهمراه حالت بدون خطای (۱۴) حالت را در هر سناریو خواهیم داشت. به عنوان مثال برای سناریوی  $LOS = 13(\text{deg})$  و زاویه دید هدف  $R = 48.44(\text{km})$ ، سرعت wind-speed=8.5(km/h)، جهت وزش باد direction=100° یازده نوع خطای ذکر شده در جدول (۱۱) و به ازاء هر خطای سه رنج مختلف (مثلاً ارتفاع پرواز در جدول شماره (۱۱)) و به ازاء هر خطای سه رنج مختلف (مثلاً خطای سنجش ارتفاع (۱)، (۲)، (۳) m) و به صورت خطای تصادفی با توزیع گویی در نظر گرفته شده است و در هر مورد خطای کل برنامه ۲۰۰ بار اجراء شده است به این ترتیب برای هر ردیف و تعیین سهم خطاهای آن سناریو به تعداد زیر اجراء برنامه را داریم (یا بد توجه داشت که هر یک از ۱۳ خطای ذکر شده دارای ۳ سناریو بوده بعلاوه یک سناریو بدون خطای)

$$\text{Iteration Number} = 200 \times (3 \times 13 + 1) = 8000$$

زمانبندی هر بار اجراء برنامه که متناظر با قرار گرفتن اطلاعات  $T_m$  و  $\psi_m$  از طریق MFCD در موشک و حل معادلات دینامیکی پرواز موشک و معادلات اصابت می باشد، در حدود ۱ ثانیه می باشد (بخش عمده ای از این زمان، مربوط به حل معادلات شش درجه آزادی شبیه سازی موشک و

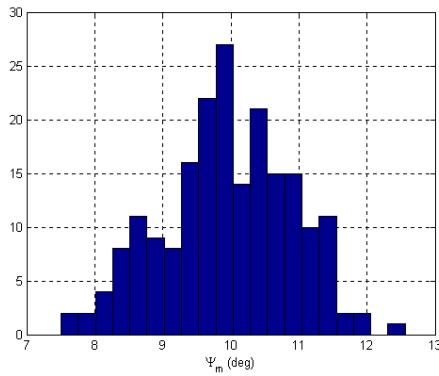


() مقادیر  $\psi_m$  برای یک عامل ایجادخطای به ازای ۲۰۰ تکرار برنامه

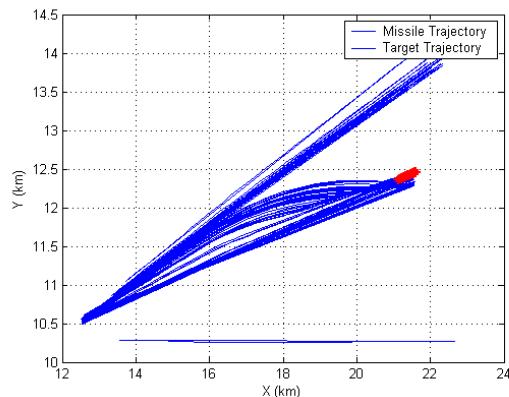
معادلات دینامیکی پرواز موشک می باشد، در حدود ۹۹٪ کل زمان)، لذا

<sup>۱</sup> -Target Line of Sight

### آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالوژاده



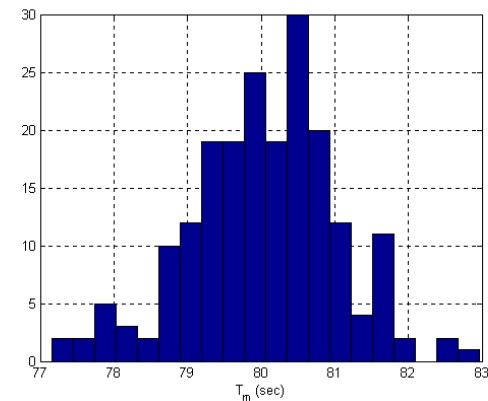
( تابع چگالی توزیع پراکندگی  $\psi_m$  برای یک عامل ایجاد خطای از ۲۰۰ تکرار برنامه )



( مسیرهای پرواز موشک برای یک عامل ایجاد خطای از ۲۰۰ تکرار برنامه )

$$\theta_{2*11} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.02016 \\ 0.02 & 0.0024 \\ 0.08 & 0.01 \\ 0.006 & 0.08004 \\ 0.02 & 0.106 \\ 0.05 & 0.0058 \\ 0.030 & 0.0106 \\ 0.109 & 0.013 \\ 0.0441 & 0.003 \\ 0.001 & 0.004 \\ 0.008 & 0.004 \end{bmatrix}^T, \phi_{1*2} = [1.01 \quad 9.98]$$

ذکر مجدد این نکته حائز اهمیت است که مقادیر بدست آمده برای ماتریس‌های بالا باستگی به سناریوی تعریف شده برای شلیک موشک دارد. برای دستیابی به نتایج قابل قبول در تعیین سهم نهانی هر پارامتر ورودی به MFCD بدون وابستگی به سناریو و یا نقطه کار در کلیه سناریوهای مورد نظر برنامه آنالیز خطای اجرا و از نتایج حاصله میانگین گیری می‌گردد. به عنوان مثال بر اساس  $\theta$  ذکر شده در فرمول فوق، دما در این سناریو دارای نسبت تاثیر ۵۰ برابر کوچکتر از سمت هدف بر روی پارامتر  $T_m$  و نیز دارای تاثیر حدوداً ۱۲ برابر کوچکتر نسبت به سمت هدف بر روی پارامتر  $\psi_m$  است و لیکن میار قضاوت بر اساس میانگین کلیه سناریوها خواهد بود. جدول (۲) نتایج اجرای برنامه آنالیز خطای احتمال اصابت نهانی موشک، تاثیر هر پارامتر خطای بر  $\psi_m$  و  $T_m$  و فاکتورهای اهمیت برای هر عامل خطای که با استفاده از فرمول (۲۲) و با میانگین گیری از کلیه سناریوهای صورت پذیرفت، را نشان می‌دهد. نتایج به ترتیب درجه اهمیت (میزان  $\Delta hp$ ) رتبه بندی شده اند. به عنوان مثال شکل (۱۰) برای تشریح چگونگی خروجی‌های برنامه مربوط به ردیف اول جدول (۲)، و در یک سناریوی خاص آورده شده است،



( تابع چگالی توزیع پراکندگی  $T_m$  برای یک عامل ایجاد خطای از ۲۰۰ تکرار برنامه )

مرحله بعدی آنالیز خطای اجرای شبیه سازی موشک و بدست آوردن نقاط برخورد نهانی موشک نسبت به نقطه انتهائی قرار گیری هدف است. شکل (۹) مسیرهای پرواز موشک به ازای اعمال یکی از خطاهای یازده گانه ورودی و به ازای ۲۰۰ مقدار پارامترهای تنظیم شونده (دو پارامتر  $\psi_m$  و  $T_m$ ) در موشک را نشان می‌دهد. با توجه به تعریف رابطه (۱۹) نیاز به نقاط انتهائی برخورد جهت بدست آوردن احتمال اصابت وجود دارد. شکل (۴) نقاط انتهائی برخورد موشک را نسبت به هدف نشان می‌دهد. فرمول (۱۷) فاکتور اهمیت  $\psi_m$  و  $T_m$  را به کاهش احتمال اصابت ( $\Delta hp$ ) بدست می‌دهد. با توجه به واریانس خطاهای ذکر شده در جدول (۲) ماتریس‌های  $\Phi$ ،  $\theta$ ،  $\Psi$  قابل استخراج هستند:

## آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالوزاده

- [3] جعفر نوبری حیرانی، تحلیل و آنالیز خطای رادار و بهینه سازی سیستم هدایت کنترل یک موشک زمین به هوای رساله دکتری رشته کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۷۹.
- [4] F. C. Schweppe, Uncertain Dynamic Systems, Prentice-Hall, 1973.
- [5] حمید خالوزاده، علی کارساز، آنالیز منابع خطای رادار و پارامترهای تشخیص هدف با استفاده از روش مونت کارلو، دوازدهمین کنفرانس مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، اردیبهشت ۸۳
- [6] علی کارساز، حمید خالوزاده، آنالیز خطای تابع احتمال اصابت در یک سیستم کنترل آتش هوای پایه ناشی از عامل باد، چهاردهمین کنفرانس مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه امیر کبیر، اردیبهشت ۱۳۸۵.
- [7] L. W. Fong, J. S. Dai and C. C. Liu, "Analysis and design of shipboard defense missile system via statistical error approach," *IECON' 97 23<sup>rd</sup> Int. Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, Vol. 1, pp. 132-137, 1997.
- [8] H. O. Nyongesa, "Generation of time-delay algorithm for anti-air missiles using genetic programming," *In Applications of Evolutionary Computing*, Vol. 2037, pp. 243-247, Lake Come Italy, April 18-20, 2001, Springer-Verlag.
- [9] Y. Lipman, J. Shinar, and Y. Oshman, "Stochastic analysis of the interception of maneuvering antisurface missile," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 4, July-August 1997.
- [10] W. Lidong, W. Hongjing, "The research in influences of bodywork attitude's measuring error on the fire control system to calculate shoot factors," 4<sup>th</sup> World Congress on Intelligent Control Automation, June 10-14, 2002.
- [11] L. N. Lillard, H. E. Evans and J. J. Spaulding, "Minimum variance missile launch and impact estimation by fusing observations from multiple sensors," IEEE Aerospace Conf, Feb. 1-8, 1997, U.S.A.
- [12] C. R. Aragon, "Using visualization in cockpit decision support systems," *IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 3, Oct, 2005, pp. 2396 - 2401.
- [13] محسن رضانیان، قابلیت اطمینان سیستمهای مهندسی، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، ۱۳۷۹.
- [14] I. M. Hammersley, D. C. Handscomb, Monte Carlo Methods , John Wiley & Son's, 1964.
- [15] J. Endrenyi, "Reliability modeling in electric power systems", John Wiley & Son's, 1978.
- (10.a) که تحلیل بر روی خطای اندازه گیری سمت هدف می باشد. شکل (10.b) محل اصابت موشک نسبت به هدف به ازای ۲۰۰ اجرای برنامه آنالیز خطای نشان می دهد. چنانچه مشاهده می شود تمامی اصابتها جز برخی از آنها در نقاط نزدیک به هدف صورت پذیرفته و احتمال اصابت محاسبه شده از فرمول (21) ۹۱.۵٪ است، در شکلهای (10.c) زوایای سمت داده شده به موشک آمده است، شکل (10.d) مسیرهای پرواز موشک و حرکت هدف را نسبت به یکدیگر نشان می دهد، شکلهای (10.e) نیز زمانهای روشن شدن جستجوگر موشک را نشان می دهد. شکلهای (10.f) نیز زمانهای روشن شدن جستجوگر موشک را نشان می دهد. با توجه به جدول (۲) می توان درصد تاثیر کلیه عوامل ایجاد خطای را با استفاده از فرمول (۲۳) در شکل (11) مشاهده نمود. با جمع درصد تاثیر عوامل در هر زیر سیستم می توان شکل (۱۲) را (میزان اهمیت هر زیر سیستم را نشان می دهد) بدست آورد.
- ### ۵. نتیجه گیری
- در این مقاله، بر روی سهم هر یک از خطاهای سیستم کنترل آتش و میزان تاثیر هر یک از این خطاهای در پانین آوردن احتمال اصابت نهایی موشک، با استفاده از روش مونت کارلو مطالعه صورت پذیرفت. با اجرای برنامه و اعمال عوامل ایجاد خطای شکل متغیرهای تصادفی با تکرار زیاد در سناریوهای مختلف جداولی بدست آمد که این جداول طبق تعریفی که در این مقاله از فاکتور اهمیت و نیز معیار میانگین مریعات خطای شد قادر به رتبه بندی عوامل ایجاد خطای در سیستم مورد مطالعه می شود. جداول بدست آمده از این تحلیل می توانند در طراحی و انتخاب سنسورهای تشکیل دهنده یک سیستم کنترل آتش بسته به میزان دقیق مورد نیاز بکار روند. جهت بهبود سیستم کنترل آتش موجود با توجه به در اختیار داشتن درصد تاثیر خطای اندازه گیری سنسورها در احتمال اصابت نهایی موشک می توان چیدمان مناسبی از قطعات و سنسورها را برای داشتن احتمال اصابتی بیشتر از یک حد آستانه مطلوب داشت. همچنین به شکل معکوس با داشتن المانها و سنسورهای مشخص می توان احتمال اصابت نهایی را با تخمینی که از ماتریسهای  $\theta$ ,  $\Phi$  بدست می آید، مشخص نمود.
- ### ۶. مراجع
- [1] A. Karsaz and H. Khaloozadeh, "Error analysis of airborne fire control system radar via Monte Carlo Approach," 1st International Symposium of Systems and Control in Aerospace and Astronautics, IEEE-ISSCAA 2006, Korea.
- [2] A. M. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1965.

آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالو زاده

and electronic systems Vo.,29, No. 3, July 1993.

[16] J. T. Gillis, "Computation of Circular Error Probability Integral", IEEE Transaction on aerospace

جدول ۱- سناریوی پرواز موشک

پارامتر تنظیم شده	پارامتر پارامتر	پارامتر تنظیم شده	پارامتر پارامتر	پارامتر تنظیم شده	پارامتر پارامتر
سرعت وزش باد (km/h)	8.5	برد هدف (km)	48.44	ارتفاع پرواز حامل (m)	۸۰۰
جهت وزش باد (deg)	100	سمت هدف (deg)	30.00	زاویه سمت حامل (deg)	۱۷
فشار هوا (mbar)	1009	كورس هدف (deg)	13.0023	زاویه رول حامل (deg)	۳
دمای هوا (c)	32.437	سرعت هدف (km/h)	35.979	زاویه پیچ پرواز حامل (deg)	-10

جدول ۲- مقایسه و ارزیابی تأثیر منابع خطای FCS بر احتمال اصابات موشک

احتمال اصابات	فاکتور اهمیت	$\psi_m$			$T_m$			میزان خطأ	پارامتر دارای خطأ
$hp\%$	$IF_i$	$mse_{\psi_m}$	$\sigma_{\psi_m}$ (deg)	$bias_{\psi_m}$	$mse_{T_m}$	$\sigma_{T_m}$ (sec)	$bias_{T_m}$	rms <sup>۱</sup>	
.۱	سمت هدف	40.3	0.048	2.42	0.74	0.0036	1.22	1.10	0.6 deg
.۲	برد هدف	15.2	1.06	0.19	1.7	2	.038	2.6	100 m
.۳	سمت پرواز	10.3	0.01008	0.25	1.1	0.025	0.3	2.1	0.5 deg
.۴	سرعت باد	6.8	0.026	0.33	0.8	0.2096	0.23	0.85	2 m/sec
.۵	كورس هدف	6.8	0.0093	0.9	0.1423	0.0243	0.17	0.1	0.81 deg
.۶	ارتفاع پرواز	5.4	0.02	0.8	0.132	0.016	0.16	0.11	2 m
.۷	سرعت هدف	5.4	0.0116	0.72	0.08	0.1	0.1	0.09	2 m/sec
.۸	جهت باد	3.5	0.006	0.65	0.08	0.0882	0.17	0.11	2 deg
.۹	دمای هواد	2.4	0.008	0.64	0.079	0.016	0.05	0.1	2 °c
.۱۰	سرعت پرواز	2.2	0.0072	0.4	0.1	0.06	0.22	0.2	3 m/sec
.۱۱	فشار هوا	2	0.012	0.33	0.11	0.003	0.3	0.2	3 mbar

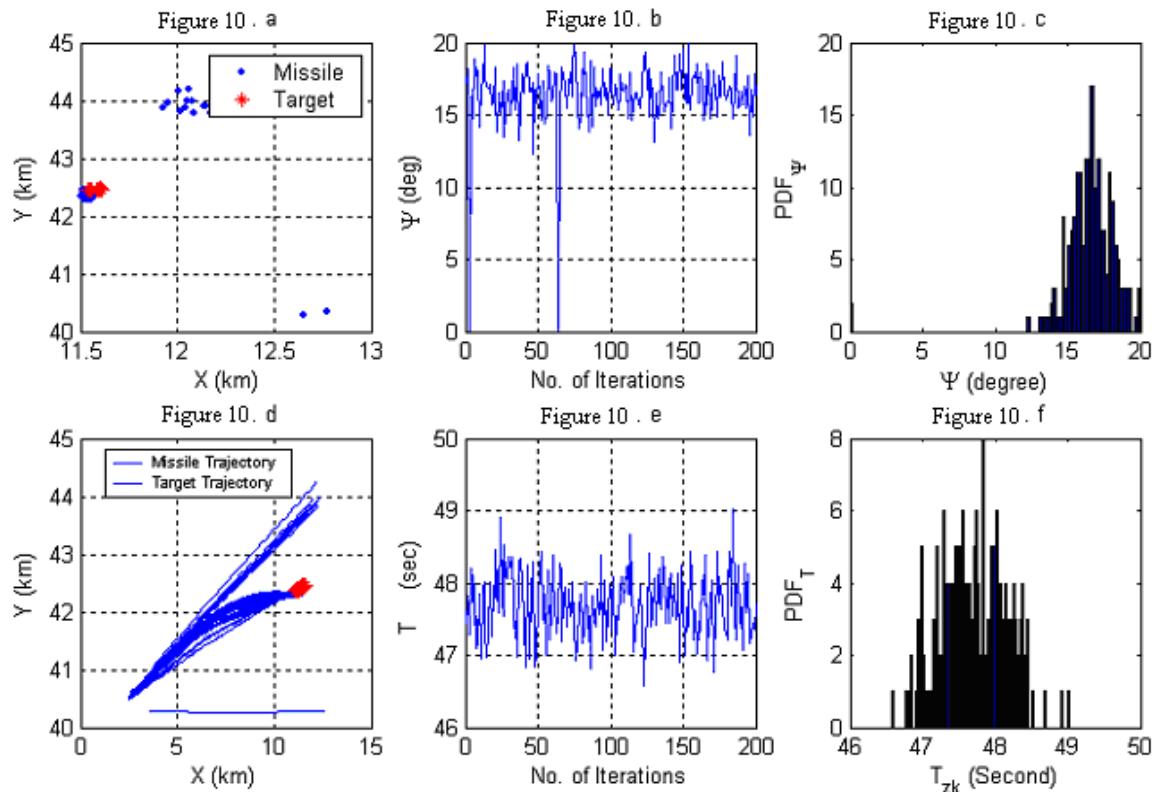
جدول ۳- سناریوهای پرواز موشک

تعداد سناریو	مقدار	
۷	30-35-40-45-50-55-60 (km)	برد هدف (R)
۳	, -13, 0, 13 (deg)	زاویه دید هدف (LOS)
۳	0-5-10 (km/h)	سرعت وزش باد

<sup>۱</sup> -Root Mean Square

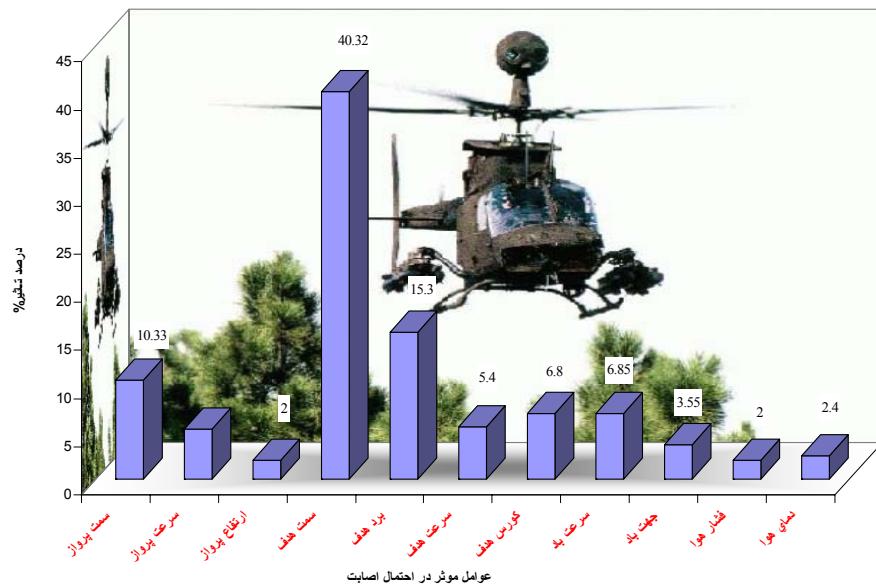
آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالو زاده

0- 45- 90 (deg)	3	جهت وزش باد	.۴
-----------------	---	-------------	----

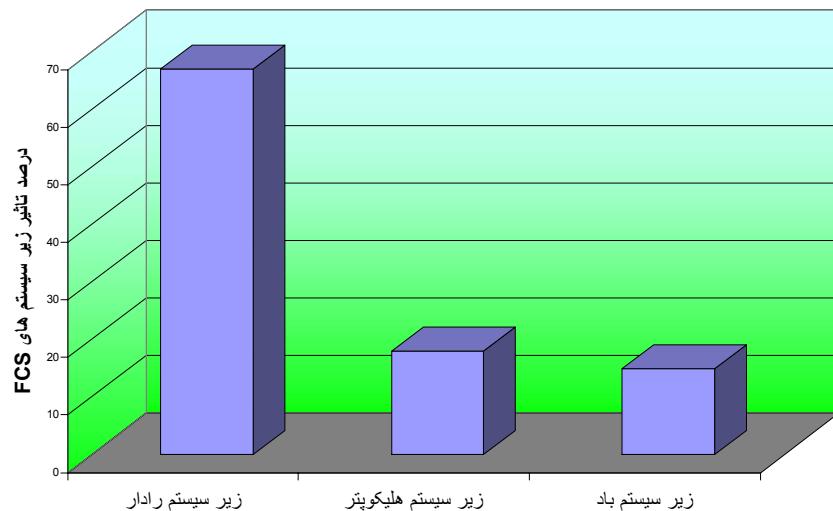


(a) محل اصابت موشک نسبت به هدف. (b,c) زوایای سمت داده شده به موشک و هیستوگرام مربوطه بازی ۲۰۰ بار شلیک تصادفی. (d) مسیرهای پرواز موشک و حرکت هدف. (e,f) زمانهای روش شدن سیکر موشک و هیستوگرام مربوطه

آنالیز خطای یک سیستم کنترل آتش، علی کارساز، حمید خالو زاده



( درصد تأثیر عوامل یا زده گانه موثر بر احتمال اصابت یک موشک خاص )



( درصد تأثیر زیر سیستمهای FCS بر احتمال اصابت یک موشک خاص )

# An Algorithm for Systematic pairing of Square and Nonsquare MIMO Plants Using Balanced Realization Interaction Measure

Alireza Fatehi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Electrical and Electronics Eng. Dept., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran,  
fatehi@kntu.ac.ir, Phone +98-912-384-4419, Fax +98-21-846-2066

**Abstract:** Balanced realization has the advantage of producing some valuable information on controllability and observability (C/O) of the plant. This specification was used in pairing of MIMO plants to some SISO subplants. Using balanced realization, the pairs with better C/O are selected. In this paper the problem of pairing based on balanced realization is interpreted as an assignment problem. Therefore the Hungarian algorithm can utilize to solve the pairing problem. The algorithm is fully systematic and may be utilized in online and adaptive pairing. The pairing algorithm is also developed to reject any undesired pair like uncontrollable and/or unobservable pairs. With some modification, it is also applied to nonsquare plants.

**Keywords:** Multivariable control systems; Decentralized control; Input-output pairing; Balanced realization; Operations research; Hungarian Algorithm.

## 1. Introduction

Decentralized control of MIMO plants by some SISO controllers is the first choice in controlling these types of plants. However selection of the best input for each output, called pairing, is rather difficult. There are many pairing methods proposed by researchers [8]. Relative gain array (RGA) [1] and its derivations like RIA [7] used the interaction effect. Another class of pairings is based on cross gramian matrix [3], [6], which emphasizes better balanced realization of each pair. In this method those pairs with better joint controllability and observability (C/O) has priority to other pairs. In above pairing methods, a kind of matrix is obtained based on some criteria of the pairing quality and then the pairs are selected to optimize some measure in that matrix, subject to some conditions. Because of large number of possible pairs and the existence of selection and validation rules, the pairing problem is solved using some human decision [8]. [3] and [6] used cross-gramian matrix of pairs for pairing. In both of them the best pairs selected one after another. The algorithm introduces good pairs for the early pairs but later pairs might be rather poor. Therefore, after the pairs are selected, one

must decide on some alternative pairing with better performance for poor pairs.

Fatehi [5] proposed an overall pairing measure and interpret the pairing problem as an assignment problem. Using this method, the selected pairs are the best overall pairing. The pairing problem can be solved by a systematic procedure called Hungarian algorithm when it is defined as an assignment problem. Therefore, the pairing problem can solve without any need of human decision.

Another important advantage of this algorithm is that undesired pairs can be automatically rejected. Selection of pairs one after another (starting from the best pair) may end to some undesired pairs. But by the overall measure and the systematic procedure explained in this paper, the undesired pairs are marked from the beginning and they are never selected in the optimal pairing. By some simple modification the algorithm can be applied to nonsquare plants, which is also introduced in this article.

The paper is organized as follows. In the next section, balanced realization pairing method is reviewed and the overall pairing measure is introduced. The assignment problem and the Hungarian algorithm for solving it, are briefly presented in section 3. The pairing problem is interpreted as assignment problem in section 4. Section 5 are on obtaining best pairing when some of the pairs are undesired. In Section 6, the algorithm is modified for non-square plants. Illustrative examples are given to show the

effectiveness of the proposed method. The results are concluded in the last section.

## 2. Balanced Realization Pairing

For a system with a state space representation  $(A, B, C, 0)$ , there are controllability and observability gramian matrix  $P$  and  $Q$  which are defined by [2]:

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (1)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \quad (2)$$

The matrix  $W_{co}$  with definition  $W_{co}^{-2} = PQ$  is known as cross gramian matrix which is independent of the system realization. This matrix is a quantitative measure of controllability and observability of the system. As the eigenvalues of  $W_{co}$  (which are HSV of the plant) increases, the controllability and observability of the system will increase. This increase may be computed by the multiplication eigenvalues of  $W_{co}$  (equal to  $\det(W_{co})$ ), sum of them (equal to  $\text{trace}(W_{co})$ ) or largest of them (equal to square of the Hankel norm of  $W_{co}$ ). For a multivariable  $n \times m$  system  $S: (A, B, C, 0)$  with subsystems  $S_{ij}: (A_{ij}, B_j, C_i, 0)$  let's call  $P_{ij}$  and  $Q_{ij}$  the controllability and observability gramian matrices of the subsystem  $S_{ij}$ . Then the matrix  $(W_{co})_{ij} = (P_{ij}Q_{ij})^{1/2}$  is a measure of controllability and observability of this subsystem.

Khaki-Sedigh and Shahmansourian [6] used the determinant of the matrix  $(W_{co})_{ij}$  and suggested the following algorithm for pairing of a MIMO system to some SISO subsystems:

i) Find the participation matrix  $\Phi = \{\varphi_{ij}\}$  where

$$\varphi_{ij} = \det((W_{co})_{ij}) \quad (3)$$

ii) Choose the largest element of  $\Phi$ , say  $\varphi_{i^* j^*}$ . Pair input  $j^*$  to output  $i^*$ .

iii) Ignore the row  $i^*$  and the column  $j^*$  and continue from the step (ii) until the pairing is completed.

Conley and Salgado [3] proposed the same algorithm but used the trace of  $W_{co}$  instead of determinant. The algorithm selects some better pairs for the early ones but the later pairs could be poor. Therefore after pairing is completed, one must recheck the pairs. If some of the pairs are poor in controllability and/or observability, one replaces it and some of the pairs with some other pairs to achieve minimum performance in all of the pairs. To solve this problem, the following overall pairing measure has been introduced [3]:

$$\psi_{P_k} = \max_{P_k} (\psi_{P_k}), \quad (4)$$

where

$$\psi_{P_k} = \sum_{p_{ij} \in P_k} \varphi_{ij}, \quad (5)$$

and  $p_{ij}$  stands for the pair  $u_j - y_i$ . Using this measure the overall pairing set is the best one although the best pair

may not be selected. The most important benefit of using (4) is that the pairing problem can be interpreted as an assignment problem [5] which is solved by Hungarian algorithm through a systematic procedure.

*Remarks:* In [3], [5] and [6]  $\Phi$  is defined as it appears in balanced realization that is  $\varphi_{ij}$  stands for pair  $u_i - y_j$ . But in this article  $\varphi_{ij}$  stands for pair  $y_i - u_j$ . This is because: 1) This notation coincides element-by-element with the transfer function matrix  $G$ . 2) We do not use the MIMO plant cross-gramian matrix. Instead we use the cross-gramian matrix of each pair. 3) It is the same as notation used in RGA which is used widely for pairing.

## 3. Hungarian Algorithm in Assignment

Hungarian Algorithm is a systematic method to solve assignment problems. The algorithm is well explained in [4] and we just review its main idea.

In assignment problem, the objective is to assign  $n$  objects  $x_i \in X$  to  $n$  other objects  $y_j \in Y$  with minimum cost. The cost of assigning  $x_i$  to  $y_j$  is  $c_{ij} \in C$ . Therefore, the problem is selection of  $n$  elements of  $C$  such that 1) there is one and only one selection in each row/column (complete assignment), 2) sum of the selected elements is the minimum. It is proved that adding a constant value to a row or column does not affect the optimal assignment. The idea of solving the assignment problem is to add some values to the rows/columns so that some zeroes appeared in the matrix but none of the elements are negative. In this case if a complete assignment consists of only the zero elements, it will be the optimal assignment. The Hungarian algorithm systematically produces zeroes and finds a complete assignment among them. To illustrate this procedure an example is solved in Appendix.

## 4. Optimal pairing

We want to find  $n$  optimal pairs  $P^*$  in the system  $S$  that maximizes the function (5). The following algorithm can find  $P^*$ :

*Algorithm 1. Step 1)* Define  $\alpha$  as

$$\alpha = \max_{i,j} \varphi_{ij} \quad (6)$$

*Step 2)* Compute the assignment matrix  $\Theta$  as

$$\Theta = \{\theta_{ij} \mid \theta_{ij} = \alpha - \varphi_{ij}\}. \quad (7)$$

It is obvious that all of the elements of  $\Theta$  are nonnegative. Maximizing the function  $\psi$  is equivalent to minimizing the function

$$\chi_{P_k} = \sum_{p_{ij} \in P_k} \theta_{ij} \quad (8)$$

*Step 3)* Problem (8) is a classical assignment problem known in the theory of operations research. Solve this problem by Hungarian algorithm.

Using the overall pairing measure (5) and *Algorithm 1* the pairing problem is solved without any need to human decision.

*Example 1.* Consider example 1 of [6]:

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+5s)^2} \begin{bmatrix} 1 & -4.19 & -25.96 \\ 6.19 & 1 & -25.96 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Using balance realization, the participation matrix  $\Phi$  is:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.0081 & 3.4964 & 3678.7 \\ 11.8915 & 0.0081 & 3687.7 \\ 0.0081 & 0.0081 & 0.0081 \end{bmatrix} \quad (10)$$

The method of [6] proposes two possible pairings

$$P_1 = (p_{13}, p_{21}, p_{32}) \text{ with } \psi_1 = 3690.6, \quad (11)$$

$$P_2 = (p_{23}, p_{12}, p_{31}) \text{ with } \psi_2 = 3681.2. \quad (12)$$

Using the above optimal pairing method, the assignment matrix  $\Theta$  is obtained as:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 3678.7 & 3676.2 & 0 \\ 3666.8 & 3678.7 & 0 \\ 3678.7 & 3678.7 & 3678.7 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Applying the Hungarian algorithm to the above matrix obtains the new matrix

$$\Theta_h = \begin{bmatrix} 11.9 & 9.4 & 0^* \\ 0^* & 11.9 & 0 \\ 0 & 0^* & 3666.8 \end{bmatrix} \quad (14)$$

which offers the optimal pairing (stared zeros)

$$P^* = (p_{13}, p_{21}, p_{32}) \text{ with } \psi = 3690.6. \quad (15)$$

*Example 2.* Consider the plant

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 11 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 12 & 12 & 11 & 10 \\ 11 & 12 & 8 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 11 & 8 & 11 & 8 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Based on the balance realization matrices, the matrix  $\Phi$  is (the elements are rounded):

$$\Phi = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.15 & 0.26 & 0.41 & 0.63 & 0.15 & 0.41 \\ 0.26 & 0.41 & 0.15 & 0.91 & 0.08 & 0.15 \\ 0.41 & 0.26 & 1.30 & 1.30 & 0.92 & 0.63 \\ 0.92 & 1.30 & 0.26 & 0.15 & 0.41 & 0.63 \\ 0.08 & 0.92 & 0.26 & 0.92 & 0.26 & 0.26 \\ 0.63 & 0.41 & 0.26 & 0.26 & 0.41 & 1.30 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Using the method of [6], there are three possible pairings

$$P_1 = (p_{11}, p_{24}, p_{33}, p_{42}, p_{55}, p_{66}) \text{ with } \psi_1 = 5.29 \times 10^3, \quad (18)$$

$$P_2 = (p_{15}, p_{21}, p_{33}, p_{42}, p_{54}, p_{66}) \text{ with } \psi_2 = 5.29 \times 10^3, \quad (19)$$

$$P_3 = (p_{13}, p_{21}, p_{34}, p_{42}, p_{55}, p_{66}) \text{ with } \psi_3 = 4.81 \times 10^3. \quad (20)$$

But, using the above optimal pairing method, the matrix  $\Theta$  is:

$$\Theta = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.15 & 1.04 & 0.89 & 0.67 & 1.15 & 0.89 \\ 1.04 & 0.89 & 1.15 & 0.38 & 1.22 & 1.15 \\ 0.89 & 1.04 & 0 & 0 & 0.38 & 0.67 \\ 0.38 & 0 & 1.04 & 1.15 & 0.89 & 0.67 \\ 1.22 & 0.38 & 1.04 & 0.38 & 1.04 & 1.04 \\ 0.67 & 0.89 & 1.04 & 1.04 & 0.89 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Applying the Hungarian algorithm to the above matrix, introduces final matrix

$$\Theta_h = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.94 & 0.37 & 0.12 & 0 & 0^* & 0.21 \\ 0.28 & 0.51 & 0.67 & 0^* & 0.36 & 0.77 \\ 0.60 & 1.13 & 0^* & 0.09 & 0 & 0.77 \\ 0^* & 0 & 0.95 & 1.15 & 0.41 & 0.67 \\ 0.45 & 0^* & 0.57 & 0 & 0.18 & 0.66 \\ 0.29 & 0.89 & 0.95 & 1.04 & 0.41 & 0^* \end{bmatrix} \quad (22)$$

and offers the optimal pairing

$$P^* = (p_{15}, p_{24}, p_{33}, p_{41}, p_{52}, p_{66}) \text{ with } \psi^* = 5.4824 \times 10^3, \quad (23)$$

which has a better overall pairing according to the measure (4).

## 5. Controllable and Observable Pairing

Controllability and observability of the pairs is important in decentralized control of MIMO plants by SISO controllers. None of the above techniques can guarantee obtaining controllable and observable pairs. Using the balance realization matrix, a pair  $S_{ij}$  is uncontrollable and/or unobservable if  $\varphi_{ij}$  is zero. In [3] and [6],  $\varphi_{ij}$  of the last assigned pairs might be zero. To avoid it, the designer shall change some of the pairs by trial and error, so that, none of the  $\varphi_{ij}$ 's are zero and the pairing performance is still acceptable.

Using the above optimal pairing it is possible to avoid uncontrollable and/or unobservable pairs automatically. For this purpose, let's consider the following lemma [5].

*Lemma 1.* Suppose matrix  $\Theta$  with definition (7) in which some of the elements are undesirable. Also suppose that there is at least one complete pairing  $P$  which does not include these undesired elements. If matrix  $\Theta'$  is derived from  $\Theta$  by adding a value

$$\beta \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} \quad (24)$$

to undesired elements of  $\Theta$ , any pairing which consists of these pairs is not optimal in  $\Theta'$ .

*Proof:* For any pairing set  $P$

$$\psi_P \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} \leq \beta. \quad (25)$$

On the other hand

$$\psi_P = n\alpha - \chi_P \quad (26)$$

where  $\alpha$  is defined in (6). Therefore

$$na - \chi_P \leq \beta \Rightarrow \chi_P \geq na - \beta \quad (27)$$

Suppose that  $p_u$  is an undesired pair. If  $p_u \in P_o$ , where  $P_o$  is a complete pairing, then adding  $\beta$  to  $\theta_{p_u}$  changes  $\chi_{P_o}$  to

$$\chi_{P_o}^m = \chi_{P_o} + \beta \Rightarrow \chi_{P_o}^m \geq na \quad (28)$$

On the other hand, for any pairing  $P$ , which does not include  $p_u$ :

$$\chi_P^m = \chi_P \leq n\theta_{\max} \quad (29)$$

where

$$\theta_{\max} = a - \varphi_{\min} \quad (30)$$

Since  $\varphi_{\min} \geq 0$ , then  $\theta_{\max} \leq a$ , that is

$$\chi_P^m = \chi_P \leq na \quad (31)$$

Therefore

$$\chi_{P_o}^m \geq \chi_P^m \quad (32)$$

It means  $P_o$  is not optimal. Therefore the pair  $p_u$  can not include into the optimal pairing set. ■

Using *Lemma 1*, *Algorithm 1* can be modified as follow to avoid selection of any uncontrollable and/or unobservable pairs.

*Algorithm 2. Step 1& 2)* Same as step 1 & 2 of *Algorithm 1*.

*Step 3)* Choose  $\beta$  from equation (24).

*Step 4)* Add  $\beta$  to any  $\theta_{ij}$  where  $\varphi_{ij}=0$ .

*Step 5)* Apply the Hungarian algorithm as step 3 of *Algorithm 1*.

The above method can be used to avoid selection of any other pairs which is not to be selected in the pairing, due to any other reasons.

*Example 3.* Consider the plant of example 2 in [6]:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+1) & s & (s+2) \\ 0 & -1 & (s+3) \\ 0 & 0 & (s+4) \end{bmatrix} \quad (33)$$

The matrix  $\Phi$  is

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.125 & 7.716 \times 10^{-4} & 0.25 \\ 0 & 1.929 \times 10^{-4} & 7.716 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0.0069 \end{bmatrix} \quad (34)$$

and therefore the assignment matrix  $\Theta$  is

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0.1250 & 0.2492 & 0 \\ 0.2500 & 0.2498 & 0.2492 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.2431 \end{bmatrix} \quad (35)$$

To avoid selection of  $p_{21}, p_{31}, p_{32}$ ,  $\beta$  must be

$$\beta \geq \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varphi_{ij} = 0.38364 \quad (36)$$

This  $\beta$  is added to the mentioned pairs of  $\Theta$ . Therefore, the modified  $\Theta$  matrix ( $\Theta'$ ), will be:

$$\Theta' = \begin{bmatrix} 0.1250 & 0.2492 & 0 \\ 0.6336 & 0.2498 & 0.2492 \\ 0.6336 & 0.6336 & 0.2431 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Using the Hungarian method:

$$\Theta_h = \begin{bmatrix} 0^* & 0 & 0 \\ 0.5081 & 0^* & 0.2486 \\ 0.2655 & 0.1413 & 0^* \end{bmatrix} \quad (38)$$

which offers the optimal controllable and observable pairing

$$P^* = (p_{11}, p_{22}, p_{33}) \text{ with } \psi = 0.1321. \quad (39)$$

*Example 4.* Consider the following plant:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 11 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 0 & 12 & 11 & 10 \\ 11 & 12 & 8 & 7 & 9 & 10 \\ 0 & 11 & 8 & 11 & 0 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \quad (40)$$

The participation matrix is

$$\Phi = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.15 & 0.26 & 0.41 & 0.63 & 0.15 & 0.41 \\ 0.26 & 0.41 & 0.15 & 0.92 & 0.08 & 0.15 \\ 0.41 & 0.26 & 0 & 1.30 & 0.92 & 0.63 \\ 0.92 & 1.30 & 0.26 & 0.15 & 0.41 & 0.63 \\ 0 & 0.92 & 0.26 & 0.92 & 0 & 0.26 \\ 0.63 & 0.41 & 0.26 & 0.26 & 0.41 & 1.30 \end{bmatrix} \quad (41)$$

which shows that the pairs  $p_{33}, p_{51}$  &  $p_{55}$  are uncontrollable and/or unobservable, as obvious from the plant transfer function (40). Using the method of [6] the optimal pairs are  $P_1 = (p_{13}, p_{21}, p_{34}, p_{42}, p_{55}, p_{66})$  which is uncontrollable and/or unobservable. To avoid this situation, one way is to change the 1st and 5th pairs and consider the pairing

$$P_2 = (p_{15}, p_{21}, p_{34}, p_{42}, p_{53}, p_{66}) \text{ with } \psi_2 = 4.5501 \times 10^3. \quad (42)$$

Using the *Algorithm 2*, the assignment matrix is:

$$\Theta = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.15 & 1.04 & 0.89 & 0.67 & 1.15 & 0.89 \\ 1.04 & 0.89 & 1.15 & 0.38 & 1.22 & 1.15 \\ 0.89 & 1.04 & 1.30 & 0 & 0.38 & 0.67 \\ 0.38 & 0 & 1.04 & 1.15 & 0.89 & 0.67 \\ 1.30 & 0.38 & 1.04 & 0.38 & 1.30 & 1.04 \\ 0.67 & 0.89 & 1.04 & 1.04 & 0.89 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

To avoid selection of the above mentioned pairs,  $\beta$  must be

$$\beta \geq \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \varphi_{ij} = 16.71 \times 10^3 \quad (44)$$

Therefore the modified assignment matrix  $\Theta^m$  is:

$$\Theta^m = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.15 & 1.04 & 0.89 & 0.67 & 1.15 & 0.89 \\ 1.04 & 0.89 & 1.15 & 0.38 & 1.22 & 1.15 \\ 0.89 & 1.04 & 18.01 & 0 & 0.38 & 0.67 \\ 0.38 & 0 & 1.04 & 1.15 & 0.89 & 0.67 \\ 18.01 & 0.38 & 1.04 & 0.38 & 18.01 & 1.04 \\ 0.67 & 0.89 & 1.04 & 1.04 & 0.89 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Appling the Hungarian algorithm, the following final matrix is obtained:

$$\Theta_h = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.54 & 0.81 & 0^* & 0.55 & 0.64 & 0.89 \\ 0.17 & 0.40 & 0 & 0^* & 0.45 & 0.89 \\ 0.40 & 0.93 & 17.24 & 0 & 0^* & 0.79 \\ 0^* & 0 & 0.38 & 1.25 & 0.61 & 0.90 \\ 17.25 & 0^* & 0 & 0.11 & 17.35 & 0.89 \\ 0.06 & 0.66 & 0.15 & 0.92 & 0.38 & 0^* \end{bmatrix} \quad (46)$$

which offers the optimal pairing

$$P^* = (p_{13}, p_{24}, p_{35}, p_{41}, p_{52}, p_{66}) \text{ with } \psi^* = 5.3665 \times 10^3. \quad (47)$$

The condition (24) for  $\beta$  is a sufficient condition and quit conservative. For example even applying the Hungarian algorithm to the matrix  $\Theta$ , i.e. for  $\beta=0$ , the same pairing is obtained, but the condition (24) guaranties avoidance of the selection of any undesired pairs.

## 6. Pairing of Nonsquare plants

Balanced realization pairing can be applied to non-square systems by some minor modification. Suppose the following nonsquare plant:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 11 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 0 & 12 & 11 & 10 \\ 11 & 12 & 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad (48)$$

The participation matrix of  $G$  using (3) is:

$$\Phi = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.15 & 0.26 & 0.41 & 0.63 & 0.15 & 0.41 \\ 0.26 & 0.41 & 0.15 & 0.92 & 0.08 & 0.15 \\ 0.41 & 0.26 & 0 & 1.30 & 0.92 & 0.63 \\ 0.92 & 1.30 & 0.26 & 0.15 & 0.41 & 0.63 \end{bmatrix} \quad (49)$$

A complete pairing for this plant consists of 4 nonzero elements which are in different rows and columns. It is obvious that there is not any selected pair in two columns. For the plant (48) it means 2 of the inputs are not used in control system when a decentralized controller is considered.

Obtaining the optimal 4 pairs from the Hungarian algorithm needs some modification in the participation matrix. The following lemma helps on computing the optimal pairing in nonsquare plants.

*Lemma 2.* Consider the  $m \times n$  nonsquare participation matrix  $\Phi$  for a plant with  $n$  input and  $m$  output where  $m < n$  ( $n < m$ ). If  $l = n - m$  rows ( $l = m - n$  columns) with equal value  $\gamma$  are added to  $\Phi$  to make the *modified participation matrix*  $\Phi^m$ , the optimal pairing of  $\Phi$  is a subspace of optimal pairing of  $\Phi^m$ .

*Proof.* We proof the lemma for  $m < n$ . The case  $n < m$  is the same. Consider  $P^m$  a complete pairing of  $\Phi^m$ . Suppose  $p_{i,j(i)} \in P^m$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  are  $n$  selected pairs. Using overall measure (5):

$$\begin{aligned} \psi^m &= \sum_{P^m} \varphi_{i,j(i)} = \sum_{i=1, \dots, n} \varphi_{i,j(i)} = \sum_{i=1, \dots, m} \varphi_{i,j(i)} + \sum_{i=m+1, \dots, n} \varphi_{i,j(i)} \\ &= \sum_{i=1, \dots, m} \varphi_{i,j(i)} + l\gamma = \psi + l\gamma \end{aligned} \quad (50)$$

$l\gamma$  is a constant. Therefore, maximizing  $\psi^m$  is equal to maximizing  $\psi$ . The elements of the  $l$  added rows are equal, i.e. selection of each of them does not affect the overall measure (5). Therefore, by omitting the  $l$  elements of rows  $m+1$  to  $n$  from the optimal pairing  $P^{m*}$  of  $\Phi^m$ , the optimal pairing  $P^*$  of  $\Phi$  is obtained. ■

By Lemma 2, the modified participation matrix for plant (48) is:

$$\Phi^m = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.15 & 0.26 & 0.41 & 0.63 & 0.15 & 0.41 \\ 0.26 & 0.41 & 0.15 & 0.92 & 0.08 & 0.15 \\ 0.41 & 0.26 & 0 & 1.30 & 0.92 & 0.63 \\ 0.92 & 1.30 & 0.26 & 0.15 & 0.41 & 0.63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

The optimal pairing selection is obtained by computing the modified assignment matrix because of undesired pair  $p_{33}$ . The final Hungarian matrix is obtained as:

$$\Theta_h = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.26 & 0.54 & 0^* & 0.44 & 0.54 & 0 \\ 0 & 0.23 & 0.11 & 0^* & 0.45 & 0.11 \\ 0.23 & 0.77 & 11.76 & 0 & 0^* & 0.01 \\ 0 & 0^* & 0.66 & 1.42 & 0.78 & 0.29 \\ 0 & 0.38 & 0 & 0.66 & 0.28 & 0 \\ 0 & 0.38 & 0 & 0.66 & 0.28 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

which offers the optimal pairing:

$$P^{m*} = \{p_{13}, p_{24}, p_{35}, p_{42}, p_{56}, p_{61}\} \text{ with } \psi^{m*} = 3.55 \times 10^3. \quad (53)$$

Therefore, the optimal pairing for the plant (48) is:

$$P^* = \{p_{13}, p_{24}, p_{35}, p_{42}\} \text{ with } \psi^* = 3.55 \times 10^3. \quad (54)$$

The matrix  $\Theta_h$  also offers another optimal pairing:

$$P^{m*} = \{p_{16}, p_{24}, p_{35}, p_{42}\} \text{ with } \psi^* = 3.55 \times 10^3. \quad (55)$$

In fact, using the Hungarian algorithm alternative optimal pairings can also be obtained by a simple procedure explained in Appendix.

## 7. Conclusion

Balanced realization pairing algorithm is modified by introducing an overall pairing measure. Using this measure the pairing problem can be interpreted as an assignment problem which can be solved by Hungarian algorithm. By some modification nonsquare pairing is also possible which is discussed in this paper.

The Hungarian algorithm for assignment problem is a systematic solution. Therefore, the above method finds the optimal selection automatically and it can be used in adaptive pairing. For this purpose, as the parameters of the plant change, the participation matrix is computed and the optimal pairing is obtained online by using it and the algorithm developed in this paper.

## Appendix A. Hungarian Algorithm

The Hungarian algorithm is well explained in [4]. Therefore in this appendix the main point of the algorithm is explained through an example.

Consider the assignment matrix

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Adding a constant value  $p$  to all of the elements of row  $i$  of  $\Theta_0$  changes the sum of the elements for all of the complete pairings by  $p$ . Therefore the optimality is not affected. It is the same for columns. Using this fact, the steps of Hungarian algorithm are as follow:

*Step 1)* The smallest value of each column of  $\Theta_0$  is subtracted from all of the elements of that column:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Then, the smallest value of each row of  $\Theta_1$  is subtracted from all of the elements of that row:

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

This ends to the matrix  $\Theta_2$  with at least one zero in each row and column.

*Step 2)* If an assignment can be obtained by selecting just zero elements of  $\Theta_2$  it is optimal for  $\Theta_2$  and therefore for the original matrix  $\Theta_0$ . For this purpose, the first 0 element of each row is selected as assigned 0 provided that there is not an assigned 0 in its column. If there is an assigned zero in that column the next 0 of that row is selected. The assigned 0 for the matrix  $\Theta_2$  are stared as follow:

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 0^* & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0^* & 0 \\ 5 & 0^* & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

The 0 in row 4 can not be selected and since there is not any other 0 in that row the assignment is not complete.

*Step 3)* Assignment is not complete and the procedure should be continued for finding more assigned zero. The first step is to check for possible interchanging of some

assigned and unassigned zeros to obtain complete assignment. The zeros in the columns that there is not any  $0^*$  are called *eligible*. In a complete optimal assignment for  $\Theta_2$ , at least one of them must be selected; provided that there is a complete assignment using only zeros.  $0(2,4)$  is the only eligible 0. A path from this 0 is considered as follow:

- 1) From unassigned zero to the assigned zero of its row,
- 2) From assigned zero to an unassigned zero of its column.

This procedure continues while it is possible to continue through zeros. For  $0(2,4)$  the path is:

$$0(2,4) \rightarrow 0^*(2,3)$$

The path stops.  $0^*(2,3)$  and row 2 are called *essential*. If the path stops in a  $0^*$  it means there is not possible to increase assigned zero by interchanging the assigned and unassigned zeros, as mentioned above. But if the path stops in an unassigned zero it means the number of 0 in the path is one more than the number of  $0^*$ . Therefore interchanging the assigned and unassigned zeros increases the number of assigned zero by one (this happens in step 7 below).

*Step 4)* Consider a line on rows of any essential  $0^*$  and columns of any nonessential  $0^*$ :

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 0^* & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0^* & 0 \\ 5 & 0^* & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

It is proven that these lines are the minimum number of lines which can cover all the zeros (in optimal assignment they are 4, the maximum needed lines). Also, none of the assigned zeros are in the intersection of lines.

*Step 5)* Consider the value of the smallest uncovered element, i.e. element  $(4,3)$ . Subtract it from all uncovered columns and add it to all covered rows:

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

This adds a new zero to the matrix and at the same time keeps all the previous  $0^*$ . Also none of the elements are negative. An optimal assignment of  $\Theta_3$  is the same as optimal assignment of  $\Theta_0$  as explained before.

*Step 6)* As step 2, the assigned zeros are:

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} 0^* & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0^* & 0 \\ 5 & 0^* & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*Step 7)* As defined in step 3,  $0(2,4)$  is again eligible. The path from this 0 is:

$$0(2,4) \rightarrow 0^*(2,3) \rightarrow 0(4,3)$$

The path stops in an unassigned zero. The total number of assigned zeros is increased by interchanging its assigned and unassigned zeros:

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} 0^* & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0^* \\ 5 & 0^* & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0^* & 3 \end{bmatrix}$$

This is a complete assignment. Therefore the optimal assignment is

$$P^* = \{(1,1), (2,4), (3,2), (4,3)\}$$

Sum of the above elements in  $\Theta_0$  is 7 which is the minimum possible value among all of the complete assignment.

## Appendix B. Other optimal pairings

In some cases there is more than one optimal pairing, i.e. there are other complete pairings using the zero elements of  $\Theta_h$ . If in the final matrix  $\Theta_h$ , it is possible to replace some of the assigned zeros with unassigned zeros such that the obtained assignment is still complete, it will be optimal too. To find other optimal assignment, if there is any, all unassigned zeros are called eligible zero and must be checked. We start from one of the eligible zeros.

*Step 1)* Consider an unassigned zero  $0_{pq}$ .

*Step 2)* Go to the assigned zero  $0_{pr}^*$  of its row.

*Step 3)* From  $0_{pr}^*$ , go to an unassigned zero  $0_{sr}$  on the column  $r$  (the column of the assigned zero).

*Step 4)* Continue from Step (2) until either it returns to the original eligible zero  $0_{pq}$  or there is not any unassigned zero for Step (3) (There is always an assigned zero for Step (2) since the original assignment is complete).

*Step 5)* If the path returns to  $0_{pq}$  then by interchanging all assigned and unassigned zero in the path a new optimal pairing is obtained. Otherwise there is not any optimal assignment consisting  $0_{pq}$ .

*Step 6)* Continue from Step (1) for other eligible zeros.

*Remark:* If there is more than one unassigned zero on Step (3) the path for all of them shall be checked.

As an example, consider the following matrix:

$$\begin{bmatrix} 0^* & 6 & 1 & 6 \\ 3 & 0^* & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0^* & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 0^* \end{bmatrix}$$

with an optimal pairing  $\{0_{11}, 0_{22}, 0_{33}, 0_{44}\}$ . There are 3 other zeros which are eligible zeros. Starting from  $0_{24}$ , the path is

$$0_{24} \rightarrow 0_{22}^* \rightarrow 0_{42} \rightarrow 0_{44}^* \rightarrow 0_{24}$$

So the pairing  $\{0_{11}, 0_{24}, 0_{33}, 0_{42}\}$  is also optimal. But starting from  $0_{34}$  the path is

$$0_{34} \rightarrow 0_{33}^*$$

Therefore  $0_{34}$  does not include to any optimal path. For eligible zero  $0_{24}$  there are two paths:

Path 1)  $0_{24} \rightarrow 0_{44}^* \rightarrow 0_{34} \rightarrow 0_{33}^*$ ,

Path 2)  $0_{34} \rightarrow 0_{44}^* \rightarrow 0_{42} \rightarrow 0_{22}^* \rightarrow 0_{24}$ .

Path (1) stops in Step (3) of the above algorithm and the path (2) introduces the same optimal pairing as above.

## References

- [1] Bristol, E.H.: ‘On a new measure of interaction for multivariable process control’, IEEE Transaction on Automatic Control, 1966, 11, pp. 133-134.
- [2] Chen, C.T.: ‘Linear System Theory and Design, 3rd ed.’, Oxford University Press, 1999.
- [3] Conley, A., and Salgado, M.E.: ‘Gramian based interaction measure’, Proc. 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000, 5020-5022.
- [4] Cooper, L., and Steinberg, D.: ‘Methods and applications of linear programming’, Saunders, 1974.
- [5] Fatehi, A: ‘Adaptive optimal controllable and observable pairing by the assignment method based on the balanced realization measure’, Proc. Control Conf., Bath University, United Kingdom, 2004.
- [6] Khaki-Sedigh, A., Shahmansourian, A.: ‘Input-output pairing using balanced realisations’, Electronics Letters, 1996, 32, (21), pp. 2027-2028.
- [7] Zhu, Z.X. (1997). Variable pairing selection based on individual and overall interaction measure. *Industrial Engineering Chemical Research*, 35, 4091-4099
- [8] Van de Wal, M., & De Jager, B. (2001). A review of methods for input/output selection,” *Automatica*, 37(4), 487-510